Revista INTEGRACIÓN
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 16, No 1, p. 45–53, enero–junio de 1998

Sobre la prolongabilidad de soluciones de ecuaciones diferenciales de segundo orden

A.J. SARO *
A.I. RUIZ*

Resumen

Consideremos una ecuación $x'' + g(x)x' + f(x,t) = 0$ (1) junto con algunas generalizaciones. Damos condiciones para que la ecuación (1) tenga soluciones que no son prolongables al futuro para el caso en que exista un $t_1 \in [0, +\infty)$ con $xf(x,t_1) < 0$ para $x \neq 0$. Además consideramos el problema de la prolongabilidad a todo el semieje $t \geq t_0 \geq 0$ de las soluciones de la ecuación (1).

1. Introducción

Consideremos la ecuación

$$x'' + g(x)x' + f(x,t) = 0, \tag{1}$$

para la que suponemos se cumplen las siguientes condiciones:

C1: $g(x)$ es continua para $x \in (-\infty, +\infty)$, con $g(x) \geq 0$ para todo $x \in (-\infty, +\infty)$.

C2: $f(x,t)$ es continua para $x \in (-\infty, +\infty)$, $t \in [0, +\infty)$, y es tal que existe un valor $t_1 \in [0, +\infty)$ tal que $xf(x,t_1) < 0$ para $x \neq 0$.

C3: Existen funciones $a_i(t)$, $f_i(x)$ para $i = 1, 2$, que son continuas en $[0, +\infty)$ y $(-\infty, +\infty)$, respectivamente, para las cuales se cumple que:

(i) $a_1(t)a_2(t) \geq 0$ para todo $t \in [0, +\infty)$, y si $a_1(t)a_2(t) = 0$ entonces $a_1^2(t) + a_2^2(t) = 0$;

(ii) $xf_i(x) > 0$ para $x \neq 0, i = 1, 2$;

*Departamento de Matemáticas, Universidad de Oriente, Santiago de Cuba, Cuba.

(iii) $a_1(t)f_1(x) \leq f(x,t) \leq a_2(t)f_2(x)$.

En el caso en que $xf(x,t) < 0$ para toda $x \neq 0$, damos condiciones que garantizan que todas las soluciones de (1) puedan ser prolongadas para todo tiempo futuro.

Para el caso de la ecuación

$$x'' + a(t)f(x) = 0,$$

con $a(t)$continua y negativa en algún punto, ha sido probado en [1] que esta ecuación tiene soluciones que no están definidas en un tiempo futuro. Además, esto es independiente de la suavidad de $a(t)$. En [2] se dan condiciones necesarias y suficientes para que la ecuación

$$x'' + g(x)x' + a(t)f(x) = 0$$

tenga soluciones que tiendan monótonamente al infinito en un tiempo finito cuando $a(t)$ es negativo en algún punto.

El problema de la prolongabilidad de las soluciones es de particular importancia en la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, debido a su influencia en el estudio de la estabilidad, oscilación y periodicidad de las soluciones de (1). En este trabajo daremos condiciones suficientes para que (1) tenga soluciones que tiendan a infinito en un tiempo finito para el caso en que exista algún t_1 para el cual $xf(x,t_1)$ sea negativo. Aplicaremos este resultado a una ecuación más general en la que (1) será usada como ecuación de comparación.

2. Prolongabilidad

Por conveniencia en la notación definamos

$$F(x,t) = \int_0^x f(s,t)ds; \quad G(x) = \int_0^x g(s)dsyFi(x) = \int_0^x fi(s)dsi = 1,2.$$

Observación 1:

De las condiciones (C1) y (C2) se deduce que $a_i(t_1) < 0$ para $i = 1,2$.

Teorema 1 *Supongamos que existe un $N > 0$ tal que $G(x) \leq N$ para $x \geq 0$. Si se cumple que*

$$\int_0^{+\infty} [1 + F_2(x)]^{-\frac{1}{2}} < +\infty, \tag{2}$$

entonces las soluciones de la ecuación (1) *no son prolongables a* $+\infty$.

Demostración. Haciendo en (1) $x' = y - G(x)$ obtenemos el siguiente sistema equivalente:

$$x' = y - G(x), \; y' = -f(x,t). \tag{3}$$

Sabemos además que la única forma en la que una solución $(x(t), y(t))$del sistema (3) puede dejar de estar definida pasado algún tiempo T es si

$$x^2(t) + y^2(t) \to +\infty \text{ cuando } t \to T \tag{4}$$

(ver [2].)

Como $a_i(t_1) < 0$ y las funciones $a_i(t)$ son continuas, existen números positivos δ, m_i y M_i $(i = 1, 2)$ tales que

$$-M_i \leq a_i(t) \leq m_i \quad \text{si} \quad t_1 \leq t \leq t_1 + \delta, \quad i = 1, 2. \tag{5}$$

Denotemos por $(x(t),\ y(t))$ una solución de (3) que satisface $x(t_1) = 0$ con $y(t_1)$ suficientemente grande tal que $y(t_1) > 2N$. Como $(x(t), y(t))$ está definida sobre el intervalo $[t_1, t_1 + \delta)$, tenemos que $x(t)$ e $y(t)$ son monótonas crecientes. De las ecuaciones de (3) obtenemos $yy' = f(x,t)x' - f(x,t)G(x)$, la que bajo integración desde t_1 a $t(t_1 < t)$ nos lleva a

$$y^2(t) - y^2(t_1) = -2\int_{t_1}^{t} f(x(s), s)x\prime(s)ds - 2\int_{t_1}^{t} f(x(s), s)G(x(s))ds;$$

pero de (C3) tenemos que $f(x,t) \leq a_2(t)f_2(x)$, luego

$$y_2(t) - y_2(t_1) \geq -2\int_{t_1}^{t} a_2(t)f_2(x(s))x'(s)ds - 2\int_{t_1}^{t} a_2(t)f_2(x(s))G(x(s))ds$$

$$\geq 2m_2\int_{t_1}^{t} f_2(x(s))x'(s)ds + 2m_2\int_{t_1}^{t} f_2(x(s))G(x(s))ds.$$

Por consiguiente, $y(t) \geq [y^2(t_1) + 2m_2F_2(x)]^{\frac{1}{2}}$ y como $x' = y - G(x)$, tenemos

$$x'(t) \geq [y^2(t_1) + 2m_2F_2(x)]^{\frac{1}{2}} - G(x),$$

$$x'(t) \geq [y^2(t_1) + 2m_2F_2(x)]^{\frac{1}{2}} - N;$$

pero debido a que

$$[y^2(t_1) + 2m_2F_2(x)]^{\frac{1}{2}} - N \geq \frac{1}{2}[y^2(t_1) + 2m_2F_2(x)]^{\frac{1}{2}},$$

se tiene que

$$2[y^2(t_1) + 2m_2F_2(x)]^{\frac{1}{2}}dx \geq dt.$$

Integrando ambos miembros desde t_1 a t y recordando que $x(t_1) = 0$, tenemos

$$2\int_0^{x(t)} [y^2(t_1) + 2m_2F_2(x)]^{\frac{1}{2}}dx \geq t - t_1.$$

Puesto que (2) se cumple, podemos elegir $y(t_1)$ suficientemente grande para que la integral sea menor que δ . De aquí se sigue que $x(t) \to \infty$ antes de que t alcance

$t_1+\delta$. Para probar que la integral sea menor que δ, tomando $y(t_1)$ suficientemente grande, $y(t_1)>2N$, procedemos como sigue. Sea $\varepsilon>0$ dado; entonces existe $X>0$ tal que $\int_X^{+\infty}[1+F_2(x)]^{-\frac{1}{2}}<\epsilon$. Escribamos $\mu=[y^2(t_1)/2m]-1$ y $y(t_1)$ como se mencionó antes para que $\mu>0$. Entonces

$$2\int_0^{+\infty}[y^2(t_1)+2m_2F_2(s)]^{\frac{1}{2}}ds=2[2m_2]^{-\frac{1}{2}}\left\{\int_0^X[\mu+1+F_2(s)]^{-\frac{1}{2}}ds+\right.$$

$$\left.+\int_X^{+\infty}[\mu+1+F_2(s)]^{-\frac{1}{2}}ds\right\}<2\,[2m_2]^{-\frac{1}{2}}\left\{\int_0^X[\mu+1+F_2(s)]^{-\frac{1}{2}}ds+\varepsilon\right\}.$$

Como X es fijo, podemos tomar $y(t_1)$ suficientemente grande para que la integral sea menor que ε. Lo que nos lleva al resultado ya mencionado cuando ε es elegido de manera tal que $4\varepsilon[2m_2]^{-\frac{1}{2}}<\delta$. Por tanto hemos completado la demostración. ▮

Observación 2

De manera análoga se puede demostrar que en el caso en que $-N\leq G(x)\leq 0$ para $x\leq 0$ y $N>0$, si se cumple la condición

$$\int_0^{-\infty}[1+F_2(x)]^{-\frac{1}{2}}>-\infty, \tag{6}$$

entonces la ecuación (1) tiene soluciones no prolongables a $+\infty$.

Teorema 2 *Supongamos que $a_i(t)$ son funciones continuas tales que $a_i(t)<0$ ($i=1,2$) en el intervalo $t_1\leq t<t_2$ y $a_i(t_2)=0$, y además existe un $N>0$ tal que $0\leq G(x)\leq N$ para $x\geq 0$. Entonces el sistema (3) tiene una solución $(x(t),y(t))$ definida para $t=t_1$ tal que $lim\mid x(t)\mid=+\infty$ cuando $t\to T$ si $t_1<T\leq t_2$, sólo si se cumple que*

$$\int_0^{+\infty}[1+F_1(x)]^{-\frac{1}{2}}<+\infty. \tag{7}$$

Demostración. Supongamos que tal solución existe. Para precisar, sea $(x(t),y(t))$ una solución de (3) definida en $t=t_1$ y que satisface que $\lim\mid x(t)\mid=+\infty$ cuando $t\to T$ si $t_1<T\leq t_2$. Por consiguiente $(x(t),y(t))$ está definida en el intervalo $[t_1,T)$. Probemos que se cumple (7).

Como $y(t)=x'(t)+G(x)$ y $x(t)\to+\infty$, existe algún $\bar t\in[t_1,T)$ para el cual $x(t)>0$, $y(t)>0$ para $\bar t\leq t<T$. Debido a la continuidad de $a_i(t)$ $(i=1,2)$, existen constantes positivas m_i,M_i $(i=1,2)$ tales que $-M_i\leq a_i(t)\leq -m_i\leq 0$ para $\bar t\leq t<T$. Del sistema (3) obtenemos que $y'x'=yy'-G(x)y'$, y por consiguiente $-f(x,t)x'=yy'-G(x)y'$. Una integración de $\bar t$ a t ($\bar t>t$) nos lleva a

$$-2\int_{\bar t}^t f(x(s),s)x'(s)ds=y^2(t)-y^2(\bar t)-2\int_{\bar t}^t G(x(s))y'(s)ds. \tag{8}$$

Por la condición (C3) y las desigualdades (4), $m_2f_2(x) \leq -f(x,t) \leq M_1f_1(x)$, luego

$$-2\int_{\bar{t}}^{t} f(x(s),s)x'(s)ds \leq 2M_1\int_{\bar{t}}^{t} f_1(x(s))x'(s)ds,$$

y haciendo $u = x(s)$ en el primer miembro de (8) se tiene

$$y^2(t) - y^2(\bar{t}) - 2\int_{\bar{t}}^{t} G(x(s))y'(s)ds \leq 2M_1\int_{x(\bar{t})}^{x(t)} f_1(u)du.$$

Usando la integración por partes en el primer miembro, tenemos:

$$y^2(t)-y^2(\bar{t})-2[G(x)y(t)-G(x)y(\bar{t})]+2\int_{\bar{t}}^{t} y(s)g(x(s))x'(s)ds \leq 2M_1[F_1(x(t)-F_1(x(\bar{t})].$$

De aquí se sigue (para $t \in [\bar{t},T)$) que

$$y^2(t)-y^2(\bar{t})-2G(x)y(t)+2G(x)y(\bar{t}) \leq 2M_1[F_1(x(t)-F_1(x(\bar{t})]-2\int_{\bar{t}}^{t} y(s)g(x(s))x'(s)ds;$$

pero $x' = y - G(x)$, luego

$$x'^2(t) - G^2(x(t) - x'^2(\bar{t}) - G^2(x(\bar{t})) \leq 2M_1[F_1(x(t) - F_1(x(\bar{t})],$$

$$x'^2(t) \leq x'^2(\bar{t}) + 2N^2 + 2M_1[F_1(x(t) - F_1(x(\bar{t})];$$

por lo tanto,

$$\left\{x\prime^2(\bar{t}) + 2N^2 + 2M_1[F_1(x(t)) - F_1(x(\bar{t}))]\right\}^{-\frac{1}{2}} dx \leq dt.$$

Integrando entre $\bar{t}$ y t se tiene:

$$\int_{x(\bar{t})}^{x(t)} \left\{x\prime^2(\bar{t}) + 2N^2 + 2M_1[F_1(s) - F_1(x(\bar{t})]\right\}^{-\frac{1}{2}} ds \leq t - \bar{t}.$$

Por consiguiente, como $x'^2(t) > 0$ y $F_1(x(t)) > F_1(x(\bar{t}))$, el integrando está definido. Pero $x(t) \to +\infty$ cuando $t \to T$, luego

$$\int_{x(\bar{t})}^{+\infty} \left\{x'^2(\bar{t}) + 2N^2 + 2M_1[F_1(s) - F_1(x(\bar{t})]\right\}^{-\frac{1}{2}} ds \leq T - \bar{t};$$

si escribimos

$$w(\bar{t}) = \frac{x\prime^2(t) + 2N^2}{2M_1}F_1(x(\bar{t})),$$

tendremos

$$(2M_1)^{-\frac{1}{2}}\int_{x(\bar{t})}^{+\infty} [w(\bar{t}) + F_1(s)]^{-\frac{1}{2}}ds \geq [1 + F_1(s)]^{-\frac{1}{2}},$$

y se cumple la condición (7). Supongamos ahora que $w(\bar{t}) > 1$; entonces

$$\int_{x(\bar{t})}^{+\infty} [w(\bar{t}) + F_1(s)]^{-\frac{1}{2}} ds = [w(\bar{t})]^{-\frac{1}{2}} \int_{x(\bar{t})}^{+\infty} [1 + F_1(s)/w(\bar{t})]^{-\frac{1}{2}} ds$$

$$> [w(\bar{t})]^{-\frac{1}{2}} \int_{x(\bar{t})}^{+\infty} [1 + F_1(s)]^{-\frac{1}{2}} ds.$$

Como la integral del primer miembro converge, se tiene que la segunda también, y se cumple (7).

Observación 3

Si $x(t) \to -\infty$ cuando $t \to T$, se puede obtener una demostración análoga en el tercer cuadrante del plano de fases tomando $-N \leq G(x) \leq 0$ para $N > 0$ y $x \leq 0$, y la condición

$$\int_0^{-\infty} [1 + F_1(x)]^{-\frac{1}{2}} > -\infty. \tag{9}$$

Finalmente observemos que (1) puede ser usada como una ecuación de comparación para

$$x'' + g(x)x' + a_2(t)h(x, x', t) = 0 \tag{10}$$

en la que h es continua para $-\infty < x < +\infty, -\infty < x' < +\infty, 0 \leq t < +\infty$, mientras que g es continua para $-\infty < x < +\infty$ y $a_2(t)$ es continua para $0 \leq t < +\infty$. Consideremos el sistema

$$x' = y, \ y' = -g(x)y - a_2(t)f_2(x). \tag{11}$$

Teorema 3 *Sea $a(t_1) < 0$ para algún $t_1 > 0$. Supongamos que existen una función creciente f_2 que es continua para $-\infty < x < +\infty$ y tal que $xf_2(x) > 0$ si $x \neq 0$, y constantes positivas δ_1 y N tales que*

$$f_2(x) \leq h(x, y, t) \tag{12}$$

para $x, y > N$ y $t_1 \leq t \leq t_1 + \delta$.

Si (12) y (7) se cumplen, entonces (10) tiene soluciones $x(t)$ que satisfacen $\mid x(t) \mid \to +\infty$ cuando $t \to T_1^-$ para algún $T_1 > t_1$.

Demostración. Supongamos que se cumplen (7) y (10). De la demostración del teorema 1 existe una solución $(x(t), y(t))$ de (3) que satisface $x(t_1) = 0$ y $y(t_1) > 2N$, y $\mid x(t) \mid \to +\infty$ cuando $t \to T_1$ para $t_1 < T < t_1 + \delta$, donde δ es el de la demostración del teorema 1 y puede ser seleccionado tal que satisfaga $\delta < \delta_1$. Sobre el intervalo $[t_1, T)$, $y(t)$ es creciente; por consiguiente, existe un número t_3 que satisface $t_1 < t_3 < T$ y tal que $x(t_3) > N$. Haciendo en la ecuación (10) el cambio de variables $x' = y$ obtenemos el sistema equivalente

$$x' = y, \ y' = -g(x)y - a(t)h(x, x', t). \tag{13}$$

Consideremos una solución $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ del sistema (13) que satisface

$$\bar{x}(t_3) > x(t_3), \ \bar{y}(t_3) > y(t_3),$$

de manera que $\bar{x}\ (t)$ está definida en $[t_3, T)$, y tenemos que $\bar{x}(t) > N$ y $\bar{y}(t) > N$. Probemos ahora que $\bar{x}\ (t) > x(t)$ para todo $t \geq t_3$ para el cual $\bar{x}(t)$ está definida. Si esto es falso, entonces existe $t_4 > t_3$ con $\bar{x}\ (t_4) = x(t_4)$ y $\bar{x}(t) > x(t)$ sobre $[t_3, t_4)$. Ahora bien, $x(t) > N$ y $y(t) > N$, y por tanto

$$\bar{y}'(t) - y'(t) = g(x)y - g(\bar{x})\bar{y} - a(t)[h(x, x', t) - f(x)],$$

puesto que existe x_1 tal que para $x \geq x_1, g(x)$ es decreciente, y se tiene $g(x)y - g(\bar{x})\bar{y} > 0$; además, como $a(t) < 0$ y $f(x)$ es creciente para todo x real,

$$-a(t)[h(x, x', t) - f(x)] \geq -a(t)[f(\bar{x}) - f(x)] > 0.$$

Por lo tanto, $\bar{y}\ (t) - y(t)$ es creciente sobre $[t_3, t_4)$. Por otro lado,

$$\bar{x}'(t) - x'(t) = \bar{y}(t) - y(t) > 0$$

en $[t_3, t_4)$. Esto prueba que $\bar{x}(t) - x(t)$ es creciente sobre $[t_3, t_4)$. Por consiguiente tenemos que

$$\bar{x}(t_4) - x(t_4) > \bar{x}(t_3) - x(t_3).$$

Como $x(t) \to \infty$ cuando $t \to T^-$, existe algún T_1 tal que $t_3 \leq T_1 \leq T$ con $\bar{x}(t) \to +\infty$ cuando $t \to T_1^-$. Con esto queda terminada la demostración. ∎

Veamos ahora las condiciones que es necesario exigir para asegurar la existencia de las soluciones de la ecuación (1); para esta ecuación suponemos que se cumplen las siguientes condiciones, además de la condición (C1) que ya hemos mencionado antes:

C4: $f(x,t)$ es una función real y continua respecto a las variables x y t para toda $x \in (-\infty, +\infty)$ y todo $t \in [0, +\infty)$. y tal que $xf(x,t) > 0$ para todo $x \neq 0$.

C5: sea

$$F(x,t) = \int_0^x f(s,t)ds \text{ tal que } F_t'(x,t) \leq 0.$$

Por medio del cambio de variables $x' = y$ transformamos la ecuación (1) en el siguiente sistema equivalente:

$$x' = y, \quad y' = -g(x)y - f(x,t). \tag{14}$$

Teorema 4 *Sea* $t_0 \geq 0$ *y consideremos*

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0;$$

entonces toda solución $(x(t), y(t))$ *del sistema* (14) *se puede definir para todo*

$$t \geq t_0 \geq 0.$$

Demostración. Sea la función auxiliar

$$V(x,y,t) = F(x,t) + \frac{y^2}{2},$$

donde $F(x,t)$ fue definida en (C5). Derivamos $V(x,y,t)$ respecto a t a lo largo de las trayectorias del sistema y obtenemos

$$V'(x(t),y(t),t) = -yg(x) + F_t'(x,t),$$

lo cual bajo las condiciones (C1) y (C5) implica que

$$V'(x(t),y(t),t) \leq 0;$$

es decir, V es una función no creciente a lo largo de las trayectorias del sistema (14). Sea $(x(t),y(t))$ una solución del sistema (14) para la cual existe $T > t_0$ y que cumple (4). Puesto que $V(x(t),y(t),t)$ es no creciente, tenemos que

$$V(x(t),y(t),t) \leq V(x(t_0),y(t_0),t_0) = V_0$$

para todo $t_0 \leq t \leq T$, o sea

$$F(x,t) + \frac{y^2}{2} \leq V_0.$$

Esta acotación es posible sólo si $y(t)$ está acotada, es decir, si existe $M > 0$ tal que $\mid y(t) \mid \leq M$ para todo $t < t < T$. Integrando la primera ecuación del sistema (14) entre t_0 y t obtenemos

$$\mid x(t) \mid \leq \mid x(t_0) \mid + M(t - t_0),$$

de donde se deduce que

$$\mid x(t) \mid \leq N$$

con

$$N = \mid x(t_0) \mid + M(T - t_0),$$

lo que prueba que $x(t)$ está acotada. Con este análisis podemos concluir que las soluciones del sistema (9) son prolongables al futuro. ∎

Referencias

[1] Burton T., Grimmer R. "On continuability of solutions of second order differential equations", *Proc. Amer. Math. Soc.* No. 29, 1971.

[2] Nápoles J.P. "On the continuability of solutions of bidimensional systems". *Extracta Mathematicae*, Vol. 11, #2 (1996) España.

[3] Hurewicz W. *Lectures on Ordinary Differential Equations*, The M.I.T Press, Cambridge, Massachusetts and London, 1958.

[4] Grudo E.I., Poplavskaia L.A. "Sobre la estructura de las soluciones de un sistema bidimensional". *Ecuaciones Diferenciales* No.9, 1980.