

Toegepaste sterkteleer

Citation for published version (APA):

de Vree, J. H. P. (1979). *Toegepaste sterkteleer: vraagstukken met antwoorden*. (Methode der eindige elementen : fundamenten; Vol. V3). Technische Hogeschool Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1979

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

Toegepaste Sterkteleer

Vraagstukken met antwoorden

Onderdeel van de P.a.t.o.-cursus:

Methode der eindige elementen - fundamentelementen -

Ir. J.H.P. de Vree

Vakgroep Technische Mechanica

Afdeling der Werktuigbouwkunde

Technische Hogeschool Eindhoven

Voorjaar 1979

Code V.3

Inleiding

Om de vraagstukken uit deze vraagstukkenbundel te kunnen maken
behoeft u niet de gehele Syllabus S.3 te bestuderen. De daarin
beschreven onderwerpen voeren verder dan in deze cursus nood-
zakelijk is. *Of: sommige onderwerpen komen in deze cursus niet aan de orde?*

Van hoofdstuk 2 (driedimensionale balkentheorie) zijn van belang
blz. 2.1 t/m 2.12.

2.13 t/m 2.24 wordt bekend verondersteld (het bepalen van hoofd-
traagheidsassen- en momenten etc.).

2.24 t/m 2.59 kunt u overslaan omdat we in deze cursus geen aan-
dacht zullen besteden aan welving van de dwarsdoorsnede van een
balk bij wringing en het bepalen van het zg. dwarskrachtenmiddel-
punt. Dit betekent dat we ons m.b.t. wringing beperken tot wringing
van balken met cirkelvormige dwarsdoorsnede.

Tenslotte is bij deze theorie van belang blz. 2.60 t/m 2.65.

Bij de beperking tot wringing van balken met cirkelvormige
dwarsdoorsnede kunnen we echter de relaties in blz. 2.1 t/m 2.12
en blz. 2.60 t/m 2.65 eenvoudiger opschrijven.

Een samenvatting hiervan is het volgende:

De hypothesen betreffende het verplaatsingsveld (formules 2.1 t/m
2.3) worden nu: $\xi = 0, \gamma_c = z_c = 0$

$$u(x,y,z) = u_0(x) - \frac{dv_0}{dx} y - \frac{dw_0}{dx} z \quad (2.1^*)$$

$$v(x,y,z) = v_0(x) - \eta(x) \cdot z \quad (2.2^*)$$

$$w(x,y,z) = \underbrace{w_0(x)}_{\text{trek/druk + buiging}} + \underbrace{\eta(x) \cdot y}_{\text{wringing}} \quad (2.3^*)$$

trek/druk + buiging wringing

De rekken $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ luiden nu

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du_0}{dx} - \frac{d^2v_0}{dx^2} y - \frac{d^2w_0}{dx^2} z \\ \epsilon_{xy} &= \epsilon_{yx} = -\frac{1}{2} \frac{d\eta}{dx} \cdot z \quad ; \quad \epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} = \frac{1}{2} \frac{d\eta}{dx} \cdot y \\ \epsilon_{yy} &= \epsilon_{zz} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} = 0 \end{aligned} \right\} (24^*)$$

De Elastische energie $U = \int_V \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \sigma_{ij} dV$ wordt met $\int_A y dA =$

$\int_A z dA = \int_A yz dA = 0$. (d.w.z. y en z-as langs de hoofdtraagheids-assen).

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ E \left[A \left(\frac{du_0}{dx} \right)^2 + I_{zz} \left(\frac{d^2v_0}{dx^2} \right)^2 + I_{yy} \left(\frac{d^2w_0}{dx^2} \right)^2 \right] + G J \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right\} dx \quad (2.11^*)$$

$$\text{met } I_{zz} = \int_A y^2 dA \quad ; \quad I_{yy} = \int_A z^2 dA \quad ; \quad J = \int_A (y^2 + z^2) dA$$

E = elasticiteitsmodulus

G = glijdingsmodulus

A = Oppervlak van de dwarsdoorsnede

Met de definities volgens blz. 2.7 en 2.8 vinden we voor de potentiaal van de uitwendige belasting Ω vinden we dan (axiaal bimoment = 0):

$$\begin{aligned} & -\{P_{x0} u_0(0) + P_{xl} u_0(l) + \int_{x=0}^l [K_x u_0] dx\} + \\ & -\{P_{y0} v_0(0) + P_{yl} v_0(l) + \int_{x=0}^l [K_y v_0 + M_z \cdot \frac{dv_0}{dx}] dx + \\ & + M_{z0} \left(\frac{dv_0}{dx} \right)_{x=0} + M_{zl} \left(\frac{dv_0}{dx} \right)_{x=l} \} + \\ & -\{P_{z0} w_0(0) + P_{zl} w_0(l) + \int_{x=0}^l [K_z w_0 - M_y \frac{dw_0}{dx}] dx + \end{aligned}$$

$$-M_{y0} \left(\frac{dw_0}{dx} \right)_{x=0} - M_{y\ell} \left(\frac{dw_0}{dx} \right)_{x=\ell} \} +$$

$$\left(M_{x0} \eta(0) + M_{x\ell} \eta(\ell) + \int_{x=0}^{\ell} [M_x \eta] dx \right) \quad (2.23^*)$$

✓ Abholade
vergehen.

Variatie van $V = U + \Omega$ levert 4 Euler-vergelijkingen met natuurlijke randvoorwaarden die in formule 2.86 vermeld staan, en met $\xi = I_{\xi\xi} = B_0 = B_\ell = B = 0$ (geen welving) hebben deze 4 differentiaalvergelijkingen met natuurlijke (dynamische) randvoorwaarden de volgende vorm:

$$\begin{array}{l}
 \text{I} \left\{ \begin{array}{l}
 EA \frac{d^2 u_0}{dx^2} + K_x = 0 \quad \text{voor } 0 \leq x \leq \ell \\
 EA \left(\frac{du_0}{dx} \right)_{x=0} + P_{x0} = 0 \quad ; \quad EA \left(\frac{du_0}{dx} \right)_{x=\ell} - P_{x\ell} = 0
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{II} \left\{ \begin{array}{l}
 EI_{zz} \frac{d^4 v_0}{dx^4} - K_y + \frac{dM_z}{dx} = 0 \quad \text{voor } 0 \leq x \leq \ell \\
 EI_{zz} \left(\frac{d^3 v_0}{dx^3} \right)_{x=0} - P_{y0} + M_z(x=0) = 0 \\
 EI_{zz} \left(\frac{d^3 v_0}{dx^3} \right)_{x=\ell} + P_{y\ell} + M_z(x=\ell) = 0 \\
 EI_{zz} \left(\frac{d^2 v_0}{dx^2} \right)_{x=0} + M_{z0} = 0 \\
 EI_{zz} \left(\frac{d^2 v_0}{dx^2} \right)_{x=\ell} - M_{z\ell} = 0
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{III} \left\{ \begin{array}{l}
 EI_{yy} \frac{d^4 w_0}{dx^4} - K_z - \frac{dM_y}{dx} = 0 \quad \text{voor } 0 \leq x \leq \ell \\
 EI_{yy} \left(\frac{d^3 w_0}{dx^3} \right)_{x=0} - P_{z0} - M_y(x=0) = 0 \\
 EI_{yy} \left(\frac{d^3 w_0}{dx^3} \right)_{x=\ell} + P_{z\ell} - M_y(x=\ell) = 0
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

✓

$$\left\{ \begin{array}{l} EI_{yy} \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)_{x=0} - M_{y0} = 0 \\ EI_{yy} \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)_{x=l} - M_{yl} = 0 \end{array} \right. \quad (2.86^*)$$

$$IV \left\{ \begin{array}{l} GJ \frac{d^2 \eta}{dx^2} + M_x = 0 \quad \text{voor } 0 \leq x \leq l \\ GJ \left(\frac{d\eta}{dx} \right)_{x=0} + M_{x0} = 0 \quad ; \quad GJ \left(\frac{d\eta}{dx} \right)_{x=l} - M_{xl} = 0 \end{array} \right.$$

De bovenstaande vergelijkingen kunnen geïnterpreteerd worden als de evenwichtsvergelijkingen voor (een gedeelte van) de balk, zie 2.87 op blz. 2.65 van S.3.

Met bovenstaande vergelijkingen kunnen de verplaatsingen u_0 , v_0 , w_0 en η van een cilindrische balk die op de op blz. 2.1 van S.3 afgesproken wijze is belast, bepaald worden.

Met de hypothesen over het verplaatsingsveld kunnen vervolgens voor ieder punt van de balk de verplaatsingsgrootheden: $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ en $w(x,y,z)$ bepaald worden.

Voor niet cilindrische balken verloopt het variatieproces anders omdat dan A , I_{yy} , I_{zz} en J functies van x zijn.

We krijgen dan ook een ander stelsel differentiaalvergelijkingen. In deze bundel zijn enige voorbeelden in de vraagstukken opgenomen.

Uit de verplaatsingen kunnen op de bekende manier de rekken en de spanningen berekend worden (zie blz. 2.77 van S.3).

De hypothesen over het verplaatsingsveld van de balk impliceren dat de doorsnede van een balk niet vervormt en loodrecht op de balkas blijft. Dit betekent dat de elastische arbeid t.g.v. de afschuiving door de dwarskracht verwaarloosd is.

De schuifspanningen in de dwarsdoorsneden t.g.v. de dwarskrachten worden daarom via het principe van minimale potentiële energie niet berekend.

Aanvullende spanningsberekeningen voor de bepaling van de schuifspanningen t.g.v. de dwarskracht staan opgenomen in hoofdstuk 3 van S.3 maar deze stof valt buiten het bestek van deze cursus. Voor "slanke" balken is de bijdrage in de Elastische energie t.g.v. afschuiving van de dwarsdoorsneden meestal te verwaarlozen. De berekening hiervan en de Stelling van Castigliano welke in hoofdstuk 4 van S.3 beschreven staan kunt u ook overslaan.

Van de vlakspanningstheorie en de vlakke rek theorie (ook wel vlakvervormingstheorie genaamd) zijn de aannamen over het verplaatsingsveld van belang.

Deze staan beschreven op blz. 5.1 t/m 5.13 van S.3.

De verdere werkwijze via het principe van minimale potentiële energie staat beschreven op blz. 5.30 t/m 5.33 van S.3.

Van de plaatbuigingstheorie tenslotte staan de aannamen over het verplaatsingsveld en de werkwijze via het principe van minimale potentiële energie vermeld op blz. 6.1 t/m 6.24.

De theorie van de Rotatie-symmetrisch belaste cirkelcilinders in hoofdstuk 7 komt in deze cursus niet aan de orde.

Samenvatting

Bestuderen blz. ✓2.1 t/m 2.12 (vereenvoudigd)

✓2.60 t/m 2.65 + 2.77

✓5.1 t/m 5.13

✓5.30 t/m 5.33

✓6.1 t/m 6.24

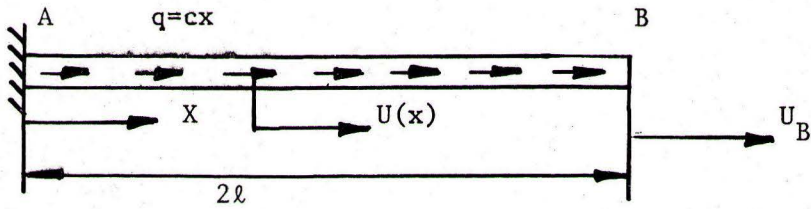
Interessant voor de elementenmethode zijn blz. 2.74 t/m 2.76 waarin de afleiding van de stijfheidsmatrix van een driedimensionale balk beschreven is.

Als oefening kunt u zelf een aantal vraagstukken uit deze bundel kiezen.

Geadviseerd wordt de vraagstukken 1, 2, 3, 4, 5, 11 en 12 in ieder geval te maken.

In de bespreking zal de nadruk liggen op het berekenen van benaderingsoplossingen.

1.



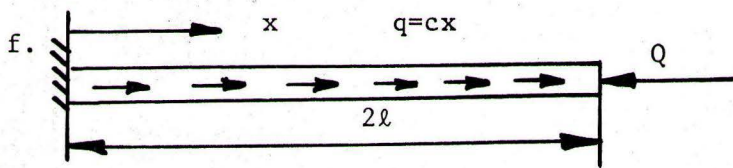
Een staaf AB met constante dwarsdoorsnede is bij $x = 0$ ingeklemd en wordt belast door een van x afhankelijke verdeelde belasting $q = cx$, c is constant. De tijd speelt in dit probleem geen rol. Voor de bepaling van het verplaatsingsveld wordt gezocht naar een benaderingsoplossing door gebruik te maken van het principe van de minimale potentiële energie.

- Bepaal de uitdrukking voor de potentiële energie functionaal Π .
- Bepaal de uitdrukking voor $\delta\Pi = 0$.
- Ga uit van de klasse functies $u = a_0 + a_1 x^2$. Bepaal a_0 en a_1 zodanig dat de "beste" benadering uit genoemde klasse genomen wordt.
- Bereken de daarbij behorende verplaatsing u_B van B.
- Splitst het gebied, $0 \leq x \leq 2\ell$, in twee delen van gelijke lengte en ga voor elk gebied uit van een klasse van lineaire functies:

$$u_1 = a_0 + a_1 x \quad 0 \leq x \leq \ell$$

$$u_2 = a_2 + a_3 x \quad \ell \leq x \leq 2\ell$$

Aan welke eisen moeten de constanten a_0 , a_1 , a_2 en a_3 voldoen opdat het verplaatsingsveld kinematisch toelaatbaar is voor het gehele gebied $0 \leq x \leq 2\ell$?

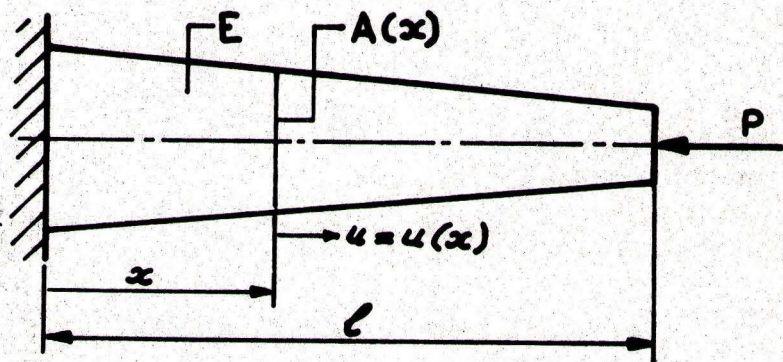


Als de belasting op de staaf uitgebreid wordt met een kracht Q (zie fig.) in B, hoe luidt dan de functionaaluitdrukking $\delta\Pi$, die dienst kan doen bij het construeren van benaderingen?

2. Gegeven is een staaf met in onbelaste toestand een lengte l en een lineair verlopende oppervlakte van de dwarsdoorsnede:

$$A(x) = A_0 \cdot \left(1 - \frac{x}{2l}\right)$$

Het materiaalgedrag is lineair elastisch, de elasticiteitsmodulus is E . Het linkerruiteinde van de staaf is ingeklemd en het rechteruiteinde wordt belast met een constante kracht P in negatieve x -richting.



De verplaatsing van de dwarsdoorsnede van de staaf ten opzichte van de onbelaste toestand geven we aan met $u = u(x)$. Bepaling van $u = u(x)$ staat centraal. Er geldt: $u(0) = 0$ (kinematische randvoorwaarde).

C^k : de verzameling van alle continue functies van x die voor $x=0$ gelijk aan nul zijn.

Met een variatieformulering kan dit probleem als volgt beschreven worden:

De functie $u = u(x)$ uit de verzameling C^k waarvoor geldt dat $\delta\Pi = 0$, voor alle variaties δu met $(u + \delta u) \in C^k$, vormt de exacte oplossing van het bovenstaande probleem.

Gevraagd wordt:

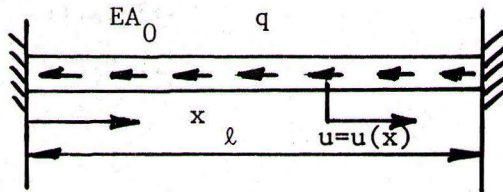
- Leidt uit de gegeven probleemformulering de differentiaalvergelijking af die voor $u(x)$ moet gelden;
- Bepaal de exacte oplossing voor $u = u(x)$;
- Gebruik de variatieformulering om voor het probleem een benaderingsoplossing $\hat{u} = \hat{u}(x)$ te bepalen wanneer die benaderingsoplossing gezocht wordt in de deelverzameling van C^k die alle functies bevat die lineair zijn in x ;

d. Maak een grafiek waarin de exacte- en de benaderingsoplossing als functie van x zijn weergegeven.

3. Gegeven is een staaf met in onbelaste toestand een lengte ℓ_0 en een oppervlakte dwarsdoorsnede A_0 . Het materiaalgedrag is lineair elastisch, de elasticiteitsmodulus is E .

De staaf is aan de beide uiteinden ingeklemd.

Op de staaf werkt verder een constante verdeelde belasting q in axiale richting. We beschouwen de situatie dat de staaf in rust is.



De verplaatsing van de dwarsdoorsnede van de staaf ten opzichte van de onbelaste toestand geven we aan met $u = u(x)$. Bepaling van $u(x)$ staat centraal.

Er geldt: $u(0) = u(\ell) = 0$ (kinematische randvoorwaarden).

De potentiële energie functionaal is Π .

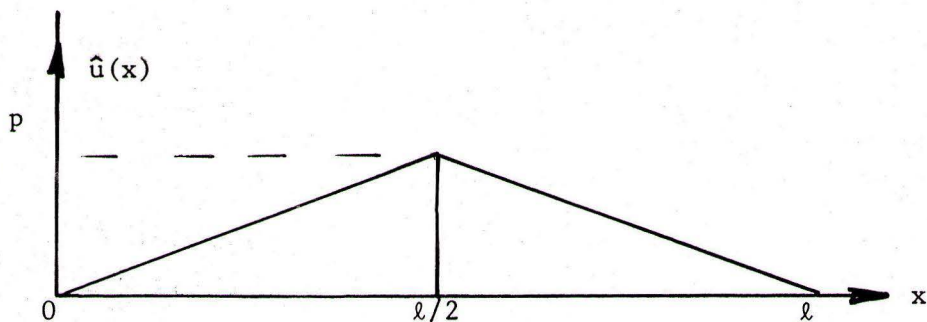
C_k : de verzameling van alle continue functies van x die voldoen aan de kinematische randvoorwaarden.

Met een variatieformulering kan dit probleem als volgt beschreven worden:

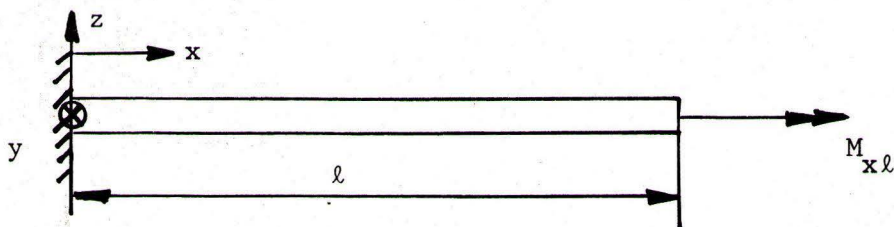
De functie $u = u(x)$ uit de verzameling C_k waarvoor geldt dat $\delta\Pi = 0$ voor alle variaties δu met $(\delta u + u) \in C_k$ vormt de exacte oplossing van het bovenstaand probleem.

- Leid uit de gegeven probleemformulering de differentiaalvergelijking af die voor $u(x)$ moet gelden.
- Laat zien dat deze differentiaalvergelijking geïnterpreteerd kan worden als de evenwichtsvergelijking geldig voor een infinitesimaal stukje uit de staaf.

- c. Bepaal de exacte oplossing voor $u = u(x)$.
- d. Gebruik de variatieformulering om voor het probleem een benaderingsoplossing $\hat{u} = \hat{u}(x)$ te bepalen wanneer die benaderingsoplossing gezocht wordt in een deelverzameling \bar{C}_k van C_k bestaande uit functies die stuksgewijze lineair zijn op de intervallen $0 \leq x \leq \ell/2$ en $\ell/2 \leq x \leq \ell$: bepaal p . (de waarde van \hat{u} voor $x = \ell/2$)



4.



Een balk ter lengte ℓ met cirkelvormige dwarsdoorsnede wordt aan het rechteruiteinde belast met een wringend moment M_{xl} .

Voor de balk gelden de aannamen voor het verplaatsingsveld:

$$u = 0$$

$$v(x,y,z) = v_0(x) - \eta(x) \cdot z$$

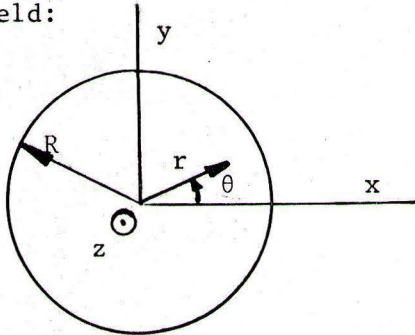
$$w(x,y,z) = w_0(x) + \eta(x) \cdot y$$

Gegeven oplossing is alleen mogelijk als $v_0(x) = w_0(x) = 0$

Met $\eta(x)$ is de hoekverdraaiing als functie van de axiale coördinaat x .

- a. Bepaal de potentiële energie van deze balk bij deze belasting.
- b. Bepaal de differentiaalvergelijking voor de hoekverdraaiing door minimalisering van de potentiële energie functionaal en de natuurlijke randvoorwaarde.
- c. Bepaal η als functie van x .
(Zie S.3 blz. 2.5 t/m 2.7).

5. Voor rotatie-symmetrische in hun vlak belaste platen met constante dikte t gelden de volgende veronderstellingen over het verplaatsingsveld:



1. De verplaatsingen zijn geen functie van θ .
2. Elk recht lijntje loodrecht op het middenvlak blijft na vervorming recht en loodrecht op het middenvlak terwijl punten in het middenvlak geen verplaatsing in de z -richting ondergaan.

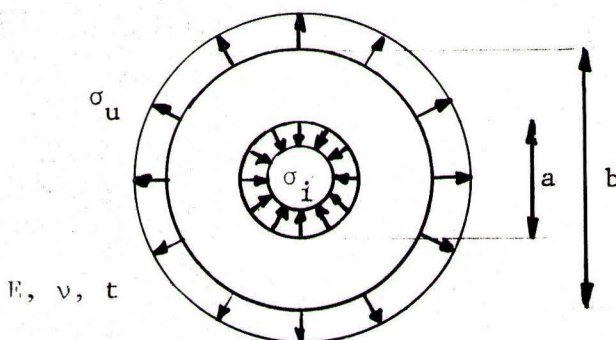
Voor de spanningen wordt verder aangenomen dat $\sigma_{zz} = \tau_{rz} = \tau_{tz} = 0$.

Er bestaan dus 2 verplaatsingen $u_r = u_r(r)$ en $u_z = u_z(r)$. $u_t = 0$ (symmetrie)
 u_r is de radiale verplaatsing en u_z is een verplaatsing in de z -richting.

Voor de rekken geldt dan (zie Appendix 1 in S.3) $\epsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr}$;
 $\epsilon_{tt} = \frac{u_r}{r}$; $\epsilon_{zz} = \frac{du_z}{dz}$; $\epsilon_{rt} = 0$.

En met de wet van Hooke geldt tevens $\epsilon_{rz} = \epsilon_{tz} = 0$.

- a. Stel de potentiële energie functionaal V voor het volgende probleem op



Randvoorwaarden:

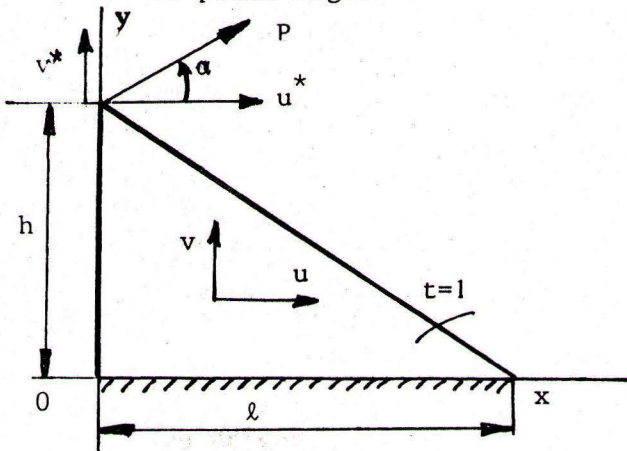
$$\sigma_{rr}(r=a) = \sigma_i$$

$$\sigma_{rr}(r=b) = \sigma_u$$

dikte van de schijf t .

b. Bepaal de formulering $\delta V = 0$ en leid hieruit de differentiaalvergelijking voor u_r en de natuurlijke randvoorwaarden af.

6. Een driehoekige plaat met dikte t is aan de basis ingeklemd en in de top belast met een kracht P waarvan de werklijn in het vlak van de plaat ligt.



Neem aan dat de verplaatsingen $u(x,y)$ en $v(x,y)$ lineaire functies van x en y zijn:

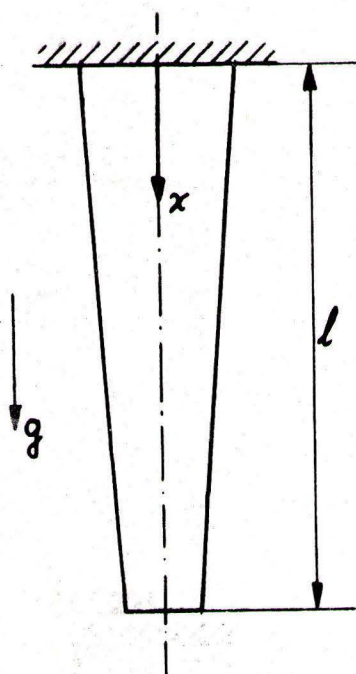
$$u = a_1 + a_2x + a_3y$$

$$v = b_1 + b_2x + b_3y$$

Bepaal met het principe van minimale potentiële energie de beste benadering voor het verplaatsingsveld.

Hoe groot zijn de verplaatsingen van de top van de driehoek u^* en v^* ?

7.



Een elastische taps staaf is bij $x = 0$ verticaal opgehangen en wordt belast door zijn eigen gewicht. De lengte in onbelaste toestand is l , de elasticiteitsmodulus E , de massa per volume-eenheid ρ en de versnelling van de zwaartekracht g . De tapsheid is zo gering, dat een lijnspanningstoestand verondersteld mag worden. Voor het oppervlak $A(x)$ van een dwarsdoorsnede ter plaatse x geldt:

$$A(x) = A(0) \left(1 - \frac{x}{2l}\right).$$

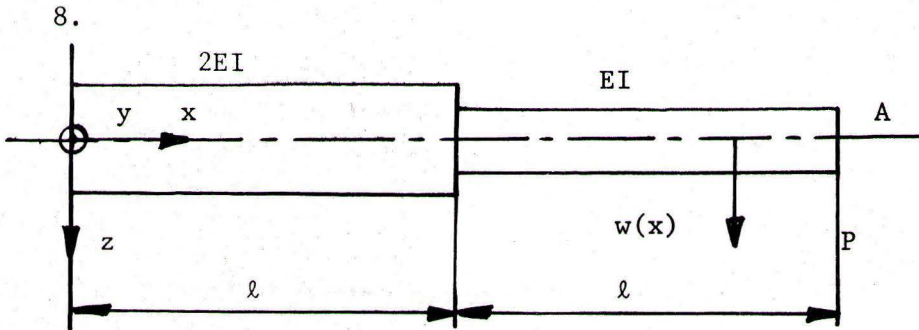
De axiale verplaatsing is $u(x)$. De rekken zijn zo gering dat de lineaire elasticiteitstheorie gebruikt mag worden.

- Formuleer de potentiële energie functionaal en definieer het kinematisch toelaatbaar stelsel.
- Leidt hiermee de in de axiale spanning t_{xx} uitgedrukte lokale evenwichtsrelatie af.
- Hoe luidt de in $u(x)$ uitgedrukte Euler-Lagrange-vergelijking en de natuurlijke randvoorwaarde.
- Benader $u(x)$ met de functie

$$u(x) = bx$$

en bepaal met de methode van Ritz de waarde van b .

- Geef een uitdrukking voor de bij deze benadering behorende spanning t_{xx} welke consistent is met het variatieprincipe.



Gegeven de in de figuur getekende, bij $x = 0$ ingeklemde balk met verspringende dikte. Onder invloed van de kracht P ter plaatse $x = 2\ell$ vervormt de balk in het vlak van tekening. De relevante buigstijfheden zijn EI en $2EI$ (zie figuur).

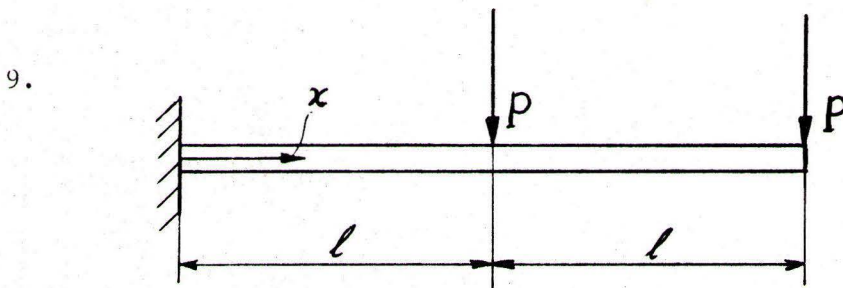
Geef de benaderde zakking van punt A met het principe van de minimale potentiële energie bij een aangenomen zakkingsfunctie:

$$w = a + bx + cx^2,$$

welke geldt voor het gehele gebied $[0, 2\ell]$.

Schets in een figuur het verloop van de momentenlijn.

Wat valt hierbij op?



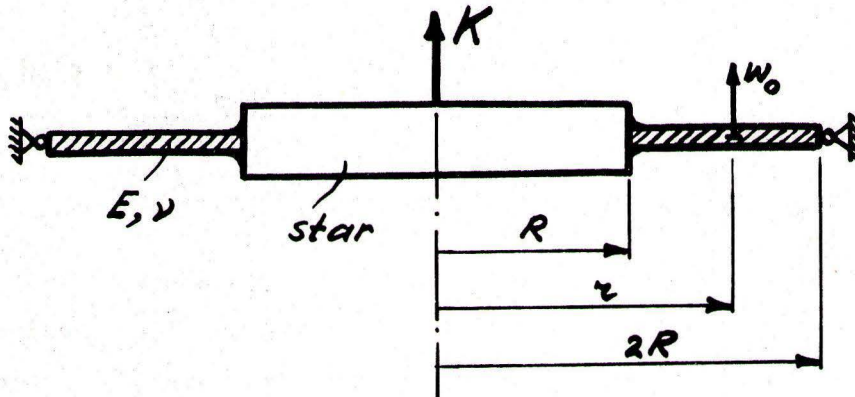
Een ingeklemde balk met constante buigstijfheid EI wordt belast door twee even grote krachten P (zie figuur). Onder invloed van deze belasting vervormt de balk in het vlak van de tekening.

Bereken de doorbuiging van het rechteruiteinde van de balk met de methode Ritz bij een veronderstelde doorbuigingsvorm

$$w(x) = a(1 - \cos \frac{\pi x}{4l}).$$

Schets in een grafiek het verloop van het buigend moment dat consistent is met het variatieprincipe.

10. Gegeven is een cirkelvormige vlakke plaat: binnenstraal R , buitenstraal $2R$, dikte t , $t \ll R$. Aan de binnenzijde is de plaat volledig verbonden aan een starre kern met straal R ; langs de buitenzijde is de plaat opgelegd. In het midden van de starre kern werkt een verticale kracht K . In de volgende figuur is de omschreven situatie in beeld gebracht.



- a. Als we voor de gegeven situatie (op basis van het principe van minimale potentiële energie) een benaderingsoplossing voor de verplaatsing w_0 ($w_0 = w_0(r)$, $R \leq r \leq 2R$) van het middenvlak van de plaat willen bepalen moeten we w_0 kiezen uit een klasse van functies zodanig dat aan de kinematische randvoorwaarden is voldaan. Welke deelverzameling uit de klasse van 2e-grads polynomen:

$$w_0 = C_1 + C_2 r + C_3 r^2, \quad R \leq r \leq 2R$$

C_1, C_2, C_3 : constant

is geschikt als uitgangspunt voor de bepaling van een benaderingsoplossing?

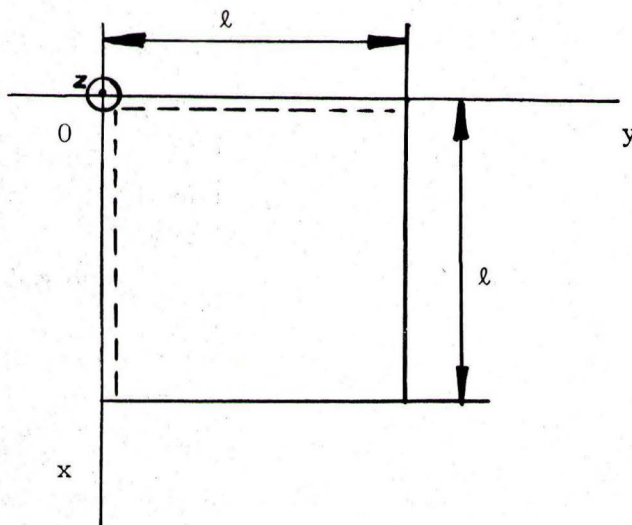
b. Bepaal uit die deelverzameling de "beste" benaderingsoplossing voor w_0 .

11. De vierkante plaat volgens onderstaande figuur is belast met een verdeelde belasting per oppervlakte-eenheid q in negatieve z -richting. De plaat is aan twee zijden opgelegd zoals in de figuur is weergegeven (op de randen $x=0$, en $y=0$).

a. Bepaal een benadering voor de verplaatsingen van de punten van het middenvlak als functie van de coördinaten door te kiezen uit de klasse van functies $w_0 = \alpha xy$.
Bereken hieruit de spanningsverdeling in de plaat.

b. Idem door te kiezen uit de klasse van functies: $w_0 = \alpha_1 xy + \alpha_2(xy^2 + yx^2)$.

c. Beantwoord dezelfde vragen als de belasting bestaat uit een puntkracht P in negatieve z -richting die aangrijpt in het punt $x = \ell, y = \ell, z = 0$.



12. De cirkelvormige schijf met lineair dikteverloop volgens onderstaande figuur wordt aan de buitenrand belast met een spanning σ_b .

σ_b .

De binnenrand is onbelast.

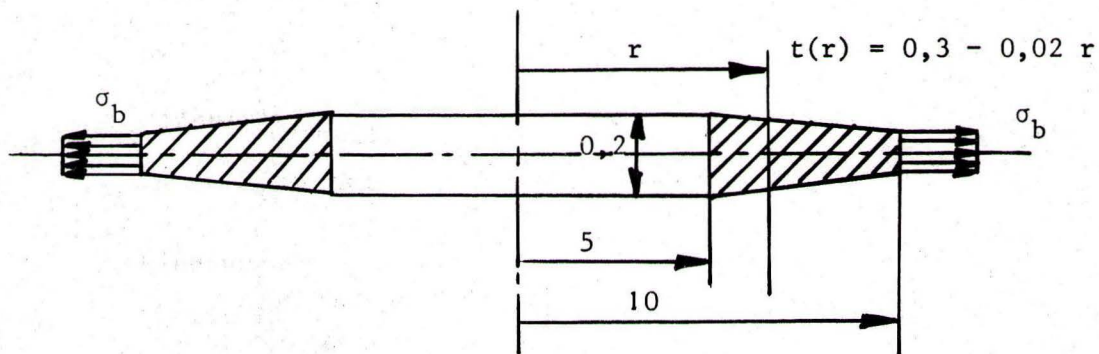
De straal van de binnenrand is a .

De straal van de buitenrand is b .

De dikte is een functie van de straal r : $t(r) = t_0 - \beta r$.

De schijf mag overal als dun beschouwd worden.

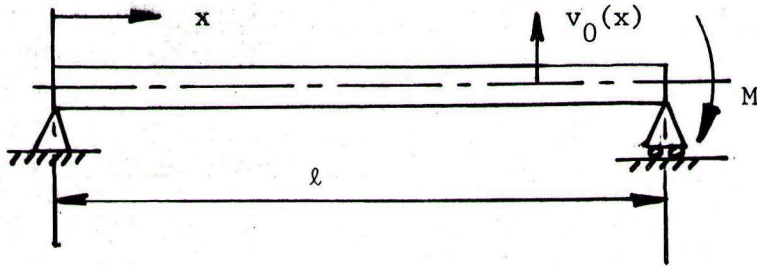
Neem $a = 5$ cm; $b = 10$ cm; $t_0 = 0,3$ cm; $\beta = 0,02$; $\nu = 1/3$.



Bepaal met behulp van het principe van minimale potentiële energie een benaderingsoplossing voor het verplaatsingsveld en de spanningen in de schijf.

Kies voor de benadering uit de klasse van functies $u_r = \alpha_1 r + \frac{\alpha_2}{r}$.

13. De balk in onderstaande tekening heeft een stijfheid $EI(x) = EI_0 \left(1 + \frac{x}{\ell}\right)$

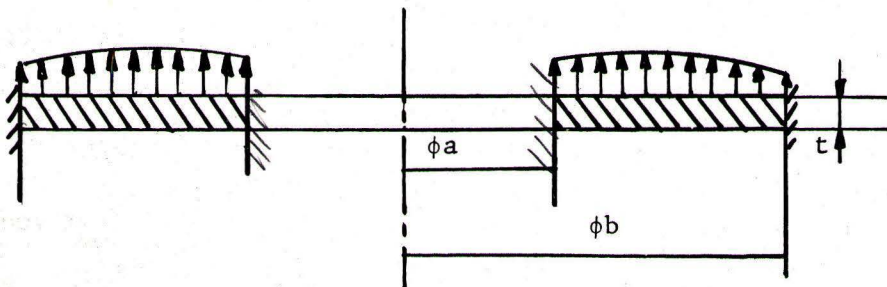


Op het rechteruiteinde werkt een buigend moment M .

- Hoe luidt de potentiële energie functionaal V ?
- Leidt de differentiaalvergelijking voor de verplaatsing $v_0(x)$ af.
- Hoe luiden de natuurlijke randvoorwaarden?
- Bepaal een benaderingsoplossing door als benaderingsfunctie een kwadratische functie te kiezen.

N.B. v_0 is de verplaatsing van de neutrale lijn.

14.

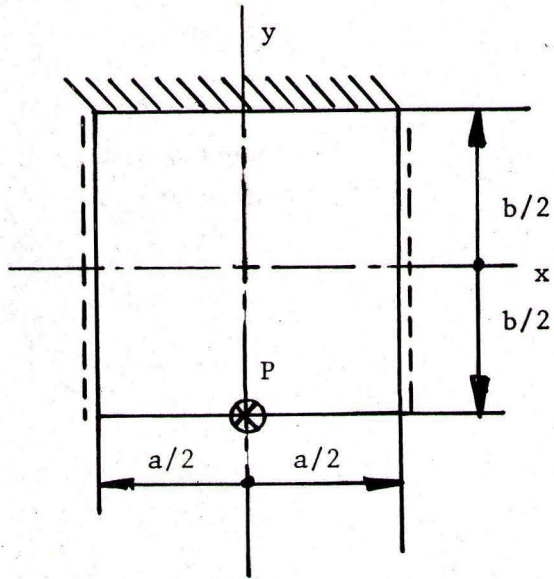


Blijft het antwoord is de schijf ook op $r=a$ ingeklemd!

De getekende rotatie symmetrische plaat is loodrecht op zijn vlak belast.

Kies een handige benaderingsfunctie voor het bepalen van een benaderingsoplossing met het principe van minimale potentiële energie.

15.



Bovenstaande rechthoekige plaat met dikte t is op de randen $x = \pm a/2$ opgelegd en op de rand $y = b/2$ ingeklemd.

In het punt $(0, -b/2)$ is de plaat belast met een kracht P loodrecht op de plaat.

Kies een handige benaderingsfunctie voor het bepalen van een benaderingsoplossing met het principe van minimale potentiële energie.

Antwoorden

✓ 1. a. $\Pi = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{2\ell} EA \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx - \int_0^{2\ell} cx u dx$

✓ b. $\delta\Pi = \int_{x=0}^{2\ell} EA \frac{du}{dx} \delta \frac{du}{dx} dx - \int_0^{2\ell} cx \delta u dx = 0$

c. $u = 0$ voor $x = 0 \rightarrow a_0 = 0$

$u = a_1 x^2 \rightarrow u' = 2xa_1 ; \delta u = x^2 \cdot \delta a_1 ; \delta u' = 2x \cdot \delta a_1$

✓ $\delta\Pi = \int_{x=0}^{2\ell} \{EA \cdot 2x \cdot a_1 \delta a_1 - cx \cdot x^2 \delta a_1\} dx \rightarrow a_1 = \frac{3}{8} \frac{Cl}{EA}$

d. $u_B = \frac{3}{2} \frac{Cl^3}{EA}$ want $u(x) = \frac{3}{8} \frac{Clx^2}{AE}$

e.
$$\left. \begin{aligned} u_1 &= a_0 + a_1 x \\ u_2 &= a_2 + a_3 x \end{aligned} \right\} \begin{aligned} u &= 0 \text{ voor } x = 0 \rightarrow a_0 = 0 \\ u_1 &= u_2 \text{ voor } x = \ell \rightarrow a_1 \ell = a_2 + a_3 \ell \end{aligned}$$

f. $\delta\Pi = \int_{x=0}^{2\ell} \{EA \frac{du}{dx} \cdot \frac{d}{dx} (\delta u) - cx \cdot \delta u\} dx + Q \delta u(2\ell)$

2. a. $\Pi = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{\ell} EA \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx + P u(x=\ell)$

$\delta\Pi = \int_{x=0}^{\ell} EA(x) \cdot u' (\delta u') \cdot dx + P \delta u_{x=\ell} \quad ' = \frac{d}{dx}$

Let op $A = A(x)$!

Gebruik: $A \cdot u' (\delta u)' = [A u' \cdot \delta u]' - (A u')' \cdot \delta u$

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= - \int_{x=0}^{\ell} E(A u')' dx \cdot \delta u + EA u' \cdot \delta u \Big|_{x=0}^{\ell} + P \cdot \delta u_{x=\ell} \\ &= - \int_{x=0}^{\ell} E(A u')' dx \cdot \delta u + \frac{EA_0}{2} u'(\ell) (\delta u)_{x=\ell} + P(\delta u)_{x=\ell} \end{aligned}$$

Als $\delta \Pi = 0$ voor alle toelaatbare δu dan moet:

$$E(A u')' = 0 \rightarrow \underline{(A u')' = 0} \quad \text{ofwel: } A' u' + A u'' = 0$$

$$\text{ofwel: } A_0 \left(1 - \frac{x}{2\ell}\right) u'' - \frac{A_0}{2\ell} u' = 0$$

b. Exacte oplossing

$$(A u')' = 0 \rightarrow A u' = C_1 \rightarrow u' = \frac{C_1}{A(x)} = \frac{C_1}{A_0 \left(1 - \frac{x}{2\ell}\right)} ; C_1 = \text{constant}$$

Uit de randvoorwaarde bij $x=\ell$ volgt: $\frac{EA_0}{2} u'_{\ell} = -P$

$$\text{dus: } u'_{\ell} = -\frac{2P}{EA_0} = \frac{2C_1}{A_0} \rightarrow C_1 = -P/E \quad \text{en} \quad u' = \frac{-P}{EA(x)} = \frac{-P}{EA_0 \left(1 - \frac{x}{2\ell}\right)}$$

$$u = \int_0^{\ell} u' dx = + \frac{2P \cdot \ell}{EA_0} [\ln A(x) + C_2]$$

Voor $x=0$ geldt $u=0$ dus: $C_2 = -\ln A_0$

zodat:

$$u(x) = + \frac{2P\ell}{EA_0} \cdot \ln\left(\frac{A(x)}{A_0}\right)$$

$$u(0) = 0$$

$$u(x=\frac{1}{2}\ell) = -\frac{P\ell}{EA_0} \cdot 2\ln \frac{4}{3}$$

$$u(\ell) = -\frac{P\ell}{EA_0} \cdot 2\ln 2$$

c. Benadering

Zoek uit de functies $\hat{u} = px + q$ de "beste", die tevens aan de kinematische randvoorwaarde voldoet.

$$\hat{u}(0) = 0 \rightarrow q = 0 \rightarrow \hat{u} = px. \text{ Dus } \hat{u}' = p$$

$$\delta \hat{u} = x \cdot \delta p$$

$$(\delta \hat{u})' = \delta p$$

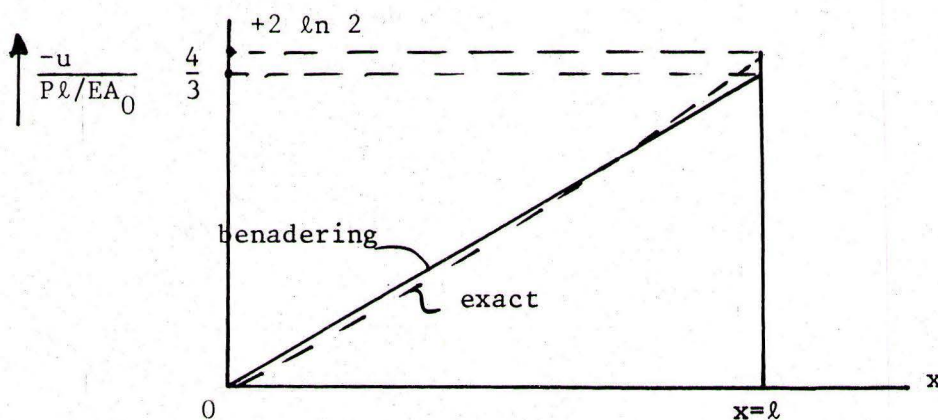
$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \int EA u' (\delta \hat{u})' dx + P(\delta \hat{u})_{\ell} = \int EA p \cdot \delta p \cdot dx + P \cdot \ell \cdot \delta p = \\ &= \left[\int EA p dx + P\ell \right] \delta p = 0 \end{aligned}$$

Dit kan alleen als: $\int EA p dx + P\ell = 0 \rightarrow$

$$\begin{aligned} p EA_0 \int_{x=0}^{\ell} \left(1 - \frac{x}{2\ell}\right) dx &= -P\ell \rightarrow p \frac{EA_0}{2} \cdot \left(1 - \frac{x}{2\ell}\right)^2 \Big|_0^{\ell} = P\ell \\ &\rightarrow p \cdot EA_0 \ell \cdot \left(\frac{1}{4} - 1\right) = P\ell \end{aligned}$$

$$p = -\frac{4P}{3EA_0} \text{ zodat } \hat{u} = -\frac{4P \cdot x}{3EA_0}$$

d. Grafiek



$$3. a. \quad \Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx + \int_0^l q u dx$$

$$\delta \Pi = 0 = \int_0^l EA \frac{du}{dx} d\delta u + \int_0^l q \delta u dx$$

$$= EA \frac{du}{dx} \delta u \Big|_0^l + \int_0^l \left\{ q \frac{d}{dx} (EA \frac{du}{dx}) \right\} \delta u dx$$

$$\text{Euler-vergelijking: } \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{q}{EA} \rightarrow u = \frac{q}{2EA} x^2 + Cx + D$$

$$\text{r.v.w.: } u(0) = u(l) = 0 \rightarrow D = 0$$

$$\frac{q}{2EA} l^2 = C l \rightarrow C = \frac{ql}{2EA}$$

$$\text{dus } u = \frac{q}{2EA} (x^2 - lx) \left\{ \begin{array}{l} \text{Controleer teken met fysische betekenis:} \\ x = \frac{1}{2}l \Rightarrow u = \frac{+q}{2EA} \left(\frac{1}{4}l^2 - \frac{1}{2}l^2 \right) < 0 \text{ kloost want } q \text{ heeft neg.} \\ x\text{-richting!} \end{array} \right.$$

b. Zie V.1.

c. Zie a.

$$d. \quad 0 < x < l/2 \quad u = ax \quad ; \quad u' = a$$

$$\frac{1}{2}l < x < l \quad u = a(l-x) \quad ; \quad u' = -a$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EA a^2 dx + \int_0^{\frac{1}{2}l} q \cdot ax dx + \int_{\frac{1}{2}l}^l qa(l-x) dx$$

$$\delta \Pi = 0 = \int_0^l EA a \delta a dx + \int_0^{\frac{1}{2}l} qx \delta a dx + \int_{\frac{1}{2}l}^l qa(l-x) \delta a dx =$$

$$= EA a l + q \cdot \frac{1}{8} l^2 + q \cdot \frac{1}{8} l^2 \rightarrow a = \frac{-ql}{4EA}$$

Verpl. veld: $u=0$

$$v = v_0(x) - \eta(x) \cdot z$$

$$w = w_0(x) + \eta(x) \cdot y$$

-24-

$$4. a. \quad \epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = 0; \quad \epsilon_{xz} = \frac{y}{2} \cdot \frac{d\eta}{dx} + \frac{1}{2} \frac{dw_0}{dx}; \quad \epsilon_{xy} = \frac{-z}{2} \frac{d\eta}{dx} + \frac{1}{2} \frac{dv_0}{dx} ?$$

$$\epsilon_{yz} = 0; \quad U^{(1)} = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \sigma_{ij}$$

$$U^{(1)} = \frac{1}{2} (\epsilon_{xz} \cdot 2G\epsilon_{xz} + \epsilon_{xy} \cdot 2G\epsilon_{xy}) \cdot 2 =$$

$$= 2G(\epsilon_{xz}^2 + \epsilon_{xy}^2) = 2G \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \left(\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} \right)$$

$$U = \frac{G}{2} \iint_A (y^2 + z^2) dy dz \cdot \int_0^l \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 dx = \frac{1}{2} GJ \int_0^l \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 dx$$

$$\Omega = -M_{wl} \cdot \eta(l)$$

$$V = \frac{G}{2} \cdot \frac{\pi}{2} R^4 \int_0^l \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 dx - M_{wl} \cdot \eta(l)$$

$$b. \quad \delta V = 0 = G \cdot J \int_0^l \frac{d\eta}{dx} \delta \left(\frac{d\eta}{dx} \right) dx - M_{xl} \delta \eta(l) \quad ; \quad J = \frac{\pi}{2} R^4$$

$$GJ \cdot \frac{d\eta}{dx} \delta \eta \Big|_0^l - GJ \int_0^l \frac{d^2\eta}{dx^2} \delta \eta dx - M_{xl} \delta \eta(l) = 0$$

$$\text{Euler-vergelijking: } \frac{d^2\eta}{dx^2} = 0; \quad \text{nat. r.v.w.: } M_{xl} = GJ \left(\frac{d\eta}{dx} \right)_{x=l}$$

$$c. \quad \eta = Cx + D \quad \eta(0) = 0 \rightarrow D = 0$$

$$\left(\frac{d\eta}{dx} \right)_{x=l} = \frac{M_{xl}}{GJ} \rightarrow \eta = \frac{M_{xl} \cdot x}{GJ}$$

X

$$5. \quad U^{(1)} = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \sigma_{ij}$$

$$= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{rr}^2 + \epsilon_{tt}^2 + 2\nu \epsilon_{rr} \epsilon_{tt})$$

$$U = \frac{t}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{b/2} \frac{E}{a/2 - \nu} (\epsilon_{rr}^2 + \epsilon_{tt}^2 + 2\nu \epsilon_{rr} \epsilon_{tt}) r \, dr \, d\phi$$

Zie verder blz. 5.30 en 5.31 van S.3. *Verschil: $b \rightarrow b/2$
 $a \rightarrow a/2$*

6. Randcondities:

$$x=0, y=0 \left\{ \begin{array}{l} u=0 \\ v=0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} a_1=0 \\ b_1=0 \end{array}$$

$$y=0 \left\{ \begin{array}{l} u=0 \\ v=0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} a_2=0 \\ b_2=0 \end{array}$$

$$u = a_3 y \quad v = b_3 y$$

dus $\epsilon_{xx} = 0$; $\epsilon_{yy} = b_3$; $\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} a_3$

Substitutie van de coördinaten van de top levert: $a_3 = \frac{u^*}{h}$ en $b_3 = \frac{v^*}{h}$.

Substitutie in de potentiële energie uitdrukking

$$V = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \, dV - P_x u^* - P_y v^*$$

levert na gebruik van de wet van Hooke

$$V = \frac{1}{2} E \frac{t}{2h} (v^{*2} + \frac{1}{2} u^{*2}) - P_x u^* - P_y v^*$$

$$\begin{array}{l} \nu = 0 \\ t = 1 \end{array}$$

*dit is ingedrukt in
verplaatsingen van het
hoefpunt !!*

hier hiernaast!

$\delta V = 0$ levert:

$$\frac{dV}{dv^*} = 0 \rightarrow P_y = \frac{E}{2} \frac{\ell}{h} \cdot v^* \rightarrow v^* = \frac{2 h P \sin \alpha}{E \ell}$$

$$\frac{dV}{du^*} = 0 \rightarrow P_x = \frac{E}{2} \frac{\ell}{h} \frac{u^*}{2} \rightarrow u^* = \frac{4 h P \cos \alpha}{E \ell}$$

de beste benadering voor het verplaatsingsveld is dus (bij een lineair veld):

$$u = \frac{4 P \cos \alpha}{E \ell} y$$

$$v = \frac{2 P \sin \alpha}{E \ell} y$$

*He krijg dus
in Antik
antwoord.*

7. Zie vraagstuk 2.

(Probeer zelf).

$$8. \quad w_{\text{ben.}} = \frac{P \ell}{3EI} x^2$$

$$9. \quad w(x) = a \left(1 - \cos \frac{\pi x}{4 \ell} \right)$$

Controle: $w(x) = 0$ en $w'(x) = 0$ voor $x = 0$

dus $w(x)$ is kinematisch toelaatbaar.

$$\frac{dw}{dx} = \frac{a \pi}{4 \ell} \cdot \sin \frac{\pi x}{4 \ell} ; \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{a \pi^2}{16 \ell^2} \cos \frac{\pi x}{4 \ell}$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{2 \ell} EI \frac{a^2 \cdot \pi^4}{256 \ell^4} \cos^2 \left(\frac{\pi x}{4 \ell} \right) dx$$

$$\Omega = -\{-P \cdot a(1 - \cos \frac{\Pi \ell}{4\ell}) - Pa(1 - \cos \frac{\Pi \cdot 2\ell}{4\ell})\}$$

$$= Pa(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}) + Pa(1 - 0) = Pa(2 - \frac{1}{2}\sqrt{2})$$

$$\Pi = \int_0^{2\ell} EI \cdot \frac{a^2 \cdot \Pi^4}{512 \ell^4} \cdot \cos^2 \left(\frac{\Pi x}{4\ell}\right) dx + Pa(2 - \frac{1}{2}\sqrt{2})$$

$$\delta_a \Pi = 0 \rightarrow 0 = EI \cdot \frac{2a\Pi^4}{512 \ell^4} \cdot \frac{4\ell}{\Pi} \int_0^{2\ell} \{\cos^2 \cdot \left(\frac{\Pi x}{4\ell}\right) d\left(\frac{\Pi x}{4\ell}\right)\} \delta a + P(2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}) \delta a$$

voor willekeurige variaties van a.

Dus ook voor $\delta a \neq 0$ voor $0 < x \leq \ell$.

Dus:

$$\frac{EI \cdot \Pi^3}{16\ell^3} a \cdot \frac{\Pi}{4} + P(2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}) = 0$$

$$a = \frac{-P(2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}) \cdot 256 \ell^3}{EI \Pi^4}$$

$$u(2\ell) = -3,4 \frac{P\ell^3}{EI}$$

10. a. $w_0 = C_1 + C_2 r + C_3 r^2$

$$r = R: \frac{dw_0}{dr} = 0 \rightarrow C_2 + 2C_3 R = 0$$

$$r = 2R: w_0 = 0 \rightarrow C_1 + 2C_2 R + 4C_3 R^2 = 0$$

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = -2C_3 R$$

$$w_0 = C_3 (-2Rr + r^2)$$

b. $V = 2\pi B \int_R^{2R} \left[\frac{r}{2} \left(\frac{d^2 w_0}{dr^2} \right)^2 + \frac{1}{2r} \left(\frac{dw_0}{dr} \right)^2 + \nu \frac{d^2 w_0}{dr^2} \frac{dw_0}{dr} \right] dr - K w_0 (r = R)$

$$V = 4\pi B C_3^2 (1 + \nu + \ln 2) R^2 + K C_3 R^2$$

$$\delta V = 0 \rightarrow C_3 = \frac{-K}{8\pi B (1 + \nu + \ln 2)}$$

$$w_0 = \frac{K}{8\pi B (1 + \nu + \ln 2)} (2Rr - r^2)$$

11. a. De benadering $w_0 = \alpha xy$ voldoet aan de kinematische randvoorwaarden

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} = \alpha y ; \quad \frac{\partial w_0}{\partial y} = \alpha x ; \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} = \alpha$$

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0 ; \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0$$

$$U = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} \iint_A (1 - \nu) \alpha^2 dx dy$$

$$\Omega = \iint_A q \cdot \alpha xy dx dy$$

$$\delta V = \frac{Et^3(1-\nu)2\alpha}{12(1-\nu^2)} \cdot \iint_A \delta\alpha \, dx \, dy + q \cdot \iint_A xy \, \delta\alpha \, dx \, dy$$

$$0 = \frac{Et^3 \cdot \alpha \ell^2}{6(1+\nu)} + q \cdot \frac{1}{4} \ell^4$$

$$\alpha = \frac{-q \ell^4}{4} \cdot \frac{6(1+\nu)}{Et^3 \ell^2} = \frac{-3 q \ell^2(1+\nu)}{2 E t^3}$$

$$w_0 = \frac{-3 q \ell^2(1+\nu)}{2 E t^3} xy$$

Voor de spanningen vinden we

$$\sigma_{xx} = 0; \sigma_{yy} = 0; \sigma_{xy} = -\frac{Ez\alpha}{1+\nu}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{3 q \ell^2 z \cdot (1+\nu)}{2(1+\nu)t^3} = \frac{3 q \ell^2 z}{2 t^3}$$

(b)

Nemen we als benadering:

$$w_0 = \alpha_1 xy + \alpha_2(xy^2 + yx^2)$$

dan geldt:

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} = \alpha_1 y + \alpha_2(y^2 + 2xy)$$

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0 + 2y \alpha_2$$

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} = \alpha_1 + \alpha_2(2y + 2x)$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial y} = \alpha_1 x + \alpha_2(2xy + x^2)$$

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = \alpha_2 \cdot 2x$$

b.
$$U = \frac{E t^3}{12(1 - \nu^2)} \iint \left\{ \frac{1}{2} \cdot 4y^2 \cdot \alpha_2^2 + \frac{1}{2} \cdot 4x^2 \cdot \alpha_2^2 + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu 4xy \alpha_2^2 + (1 - \nu) [\alpha_1 + \alpha_2(2y - 2x)]^2 \right\} dA$$

(Handwritten notes above the equation: $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2$, $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2$, and $(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)^2$)

dit moet toch + zijn?

?
Dan is de rest ook verkeerd.

$$\Omega = \iint_A q \{ \alpha_1 xy + \alpha_2 (xy^2 + yx^2) \} dx dy$$

$$\delta V_{\alpha_1} = \frac{E t^3}{12(1 - \nu^2)} \iint_A (1 - \nu) \cdot 2 \{ \alpha_1 + \alpha_2(2y - 2x) \} dx dy$$

$$+ q \iint_A xy dx dy = 0$$

$$B \cdot (1 - \nu) \cdot 2 \{ \alpha_1 \ell^2 + \alpha_2 \cdot 0 \} + q \cdot \frac{1}{8} \ell^4 = 0$$

$$\alpha_1 = \frac{-q \ell^4}{4 \cdot B(1 - \nu) \cdot 2 \ell^2} = \frac{-q \ell^2}{8 B(1 - \nu)}$$

$$\delta V_{\alpha_2} = \frac{E t^3}{12(1 - \nu^2)} \iint_A \{ 4y^2 + 4x^2 + 8\nu xy \} \alpha_2$$

$$+ (1 - \nu) \cdot 2 [\alpha_1 + \alpha_2(2y - 2x)] (2y - 2x) dx dy$$

$$+ \iint_A q (xy^2 + yx^2) dx dy = 0$$

$$B[\alpha_2(\frac{4\ell^4}{3} + \frac{4\ell^4}{3} + \frac{8v\ell^4}{3}) + 2(1-v)(\alpha_1 \cdot 0 + 4\alpha_2 \cdot 1/6 \ell^4)] + \frac{q \ell^2 \cdot \ell^3}{2 \cdot 3} \cdot 2 = 0$$

$$\alpha_2 \cdot (\frac{8}{3} + 2v - \frac{4}{3}v) = \frac{-2q\ell}{6B}$$

$$\alpha_2 = \frac{-q\ell}{B(8+2v)}$$

$$w_0 = \frac{-q\ell^2}{8B(1-v)} xy - \frac{q\ell}{B(8+2v)} (xy^2 + yx^2)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{-Ez}{1-v^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{dx^2} + v \frac{\partial^2 w_0}{dx^2} \right) = \frac{Ez \cdot 2q\ell}{B(1-v^2)(8+2v)} (y + vx)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{-Ez}{1-v^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{dy^2} + v \frac{\partial^2 w_0}{dx^2} \right) = \frac{Ez \cdot 2q\ell}{B(1-v^2)(8+2v)} (x + vy)$$

Onjuist.

$$\rightarrow \sigma_{xy} = \frac{-Ez}{1+v} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = \frac{Ez}{1+v} \left\{ \frac{q\ell^2}{8B(1-v)} + \frac{2q\ell(y+x)}{(8+2v)B} \right\}$$

$$\left| (\sigma_{xx})_{x=0, y=\ell} \right|_{\max.} = \frac{E \cdot \frac{1}{2} t \cdot 2q \cdot 12 \cdot (1-v^2)}{Et^3 (1-v^2)(8+2v)} \ell^2$$

$$= \frac{12q\ell^2}{(8+2v)t^2} = 1,4 \frac{q\ell^2}{t^2}$$

c. Als we een puntkracht P op $x=\ell, y=\ell$ laten aangrijpen, wordt de potentiaal van de uitwendige belasting:

$$\Omega = P \cdot \alpha \cdot \ell^2 \quad (w_0 = \alpha yx)$$

U blijft hetzelfde.

$\delta V = 0$ levert nu:

α

$$0 = \frac{Et^3 \alpha \ell^2}{6(1+\nu)} + P\ell^2$$

$$\alpha = - \frac{P\ell^2 \cdot 6(1+\nu)}{Et^3 \ell^2} = \frac{-6P(1+\nu)}{Et^3}$$

$$w_0 = - \frac{6P(1+\nu)}{Et^3} xy$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0 ; \sigma_{xy} = \frac{6Pz}{t^3}$$

bij de keuze $w_0 = \alpha_1 xy + \alpha_2 (xy^2 + yx^2)$

Vinden we voor Ω

$$\Omega = P(\alpha_1 \ell^2 + \alpha_2 \cdot 2\ell^3)$$

$$\frac{\delta \Omega}{\alpha_1} = P\ell^2 ; \frac{\delta \Omega}{\alpha_2} = 2P\ell^3$$

$$\alpha_1 = \frac{-P}{2B(1-\nu)} ; \alpha_2 = \frac{-6P}{B\ell(8+2\nu)}$$

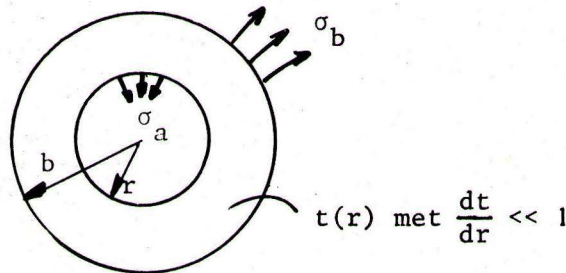
$$w_0 = \frac{-P}{2B(1-\nu)} xy - \frac{6P}{B\ell(8+2\nu)} (xy^2 + yx^2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{-Ez}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\ &= \frac{-Ez \cdot -12P}{B(1-\nu^2)(8+2\nu)l} (y + \nu x) \\ &= \frac{Ez \cdot 12P \cdot 12(1-\nu^2)}{Et^3(1-\nu^2)(8+2\nu)l} (y + \nu x) \\ &= \frac{144 Pz}{(8+2\nu)t^3} \cdot (y + \nu x) \end{aligned}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{144 Pz}{(8+2\nu)t^3} (x + \nu y)$$

Onjuist $\rightarrow \sigma_{xy} = \frac{-Ez}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = \frac{12Pz}{t^3} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{12(x+y)(1-\nu)}{l(8+2\nu)} \right\}$

12.



We nemen aan dat we de vlakspanningstheorie mogen toepassen.

$$V = U + \Omega ; U = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_{rr} \sigma_{rr} + \epsilon_{tt} \sigma_{tt} dV$$

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{rr} + \nu \epsilon_{tt}) ; \sigma_{tt} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{tt} + \nu \epsilon_{rr})$$

$$U = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi} \int_a^b (\epsilon_{rr}^2 + \epsilon_{tt}^2 + 2\nu \epsilon_{rr} \epsilon_{tt}) t \cdot r \cdot dr \cdot d\phi$$

$$\epsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr} ; \epsilon_{tt} = \frac{u_r}{r} ; \quad (\text{Zie S.3, Hoofdstuk 5})$$

$$U = \frac{2\pi E}{2(1-\nu^2)} \int_a^b \left\{ \left(\frac{du_r}{dr} \right)^2 + \left(\frac{u_r}{r} \right)^2 + 2\nu \frac{du_r}{dr} \cdot \frac{u_r}{r} \right\} t \cdot r \cdot dr$$

$$\Omega = -2\pi b \cdot t(b) \cdot \sigma_b \cdot u_r (r=b) + 2\pi a \cdot t(a) \cdot \sigma_a \cdot u_r (r=a)$$

Er zijn nu twee wegen mogelijk

$$\delta V = 0 \rightarrow$$

Euler-vergelijking + stoktermen

D.V in u_r + dyn. r.v.w.'n

Kinematisch toelaatbaar
benaderingsveld invoeren
bijv. $u_r = \alpha_1 r + \frac{\alpha_2}{r}$

De tweede weg werken we verder uit

$$\epsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr} = \alpha_1 - \frac{\alpha_2}{r^2} ; \epsilon_{tt} = \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{r^2}$$

$$\epsilon_{rr}^2 = \alpha_1^2 + \frac{\alpha_2^2}{r^4} - \frac{2\alpha_1 \alpha_2}{r^2} ; \epsilon_{tt}^2 = \alpha_1^2 + \frac{\alpha_2^2}{r^4} + \frac{2\alpha_1 \alpha_2}{r^2}$$

$$2\nu \epsilon_{rr} \epsilon_{tt} = 2\nu \left(\alpha_1^2 - \frac{\alpha_2^2}{r^4} \right)$$

$$\varepsilon_{rr}^2 + \varepsilon_{tt}^2 + 2\nu\varepsilon_{rr}\varepsilon_{tt} = 2\alpha_1^2(1+\nu) + \frac{2\alpha_2^2}{r^4}(1-\nu)$$

$\delta V = 0$ levert dan

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = 0$$

Uitwerking levert: $28,89 \alpha_1 = \frac{160}{9} \frac{\sigma_b}{E}$

$$\alpha_1 = 0,615 \frac{\sigma_b}{E}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = 0 \text{ levert}$$

$$\alpha_2 = 26,66 \frac{\sigma_b}{E}$$

$$u_r = \left(0,615 r + \frac{26,66}{r}\right) \frac{\sigma_b}{E}$$

$$\varepsilon_{rr} = \alpha_1 - \frac{\alpha_2}{r^2}; \quad \varepsilon_{tt} = \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{r^2}$$

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu} \frac{\sigma_b}{E} \left\{ \alpha_1(1+\nu) - \frac{\alpha_2}{r^2} + \nu \frac{\alpha_2}{r^2} \right\}$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_b \left\{ 0,922 - \frac{19,995}{r^2} \right\}$$

$$\sigma_{tt} = \sigma_b \left\{ 0,922 + \frac{19,995}{r^2} \right\}$$

Controle:

$$(\sigma_{rr})_{r=5} = \sigma_b \left\{ 0,922 - \frac{19,995}{25} \right\} = 0,122 \sigma_b$$

$$(\sigma_{rr})_{r=10} = \sigma_b \left\{ 0,922 - \frac{19,995}{100} \right\} = 0,722 \sigma_b$$

De benadering voor de spanningen is bij gebruik van het principe van de minimale potentiële energie slechter dan de benadering voor de verplaatsingen.

Als we de plaat zouden opdelen in ringvormige elementen en dan per element een benaderingsveld zouden invoeren dat op de elementgrenzen aansluit krijgen we een betere benadering. (Dat is de elementenmethode).

13. De potentiële energie is

$$\frac{1}{2} \int_0^{\ell} EI \left(\frac{d^2 v_0}{dx^2} \right)^2 dx + M \left(\frac{dv_0}{dx} \right)_{x=\ell}$$

$$\delta V = \int_0^{\ell} EI \frac{d^2 v_0}{dx^2} \delta \frac{d^2 v_0}{dx^2} dx + M \delta \left(\frac{dv_0}{dx} \right)_{x=\ell} = 0$$

$$= \int_0^{\ell} EI v_0'' \delta v_0^1 + M \delta v_0^1(\ell)$$

$$EI v_0'' \delta v_0^1 \Big|_0^{\ell} + M \delta v_0^1(\ell) - \int_0^{\ell} \frac{d}{dx} (EI v_0'') \delta v_0^1 dx$$

$$= EI v_0'' \delta v_0^1 \Big|_0^{\ell} - \frac{d}{dx} (EI v_0'') \delta v_0^1 \Big|_0^{\ell} + M \delta v_0^1(\ell)$$

$$+ \int_0^{\ell} \frac{d^2}{dx^2} (EI v_0'') = 0$$

Nat. r.v.w.: $(EI v_0'')_{x=0} = 0$

$$(EI v_0'')_{x=l} + M = 0$$

Euler-vergelijking: $(1 + \frac{x}{l})v_0'''' + \frac{2}{l} v_0''' = 0$

Deze d.v. is moeilijk op te lossen.

Benaderingsoplossing

$$v_0 = ax^2 + bx + c$$

$$v_0(0) = 0 \rightarrow c = 0$$

$$v_0(l) = 0 \rightarrow al^2 + bl = 0 \quad b = -al$$

$$v_0 = ax^2 - alx$$

$$v_0' = 2ax - al$$

$$v_0'' = 2a \quad ; \quad V = \frac{1}{2} \int_0^l EI \cdot 4a^2 dx + Mal$$

$$\delta V = 0 = \frac{1}{2} \int_0^l EI \cdot 8a \delta a dx + Ml \delta a$$

$$\rightarrow 4 EI_0 a \int_0^l (1 + \frac{x}{l}) dx = -Ml$$

$$a = - \frac{Ml}{4EI_0 \int_0^l (1 + \frac{x}{l}) dx} = - \frac{M}{6EI_0}$$

$$v_0 = \frac{M}{6EI} (lx - x^2)$$

ben.

14. Een handige keuze is

$$w = \alpha(r-a)^2 (r-b)^2$$

$$w(a) = w(b) = \left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=a} = \left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=b} = 0$$

Substitutie op $r = a$??

w voldoet aan de kinematische randvoorwaarden.

15. Een handige keuze is nu

$$w = \alpha(x-\frac{1}{2}a)(x+\frac{1}{2}a)(y-\frac{1}{2}b)^2$$

$$= \alpha(x^2 - \frac{1}{4}a^2)(y-\frac{1}{2}b)^2$$

$$w(\frac{1}{2}b) = w(\frac{1}{2}a) = w(-\frac{1}{2}a) = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=\frac{1}{2}b} = 0$$

w voldoet aan de kinematische r.v.w.'n.

| Opgave | Uitwerking op blz. |
|--------|--------------------|
| 1 | 20 |
| 2 | 20 |
| 3 | 23 |
| 4 | 24 |
| 5 | 25 |
| 6 | 25 |
| 7 | 26 |
| 8 | 26 |
| 9 | 26 |
| 10 | 28 |
| 11 | 28 |
| 12 | 33 |
| 13 | 36 |
| 14 | 38 |
| 15 | 38 |