Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 28, No. 2, 2010, pág. 133–152

Formulación variacional de ecuaciones diferenciales parciales

Luis J. Collantes[a], Aníbal Coronel[b*]

[a] Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, Departamento de Matemáticas, Lambayeque, Perú.
[b] Universidad del Bío-Bío, Departamento de Ciencias Básicas, Casilla 447, Chillán, Chile.

Resumen. En este trabajo se presenta una descripción del método variacional, el cual que se utiliza para el estudio cualitativo de ecuaciones diferenciales parciales: existencia, unicidad y regularidad de la solución. Se exhibe como ilustración el análisis de ecuaciones diferenciales parciales elípticas lineales de segundo orden, así como el estudio de una ecuación diferencial parcial hiperbólica no lineal de primer orden, en la cual se muestra la adaptabilidad del método.

Palabras claves: Formulación variacional, soluciones débiles, Lema de Lax-Milgram.
MSC2000: 35–02, 35D99, 35A99.

Variational formulation of partial differential equations

Abstract. This paper deals with the study of the variational method for partial differential equations concerning the existence, uniqueness and regularity of the solution. The aim of this work is to give a comprehensive description of the variational method, presenting examples from the simple second order linear elliptic partial differential equations to a most complex first order non-linear partial differential equation. Comments on the adaptability of this method to this kind of equations are given.
Keywords: Variational formulation, weak solutions, Lax-Milgram Lemma.

* Autor para correspondencia: *E-mail*: acoronel@ubiobio.cl.
Recibido: 15 de septiembre de 2010, Aceptado: 12 de noviembre de 2010.

1. Introducción

La ecuaciones diferenciales parciales, abreviadamente EDP, son de fundamental importancia para el modelamiento de fenómenos naturales. Esta amplia y práctica utilidad justifica el esfuerzo que muchos matemáticos han hecho para crear esta teoría y el que otros continúan haciendo a fin de resolver problemas abiertos originados en esta área.

En un inicio los intentos fueron encontrar soluciones analíticas, dando origen a la que hoy se conoce como teoría clásica de EDP. Una solución clásica de una EDP es una función lo suficientemente regular que la satisface puntualmente. Bajo esta teoría clásica se agrupan diversos métodos, que varían de acuerdo con el tipo de la ecuación diferencial, y que guían los pasos a seguir para encontrar una solución explícita. Entre estos métodos están: separación de variables, serie de potencias, soluciones por similaridad, métodos de transformada, entre otros (ver [3]). Entre los inconvenientes generales que presentan estos procedimientos se pueden señalar los siguientes:

1. Exigen demasiada regularidad de las funciones que intervienen en la EDP, alejándose, muchas veces, del problema modelado al hacer simplificaciones que tienen una influencia no despreciable en los resultados.
2. No tiene sentido en la EDP diferenciar una función discontinua.

Superar estas dificultades motivaró nuevas técnicas, entre las cuales figuran el método del punto fijo, el método del grado topológico, el método variacional y otras, las cuales no buscan obtener una solución explícita, sino estudiar el comportamiento cualitativo: existencia, unicidad, estabilidad y regularidad de la solución.

El objetivo del presente artículo es presentar de manera didáctica al *método variacional*, el cual es el más utilizado por su versatilidad, al permitir estudiar diversos tipos de ecuaciones con ligeras modificaciones y dificultades inherentes al problema que se esté analizando. Para aplicar de modo sistemático el método hay que distinguir cuatro etapas, las cuales son:

Etapa A. Se precisa la noción de solución clásica y de solución débil (en espacios de Sóbolev). En esta etapa se demuestra que toda solución clásica es una solución débil.

Etapa B. Se establece la existencia y unicidad de la solución débil.

Etapa C. Se analiza la regularidad de la solución débil.

Etapa D. Recuperación de la solución clásica. Se demuestra que si a una solución débil se le suma la regularidad de una solución clásica, se logra recuperar la solución clásica.

Por otro lado, es necesario mencionar que el método variacional ha sido exitosamente utilizado para crear métodos numéricos que aproximen las soluciones débiles de EDP (para mayores detalles consultar [2]).

El trabajo se encuentra estructurado de la siguiente manera: en la sección 2 se introduce el marco funcional necesario para explicar el método variacional, así como para abordar la solución de ecuaciones del tipo laplaciano, EDP elípticas generales de segundo orden lineales y una EDP hiperbólica no lineal de primer orden; estas mismas son las que se desarrollan en las tres secciones posteriores, respectivamente.

Notación

$\bar{\Omega}$	clausura de Ω
$\partial\Omega$	frontera de Ω
sop (u)	soporte de u
Δ	operador laplaciano
∇	operador gradiente
$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$	producto interno euclideano de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$
$\lvert\boldsymbol{x}\rvert$	norma euclideana de $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$
$\lVert u\rVert$	norma de u en espacios de Sóbolev
$L^p(\Omega)$	espacio de funciones p-integrables
$L^1_{loc}(\Omega)$	espacio de funciones localmente integrables
$C(\Omega)$	espacio de funciones continuas sobre Ω
$C^k(\Omega)$	espacio de funciones k-veces continuamente diferenciables sobre Ω
$C^\infty(\Omega)$	espacio de funciones infinitamente diferenciables sobre Ω
$C^k_0(\Omega)$	espacio de funciones k-veces continuamente diferenciables con soporte compacto en Ω
Δ	espacio de funciones regulares de todos los órdenes con soporte compacto en Ω
$C(\bar{\Omega})$	espacio de funciones sobre Ω con extensión continua
$C^k(\bar{\Omega})$	espacio de funciones sobre Ω con extensión k-veces continuamente diferenciable
$C^\infty(\bar{\Omega})$	espacio de funciones sobre Ω con extensión regular de todos los órdenes
$C^k_0(\bar{\Omega})$	espacio de funciones sobre Ω con extensión k-veces continuamente diferenciable y con soporte compacto
$\mathcal{D}(\bar{\Omega})$	espacio de funciones sobre Ω con extensión regular de todos los órdenes y con soporte compacto
$H^m(\Omega)$	espacio de Sóbolev $W^{m,2}(\Omega)$
$H^1_0(\Omega)$	espacio de funciones en $H^1(\Omega)$ con traza nula
$H^2_{loc}(\Omega)$	espacio de funciones en $H^2(\Omega')$ para todo abierto acotado $\Omega' \subset \Omega$

2. Marco funcional

En esta sección se introducen la terminología y notación necesaria para la exposición de las siguientes secciones.

Definición 2.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, y supóngase que existen $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, $a_i \in C(\bar{\Omega})$, $\forall i, j = 1, \ldots, n$ y $a_0 \in C(\bar{\Omega})$. El operador diferencial

$$L = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + a_0 \tag{1}$$

se denomina uniformemente elíptico sobre Ω si para todo $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\exists \theta > 0 \qquad \text{tal que} \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x})\xi_i\xi_j \geq \theta|\boldsymbol{\xi}|^2\,, \qquad c.t.p.\ \boldsymbol{x} \in \Omega\,. \tag{2}$$

Ejemplo 2.2. Si δ_{ij} denota el delta de Kronecker, el operador

$$L = -\Delta = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

es uniformemente elíptico sobre $\mathbb{R}^n$, pues

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x})\xi_i\xi_j = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij}(\boldsymbol{x})\xi_i\xi_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = |\boldsymbol{\xi}|^2,$$

es decir, se satisface (2) con $\theta = 1$.

Definición 2.3. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Al problema "Dada f, encontrar u tal que $Lu = f$ en Ω", donde L es un operador diferencial elíptico, se lo llama una EDP elíptica.

Observación 2.4. Las EDP, generalmente, toman el nombre y características de acuerdo con el tipo del operador que está involucrado en tal problema. Por decir, si el operador L es de segundo orden, se llama una EDP de segundo orden; si el operador L es lineal, se llama una EDP lineal, y así por el estilo.

Ahora, por razones de unicidad, a una EDP elíptica se le asocian condiciones de borde. Las más comunes son tres: la condición de Dirichlet

$$u = g \qquad \text{sobre} \qquad \partial\Omega,$$

la condición de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = g \qquad \text{sobre} \qquad \partial\Omega\,,$$

donde $\boldsymbol{\nu}$ es la normal unitaria exterior a $\partial\Omega$, y la condición de Robin

$$\alpha u + \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = g \qquad \text{sobre} \qquad \partial\Omega\,,$$

donde α es una constante adecuada. Algunas veces razones físicas del problema modelado motivan el considerar dos de las condiciones de borde señaladas anteriormente para el mismo problema; dichos problemas son conocidos como problemas con condiciones mixtas.

Definición 2.5. Sea H un espacio de Hilbert. Se dice que la forma bilineal

$$\begin{array}{rccc} a: & H \times H & \to & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \mapsto & a(u,v) \end{array}$$

es continua si existe una constante $C > 0$ tal que

$$a(u,v) \leq C\|u\|_H\|v\|_H\,, \qquad \forall u,v \in H\,,$$

y que es coerciva si existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(u,u) \geq \alpha\|u\|_H^2\,, \qquad \forall u \in H\,.$$

En caso de existir, C y α son llamadas constante de continuidad y de coercividad, respectivamente.

Teorema 2.6. *Sean H un espacio de Hilbert y a una forma bilineal, continua y coerciva. Entonces para cada $f \in H'$ (f lineal y continua) existe un único $u \in H$ tal que*

$$a(u,v) = < f, v >\,, \qquad \forall v \in H\,;$$

además, si a es simétrica, entonces u es caracterizado por la propiedad

$$\frac{1}{2}a(u,u) - < f, u > = \min_{v \in H}\left\{\frac{1}{2}a(v,v) - < f, v >\right\}.$$

Este teorema es conocido como el teorema de Lax-Milgram, y es uno de los teoremas más importantes para el estudio de la existencia y unicidad de la solución en problemas elípticos. Para la demostración del Teorema 2.6, consultar [3].

3. Ecuaciones del tipo laplaciano

En esta sección se verá en detalle el método variacional aplicado a los problemas más básicos de la teoría de EDP elípticas.

Ejemplo 3.1. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado de clase C^1 y $f \in L^2(\Omega)$. El problema homogéneo es encontrar $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u(\boldsymbol{x}) & = & f(\boldsymbol{x}) & \text{en} & \Omega \\ u(\boldsymbol{x}) & = & 0 & \text{sobre} & \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{3}$$

Etapa A

Se precisa lo que se entiende por solución clásica y solución débil.

Una solución clásica de (3) es una función $u \in C^2(\overline{\Omega})$ que la satisface puntualmente sobre Ω.

Una solución débil de (3) es una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que verifica

$$\int_\Omega \nabla u(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla v(\boldsymbol{x})\ \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega f(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x})\ \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)\,. \tag{4}$$

Ahora, suponiendo que u es una solución clásica de (3), se demuestra que u es una solución débil. Para tal efecto se multiplica la primera igualdad de (3) por $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, y al integrar por partes sobre Ω se obtiene

$$\int_\Omega \nabla u(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla \varphi(\boldsymbol{x})\ \mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{\partial\Omega} u(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})\ \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_\Omega f(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})\ \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,.$$

Utilizando la condición de borde de u, o que $\varphi = 0$ sobre $\partial\Omega$, la integral de frontera se anula y queda

$$\int_\Omega \nabla u(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla \varphi(\boldsymbol{x})\ \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega f(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})\ \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,.$$

Como $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $H_0^1(\Omega)$, por continuidad se sigue que u es una solución débil de (3).

Etapa B

Para demostrar la existencia y unicidad de la solución débil se hace uso del Teorema 2.6 (de Lax-Milgram). En este caso se toma el espacio de Hilbert H como el espacio de Sóbolev $H_0^1(\Omega)$. La función $a : H \times H \to \mathbb{R}$ definida explícitamente por

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla v(\boldsymbol{x})\ \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

es bilineal, continua, coerciva y simétrica. En efecto:

- **Continuidad**. Por la desigualdad de Cauchy[1],

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left|\int_\Omega \nabla u(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla v(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right| \\
&\leq \int_\Omega |\nabla u(\boldsymbol{x})||\nabla v(\boldsymbol{x})| \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&\leq \left(\int_\Omega |\nabla u(\boldsymbol{x})|^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla v(\boldsymbol{x})|^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{1/2} \\
&= \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \,, \qquad \forall u, v \in H_0^1(\Omega) \,.
\end{aligned}$$

  La constante de continuidad es $C = 1$.

- **Coercividad**.

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_\Omega \nabla u(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla u(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= \int_\Omega |\nabla u(\boldsymbol{x})|^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^n} \\
&= \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \,, \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega) \,.
\end{aligned}$$

  La constante de coercividad es $\alpha = 1$.

El funcional $f : H \to \mathbb{R}$ viene dado por

$$< f, v >= \int_\Omega f(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \,,$$

el cual está en H', pues es lineal y continuo.

- **Continuidad.** Utilizando la desigualdad de Cauchy y la desigualdad de

[1]Desigualdad de Cauchy: $\int_\Omega fg \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq (\int_\Omega f^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x})^{1/2} (\int_\Omega g^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x})^{1/2} \,, \qquad \forall f, g \in L^2(\Omega).$

Poincaré[2] se tiene

$$
\begin{aligned}
| < f, v > | &= |\int_\Omega f(\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x})\ \mathrm{d}\boldsymbol{x}| \\
&\leq \int_\Omega |f(\boldsymbol{x})||v(\boldsymbol{x})|\ \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&\leq \left(\int_\Omega |f(\boldsymbol{x})|^2\ \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v(\boldsymbol{x})|^2\ \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{1/2} \\
&= \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n} \\
&= C\|v\|_{H_0^1(\Omega)}\,, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)\,.
\end{aligned}
$$

En consecuencia, como las hipótesis del teorema 2.6 se verifican, se tiene que el problema variacional (4) tiene una única solución $u \in H_0^1(\Omega)$. Además, debido a que a es simétrica, u es caracterizada como el mínimo sobre $H_0^1(\Omega)$ del funcional de energía

$$E(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla v(\boldsymbol{x})|^2 - 2f(\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x}))\ \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,.$$

Etapa C

La regularidad de la solución débil es dada en el siguiente teorema

Teorema 3.2 ([1]). *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado de clase C^2, $f \in L^2(\Omega)$ y $u \in H_0^1(\Omega)$, que verifican (4). Entonces*

$$u \in H^2(\Omega) \qquad y \qquad \|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}\,,$$

donde C es una constante que depende sólo de Ω.

Etapa D

Se supone que la solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ de (3) es de clase $C^2(\overline{\Omega})$. Entonces, $u = 0$ sobre $\partial\Omega$. Por otro lado, al integrar por partes (4) se tiene

$$\int_\Omega -\Delta u(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})\ \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega f(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})\ \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,;$$

[2]Desigualdad de Poincaré: Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado, entonces

$$\exists C = C(\Omega, p) : \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^n}\,, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)\,,\ p \in]1, \infty[.$$

entonces

$$\int_\Omega \{\Delta u(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x})\}\varphi(\boldsymbol{x})\ \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0\,, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,,$$

de donde, por la regularidad supuesta para u, se obtiene

$$-\Delta u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \quad \text{en} \quad \Omega,$$

y por lo tanto u es una solución clásica de (3).

Ejemplo 3.3. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado de clase C^1 y $f \in L^2(\Omega)$. El problema no homogéneo es encontrar $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} -\Delta u & = & f & \text{en} & \Omega \\ u & = & g & \text{sobre} & \partial\Omega\,, \end{array} \right. \tag{5}$$

donde $g \in L^2(\partial\Omega)$.

Para estudiar este problema se puede aplicar el método variacional verificando cada una de las etapas A hasta D paso a paso. Sin embargo existe una forma práctica y rápida de hacerlo. Esto es que mediante un cambio de variable el problema 5 puede ser reducido al problema 3.

Una solución débil de (5) es una función $u \in H^1(\Omega)$ que verifica

$$\int_\Omega \nabla u(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla v(\boldsymbol{x})\ \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega f(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x})\ \mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{\partial\Omega} g(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x})\ \mathrm{d}\boldsymbol{S},\ \forall v \in H^1(\Omega)\,. \tag{6}$$

Por el teorema de trazas existe $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$ de tal manera que el operador de trazas γ_0 es tal que $\gamma_0(\tilde{g}) = g$; entonces, si se define w como

$$w = u - \tilde{g}\,,$$

se tiene que u es una solución clásica (débil) de (5) si y sólo si w es una solución clásica (débil) de

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} -\Delta w & = & \tilde{f} & \text{en} & \Omega \\ w & = & 0 & \text{sobre} & \partial\Omega\,, \end{array} \right. \tag{7}$$

donde $\tilde{f} = f + \Delta\tilde{g}$.

Como conclusión se tiene que existe una única $u \in H^1(\Omega)$ que es solución débil de (5) y tal que $u = w + \tilde{g}$, donde w es la solución débil de (7).

En los dos ejemplos anteriores se ha estudiado la EDP conocida como ecuación de Poisson con condiciones de frontera del tipo Dirichlet. Para variar un poco y mostrar la efectividad y adaptabilidad del método variacional, en el siguiente ejemplo se estudia una ecuación del tipo laplaciano, con condiciones de frontera del tipo Neumann.

Ejemplo 3.4. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto acotado de clase C^1. Se pide encontrar $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{rcccc} -\Delta u + u & = & f & \text{en} & \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} & = & 0 & \text{sobre} & \partial\Omega\,, \end{array} \right. \tag{8}$$

donde $f \in L^2(\Omega)$ es una función dada y $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ es la derivada normal exterior de u, es decir

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}\,,$$

siendo $\boldsymbol{\nu}$ el vector unitario normal exterior a $\partial\Omega$.

Etapa A

Una solución débil de (8) es una función $u \in H^1(\Omega)$ que verifica

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \;\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Omega uv \;\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega fv \;\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,, \qquad \forall v \in H^1(\Omega)\,. \tag{9}$$

Si u es una solución clásica de (8), entonces de la primera igualdad de este sistema, al multiplicar por $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ e integrar por partes sobre Ω, se obtiene

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \varphi \;\mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \;\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Omega u\varphi \;\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega f\varphi \;\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

y utilizando la condición de frontera $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0$ sobre $\partial\Omega$ se sigue que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \;\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Omega u\varphi \;\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega f\varphi \;\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})\,.$$

Por la densidad de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ en $H^1(\Omega)$ se obtiene

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \;\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Omega u\varphi \;\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega f\varphi \;\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,, \qquad \forall \varphi \in H^1(\Omega)\,,$$

confirmando de esta manera que $u \in H^1(\Omega)$ es una solución débil de (8).

Etapa B

Para la demostración de la existencia y la unicidad de la solución se aplica el Teorema de Lax-Milgram con

$$\begin{array}{rcl} H & = & H^1(\Omega)\,, \\ a(u,v) & = & \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \;\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Omega u\varphi \;\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,, \\ < f, v > & = & \displaystyle\int_\Omega fv \;\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,. \end{array}$$

Como conclusión de esta etapa se tiene entonces que existe una única solución débil $u \in H^1(\Omega)$ del problema (8).

Etapa C

La regularidad de la solución será vista en el Teorema 4.4.

Etapa D

Sea $u \in H^1(\Omega)$ una solución débil de (8) y supóngase además que $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

Por un lado u satisface (9) con $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$; al integrar por partes se obtiene

$$\int_\Omega (-\Delta u + u)\varphi \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \varphi \, \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_\Omega f\varphi \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,. \tag{10}$$

Ahora, como $\operatorname{sop}(\varphi) \subset \Omega$, la integral de frontera se anula y queda

$$\int_\Omega (-\Delta u + u)\varphi \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega f\varphi \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,,$$

lo cual implica

$$-\Delta u + u = f \ \text{ en } \ \Omega\,. \tag{11}$$

Por otro lado, de (9) con $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ al integrar por partes se tiene

$$\int_\Omega (-\Delta u + u)\varphi \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \varphi \, \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_\Omega f\varphi \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,, \qquad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega)\,.$$

Reemplazando (11) en la anterior igualdad, se obtiene

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \varphi \, \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0\,, \qquad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega)\,, \tag{12}$$

lo cual implica

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0\,, \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \tag{13}$$

Por lo tanto, de (11) y (13) se concluye que $u \in C^2(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ es una solución clásica de (8).

4. EDP Elíptica lineal general de segundo orden

En esta sección se verá la aplicación del método variacional a una EDP Elíptica lineal general de segundo orden. Se tratará solamente el caso de condición de frontera Dirichlet, puesto que el caso de frontera Neumann necesita de herramientas del Análisis Funcional que no están previamente definidas y que entran en un tecnicismo que oscurece la presentación explícita del método variacional.

Ejemplo 4.1. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado de clase C^1 y $f \in L^2(\Omega)$. El problema es encontrar $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ satisfaciendo

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = f \quad \text{en} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{14}$$

donde $L = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + a_0$ es un operador uniformemente elíptico.

Etapa A

Una solución débil de (14) es una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que verifica

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} &+ \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &+ \int_\Omega a_0 uv\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega fv\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Ciertamente, si u es una solución clásica de (14), entonces también es una solución débil de la misma. En efecto, $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, y además al multiplicar la primera ecuación de (14) por $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, integrar por partes, reemplazar la condición de contorno y utilizar el argumento de densidad de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $H_0^1(\Omega)$ (como se hizo en los problemas anteriores), se comprueba que (15) se satisface y que en consecuencia $u \in H_0^1(\Omega)$ es una solución débil de (14).

Etapa B

Por analogía a lo que se ha venido haciendo hasta el momento, para demostrar la existencia y unicidad de la solución débil se puede pensar en la utilización el Teorema 2.6, y en tal caso establecer que

$$\begin{aligned} H &= H_0^1(\Omega)\,, \\ a(u,v) &= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Omega a_0 uv\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,, \\ < f, v > &= \int_\Omega fv\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,. \end{aligned}$$

Pero resulta que aunque a es bilineal y continua no siempre es coerciva, tal como lo establece el siguiente lema.

Lema 4.2. *$a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal continua, y además*

$$\exists \alpha, \gamma \geq 0 \quad : \quad \alpha \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq a(u,u) + \gamma \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\,, \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega)\,. \tag{16}$$

Demostración. Se demostrará primeramente que a es continua y luego que satisface (16).

- a es continua. Por las desigualdades triangular, de Cauchy y de Poincaré se tiene

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| = & \left| \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \ \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Omega \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v \ \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Omega a_0 uv \ \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right| \\
& \leq \sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right| \ \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
& \quad + \sum_{i=1}^n \|a_i\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| |v| \ \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |u||v| \ \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
& \leq \sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \ \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right)^{1/2} \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right|^2 \ \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right)^{1/2} \\
& \quad + \sum_{i=1}^n \|a_i\|_{L^\infty(\Omega)} \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \ \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v|^2 \ \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right)^{1/2} \\
& \quad + \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)} \left(\int_\Omega |u|^2 \ \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v|^2 \ \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right)^{1/2} \\
& \leq \sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n} \\
& \quad + \sum_{i=1}^n \|a_i\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
& \quad + \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
& \leq \sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n} \\
& \quad + C_1 \sum_{i=1}^n \|a_i\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n} \\
& \quad + C_2 \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n} \\
& \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n} \\
& = C \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}\,, \forall u, v \in H_0^1(\Omega)\ .
\end{aligned}$$

- a satisface (16). Por la condición de elipticidad (2), y en virtud de la desigualdad de Young[3], se tiene

$$\begin{aligned}
\theta\int_\Omega |\nabla u|^2\ \mathrm{d}\boldsymbol{x} &\le \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\ \mathrm{d}\boldsymbol{x}\\
&= a(u,u) - \int_\Omega \sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}u\ \mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_\Omega a_0|u|^2\ \mathrm{d}\boldsymbol{x}\\
&\le a(u,u) + \sum_{i=1}^n \|a_i\|_{L^\infty(\Omega)}\Big(\epsilon\int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \frac{1}{4\epsilon}\int_\Omega |u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\Big)\\
&\qquad + \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega |u|^2\ \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,.
\end{aligned}$$

Tomando ϵ tal que

$$\epsilon\sum_{i=1}^n \|a_i\|_{L^\infty(\Omega)} \le \frac{\theta}{2}\,,$$

se tiene

$$\begin{aligned}
\theta\int_\Omega |\nabla u|^2\ \mathrm{d}\boldsymbol{x} &\le a(u,u) + \frac{\theta}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\ \mathrm{d}\boldsymbol{x}\\
&\quad + \left(\frac{1}{4\epsilon}\sum_{i=1}^n \|a_i\|_{L^\infty(\Omega)} + \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\int_\Omega |u|^2\ \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,;
\end{aligned}$$

entonces

$$\frac{\theta}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\ \mathrm{d}\boldsymbol{x} \le a(u,u) + \left(\frac{1}{4\epsilon}\sum_{i=1}^n \|a_i\|_{L^\infty(\Omega)} + \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\int_\Omega |u|^2\ \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,.$$

Tomando

$$\alpha = \frac{\theta}{2}\ \text{ y }\ \gamma = \frac{1}{4\epsilon}\sum_{i=1}^n \|a_i\|_{L^\infty(\Omega)} + \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)}$$

el lema queda demostrado. ☑

Se observa entonces que a no satisface las hipótesis del teorema de Lax-Milgram, excepto cuando $\gamma = 0$. Así se tiene el siguiente teorema, que nos da la unicidad bajo ciertas restricciones de los coeficientes.

[3]Desigualdad de Young: $ab \le \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon}b^2\,,\qquad \forall a,b\in\mathbb{R}\ ,\ \forall\epsilon\in\mathbb{R}_+$.

Teorema 4.3. *Existe un número* $\gamma \geq 0$ *tal que para cada* $\mu \geq \gamma$ *y cada* $f \in L^2(\Omega)$ *el problema*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u + \mu u & = & f & en \quad \Omega, \\ u & = & 0 & sobre \quad \partial\Omega \,, \end{array} \right. \tag{17}$$

tiene una única solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$.

Demostración. Poniendo para cada $\mu \geq \gamma$

$$a_\mu(u,v) = a(u,v) + \mu < u, v > , \qquad \forall u, v \in H_0^1(\Omega)\,,$$

donde $a(u,v)$ es la forma bilineal dada en el Lema 4.2 y $< u, v >$ es el producto interno canónico de $L^2(\Omega)$, y tomando γ como en el Lema 4.2, se tiene que

- a_μ es bilineal (por ser combinación lineal de formas bilineales).
- a_μ es continua (por ser suma de formas continuas).
- a_μ es coerciva (por el Lema 4.2).

Así las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram se satisfacen, por lo cual se concluye que el problema (17) tiene una única solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$. ☑

Un tratamiento más general para el problema de la unicidad, sin restricciones sobre los coeficientes del operador, es dado en [3]. El análisis es basado en un teorema del Análisis Funcional conocido como la Alternativa de Fredholm.

Etapa C

La regularidad de la solución se obtiene en virtud del siguiente teorema.

Teorema 4.4 ([3]). *Sean* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto acotado de clase* C^1, $a_{i,j} \in C^1(\bar{\Omega})$, $a_i \in C(\bar{\Omega})$, $\forall i, j = 1, \ldots, n$, $a_0 \in C^0(\bar{\Omega})$ *y* $f \in L^2(\Omega)$. *Si* $u \in H^1(\Omega)$ *es una solución débil del problema*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = f \qquad en \qquad \Omega\,,$$

entonces $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ *y*

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})\,,$$

donde $C = C(\Omega, \Omega', a_{i,j}, a_i, a_0)$.

Etapa D

Tomando $u \in H_0^1(\Omega)$, solución débil de (14), y suponiendo que $u \in C^2(\overline{\Omega})$, se tiene que $u = 0$ sobre $\partial\Omega$; además, integrando por partes (15) se obtiene

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\varphi \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad &+ \quad \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega a_i \frac{\partial u}{\partial x_j}\varphi \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &+ \quad \int_\Omega a_0 u\varphi \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega f\varphi \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,, \end{aligned}$$

lo cual al pasar a una igualdad puntual nos permite decir que efectivamente $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$ es una solución clásica de (14).

5. Una EDP no lineal

La ecuación diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0 \ \text{ sobre } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\,, \tag{18}$$

donde se busca $u = u(x,t)$, es conocida como la ecuación de Burger, a veces escrita en la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0\,.$$

Este es uno de los problemas más simples de EDP no lineal de primer orden que justifica el estudio variacional de la solución, porque dependiendo de la condición inicial, esta ecuación diferencial no tiene soluciones clásicas, como sucede por ejemplo si se considera como condición inicial la función

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & x < 0, \\ 0 & x > 0\,. \end{cases} \tag{19}$$

Entonces, mediante el método de las características, el problema de Cauchy (18)-(19) aplicado sobre $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ en forma separada, tiene como solución

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & 2x < t, \\ 0 & 2x > t\,, \end{cases}$$

que es claramente discontinua a lo largo de la curva $t = 2x$ (ver Figura 1) y por consiguiente no puede ser una solución en el sentido clásico, dado que no satisface (18) puntualmente a lo largo de $t = 2x$.

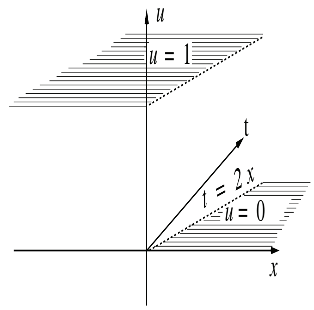

Figura 1. Solución del Problema de Riemann (18)-(19) para $t \neq 2x$.

En lo que concierne al método variacional, se considera una condición inicial un poco más general que (19). Sea

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} u_l & x < 0, \\ u_r & x > 0\,, \end{cases} \tag{20}$$

donde $0 \leq u_r < u_l$. Además se denota

$$\sigma = \frac{u_l + u_r}{2}\,, \quad D_l = \{(x,t) : t > \sigma x\} \quad \text{y} \quad D_r = \{(x,t) : t < \sigma x\}\,.$$

Etapa A

Las definiciones de solución clásica y de solución débil son las siguientes:

Definición 5.1. Se llama solución clásica del problema de Riemann (18)-(20) a una función u tal que $u \in C^1(D_l)$ y $u \in C^1(D_r)$ que lo satisface puntualmente, sobre cada uno de los conjuntos D_l y D_r.

Definición 5.2. Una solución débil del problema de Riemann (18)-(20) es una función $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} (u\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x})(x,t)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(x,0)\ \mathrm{d}x = 0,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)\,.$$

Para demostrar que toda solución clásica de (18)-(20) es una solución débil del mismo problema, sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ tal que $\operatorname{sop}(\varphi) \subset D_{\mathcal{R}a}$, $\mathcal{R}a \in \mathbb{R}_+$, donde

$$D_{\mathcal{R}a} = \{(x,t) : 0 < t \leq T, |x| \leq \mathcal{R}a\}$$

(ver Figura 2). Multiplicando (18) por φ e integrando sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}_+} \left(\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) \right\} \varphi \right)(x,t)\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\mathcal{R}a}^{\mathcal{R}a}\int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t}\varphi\right)(x,t)\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}x + \int_{-\mathcal{R}a}^{\mathcal{R}a}\int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)\varphi\right)(x,t)\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}x \\ &= I_1 + I_2\,. \end{aligned}$$

Luego, al integrar por partes, reemplazar las condiciones iniciales (20) y utilizar el hecho que $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, se tiene

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\mathcal{R}a}^{\mathcal{R}a} (u\varphi)(x,t)\Big|_{t=0}^{t=T} \, \mathrm{d}x - \int_{-\mathcal{R}a}^{\mathcal{R}a}\int_0^T \left(u\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)(x,t)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\mathcal{R}a}^{\mathcal{R}a} -u_0(x)\varphi(x,0)\, \mathrm{d}x - \int_{-\mathcal{R}a}^{\mathcal{R}a}\int_0^T \left(u\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)(x,t)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x\,, \\ I_2 &= \int_0^T \left(\frac{u^2}{2}\varphi\right)(x,t)\Big|_{x=-\mathrm{a}}^{x=\mathrm{a}} \, \mathrm{d}t - \int_{-\mathrm{a}}^{\mathrm{a}}\int_0^T \left(\frac{u^2}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)(x,t)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x \\ &= -\int_{-\mathrm{a}}^{\mathrm{a}}\int_0^T \left(\frac{u^2}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)(x,t)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Ahora, dado que $I_1 + I_2 = 0$, se ve que efectivamente u es una solución débil de (18)-(20).

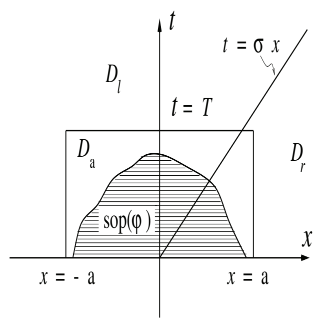

Figura 2. Espacios de integración $D_{\mathcal{R}a}$, D_l y D_r.

Etapa B

La existencia de la solución débil es clara debido a que está dada explícitamente por

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & \sigma x < t\,, \\ u_r & \sigma x > t\,, \end{cases}$$

y la unicidad se garantiza en virtud del teorema de Kruzǩov, ver [4, 5]. El aspecto principal para la demostración de la unicidad en ecuaciones del tipo en estudio para este caso es la incorporación de una condición adicional a la definición de solución débil, llamada condición de entropía. Para mayores detalles se puede consultar [4, 6].

Etapa C

Esta etapa es una de las más difíciles en problemas no lineales. Para el caso, y debido a la analiticidad de u, se tiene que la solución débil $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, para una condición inicial $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Para mayores detalles y problemas más generales relacionados con la ecuación consultar [6].

Etapa D

Se supone que u es una solución débil de (18)-(20) y $u \in C^1(D_l)$. Utilizando el hecho de que φ tiene soporte compacto en D_l, y después de integrar por partes la igualdad dada en la definición 5.2, se tiene

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_0^{\sigma x} \left((\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right))\varphi \right)(x,t) \text{ d}x \text{ d}t = 0 \,, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(D_l) \,,$$

lo que implica

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0 \qquad \text{sobre}\, D_l \,. \tag{21}$$

Ahora, multiplicando (21) por $\varphi \in \mathcal{D}(D_l)$ e integrando por partes sobre D_l, se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_0^{\sigma x} (u\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x})(x,t) \text{ d}x \text{ d}t + \int_{-\infty}^0 u(x,0)\varphi(x,0) \text{ d}x = 0,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(D_l) \,.$$

Comparando con la igualdad dada en la definición 5.2, restringida a D_l, se tiene

$$\int_{-\infty}^0 (u(x,0) - u_0(x))\varphi(x,0) \text{ d}x = 0, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(D_l) \,.$$

Así, $u(x,0) = u_0(x) = u_l$ para $x < 0$. La demostración que (18)-(20) se satisface sobre D_r se hace de manera similar a lo hecho para D_l. En conclusión, u es una solución clásica de (18)-(20).

6. Conclusiones

El método variacional o enfoque variacional es una herramienta muy útil para el estudio cualitativo de ecuaciones diferenciales parciales por permitir estudiar las soluciones en un ambiente muy general, y así superar la problemática presentada por los métodos clásicos. Además, su fácil adaptabilidad a diversas situaciones, expuesta de manera parcial en el presente trabajo, ha permitido que sea la técnica preponderante para el análisis de problemas de ecuaciones diferenciales parciales.

Agradecimientos

Los autores agradecen el financiamiento parcial otorgado por el proyecto 104709 01/FE de la Universidad del Bío-Bío y la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo.

Referencias

[1] Brézis H., *Análisis Funcional,* Alianza Editorial, Madrid, 1984.

[2] Ciarlet P.G., *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[3] Evans L., *Partial Differential Equations,* American Mathematical Society, Rhode Island, 1998.

[4] Godlewski E. and Raviart P.A., *Hyperbolic Systems of Conservation Laws,* Mathematiques & Applications, France, 1991.

[5] Kružkov S.N., "First order quasilinear equations in several independent variables", *Math. USSR-Sb.*, 10 (1970), 217–243.

[6] Smoller J., *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations,* Springer-Verlag, New York, 1983.