LOS SISTEMAS CONCEPTUALES DE LOS RACIONALES QUE POSEEN LOS NIÑOS Y NIÑAS DE QUINTO GRADO – UNA PERSPECTIVA SEMIÓTICA

LIGIA INÉS GARCÍA CASTRO

DIRECTOR

CARLOS EDUARDO VASCO URIBE, *Ph. D.*

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de Doctora en Ciencias Sociales, Niñez y Juventud

CENTRO DE ESTUDIOS AVANZADOS EN NIÑEZ Y JUVENTUD UNIVERSIDAD DE MANIZALES – CINDE

DOCTORADO EN CIENCIAS SOCIALES, NIÑEZ Y JUVENTUD

ENTIDADES COOPERANTES NACIONALES: Universidad de Caldas, Universidad Autónoma de Manizales, Universidad Pedagógica Nacional, Universidad de Antioquia, Universidad Central, Universidad Nacional de Colombia, Universidad Distrital, Pontificia Universidad Javeriana ENTIDADES COOPERANTES INTERNACIONALES: Universidad de los Andes de Venezuela, Universidad Central de Venezuela, Universidad del Nordeste de Argentina, Universidad Diego Portales de Chile, Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo-Brasil, Universidad Católica Silva Henríquez de Chile, Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri-Brasil, Facultad Latinoamericana de Ciencias Sociales (FLACSO), Consejo Latinoamericano de Ciencias Sociales (CLACSO).

MANIZALES

2020

Dedicatoria

Agradecimientos

Contenido

Lista de Figuras

Lista de Tablas

Dedicatoria

Considero que la primera persona a quien dedico este trabajo es a nuestro maestro Vasco, sin él, su dedicación, sus enormes reflexiones y sobre todo su ser maestro en toda la inmensidad de esa bella profesión, que me fue llevando de la mano y además me permitió aprender mucho más de las cualidades que debe tener un verdadero maestro. Mi querido profe Vasco, todo mi cariño y admiración hacia usted!

Después de muchos años de ir y venir en este proceso, de algunas frustraciones, profundas satisfacciones e incontables aprendizajes no solo en mi vida profesional sino en mi crecimiento personal, mi dedicación y homenaje es para mi hija Daniela, quien me ha infundido la fuerza para seguir adelante y no decaer.

A ella, agradezco su comprensión y la confianza que siempre tuvo en mi y en el lindo proceso llevado a cabo con los niños y niñas que han sido mi inspiración permanente en mi ser de maestra.

También quiero dedicarle este maravilloso momento a mi familia, mis hermanos y sobrinos que siempre han estado para mi.

Agradecimientos

Durante todos estos años, han sido muchas las personas que me han alentado y acompañado en este proceso, es por esto que, a mis compañeros y docentes de línea del doctorado, a Esteban, mi querido amigo y compañero de trabajo, Jhon Fredy, mis más sinceros agradecimientos por su compañía constante y sobre todo su solidaridad.

No puedo dejar de pensar en los niños y niñas con quienes pude recoger el tesoro en el que se convirtieron los datos de la investigación, a su profesora Gisela y Nhora por su gran vocación de maestras.

A Oscar Eugenio quien fue un interlocutor que con su rigurosidad aportó importantes reflexiones que permitieron ir afinando cada vez más este ejercicio investigativo plasmado en este documento.

A todos, infinitas gracias por su acompañamiento.

DOCTORADO EN CIENCIAS SOCIALES, NIÑEZ Y JUVENTUD

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN Y DESARROLLO HUMANO

CINDE-UNIVERSIDAD DE MANIZALES

MAESTRÍA EN DESARROLLO EDUCATIVO Y SOCIAL

CINDE – UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

PROCESO DE SISTEMATIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO PRODUCIDO EN LAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN.

(FICHA DE PROCESAMIENTO DE LAS INVESTIGACIONES)

<table>
<tr><th colspan="3">1. Datos de Identificación de la ficha</th></tr>
<tr><td rowspan="7">Fecha de Elaboración:

Diciembre de 2020</td><td rowspan="4">Responsable de Elaboración

Nombre: Ligia Inés García Castro</td><td>Tipo de documento</td></tr>
<tr><td>Tesis de maestría ( )</td></tr>
<tr><td>Tesis de doctorado (X)</td></tr>
<tr><td>Informe de investigación ( )</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Relación con el documento :
Autor del documento (x)
Sistematizador ( )
Estudiante de doctorado (x)
Estudiante de maestría ( )</td><td>Articulo ( )</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Otros ( )
Cual: ____________________</td></tr>
<tr><td>Otro:
Cual:</td></tr>
<tr><th colspan="3">2. Datos de identificación de la investigación</th></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="16">Grupo (os) Línea (as) de investigación donde fue desarrollada la investigación</td><td>Grupo(s)</td><td colspan="2">Líneas(as)</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Perspectivas Políticas, Éticas y

Morales de la Niñez y la Juventud</td><td>Socialización Política y Construcción de Subjetividades</td><td></td></tr>
<tr><td>Desarrollo Psicosocial</td><td></td></tr>
<tr><td>Construcción de las Paces</td><td></td></tr>
<tr><td>Infancias, Juventudes y Ejercicio de la Ciudadanía</td><td></td></tr>
<tr><td>Políticas Públicas y Programas en Niñez y Juventud</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="7">Educación y Pedagogía: Imaginarios,

Saberes e Intersubjetividades</td><td>Educación y Pedagogía</td><td></td></tr>
<tr><td>Praxis Cognitivo-Emotiva en Contextos Educativos y Sociales</td><td>x</td></tr>
<tr><td>Infancias y Familias en la Cultura</td><td></td></tr>
<tr><td>Ambientes Educativos</td><td></td></tr>
<tr><td>Desarrollo Humano</td><td></td></tr>
<tr><td>Gestión Educativa</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Jóvenes, Culturas y Poderes</td><td>Jóvenes, Culturas y Poderes</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Otro grupo

Cual:</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Otra línea cual

Cual:</td><td></td></tr>
<tr><td>Título</td><td colspan="3">LOS SISTEMAS CONCEPTUALES DE LOS RACIONALES QUE POSEEN LOS NIÑOS Y NIÑASY NIÑAS DE QUINTO GRADO – UNA PERSPECTIVA SEMIÓTICA</td></tr>
<tr><td>Autor/es/as</td><td colspan="3">LIGIA INES GARCIA CASTRO</td></tr>
<tr><td>Tutor-a co-tutora</td><td colspan="3">Dr. CARLOS EDUARDO VASCO URIBE</td></tr>
<tr><td>Año de finalización de la investigación</td><td colspan="3">2020</td></tr>
<tr><td>Año de publicación</td><td colspan="3">2020</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">3. Información general de la investigación</td></tr>
<tr><td>Temas abordados</td><td>Didáctica de la matemática, aprendizaje de los números racionales en estudiantes de quinto grado de básica primaria</td></tr>
<tr><td>Palabras clave</td><td>Sistemas conceptuales de los racionales. Semiótica en la Didáctica de la Matemática. Teoría General de Modelos y Teorías</td></tr>
<tr><td>Preguntas que guían el proceso de la investigación</td><td>¿Cuáles son los aspectos (componentes, relaciones y operaciones) de los modelos mentales sobre los números racionales que asocian los niños y niñas de quinto grado a la interpretación de las representaciones y transformaciones semióticas que se les presentan, y a las formas como expresan sus modelos a través de las representaciones que ellos producen y de las transformaciones semióticas que realizan para resolver problemas escolares?</td></tr>
<tr><td>Fines de la investigación</td><td>- Reconstruir los aspectos de los modelos mentales que asocian los niños y niñas de quinto grado a partir de las representaciones y transformaciones semióticas de los racionales que se presentan en las situaciones matemáticas ofrecidas por los maestros o los autores de los libros de texto.
- Reconstruir los aspectos de los modelos mentales que expresan e interpretan los niños y niñas de quinto grado a partir de las representaciones y transformaciones semióticas que ponen en juego desde la dinámica del modelo.
- Reconocer la teoría como externalización de los modelos en el registro semiótico de la lengua natural y el subregistro técnico de la misma sobre los racionales que construyen los niños a partir de la interpretación y expresión de los modelos mentales que se asocian a las representaciones y transformaciones semióticas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Identificación y <u>definición</u> de categorías
(máximo 500 palabras por cada categoría) Debe extraer las ideas principales y párrafos señalando el número de página</td></tr>
<tr><td colspan="2">Sistemas conceptuales de los racionales (p.62-63):

Desde los autores identificados en el estado del arte realizado y que se constituyen en el marco teórico sobre el cual se fundamenta inicialmente la tesis, a partir de los constructos de Kieren (1983); con los subconstructos de Behr, Lesh, Post y Silver (1983); las interpretaciones de Nesher (1988); las islas del archipiélago de Vasco (1994) y, finalmente, las interpretaciones de Fandiño (2009) sobresalen algunos aspectos que aportan a la construcción de los tres aspectos considerados para la comprensión de los sistemas de los números racionales:

La consideración de un constructo central, que es el Sistema Operador (o Transformador), está presente en los diferentes modelos, al reconocer que en los racionales siempre hay un nuevo tipo</td></tr>
</table>

de “cantidad operativa” o “número activo”, que actúa sobre otra cantidad o número, bien sea para achicarlo, agrandarlo, o “empujarlo”.

Al descomponer el Sistema Operador en sus elementos, relaciones y operaciones y, de acuerdo con los mecanismos constructivos propuestos por Kieren: el de partición y el de equivalencia, es posible darle cabida a los siguientes sistemas que también son compartidos por Vasco en su modelo del archipiélago fraccionario:

El Sistema Partidor, debido a la importancia que tiene en el sistema fraccionario la partición “en partes iguales” y la representación más comúnmente empleada que es ‘a/b’, leído como “a b-avos”.

A partir del sistema anterior y dada la necesidad de establecer diferencia entre el partidor o fracturador de objetos y el más abstracto partidor o fracturador de cantidades de distintas magnitudes físicas, surge el Sistema Medidor, que se refiere al reconocimiento de cierta magnitud en la que cada cantidad puede repartirse “equitativamente” en un número finito de cantidades “de la misma medida”.

El Sistema Razón, emerge al hacer explícito un sentido de relación entre dos magnitudes (Fandiño, 2009) o entre dos números y se remite al uso geométrico y aritmético en Euclides y Eudoxo, en el antiguo Egipto, Mesopotamia, la India y la China.

Sistemas de representación semiótica de los racionales (p.69-70)

Este camino de interpretar teorías en los modelos y desagregar las teorías y los modelos como sistemas, que al construirse requieren ser interpretados o representados, se desplaza entre la TGPS y la TGMT permeadas permanentemente por la semiótica que se sistematiza en la Teoría General de Representaciones e Interpretaciones — TGRI —.

Por lo tanto, cuando ya se cuenta con varios modelos mentales públicos, en este caso de los sistemas conceptuales de los números racionales, se requiere representarlos desde los tres aspectos: sustrato/dinámica/estructura, pero que dado el carácter abstracto de los conceptos matemáticos, el autor, el maestro, el autor del libro de texto y el estudiante se valen de las representaciones semióticas consideradas como Sistemas de Representación Semiótica de los Racionales, producidos por los autores, los libros de textos y los maestros en la actividad matemática que se despliega en el aula.

Este ejercicio de “expresión e interpretación”, es realizado por un agente noético-semiótico al interpretar las teorías, construir y reconstruir los modelos.

Cada sistema: operador, partidor, medidor y razón con sus componentes, relaciones y operaciones, que constituyen los modelos conceptuales de los racionales y los morfismos de interpretación y expresión que permiten expresarlo mediante lenguajes y registros semióticos con sus productos que son las representaciones semióticas, permiten el acceso al objeto matemático, a partir de las acciones de tratamiento y conversión que sólo puede lograrse si se dispone al menos de dos registros semióticos diferentes para producir dos representaciones en donde la representación y el objeto representado puedan diferenciarse.

Teniendo en cuenta los modelos mentales públicos de los racionales, la actividad semiótica que permiten interpretarlos y expresarlos mediante registros semióticos que producen los sistemas de representación semiótica que se han utilizado en las matemáticas escolares, se hace necesario tomar por separado cada uno de los sistemas conceptuales identificados en la literatura y en la actividad del docente, para dilucidar y clasificar las diferentes representaciones semióticas que se encuentran en textos, tableros, cuadernos e interacciones de aula, y asignarlas al registro que las produjo, descubrir su origen, la manera como ha sido producida, que supone entrar en la estructura interna del registro y desde allí descubrir el “árbol genealógico” de la representación semiótica.

Por lo tanto, no es posible analizar la representación semiótica independientemente del registro que la produce, dado que en la actividad matemática nos movemos entre la diversidad de registros de representación semiótica, que permiten la construcción de diversas representaciones semióticas; la diferenciación entre representante – representado, es decir, la forma y contenido de una representación semiótica y la coordinación de registros de representación semiótica, que posibilita la conversión de las representaciones semióticas (Duval, 1999, 2017).

5. Actores
(Población, muestra, unidad de análisis, unidad de trabajo, comunidad objetivo)

(caracterizar cada una de ellas)

El estudio se enfocó en el trabajo con niños y niñas que se encontraran cursando quinto grado, teniendo en cuenta que en el grado cuarto ya habían adquirido algunas nociones básicas de los sistemas conceptuales de los racionales, en especial del concepto de fracción pero para el grado quinto se van incorporando otros sistemas conceptuales en la resolución de problemas matemáticos con los racionales a través de sus representaciones y transformaciones semióticas.

Participantes en el estudio

Se seleccionaron dos grupos del grado quinto de una institución educativa pública de Manizales, el primer grupo con 20 estudiantes y el segundo grupo con 26 estudiantes. Las edades de los niños y niñas se encuentran entre 10 y 13 años, ambos grupos son mixtos pero con un porcentaje mayor de niños que de niñas; el estrato socioeconómico al que pertenecen los niños y niñas está entre el 1 y el 3, todos los niños y niñas viven con sus familias conformadas por 4 miembros en promedio. Además de lo anterior, se encuentran en buen estado de salud y con condiciones escolares adecuadas.

Al recoger la información derivada de las actividades realizadas por los 46 estudiantes del grado quinto, se seleccionaron 6 estudiantes (3 estudiantes de cada grupo), con quienes se hizo el análisis final y por ello son considerados los participantes en el estudio.

Teniendo en cuenta que se realizaron varios pilotajes, en donde algunos de ellos fueron desarrollados a partir de investigaciones previas, se presentan los estudiantes con los que finalmente se seleccionó la información relevante que corresponde a los datos sobre los cuales se hizo el análisis y discusión.

De acuerdo con la pregunta de investigación y los objetivos propuestos, después de haber recogido toda la información en ambos grupos, se seleccionaron los datos teniendo en cuenta los siguientes criterios de inclusión:

-La edad: se privilegiaron los datos de los niños que se encontraban entre los 10 y los 13 años correspondiente a la edad establecida para los niños que se encuentran en grado quinto, de tal manera que no se contara con estudiantes extraedad. Se solicitó además con el consentimiento informado de la institución y de los padres de familia.

-El nivel cognitivo: se indagó con la maestra acerca de la historia académica de los niños y niñas, de tal manera que se pudiera constatar que atendía al momento evolutivo y a la edad y el grado de tal manera que al momento de desarrollar las actividades propuestas no presentaran dificultades relacionadas con el aprendizaje.

-El nivel de participación de los niños, así como su disponibilidad para brindar información adicional que permitiera constatar los procesos noetico-semióticos presentes en la actividad matemática.

-Se tuvo en cuenta en la selección de la información, el material que contó con mayores recursos semióticos empleados por los niños y niñas, de tal manera que se pudieran evidenciar las representaciones semióticas que producen e interpretan y las transformaciones semióticas que ellos producen.

6. Identificación y definición de los escenarios y contextos sociales en los que se desarrolla la investigación
(máximo 200 palabras)

Se realizaron cuatro sesiones (cada una de ellas con dos actividades), por espacio de dos meses en ambos grupos, en donde se contó con una actividad semanal que se llevaba al aula habiendo tenido una previa preparación de la agenda con la maestra de tal manera que no se interfiriera en las actividades escolares cotidianas. Las actividades propuestas fueron desarrolladas con los niños por un espacio de tres horas cada sesión.

La investigadora con apoyo de la maestra presentaba la actividad a los niños y niñas, se daban las instrucciones para su resolución, se aclaraban las dudas que planteaban los estudiantes y se procedía a observar su desempeño durante la ejecución.

En algunos momentos de la realización de las actividades se hicieron algunos vídeos por considerarlos necesarios para tener evidencias del tratamiento y la conversión de las representaciones semióticas que realizan los niños durante la actividad matemática, teniendo en cuenta la necesidad de reconocer procesos cognitivos en el momento en el que ellos ocurren.

En algunos casos y después de haber revisado el material que proporcionaban los niños, se requirió la realización de algunas preguntas adicionales por parte de la investigadora que pudiera aclarar algunas de las respuestas. Esta entrevista se realizó en un espacio diferente al aula ya que solo se hizo con algunos estudiantes.

Atendiendo a las implicaciones éticas que conlleva la investigación educativa, las actividades propuestas se desarrollaron con la totalidad de los estudiantes de ambos grupos del grado quinto, ya que se convierte en una experiencia de aprendizaje de la cual no podría excluirse a ningún estudiante.

7. Identificación y definición de supuestos epistemológicos que respaldan la investigación
(máximo 500 palabras)

Debe extraer las ideas principales y párrafos señalando el número de página

Al descomponer lo real e identificar un proceso, en este caso educativo, y más concretamente, un proceso didáctico centrado en el aula de matemáticas, se reconstruyen modelos que permiten interpretar las teorías, dando lugar a la perspectiva epistemológica de la Teoría General de Modelos y Teorías —TGMT—, (autores) entendiendo que las teorías formuladas en lenguaje articulado nos van a permitir reconocer algunos aspectos derivados de desagregar la realidad, en este caso, el proceso real del aprendizaje matemático, recortarlo hasta el numérico y seguir desagregando hasta llegar al aprendizaje de los de los números racionales en estudiantes de 4º y de quinto grado de básica primaria. (p.15).

De acuerdo con Vasco (2014), la TGRI comienza desde antes de la TGPS y puede considerarse un discurso intermedio que articula el flujo mental de las imágenes, modelos y pensamientos —TGMT— con los procesos y las acciones que podamos realizar para orientarlos, detenerlos o acelerarlos —TGPS—. En honor a Locke, Peirce y De Saussure, esta teoría se podría llamar "semiología", "semiótica" o "sémica", la cual se intenta sistematizar en una Teoría General de Representaciones e Interpretaciones —TGRI—.(p.14)

Desde este planteamiento inicial, y después de intentar reconocer los procesos y subprocesos que corresponden a la Teoría General de Procesos —TGP—, reinterpretada desde la Teoría General de Sistemas —TGS—, Vasco (1995, 2014) se propuso configurar una Teoría General de Procesos y Sistemas —TGPS—, partiendo de los procesos y subprocesos reales hacia los sistemas hipotéticos que llamamos "modelos mentales", los cuales, a su vez, representan parcialmente algunos de esos procesos y subprocesos reales, y sobre los cuales se interpretan las teorías mentales por medio de los morfismos de interpretación, lo que nos sitúa en la Teoría General de Modelos y Teorías —TGMT— y en la Teoría General de Representaciones e Interpretaciones —TGRI—.(p.62)

Una cuarta y última distinción clave entre dos tipos de representaciones y dos tipos de semiosis es necesaria para continuar. Para los investigadores que intentamos relacionar o enlazar las teorías verbales orales y escritas y los dibujos y diagramas de los libros de texto o de los tableros y láminas con los modelos mentales que construyen los niños y niñas en los últimos años de la Educación Básica Primaria cuando aprenden a manejar los sistemas numéricos usuales, en particular sobre los conjuntos de números racionales, se requiere otra fina distinción en una de las dos categorías clave de la Teoría General de Representaciones e Interpretaciones —TGRI— que exige diferenciar, entre todas las representaciones externas y públicas, aquellas que se producen consciente e intencionalmente por un agente noético-semiótico con la intención de expresar sus modelos y teorías internas y privadas para intentar comunicarlas a otros, que llamaremos "expresiones".(p.70)

8. Identificación y definición del enfoque teórico (máximo 500 palabras)
Debe extraer las ideas principales y párrafos señalando el número de página, señalar principales autores consultados

Los sistemas conceptuales de los números racionales

La enseñanza y el aprendizaje de los sistemas numéricos llamados números racionales, ha sido una preocupación latente, y vigente en la Didáctica de las Matemáticas debido a las dificultades para lograr su aprendizaje y comprensión (Kieren, 1980; Behr; Lest; Post & Silver, 1983; Freudenthal, 1983; Vergnaud, 1983; Nesher, 1985; Vasco, 1994; Adjiaje, 1999; Obando, 2003, 2013; Pontón, 2008, 2012; Fandiño, 2009).

De acuerdo con el recorrido teórico llevado a cabo en el estudio, se pudo concluir:

- Kieren sugiere que la construcción del concepto de número racional debe estar compuesta de cinco subconstructos: medida, cociente, razón numérica, operador multiplicativo y relación parte-todo (1983), posteriormente Ohlsson (1988) reconoce los subconstructos de Kieren pero asume que para lograr su aprendizaje debe estudiarse la relación entre ellos, asignándoles una estructura global.

- Tanto para Best, Post y Silver (1983); Nesher (1988); Freudenthal (1983); Vergnaud (1983); Ohlsson (1988); Vasco (1994) y Fandiño (2009), en la construcción del concepto de número racional es reiterativo el operador multiplicativo.

- La fracción como relación parte-todo ha predominado en los procesos de enseñanza de los racionales heredado de la afirmación de Kieren, cuando afirma que para la construcción del número racional se requiere que los aprendices se dediquen a la realización de actividades físicas o mentales en las que se pueda asociar ‘a/b’ (Kieren, 1983), lo que ha llevado a un excesivo uso del partidor físico como constructo central (Vasco, 1994; Fandiño, 2009).

Posterior a este análisis de los modelos y teorías en torno a los racionales, se construye el siguiente modelo que parte de los presupuestos y constructos que propone Kieren (1983), las islas del modelo del archipiélago fraccionario de Vasco (1994) que consideramos los sistemas conceptuales y la perspectiva noética y semiótica de las fracciones que expone Fandiño (2009).

El modelo parte de la consideración de un constructo central, que es el Sistema Operador (o Transformador), al reconocer que en los racionales siempre hay un nuevo tipo de cantidad operativa o número activo, que actúa sobre otra cantidad bien sea para achicarla, agrandarla, o empujarla.

Al descomponer el Sistema Operador en sus elementos, relaciones y operaciones y, de acuerdo con los mecanismos constructivos propuestos por Kieren: partición y equivalencia, fue posible aproximarnos a reconocer que del sistema operador surgen otros sistemas conceptuales como el operador partidor y el operador medidor que también son reconocidos como otras islas en el modelo del archipiélago fraccionario (Vasco, 1994).

El Sistema Operador Partidor, que ha sido tradicionalmente el más reconocido por los estudiantes ya que da inicio al aprendizaje de los racionales y su importancia en la construcción del concepto de fraccionario; la partición “en partes iguales” y la representación más comúnmente empleada que es ‘a/b’, leído como a b-avos.

Finalmente el Sistema Razón, que permite hacer explícito el sentido de la relación entre dos magnitudes geométricas como longitud, área y volumen (Fandiño, 2009) o entre dos cantidades.

La Semiótica en el aprendizaje de los racionales

La semiótica y su incursión en la Didáctica de las Matemáticas empieza a reconocerse de manera explícita desde mediados de los años 90, con Duval (1995/1999); Radford (1997; Saénz-Ludlow (1997) con los juegos de interpretación de Peirce; y Juan Díaz-Godino (2003) con el enfoque onto-semiótico – EOS.

Posteriormente la publicación del Educational Studies in Mathematics, en su edición especial del 2006, junto con la publicación de la Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, publicado también en el año 2006, marcaron un hito en esta línea de investigación (Otte; Sáenz-Ludlow; Radford; Ernest; DuvalL; Presmeg, 2006) que se recoge y consolida en el texto Semiótica en la Didáctica de la Matemática (D’Amore; Fandiño; Iori, 2013).

En este estudio y para expresar e interpretar las teorías de los racionales en los modelos, la perspectiva semiótica se precisa con los aportes de Duval (1995/99, 2004, 2006a, 2006b, 2017) desde los siguientes postulados que se expresan en su teoría noético-semiótica:

- ✔ El reconocimiento y la distinción entre los registros semióticos y las representaciones semióticas; los registros semióticos son los sistemas productores de las representaciones semióticas que se ponen en escena durante la actividad matemática por medio de las representaciones semióticas.

- ✔ El reconocimiento y la distinción entre as representaciones semióticas que se producen, se potencian las actividades cognitivas de transformación de las representaciones semióticas, que son de dos tipos: los tratamientos cuando se presentan dentro de un mismo registro y las conversiones cuando ocurren entre dos registros.

- ✔ La diferenciación de la semiosis expresiva o proyectiva de la semiosis interpretativa o inyectiva dado que, al analizar la actividad matemática, la distinción entre la expresión de una representación - al intentar comunicar un modelo mental a otros -, de la interpretación de una representación - al tratar de interpretarla para reconstruir los modelos mentales de quien la produjo -; nos permite reconocer las demandas cognitivas en cada una de ellas.

- La necesidad de mantener en primer plano la distinción entre el objeto matemático de Duval que para este estudio corresponde a los sistemas conceptuales del número racional con sus componentes, relaciones y operaciones y sus distintas representaciones semióticas, que no había sido considerada de manera explícita en los modelos y teorías existentes sobre los racionales.

9. Identificación y definición del diseño metodológico (máximo 500 palabras)
Debe extraer las ideas principales y párrafos señalando el número de página

Dada la pretensión del estudio y el enfoque de teorías y modelos (Vasco, 2013), se acoge una perspectiva cualitativa comprensiva en tanto se hace un ejercicio inferencial que parte de la producción e interpretación de las representaciones semióticas y sus transformaciones que realizan los niños de quinto grado en la actividad matemática que despliegan en un entorno natural de aula.

La reconstrucción de los aspectos de los modelos mentales sobre los racionales no se hace desde una lógica deductiva aunque se cuente con categorías iniciales de análisis que se construyeron a partir de inferir los aspectos de los modelos y las teorías propuestas por autores y maestros.

El ejercicio inductivo que se tuvo en cuenta en el análisis permitió emerger de los datos, aquellos aspectos de los modelos mentales que se hacen presentes en la producción e interpretación de representaciones semióticas y en las transformaciones semióticas que realizan los niños de quinto grado.

Por lo tanto, no se trata de comprobar hipótesis o validar las teorías existentes, sino aportar a la comprensión que poseen los niños de los sistemas conceptuales de los racionales, adoptando una perspectiva noético-semiótica como recurso analítico.

El proceso metodológico llevado a cabo va de la teoría públicamente accesible de los números racionales —como asumimos que estaría interpretada en los modelos mentales estáticos y dinámicos que les atribuimos a la comunidad científica de la Didáctica de las Matemáticas, los autores de los libros de texto y a los docentes—hacia los modelos mentales estáticos y dinámicos que construyen los alumnos a partir de las representaciones públicas producidas por ellos mismos en distintos registros semióticos como el lenguaje natural verbal oral y escrito, el lenguaje técnico-simbólico de la aritmética escolar o en otros registros gestuales y gráficos.

10. Identificación y definición de los principales <u>hallazgos (empíricos y teóricos)</u> (máximo 800 palabras)

Debe extraer las ideas principales y párrafos señalando el número de página

Teniendo en cuenta el objetivo del estudio, que fue comprender los modelos mentales sobre los números racionales que poseen los niños y niñas de quinto grado, es necesario precisar que dichos modelos se manifestaron de manera parcial en las representaciones semióticas expresivas producidas por ellos a través de algunos registros semióticos que reconocen y emplean, con el fin de comunicar algunos rasgos del modelo mental que activaron para resolver problemas y responder a las preguntas propuestas por la docente y la investigadora. Además, aun sin pretenderlo, los niños dan algunas pistas de los procesos de interpretación de algunas de las representaciones semióticas externas y públicas que se les proponen en la clase; también dan pistas sobre los procesos de cálculo mental apoyados en tratamientos y conversiones de esas representaciones semióticas mentales, privadas e internas, para obtener una respuesta verbalizada de manera oral o escrita o escrita a las tareas y preguntas derivadas de la actividad matemática propuesta.(p.201)

Al interpretar los modelos y teorías de los matemáticos, tal como se presentaron en el marco teórico, el operador ha sido considerado como uno de los constructos principales por Kieren (1983); como transformador por Nesher (1985) y, como operador multiplicativo por Behr, Post & Silver (1983). Vergnaud (1983) y Ohlsson (1988), y también Freudenthal (1983), le otorgan mayor importancia cuando afirman que el operador está presente en la construcción de todos los sistemas numéricos, no solo los sistemas de números racionales.

Con el fin de refinar la categoría de operador, fue necesario acudir al modelo del archipiélago fraccionario expuesto por Vasco (1994), en donde se utiliza la metáfora de que los operadores activos (achicadores y agrandadores) son animalitos que viven en la isla de los operadores, la cual representa la isla principal del archipiélago, desde la cual se pueden construir con naturalidad puentes hacia la comprensión de las otras islas, las de los partidores, de los medidores y de las razones. (p.202)

Los puentes entre los operadores y su cercanía con los partidores se hacen evidentes, tanto en la partición física concreta, cuando el operador indica la división de la unidad en partes iguales sin tener en cuenta a qué corresponde la igualdad (“¿iguales de qué?”), como en la partición geométrica intuitiva, en donde la unidad es relativa a la magnitud que se quiere medir, prestando atención al sistema de medida, lo que facilita el acercamiento a la partición matemática abstracta que lleva a la comprensión de los operadores como medidores cuando se logra reconocer cuándo operan sobre cantidades de alguna magnitud específica, generalmente la longitud o el área; finalmente, de manera indirecta, los operadores ayudan a comprender mejor las razones, entendiendo la razón como relación estática entre dos números o dos cantidades que están en una situación de proporcionalidad directa o inversa, pues esa razón se da precisamente porque los dos números o las dos cantidades relacionadas se pueden obtener una de la otra por medio de uno de los dos operadores de una pareja de inversos achicador/agrandador.(p.203)

El operador es el aspecto dinámico del modelo del sistema partidor que actúa sobre una cantidad que corresponde a una hoja, para convertirla en dos mitades, en donde, al hablar de las dos mitades se hace alusión al partidor físico y no al partidor matemático, el cual supone la división de la unidad en partes equitativas o equivalentes, atendiendo a una misma dimensión, que para estos casos suele ser la longitud de un borde de la página o el área de la misma. En este caso, el operador partidor (físico) se presenta en el niño por imitación de las acciones de romper o partir la hoja realizadas por el maestro, lo que dificulta –o aún impide– la conceptualización del partidor matemático. A esa conceptualización solo se tiene una posibilidad de aproximación desde el operador partidor geométrico en el registro gráfico, por el uso del recurso semiótico de las formas geométricas (como líneas rectas y los rectángulos), el cual permite avanzar en la producción de representaciones públicas que reflejen la actividad mental de construir un partidor matemático a partir de los partidores geométricos que representan los partidores físicos (p.209)

11. Observaciones hechas por los autores de la ficha
(Esta casilla es fundamental para la configuración de las conclusiones del proceso de sistematización)

12. bibliografía citada en la investigación

Balachef, N. (2004). Marco, Registro y Concepción. *Revista EMA*, Vol. 9, (3). pp. 181-204.

Behr, M., R. Lesh, T. Post & E. Silver (1983). "*Rational number concepts*", en R. Lesh y M. Landau (eds.), Acquisition of Mathematics Concepts and Processes (pp. 91-125). Nueva York, Academic Press

Brousseau, G. (1986) Fundamentos y métodos de la Didáctica de las Matemáticas. En: *Recherches en didactique des mathematiques*.2 (3), 37 – 127.

Coffey, A. & Atkinson, P. (2003). *Encontrar el sentido a los datos cualitativos: estrategias complementarias de investigación*. Editorial de la Universidad de Antioquia.

Confrey, J. & Carrejo, D. (2005). Ratio and fraction: The difference between epistemological complementarity and conflict. In D. Carraher & R. Nemirovsky (Eds.), *Journal for Research in Mathematics Education*. Monograph, (13). Reston, VA: NCTM.

Confrey, J. & Maloney, A. (2008*). From fraction to rational number: Diagnostic e-learning trajectories approach* (DELTA) to rational number reasoning.

Cortina, J., Zuñiga, C. & Visnovska, J. (2013) La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones. *Educación Matemática*, vol. 25, núm. 2, agosto-, 2013, pp. 7-29.

Cortina, J.L. (2014) Investigar las fracciones: experiencias inspiradas en la metodología de los experimentos de diseño. *Educación Matemática*, marzo, 270-287.

Dey, I. (1994). *Grounded theory*. En C. Seale, G. Gobo, J. F. Gubrium & D. Silverman (Eds.), Qualitative research practice (pp. 80-93). Londres:Sage.

D´Amore, B. (1999) *Didáctica de la matemática* (A. Balderas, Trad.). Bogotá: Magisterio

D´Amore, B. (2001). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. Uno, 27, 51-76.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2002). Un acercamiento analítico al triángulo de la didáctica. *Educación Matemática*, 14(1). 48-62.

D'Amore, B. (2002) La complejidad en la noética en matemáticas como causa de la falta de devolución. (11, 63-71).*TED*. Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional.

D´Amore, B. (2004) Conceptualización, registros de representación semiótica y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis y algunos factores que inhiben la evolución. Uno. 35, 90 – 106

D'Amore B. (2006). Didattica della matematica "C". In: Sbaragli S. (Ed.) (2006). La matematica e la sua didattica, vent'anni di impegno. Atti del Convegno Internazionale omonimo, Castel San Pietro Terme, 23 settembre (pp. 93-96). Bologna: Pitagora.

D´Amore, Bruno (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, RELIME, (Esp). pp.177-195

D'Amore, B. (2009) Conceptualización, registros de representación semiótica y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis y algunos factores que inhiben la evolución. *Revista Científica Enseñanza de las matemáticas*. pp. 150 – 164

D'Amore, B. (2012) El debate sobre conceptos y objetos matemáticos: la posición "ingenua" en una teoría "realista" vs. El modelo "antropológico" en una teoría "pragmática" en Calderon D.I. (comp.) *Perspectivas en la didáctica de las matemáticas*. pp.17 – 47. Doctorado Interinstitucional en Educación.

D'Amore, B., Fandiño M.I. & Iori, M. (2013*) La Semiótica en la Didáctica de la matemática.* Colección Didáctica de las matemáticas. Editorial Magisterio.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "paradoja cognitiva de Duval". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(2), 177-212. https://doi.org: 10.12802/relime.13.1822.

D'Amore, B. & Fandiño, M. (2016). Refl¬exión sobre algunos conceptos clave de la investigación en Educación Matemática: didáctica, concepto, competencia, esquema y situación. Encuentro internacional en educación matemática La educación matemática como herramienta en el desempeño profesional docente. Cúcuta, Colombia. pp. 61 - 67

Duval, R. (1993). Registros de Representación Semiótica y Funcionamiento Cognitivo del Pensamiento. Traducciones para fines educativos (Hitt, F.; Ojeda A.M.). Annales de Didactique et de Sciencies Cognitives. (5pp. 37-65). Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN.

Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Editorial Universidad del Valle.

Duval, R. (2004) Los problemas Fundamentales en el Aprendizaje de la Matemáticas y las Formas Superiores del Desarrollo Cognitivo (M. Vega, Trad.). Editorial Universidad del Valle.

Duval, R. (2006a). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. Special Issue Semiotic Perspectives in Mathematics Education. 61. 103 – 131. https: //doi.org: 10.1007/s10649-006-0400-z

Duval, R. (2006b). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*, Vol. 9. pp. 143–168.

Duval, R. (2017) *Semiosis y Pensamiento Humano*.(2ª. Ed.). Editorial Universidad del Valle.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. Berlin, New York, etc.: Springer-Verlag.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. Foreword by Bruno D'Amore. Cham, Switzerland: Springer International Publishing AG.

Ernest, P. (2006) A Semiótic Perspective of Mathematical Activity. *Educational Studies in Mathematics* 61(1),67-101.

Fandiño, M.I. (2009) *Las Fracciones: Aspectos conceptuales y didácticos*. Editorial Magisterio.

Fernández, C. & Llinares, S. (2010) Relaciones entre el pensamiento aditivo y multiplicativo en estudiantes de educación primaria. El caso de la construcción de la idea de razón. *Horizontes Educacionales*, Vol. 15, N° 1. 11-22.

Freudenthal, H. (1983) *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*. (L. Puig. TRad). Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV – IPN

Gagatsis, A. (2003). The effects of different modes of representation on mathematical problem solving. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 2, 447–454

Godino, J. D. (2000).*Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina Científica*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática. http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_tfs.htm.

Godino, J. D., Batanero, C. (1994). Significado Institucional y personal de los objetos matemáticos. en *Reserches en Didactiques des Mathematiques*. Vol 14. 325 – 355

Godino, J., Batanero, C. & Font, V. (2007). The Ontosemiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.

Godino, J., Font, V. & Castro, E. (2009). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2). 127-135.

Gonzalez, G. & García, L.I (2012). *Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto funcional lineal* [tesis de maestría]. Universidad Autónoma de Manizales) Repositorio Institucional Universidad Autónoma de Manizales. http://hdl.handle.net/11182/165

Hart K. (1980). From whole numbers to fractions and decimals. Recherches en didactique des mathématiques. 1, 1, 61-75. Hart, K. (1981). “Fractions” En: Hart, K. (ed.) (1981) Children’s Understanding of Mathematics. (pp.68-81). Londres: Murray.

Hart, K. (1989), “Fractions: Equivalence and addition”, en K. Hart, D. C. Johnson, M. Brown, L. Dickson y R. Clarkson (eds.), Childrens’ Mathematical Frameworks (pp. 46-75). Windsor, NFER-Nelson

Janvier, C. (Ed.). (1987). Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J., & West, M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems: factors affecting informal reasoning patterns. En G. Harel & J. Confrey (Eds.), The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics (pp. 235-290). Albany, NY: State University of New York Press.

Kaput, J. (1998). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. The Journal of Mathematical Behavior, 17(2), 265-281. https://doi.org: 10.1016/S03640213(99)80062-7

Kieren, T. E. (1980), “The rational number construct: Its elements and mechanisms”, en T. E. Kieren (ed.), *Recent Research on Number Learning*(pp. 125-149). Columbus, ERIC/SMEAC

Kieren, T.E. (1983). “Partitioning. Equivalence and the construction of Rational Number ideas”. En: Zweng, M., Green, M.T., Kilpatrick, J. (eds)(pp. 506-508).*Proceedings of IV ICM.* Boston.

Kieren, T.E., Nelson, D., & Smith, G. (1985). Graphical Algorithms in Partitioning Tasks. *The Journal in Mathematic Behavior*, 4. pp. 25 - 36

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (pp. 162-181). Reston, Virginia: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieren, T.E. (1993) Rational and fractional numbers: from quotient fields to recursive understanding. En: Carpenter, T.P., Fennema, E., Romberg, T.A. (eds.) *Rational Numbers: an Integration of the Research*. (pp. 49 – 84) Hillsdale (N.J.): Lawrence Erlbaum Ass.

Lamon, S. J. (2007), “Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research”, en F. K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Charlotte, Information Age Pub, pp. 629-667.

Llinares, S. (2003) fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte todo al razonamiento proporcional. En Chamorro, M. (comp.) *Didáctica de las Matemáticas*. (pp. 187 – 220). Prentice Hall

Maher, C. A., & Martino, A. M. (1996). The Development of the Idea of Mathematical Proof: A 5-Year Case Study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 194. https://doi.org/10.2307/749600

MEN (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Documentos del Ministerio de Educación Nacional.

MEN (2006). *Estándares básicos de competencia matemáticas en Lenguaje Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Documentos del Ministerio de Educación Nacional.

Miles, M., & Huberman, M. (1994). *Qualitative data analysis*.(2a ed.). Thousand Oaks, California: Sage.

Nesher, P. (1988). Multiplicative school word problems: theoretical approaches and empirical findings. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (pp. 19-40). Reston, Virginia: Lawrence Erlbaum Associates.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept part I - differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, 11(2), 217-253. https://doi.org: 10.1007/BF00304357

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista EMA*, 8(2), 157-182.

Obando, G., Vasco, C. E., & Arboleda, L. C. (2013). Razón, proporción y proporcionalidad: configuraciones epistémicas para la Educación Básica. En R. Flórez (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 26, pp. 977-986). Mexico, DF.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ohlsson, S. (1988). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. En J. Hierbert y M. Behr (Eds.) Number Concepts and Operations in the Middle Grades (pp. 53-92). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Osorio, L.H., García, L.I. (2011). *Representaciones semióticas en el aprendizaje del teorema de Pitágoras*. [Tesis de maestría]. Universidad Autónoma de Manizales) Repositorio Institucional Universidad Autónoma de Manizales. http://hdl.handle.net/11182/160

Ospina, D., García, L.I. (2016*) Las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de las representaciones semióticas en la resolución de problemas contextuales relacionados con el concepto de función cuadrática*. [Tesis de Maestría]. Universidad Autónoma de Manizales. Repositorio Institucional Universidad Autónoma de Manizales. http://hdl.handle.net/11182/249

Otte, M. (2003). Does Mathematics have objects? In what sense? *Synthese*, 134. 181-216

Otte, M. (2006). Mathematical epistemology from a Peircean semiotic point of view. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2). 11-38.

Pitkethly, A. & Hunting, R. (1996), “A review of recent research in the area of initial fraction concepts*”, Educational Studies in Mathematics*, vol. 30, núm.1, 5-38.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1-19. https://doi.org: 10.1080/14794800903569741

Radford, Luis (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* RELIME, 9 (Extraordinario 1), pp. 103-129

Radford, Luis (2006). Introducción. Semiótica y Educación Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, RELIME, (Esp), 7-21.

Rojas, P. (2014). *Articulación de saberes matemáticos: representaciones semióticas y sentidos*. [Tesis doctoral], Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Rojas, P. (2015). Objetos matemáticos, representaciones semióticas y sentidos. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(1), 151-165

Sáenz-Ludlow, A. (1995) Ann's Fraction schemes. *Educational Studies in Mathematics*. 28. pp. 101 – 132. https://doi.org/10.1007/BF01295789

Sáenz-Ludlow, A., & Presmeg, N. (2006). Semiotic perspectives in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*. Special Issue, 61(1-2).

Sáenz-Ludlow, A. (2016). Juegos de Interpretación en el aula: construcción evolutiva de significados matemáticos en: *Perspectivas semióticas seleccionadas.* (Cap.5. pp. 157 – 191). Doctorado Interinstitucional en Educación.

Santi, G. (2011). Objectification and semiotic function. *Educational Studies Mathematics*, 77, 285-311.

Steffe, L. P. y J. Olive (2010), *Children's fractional knowledge*. Nueva York, Springer.

Streefland, L. (1990). *Fractions in Realistic Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education. A Paradigm of Developmental Research*. Dordrecht, Kluwer.

Streefland, L. (1993). Fractions: a realistic approach. En: Carpenter, T.P., Fennema, E., Romberg, T.A. (eds.) (1993) *Rational Numbers: an Integration of the Research*. (pp. 289 – 325) Hillsdale (N.J.): Lawrence Erlbaum Ass.

Tamayo, O.E., Vasco, C.E., Suárez, M., Quiceno, H., & García L.I (2010). *La clase multimodal: Formación y evolución de conceptos científicos a través del uso de tecnologías de la información y la comunicación*. Colección Ciencias Sociales y Humanas. Editorial Universidad Autónoma de Manizales.

Vasco, C.E. (1984). *Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas* (Vol.1). Ministerio de Educación Nacional.

Vasco, C.E. (1991) *El Archipiélago Fraccionario. Notas de Matemáticas*. No.31, pp.1 - 33

Vasco, C.E (1994) *Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas*. (2ª. Ed.) Documentos del Ministerio de Educación Nacional.

Vasco, C. (1994a). *El archipiélago fraccionario*. En A. C. Castiblanco (Ed.), Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas (Vol. 2, pp. 23-45). Ministerio de Educación Nacional.

Vasco, C. E (1995). Misión Ciencia, Educación y Desarrollo: Colección Documentos de la Misión. (7 vols.). Presidencia de la República-Consejería Presidencial para el Desarrollo Institucional-COLCIENCIAS.

Vasco, C. E. (2014). Procesos, sistemas, modelos y teorías en la investigación educativa. En C. J. Mosquera (Comp.), *Perspectivas educativas. Lecciones inaugurales*, n.1. 25-79. Universidad Distrital-Doctorado Interinstitucional DIE.

Vasco, C.E. (2017) Prólogo. En Duval R. *Semiosis y Pensamiento Humano*. (2ª. Ed.pp. 7-14) Editorial Universidad del Valle.

Vergnaud, G. (1983). *Multiplicative Structures*. En R. Lesh & M. Landau (Eds.) Acquisition of mathematics concepts and processes.. pp. 127-174. New York: Academic Press

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques,* 10(2-3), 133-170

Vygotsky, L. (1962). *Thought and Language*. Cambridge, MA: MIT Press.

Wolcott, H. (1994). *Transforming qualitative data: Description, analysis, and interpretation*. Thousand Oaks, California: Sage.

Resumen

El presente estudio centra su interés en analizar el aprendizaje de los números racionales en estudiantes de quinto grado de básica primaria; para ello se sitúa en la perspectiva ontológica de la Teoría General de Procesos y Sistemas - TGPS-; se adopta la Teoría General de Modelos y Teorías – TGMT- como apuesta metodológica y la Teoría General de Representaciones e Interpretaciones - TGRI - como perspectiva semiótica desde lo propuesto por Vasco (1995, 2014).

Para su abordaje metodológico, se adopta el enfoque noético-semiótico proporcionado por la teoría de Duval (1995/99; 2017), que permitió diferenciar, por un lado, los objetos matemáticos llamados "números racionales positivos" o "fraccionarios" que construyen los niños y los sistemas conceptuales en los que los ubican, con su estructura y su dinámica, que podemos considerar como los invariantes noéticos de las distintas representaciones semióticas, y, por otro, las representaciones semióticas producidas por los distintos registros semióticos que hacen posible a cada estudiante la interpretación de las representaciones semióticas ya producidas por otros o por ellos mismos, la expresión de sus propios modelos mentales por medio de la producción de nuevas representaciones semióticas y las transformaciones (tratamientos y conversiones) que ellos mismos efectúan sobre sus propias representaciones recientemente producidas.

Se parte inicialmente de cuatro sistemas conceptuales de números racionales ya ampliamente documentados en la literatura: el sistema partidor (basado en las relaciones entre parte y todo), el sistema operador (basado en las operaciones de ampliación y reducción), el sistema relator (basado en la razón multiplicativa entre dos cantidades de distintas magnitudes) y el sistema medidor

(basado en las expresiones numéricas resultantes de medir una cantidad dada utilizando una unidad de medida).

Los resultados del estudio nos permitieron reconocer en cuanto a los aspectos conceptuales, que en los modelos mentales de los niños entrevistados, el sistema operador es el más potente para estructurar el grupo multiplicativo de los números racionales positivos, seguido de un sistema partidor físico y otro matemático, con sus diferencias en torno a la igualdad de las partes como condición de partición, los cuales parecen estructurar mejor el semigrupo aditivo de los números racionales positivos, y que, al menos en el pequeño grupo estudiado, el sistema relator y el medidor aparecen muy pocas veces, y cuando lo hacen, parecen referirse a razones o medidas únicamente entre números naturales, no propiamente entre números racionales.

En cuanto a los aspectos semióticos, se pudo comprobar que por parte de los estudiantes se dan procesos diferenciados de semiosis interpretativas y de semiosis expresivas y que las dificultades de lectura y de escritura que presentan los estudiantes, así como los obstáculos a la comunicación entre los maestros y los alumnos, y entre los alumnos entre sí, ocurren con mucha frecuencia no tanto por confusiones conceptuales sino por la poca precisión consciente que se tiene por parte de los maestros, de los autores de libros de texto escolar y de los estudiantes mismos acerca de la distinción entre los objetos representados y sus representaciones semióticas, entre los distintos registros semióticos como sistemas productores de representaciones semióticas muy diferentes y por las dificultades de interpretación de los símbolos de elementos, relaciones y operaciones propios de cada registro semiótico de representación y del tipo de sistema conceptual que se pretende representar.

CAPÍTULO I. PROBLEMATIZACIÓN

1.1 Consideraciones Ontológica, Epistemológica y Semiótica del estudio

1.1.1 *Perspectiva Ontológica*

Cuando nos acercamos a un proceso investigativo, la primera preocupación está en identificar el problema que permite plantearnos la pregunta de investigación, que necesariamente surge de la comprensión que tenemos del mundo y los procesos que en el ocurren, con los que construimos nuestros modelos mentales e interpretamos los modelos mentales de otros.

En ese acercamiento nos damos cuenta que, así como en nuestra mente ocurren procesos de pensamiento (o noéticos) que podemos llamar individuales, mentales, internos, subjetivos, privados o psíquicos, en la mayoría de las ocasiones no somos conscientes de lo que pensamos y de la percepción que tenemos del mundo.

De igual manera ocurre "afuera", en donde los procesos bien sea externos físicos-públicos-sociales, son complejos, presentan discontinuidades y rupturas, debido a la opacidad de los procesos sociales, de los que solo podemos decir que son espacio-temporales y dinámicos; estos procesos interactúan con los procesos internos con la mediación de procesos comunicativos, y es en esa interacción en donde insistentemente estamos buscando comprenderlos, reaccionar ante ellos o explicarlos. En esa experiencia del actuar, de la acción o actividad, en la que tomamos conciencia, podemos representarlos y por lo tanto reconocemos que son noético-semióticos.

Al intentar explicitar qué es un proceso, no es posible hacerlo verbalmente, debido al carácter complejo, dinámico y a su naturaleza opaca, de tal manera que toda definición se queda corta y por ello parece que no hay buenos sinónimos de “proceso”.

Cuando logramos recortar un subproceso de corta duración que esté enmarcado por fronteras espaciales cercanas, intentamos formarnos al menos un modelo mental aproximado y analógico del mismo, que corresponde para este estudio, a la perspectiva ontológica de la Teoría General de Procesos y Sistemas —TGPS—, que para el caso de esta tesis se asume desde Vasco (2014).

Desde esta perspectiva, se considera que lo que en realidad existe “allá afuera” y “aquí dentro” en la mente, son muchísimos procesos y subprocesos entrelazados que parecen escapar a nuestro control, pero que podemos representarlos. Algunos de los de “allá afuera” por medio de modelos mentales simplificados “aquí dentro” que, a su vez, son sistemas analizables en el conjunto de sus componentes o elementos (su *sustrato*), la red de relaciones o vínculos que los articulan (su *estructura*) y las transformaciones u operaciones que nos permiten imaginarnos cómo seguirían evolucionando (su *dinámica)*; según Vasco, Escobedo, León & Negret, (1995).

En el presente estudio se analiza un segmento del aprendizaje de la matemática en la Educación Básica Primaria, en este caso, el aprendizaje de los números racionales en el grado quinto, para ello, nos ubicamos en la TGP —Teoría General de Procesos— que, con la Teoría General de Sistemas — TGS —, nos permite entender los procesos con la ayuda de la construcción mental de sistemas que se representan, a partir de la Teoría General de Procesos y Sistemas —TGPS— y corresponden con la perspectiva ontológica asumida.

En esa “parcela” de lo real, que da origen al problema de investigación en la Didáctica de la Matemática, se requiere hacer “zoom” a los procesos del aula de matemáticas, los espacios de aprendizaje y a la presencia continua de la semiótica, que tal como lo manifiesta D'Amore (2015), todos estos factores son el punto de partida del problema del aula y por consiguiente de los procesos de investigación.

1.1.2 Perspectiva epistemológica

Al descomponer lo real e identificar un proceso, en este caso educativo, y más concretamente, un proceso didáctico centrado en el aula de matemáticas, permanentemente se reconstruyen modelos que permiten interpretar las teorías, enfocando este estudio en la perspectiva epistemológica de la Teoría General de Modelos y Teorías —TGMT—, entendiendo que las teorías formuladas en lenguaje articulado van a permitir reconocer algunos procesos que se derivan de desagregar la realidad.

En este caso, el proceso de desagregar la realidad, se refiere al proceso del aprendizaje matemático, que se va recortando hasta llegar a los sistemas numéricos para seguir desagregando hasta el aprendizaje de los números racionales y específicamente su construcción en estudiantes de quinto grado de básica primaria.

Desde esta perspectiva epistemológica, las teorías no son ni verdaderas ni falsas, sino que corresponden a la interpretación subjetiva en un modelo mental, que en este caso es el de cada uno de los maestros en sus modelos públicos y privados o de los modelos privados de cada uno de los niños de quinto grado.

En tal sentido, los modelos mentales públicos se reconocen como los sistemas conceptuales de los números racionales que se expresan en las teorías matemáticas; en las teorías de los investigadores en Didáctica de las Matemáticas, en los modelos que expresan los autores en los libros de texto y en los discursos orales y escritos de los maestros, y que asumimos (si tuvo éxito el aprendizaje) sean también los modelos mentales construidos por los niños.

En cuanto a las teorías, ellas también son sistemas lingüísticos que configuramos para hablar y escribir sobre nuestros modelos mentales privados en un lenguaje público que acompaña el tránsito entre los sistemas de la TGPS y la TGMT con las formas de expresar e interpretar los modelos de los investigadores, maestros, autores de libros de texto y los modelos mentales de niños y niñas, lo que requiere en este caso de la Teoría General de Representaciones e Interpretaciones —TGRI— y su perspectiva semiótica para interpretarlos.

1.1.3 *Perspectiva semiótica*

De acuerdo con Vasco (2014), la TGRI comienza desde antes de la TGPS y puede considerarse un discurso intermedio que articula el flujo mental de las imágenes, modelos y pensamientos —TGMT— con los procesos y las acciones que podamos realizar para orientarlos, detenerlos o acelerarlos — TGPS—.

En honor a Locke, Peirce y De Saussure, esta teoría se podría llamar "semiología", "semiótica" o "sémica", la cual se intenta sistematizar en una Teoría General de Representaciones e Interpretaciones —TGRI— desde la perspectiva epistemológica adoptada en este estudio.

La semiótica como disciplina científica se ha ido movilizando en diferentes tradiciones; con Frege (s.f), desde la estructura del concepto; en Ferdinand de Saussure (1857-1913), que le da origen a la ciencia de los signos: la semiología y, principalmente, en la tradición peirceana, iniciada por Charles Sanders Peirce (1839-1914), fundador de la semiótica moderna. En estas tres tradiciones se fundamenta la teoría de los signos que, para Frege, se componía de *sentido* y el *referente (sin und beteudung)*; en De Saussure, el modelo del signo es el resultado de la combinación del *significante* o imagen mental acústica, escrita o bajo forma de dibujo y el *significado* o concepto, mientras que Peirce considera que para interpretar el *signo*, se requiere de la parte material, el *representamen* que se refiere a ese algo que está en representación de algo que es el *objeto* y de un *interpretante,* que se deriva de la relación entre *representamen* y *objeto*. El reconocimiento de la estructura del signo fue evolucionando al pasar de ser diádico a triádico y al involucrar expresiones lingüísticas y no lingüísticas (D´Amore, Fandiño & Iori, 2013).

Para la Didáctica de las Matemáticas, la semiótica empieza a reconocerse de manera explícita desde mediados de los años 90, cuando Duval (1999) afirma que en la construcción de los objetos matemáticos se requiere de su representación simbólica para ser accesibles y por consiguiente para lograr su comprensión.

Con la incursión de la semiótica que inicia con Duval (1995/99) quien propone un enfoque noético-semiótico; surge la semiótica cultural que propone Luis Radford (1997; también en Adalira Saénz-Ludlow (1997) con los juegos de interpretación de Peirce; y con Juan Díaz-Godino (2003) con el enfoque ontosemiótico – EOS -.

En este estudio en particular, para expresar e interpretar las teorías en los modelos, la perspectiva semiótica se precisa con los aportes de Duval (1995/99, 2004, 2006a, 2006b, 2017) desde los siguientes aspectos que se expresan en su teoría noético-semiótica:

- En el reconocimiento y la distinción entre los registros semióticos y las representaciones semióticas; los registros semióticos son los sistemas productores de las representaciones semióticas que se ponen en escena durante la actividad matemática por medio de las representaciones semióticas.

- En el reconocimiento y la distinción entre los registros semióticos y las representaciones semióticas que se producen, se potencian las actividades cognitivas de transformación de las representaciones semióticas, que son de dos tipos: los *tratamientos* cuando se presentan dentro de un mismo registro y las *conversiones* cuando ocurren entre dos registros.
- Se distingue, además de los dos aspectos anteriores, la semiosis expresiva o proyectiva de la semiosis interpretativa o inyectiva[1], debido a la necesidad que se tiene en la actividad matemática de diferenciar la expresión de una representación - al intentar comunicar un modelo mental a otros - de la interpretación de una representación - al tratar de interpretarla para reconstruir los modelos mentales de quien la produjo -; acción que la puede hacer un autor de libro de texto, un docente de matemáticas o un estudiante, todos ellos considerados agentes noético-semióticos.

En la relación entre pensamiento y lenguaje que acoge Duval, al intentar definir el «agente noético-semiótico» se enfatiza en la acción o actividad del agente humano, desde la noesis como los actos de pensamiento y la semiosis como la expresión e interpretación de los sistemas simbólicos que representan los actos de pensamiento.

El papel del agente noético-semiótico en la construcción cognitiva de los objetos matemáticos inicia con el contacto que se tiene con ellos a partir de la identificación de la representación al interior de un registro semiótico o la selección de un registro semiótico que permita producir una representación.

---

1 Si bien Duval distingue claramente la actividad de reconocimiento e interpretación previa a los dos tipos de transformaciones (tratamientos y conversiones), que denomina "actividades de interpretación, hermenéutica o reconocimiento de los componentes significativos de la representación semiótica", para Vasco se refieren a la "semiosis interpretativa o inyectiva", de fuera hacia adentro, y la actividad de semiosis expresiva, productiva o proyectiva de dentro del modelo mental hacia afuera, hacia las representaciones semióticas públicas. Es importante aclarar que Duval hace referencia con mayor frecuencia a la expresiva.

1.2 Contexto Teórico de la investigación

1.2.1 *Desde la Didáctica de las Matemáticas*

La Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica nace en Francia en la mitad de los años ’70, derivada de los trabajos realizados por Guy Brousseau y ha tenido una evolución histórica rápida, de acuerdo con lo que propone D’Amore (1999) que parte desde una Didáctica “A”, centrada en los procesos de enseñanza, pasando por la Didáctica “B”, que focaliza su atención en los procesos de aprendizaje y que va avanzando hacia una Didáctica “C”, en donde el sujeto de estudio ya no es el estudiante sino el pensamiento y los modelos mentales del docente que le permiten crear las situaciones de aula para promover el aprendizaje de sus estudiantes.

Ampliando lo planteado por D’Amore (1999), la Didáctica “A”, como “ars docendi”, que se ubica entre los años 1950 y 1980, se centraba en las prácticas relacionadas con la enseñanza de la matemática, las preguntas y cuestionamientos que se hacían los autores en torno a la enseñanza, campo de investigación que aún perdura en algunos investigadores y que responden a preguntas sobre qué enseñar, cuándo y cómo.

Tanto en Brousseau (1986) como en D’Amore (1999, 2001), la teoría de las situaciones didácticas plantea que en el aula de clase se proponen situaciones en donde la intervención en el aprendizaje del estudiante se hace de manera explícita e intencional y comprende tanto las actividades de aprendizaje que propone el docente como también las llamadas “situaciones a-didácticas”, que se reconocen como aquellas situaciones que pretenden implicar a los estudiantes en el proceso de su propio aprendizaje sin que este trabajo esté mediado de manera directa e intencional por el maestro.

La Didáctica “B” o epistemología del aprendizaje de la matemática tiene por objeto de estudio el aprendizaje de la matemática. La transición entre la “A” y la “B” surge en entre las décadas del 80 y 90, en un largo proceso que se describe en el artículo publicado por Brousseau sobre la Teoría de las Situaciones Didácticas y se retoma en el triángulo de la didáctica, entendiendo “situación” como el modelo de interacción entre un sujeto y un medio determinado, y se llama “didáctica” en cuanto permite comprender las interacciones entre alumnos, docentes y saberes matemáticos que se dan en una clase, que condicionan el qué y cómo aprenden (Brousseau, 1986; D’Amore & Fandiño, 2002).

Al analizar el lugar de la teoría semiótica de Duval en la Didáctica de las Matemáticas, se puede considerar que al poner el énfasis de ésta en las dificultades de la comprensión matemática derivadas de la confusión entre los objetos matemáticos y su representación, se alude a la epistemología del aprendizaje matemático y es por ello que se presume que se encuentra en la Didáctica “B”, desde su objeto de estudio y análisis.

Con la precisión anterior, y desde los intereses de la investigadora, el presente estudio se ubica en la didáctica “B”, partiendo de la comprensión de la actividad matemática como un tipo especial de actividad noético-semiótica, a partir del reconocimiento de los sistemas de representación semiótica (los registros semióticos como sistemas productores de representaciones y las representaciones semióticas como sistemas de signos y símbolos producidos en los registros), así como de la transformación de las representaciones semióticas que permiten el acceso a los objetos matemáticos, definidos desde Chevallard (1991) como un sistema de praxis en donde se manipulan objetos materiales que se descomponen en diferentes registros semióticos.

1.2.2 *Desde los procesos de investigación sobre las transformaciones semióticas realizados por la investigadora*

Al analizar el conocimiento de los números racionales que se inicia en el cuarto grado de la básica primaria, se puede reconocer que, si bien se cuenta con un acercamiento desde los recursos que brindan los materiales concretos y además se continúan haciendo acercamientos en los grados siguientes, las dificultades en el manejo de los racionales persisten inclusive hasta la educación superior.

En los estudios en los que participó la investigadora, que se presentan a continuación, se confirman las dificultades de comprensión que presentan los números racionales derivados en parte por la diversidad de representaciones semióticas que permiten expresar e interpretar este objeto matemático.

Tal es caso de la investigación titulada “La clase multimodal: Formación y evolución de conceptos científicos” (Vasco, Tamayo, Suárez, García & otros, 2007), desde dos referentes: la inclusión de nuevas tecnologías de la información y la comunicación en los procesos didácticos para lograr la evolución de los conceptos científicos en el aula de ciencias y matemáticas y un segundo referente acerca de los múltiples lenguajes empleados en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Respecto al primer referente, el análisis del empleo de las TIC se centró en la inclusión, estudio y diseño de ambientes de aprendizaje que propiciaran la construcción de diferentes sistemas de representación de los conceptos enseñados y, en cuanto a la perspectiva multimodal, el foco de interés fue el reconocimiento de la calidad del aprendizaje de los conceptos científicos cuando convergen diferentes lenguajes, modalidades sensoriales y artificiales, tratando de ir más allá del empleo tradicional del lenguaje oral y escrito que históricamente ha predominado en la formación de conceptos.

En este ejercicio investigativo, al construir una unidad didáctica en torno al aprendizaje de los números racionales, se pudo constatar que el empleo de diversas representaciones ofrece a los estudiantes nuevos recursos para reconocer el objeto matemático número racional en diferentes registros semióticos y por consiguiente, en la producción de diversas representaciones semióticas y sus transformaciones.

Posteriormente, y con el interés en la teoría de los registros de representación semiótica de Duval, adoptado en el proyecto de multimodalidad, se acompañaron dos procesos investigativos; el primero de ellos se tituló: "Las representaciones semióticas que poseen los niños antes de acercarse al concepto de número racional en el contexto escolar" (Campuzano y García, 2008), en este trabajo se pudo reconocer que los niños desde edades tempranas resuelven situaciones problema con la noción parte-todo desde la forma y sin atender a la magnitud y, además, que poseen un concepto o noción intuitiva de razón a partir del reconocimiento del todo en relación con sus partes.

Desde la investigación titulada: "Concepciones que poseen los estudiantes universitarios del número racional" (Aponte y García, 2008), se logró concluir que el estudio de las representaciones semióticas puede ser un recurso metodológico para indagar los conceptos matemáticos adquiridos, de igual manera se pudo constatar que los estudiantes universitarios continúan abordando los números racionales desde el conteo y la partición y no desde la medida, lo que genera obstáculos para su comprensión y transferencia a otros conocimientos.

Al continuar con la revisión de la teoría de Duval, surgieron nuevas preguntas de investigación centradas en el análisis de los procesos de tratamiento y conversión de las representaciones semióticas a partir del diseño de unidades didácticas sobre el concepto de Función

Lineal (García & Ospina, 2012); Teorema de Pitágoras (García & Osorio, 2013) y Funciones Cuadráticas (González & García, 2015).

Los resultados de estas investigaciones coincidieron en reconocer la importancia de analizar la vinculación de manera explícita en el aula de matemáticas de los diferentes registros de representación de tal manera que se pueda lograr mayores niveles de congruencia entre ellos y así permitir que el estudiante identifique el invariante en el tratamiento y en la conversión y por consiguiente se logre s aprendizaje.

Actualmente se han venido explorando otros recursos semióticos y su potencia para favorecer los procesos de tratamiento y conversión de representaciones semióticas a partir de un proceso de experimentación con material didáctico en el diseño de unidades didácticas, en este caso del concepto de triángulo con el empleo del material concreto y registro figural para producir representaciones que permitieran la comprensión de este objeto matemático por parte de los estudiantes (Tabares & García, 2017).

También surgieron dos trabajos de investigación en el contexto de estudios de maestría vinculando la Lengua de Señas Colombiana (LSC), como registro lengua natural en niños sordos y las dificultades de conversión que presentan los no oyentes desde la lengua de señas al registro oral y escrito.

Estas búsquedas investigativas con una intencionalidad comprensiva han permitido el acercamiento a los registros semióticos, representaciones semióticas y objetos matemáticos que permitieron confirmar las posibilidades de comprensión que la semiótica como campo emergente de la Didáctica de las Matemáticas ofrece en el aprendizaje de los conceptos matemáticos.

En los trabajos de investigación realizados, no se revisó de manera explícita la relación entre noesis y semiosis, pero si se pudo evidenciar la heterogeneidad semiótica, reconocida también como la multiplicidad semiótica que presenta la matemática en la riqueza y amplitud de los registros semióticos con los que se cuenta para acceder a los conceptos matemáticos.

De igual manera se puede afirmar desde esta perspectiva semiótica, que las dificultades para lograr el aprendizaje de las matemáticas están determinadas por la ausencia de multiplicidad de registros semióticos, así como el uso indiscriminado que se hace en el aula de matemáticas de los diferentes registros, sin que sean reconocidos desde su estructura y reglas de conformidad para producir las representaciones semióticas tanto desde su interpretación como desde su producción de manera consciente por maestros y estudiantes durante la actividad matemática.

1.3 Planteamiento del Problema

"Movimiento del modelo inicial a un viaje
por la teoría para construir el propio modelo…"(Vasco, 2018)

Siguiendo las consideraciones generales sobre las cuales se fundamenta el problema de investigación, se adopta una perspectiva ontológica, que desde la TGPS se presume que inicia en el paso de la Didáctica "A" a la Didáctica "B", por medio de la teoría de las situaciones didácticas y a-didácticas, ya que para el presente estudio explora la interacción de los niños con los conceptos matemáticos mediante una intervención directa del docente que crea las condiciones que los conduzca a 'hacer' matemática, a utilizarla o a inventarla sin la influencia de problemas oportunos que en términos de Brousseau se refiere a "buenos problemas".

En cuanto a la perspectiva epistemológica, el estudio se ubica en la comprensión de la actividad matemática con situaciones relacionadas con números racionales, que para interpretar o expresar los modelos se requiere de una perspectiva semiótica.

Por lo tanto, en este estudio y dada la apuesta metodológica, se pretende reconstruir los modelos sobre los cuales los niños en este caso de quinto grado, responden ante problemas escolares y cotidianos relacionados con los números racionales.

Conjugando los aspectos ontológicos, epistemológicos y semióticos que fundamentan este estudio, se presenta el trayecto que siguió la pregunta de investigación que siempre estuvo centrada de manera intencional en el análisis de los procesos de aprendizaje.

La primera pregunta que orientó los momentos iniciales del proyecto:

¿Cómo construyen el objeto matemático número racional, los estudiantes de quinto grado?

Al intentar dar respuesta a esta pregunta, surge un nuevo interrogante en torno a lo que significa “construir” un objeto matemático que sugiere pensar en configurar, reconfigurar, manejar, formular, reformular, saber interpretar diagramas y teorías, saber configurar y reconfigurar imágenes y modelos mentales, saber manejar mentalmente y simbólicamente los modelos, y saber trazar diagramas y formular teorías. Es entonces cuando se reconoce que en la TGMT, para construir un concepto, el agente-noético acude a los modelos entendidos (de manera intuitiva) como sistemas desde sus tres aspectos: componentes, relaciones y operaciones.

Sin embargo, sin un ejercicio consciente desde la TGRI, cuando nos preguntamos por la construcción del objeto matemático número racional, desde sus representaciones semióticas, se requiere pensar en los recursos para interpretarlo y expresarlo que en la teoría de Duval, pone en escena los registros semióticos; lo que suscitó una nueva pregunta:

¿Cuáles son los Registros de Representación semiótica que emplean en la construcción del objeto matemático número racional, los estudiantes de quinto grado?

Al interior de esta pregunta surge la duda al considerar el objeto matemático unitario o singular o por el contrario, si se está hablando de un objeto plural, compuesto o sistémico, dada la posibilidad de desagregarlo en sus componentes, relaciones y operaciones, además del reconocimiento de los registros que son utilizados para comunicar e interpretar el concepto de número racional empleado por los maestros y los autores de los libros de texto.

Desde el recorrido teórico que se ha hecho sobre las investigaciones en torno al aprendizaje de los racionales no existe un consenso entre la singularidad o la pluralidad de este objeto matemático, aspecto que sí es una pretensión del presente estudio con el apoyo de herramientas semióticas como los registros, las representaciones y las transformaciones semióticas.

Es por ello que surge la siguiente pregunta:

¿Cómo realizan los estudiantes de quinto grado, los procesos de elección de registros de representación semiótica, para la construcción del objeto matemático número racional?

Al indagar por el proceso de elección o selección de un registro semiótico de representación RSR, ocurre un desplazamiento de una pregunta ontológica hacia un planteamiento epistemológico pues se cuestiona por la comunicación e interpretación del modelo en la teoría, tal como son construidos por cada estudiante. Y en la formulación de esta pregunta de investigación, nos ubicamos entre la TGMT y la TGRI, haciendo distinción entre la semiosis proyectiva e inyectiva pero centrando el interés en la semiosis expresiva.

Teniendo como sujeto de estudio los niños, las situaciones de aprendizaje como proceso, asumido desde el pensamiento sistémico, en donde se requiere partir "desde los procesos hacia los sistemas tomados como modelos mentales que representan procesos y subprocesos, en los cuales modelos se van a interpretar las teorías", tal como lo propone Vasco (2014, p. 30), surge la orientación de la investigación hacia la Teoría General de Modelos y Teorías —TGMT—.

En tal sentido, la recomendación es tratar de explorar en los modelos mentales de los sujetos, que están acompañados de teorías en lenguaje oral sobre las cuales el investigador pretende interpretar esos modelos, atender a las maneras como los modelos son comunicados cuando los estudiantes parten de la representación escrita y tratan de transformarla en otra representación de otro registro.

Esta recomendación, precisada por la distinción de Duval entre las transformaciones de *tratamientos* y *conversiones*, llevó a formular dos nuevas preguntas, la primera orientada a las transformaciones semióticas y la segunda orientada a la relación de esas transformaciones con el objeto matemático número racional.

¿De qué manera realizan transformaciones semióticas de tratamiento y conversión los estudiantes de quinto grado en la construcción del objeto matemático número racional cuando el profesor o el autor del libro de texto las propone?

¿De qué manera realizan transformaciones semióticas (espontáneas y provocadas), los estudiantes de quinto grado en una actividad matemática relacionada con el objeto matemático número racional?

Las transformaciones semióticas de conversión de un registro a otro se requieren para la explicitación de los modelos mentales y para la interpretación y formulación de teorías interpretadas en dichos modelos, pero las transformaciones de tratamiento suponen una construcción más elaborada del dominio de un registro semiótico para permitir que el trabajo puramente simbólico tenga relación con el manejo mental “intuitivo” del modelo y se pueda contrastar los resultados previstos por el cálculo simbólico con los que se producen en la imaginación; en tal sentido se requiere reconstruir el modelo a partir de lo que los niños expresan e interpretan de las teorías y modelos de los maestros y los modelos de los autores de los libros de texto.

El problema metodológico en el análisis de los tratamientos es que los estudiantes aprenden a hacer los tratamientos usuales para las operaciones aritméticas con dos o tres fracciones dadas por el maestro o por el autor del libro de texto, tomando la solución de los problemas como un juego con símbolos sin interpretación directa del modelo mental, y si tienen éxito en encontrar mecánicamente la respuesta que el texto considera correcta, es imposible saber si están construyendo un concepto abstracto de número racional, o si están modificando sus modelos mentales. En todo esto es de definitiva importancia la acción del docente y como él piensa e interpreta la teoría y los modelos tal como se estudia desde la Didáctica C.

Por ello, en estas actividades tan comunes en las aulas y en las tareas para la casa son los errores, dudas, tachaduras y otras manifestaciones de incertidumbre o extrañeza los que arrojan información sobre el trabajo mental del estudiante.

Si bien desde la TGRI se hace posible expresar e interpretar los modelos, no se puede asumir que las transformaciones semióticas de tratamiento y conversión por sí mismas van a permitir describir el objeto matemático número racional que los niños van construyendo, lo que se pone en evidencia en la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuáles son las transformaciones sobre las representaciones semióticas que realizan espontáneamente los estudiantes de quinto grado para describir el objeto matemático número racional?

Al respecto, se reconoce que las transformaciones semióticas por sí mismas no describen de una forma adecuada los modelos mentales ni las relaciones y las operaciones que se hacen sobre sus componentes.

Pero si se estudian las representaciones espontáneas y las provocadas con preguntas o instrucciones del investigador, las respuestas de los estudiantes en cuanto son conductas observables y describibles verbalmente (o grabables en videos o "video-grafías") sí pueden servir de signos y señales de los estadios, fases o etapas de la construcción mental que está haciendo el estudiante y da pistas para reconstruir los modelos mentales de los niños sobre el constructo que llamamos “número racional”.

A partir de la anterior reflexión, se propone la siguiente pregunta:

¿Qué modelos mentales asocian los niños de cuarto y quinto grado a las distintas representaciones semióticas de los números racionales que en distintos registros semióticos de representación se les presentan en situaciones de clase de matemáticas, a partir de los tratamientos y conversiones de esas representaciones que realizan y de aquellas que ellos mismos formulen mediante enunciados, dibujos y narrativas?

Asociar los modelos mentales de los investigadores y de los maestros a las representaciones semióticas presentadas en los diferentes registros semióticos usados en las aulas y en los libros de texto, así como analizar los tratamientos y las conversiones que los niños realizan, puede ser una posible aproximación al problema de investigación que pretende reconstruir los modelos mentales de los niños.

Al revisar la tesis doctoral realizada por Rojas (2015), se hace alusión a la semiosis interpretativa para reconocer si el alumno entendió bien el enunciado, la pregunta, las palabras, dibujos y símbolos, dejando de lado la semiosis expresiva en la cual el estudiante trata de construir una representación más personal y creativa, y la transforma de distintas maneras para hacerla entender del profesor o de los compañeros.

Esta distinción explícita entre los dos tipos de semiosis, la atención a las diferencias entre ellas y la extracción de información adicional con la semiosis expresiva es un aspecto que no se reconoce de manera explícita en los escritos de Duval y que podría convertirse en un aporte a su teoría.

Por lo tanto, la interpretación de los modelos y las teorías que les presenta el maestro y se presenta en los libros de texto como la expresión de los modelos y las teorías que van construyendo los niños en torno a los racionales se constituyen en objetos de análisis.

Finalmente y después de hacer un recorrido por los diferentes desplazamientos que va teniendo el problema entre las perspectivas ontológica —desde la TGPS —, epistemológica —desde la TGMT— y semiótica — desde la TGRI—, se hace necesario precisar que desde la Teoría General de Modelos y Teorías —TGMT—, y en este caso particular de los sistemas de números racionales, al analizar los procesos matemáticos, estos son vistos como representados por sistemas que no son "atómicos" o "cajas negras", sino que se descomponen en la triada sustrato/dinámica/estructura (componentes, relaciones y operaciones), que representan los tres aspectos de todos los sistemas y por lo tanto de los modelos mentales.

Para precisar los conceptos de representación, expresión e interpretación, que se tratan en la TGRI, en el caso de la Didáctica de las Matemáticas, la teoría de los registros semióticos y de las representaciones semióticas de Duval ofrece una herramienta analítica que orienta a los investigadores sobre lo que se puede construir mentalmente y lo que se puede representar externa y públicamente, así como sobre sus relaciones con la teoría enunciada verbalmente.

En el caso de los sistemas de números racionales, la atención a la relación entre noesis y semiosis, así como la posibilidad de diferenciar entre semiosis expresivas y semiosis interpretativas y la manera como ocurren en el aula de matemáticas, promete generar fenómenos informativos y lograr avanzar en las posibles respuestas a las distintas preguntas de investigación que se han presentado en párrafos precedentes. .

Por lo anterior y de acuerdo con las representaciones y transformaciones semióticas de los racionales que se les presentan a los niños de cuarto y quinto grado en torno a los racionales, surge la siguiente pregunta que orienta finalmente todo el proceso de investigación:

¿Cuáles son los aspectos (componentes, relaciones y operaciones) de los modelos mentales sobre los números racionales que asocian los niños y niñas de quinto grado a la interpretación de las representaciones y transformaciones semióticas que se les presentan, y a las formas como expresan sus modelos a través de las representaciones que ellos producen y de las transformaciones semióticas que realizan para resolver problemas escolares?[2]

---

[2] El verbo "asociar" en esta pregunta de investigación no hace alusión al asociacionismo en psicología, sino a los morfismos de interpretación y expresión que permiten "enlazar", "hacer corresponder", "coordinar" o "asociar" cada componente de una proposición escrita de una teoría a su respectivo aspecto en el modelo mental del maestro o del estudiante que está tratando de entender esa proposición por medio de una interpretación en su modelo mental, o de comunicarlo a otra persona por medio de esa formulación verbal como expresión de su modelo mental.

1.4 Objetivos

1.4.1 *Objetivo General*

Comprender los aspectos de los modelos mentales (componentes, relaciones y operaciones) sobre los números racionales que asocian los niños de quinto grado a la interpretación de las representaciones y transformaciones semióticas que se les presentan y a las formas como expresan sus modelos a través de las representaciones que ellos producen y de las transformaciones semióticas que realizan para resolver problemas escolares.

En nuestro caso particular, como se trata de comprender distintos aspectos y formas de expresión de los modelos mentales de los niños y las niñas, resultó muy conveniente subdividir el objetivo general en tres objetivos específicos.

El primero, orientado a los tres aspectos básicos que tienen dichos modelos mentales considerados como sistemas: su sustrato, su estructura y su dinámica; el segundo, con énfasis específico en las representaciones de las operaciones de la dinámica de cada sistema y los resultados de ellas y el tercero en la puesta en marcha de los procesos de transformación de las representaciones semióticas según la teoría de cada sistema y su interpretación en el modelo mental activado.

Finalmente al proponer los problemas escolares, se refiere a las situaciones auténticas o artificiales que construye o propone el maestro para contextualizar la actividad matemática.

1.4.2 *Objetivos Específicos*

— Reconstruir los aspectos de los modelos mentales que asocian los niños de quinto grado a partir de las representaciones y transformaciones semióticas de los racionales que se presentan en las situaciones matemáticas ofrecidas por los maestros o los autores de los libros de texto.

— Reconstruir los aspectos de los modelos mentales que expresan e interpretan los niños y niñas de quinto grado a partir de las representaciones y transformaciones semióticas que ponen en juego desde la dinámica del modelo.

— Reconocer la teoría como externalización de los modelos en el registro semiótico de la lengua natural y el subregistro técnico de la misma sobre los racionales que construyen los niños a partir de la interpretación y expresión de los modelos mentales que se asocian a las representaciones y transformaciones semióticas.

CAPÍTULO II. ESTADO DEL ARTE

Al indagar acerca de los modelos y teorías en torno al aprendizaje de los racionales, se requiere retomar las categorías que le dan origen al problema: el problema de la conceptualización matemática, las dificultades de comprensión de los racionales y la teoría de las representaciones semióticas en la Didáctica de la Matemáticas.

Desde cada una de ellas se presentan los estudios que le anteceden y permiten reconstruir los modelos mentales públicos de los autores, los maestros y los autores de los libros de texto adoptando la perspectiva epistemológica de la TGMT, que se presentan de manera general en el marco teórico.

2.1 La conceptualización Matemática, las Representaciones Semióticas y su Sentido y significado: Una relación sin resolver

La preocupación por identificar el sentido y significado que los estudiantes atribuyen a los términos, predicados, operadores y a los símbolos matemáticos, a su relación con los conceptos y proposiciones teóricas y la construcción de estos sentidos y significados, tal como lo manifiesta Godino (2000), pone en escena las nociones de *sentido* y *significado*, que ha sido tema central y controversial en filosofía, lógica y semiótica, entre otras disciplinas.

Reconociendo la vigencia y la dificultad de esta discusión, nos remitimos a lo propuesto por D'Amore (2006a, 2012, 2015, 2017) sobre la conceptualización desde la Didáctica de las Matemáticas, en donde retoma pensamientos filosóficos, psicológicos y antropológicos para, finalmente, asumir los planteamientos noético-semióticos de Duval.

Acerca de la naturaleza del concepto, este se asume como proceso dinámico, concreto o abstracto; por lo tanto, hay diferencias entre nombre y concepto, teniendo en cuenta que diferentes maneras de nombrar un objeto pueden dar cuenta de un mismo concepto, así como diferentes conceptos pueden relacionarse con el mismo nombre (D'Amore, 2012).

En cuanto al concepto, desde la filosofía se establece la diferenciación entre la *naturaleza* del concepto y la *función* del concepto: la naturaleza del concepto se suele identificar con una representación abstracta de la esencia de las cosas; es el signo mental del objeto, indicando una relación de significación. La función del concepto se reconoce de dos tipos: intencional e instrumental, lo que permite relacionar la función intencional con la representación mental de la realidad, y la instrumental con su uso en la comunicación con otras personas acerca de esa realidad.

Desde la perspectiva psicológica de la Didáctica de las Matemáticas se acude al aporte de Vigotsky (1960, 1962) en cuanto a la formación de conceptos, cuando asume que más que formación, es necesario plantear un desarrollo conceptual, en donde se encuentran tres fases claramente diferenciadas. La primera de ellas, que corresponde a la fase de cúmulos sincréticos que se refiere a una primera aproximación a los objetos desde lo concreto; la segunda fase, en donde el sujeto avanza hacia un modo objetivo del pensamiento cuando reconoce nexos concretos pero no lógicos ni abstractos y, finalmente, la fase conceptual que se reconoce cuando el sujeto opera utilizando su capacidad de abstracción.

En la misma línea de la psicología cognitiva, desde una postura piagetiana, también se asume la formación y el desarrollo de conceptos científicos, partiendo de la abstracción de objetos concretos, al determinar que a partir de la manipulación de objetos reales, el niño, según Piaget, logra una abstracción empírica cuando es capaz de describir las características y propiedades del objeto, aún en su ausencia; posteriormente, en un nivel avanzado del desarrollo, realiza abstracciones reflexivas en la medida en que es capaz de operar con las propiedades del objeto y es allí donde surge la conceptualización.

Para Vergnaud, el punto decisivo en la formación de conceptos es el paso del concepto como instrumento al concepto como objeto, tal como lo propone Sfard (1991) un concepto se ha comprendido cuando ha podido ser visto como un objeto. Tanto lo planteado por Vergnaud (1983) como lo expuesto por Sfard (1991), se requiere de una operación psicolingüística que Vergnaud la define como conceptualización.

En este sentido, al abordar la composición de los conceptos matemáticos y la necesidad de definir el concepto como objeto, Vergnaud (1983) propone que el concepto se exprese mediante una tripleta compuesta por tres elementos: un conjunto de situaciones que dan sentido al concepto (S), es decir, los referentes; un conjunto de invariantes (I) sobre los cuales reposa el significado del concepto, y un conjunto de representaciones simbólicas (R) que sirven para indicar tanto los aspectos invariantes como las situaciones, que corresponde al significante. Esta definición de concepto expuesta por Vergnaud permite comprender que apropiarse de un concepto independientemente de sus representaciones es mucho más que nombrarlo o que utilizarlo como instrumento para la comunicación o para el cálculo simbólico por transformaciones de las representaciones.

En la estructura planteada por Vergnaud se retoma la triada clásica que Pierce publicó en 1883, en donde se asume la relación entre *representamen*, *objeto* e *interpretante* (distinto del intérprete), seguido del triángulo propuesto por Frege publicado en 1892, cuyos componentes de la triada son *expresión*, *sentido* e *índice*, hasta el esquema tríadico de Ogden y Richards en 1923, que propone una relación entre *referencia*, *símbolo* y *referente* (D'Amore, 2006b, 2017).

Sin embargo, la definición ternaria de Vergnaud (1983) en cuanto a la conceptualización matemática se fue desplazando durante los años 90 por un esquema binario en Duval (1993, 1995), cuyo autor prefiere no hablar de “concepto” sino más bien de *objeto matemático* a través de las parejas signo-objeto, en donde el significado agrupa los múltiples signos o significantes, permitiendo definir la conceptualización matemática desde esta relación entre signos o significantes múltiples que van constituyendo el objeto como el invariante de dichos signos. Por lo tanto, todo concepto matemático no solo remite al objeto mental que ha sido construido socialmente sino también a su relación con todos los signos y las relaciones entre los signos que permiten su representación (Fandiño, 2009).

Desde la línea antropológica de la Didáctica de las Matemáticas, la construcción del conocimiento matemático, según Balacheff (2004), requiere definir el significado como palabra clave en la investigación sobre conceptualización matemática. Para ello, con apoyo de la lingüística, se plantean dos posturas en las que se discute la naturaleza de los conceptos matemáticos: realista y pragmática. Desde la postura realista se sostiene que el significado es “una relación convencional entre signos y entidades concretas o ideales que existen independientemente de los signos lingüísticos; como consecuencia suponen un realismo conceptual” (D’Amore, 2001, p. 12).

Según los postulados de la semántica realista, se puede decir que las estructuras matemáticas tienen una existencia real que no depende del sujeto y que en la actividad matemática es donde se descubren esas estructuras. En esta postura realista, los autores más representativos son Frege, Russell, Cantor, Bernays y Gödel citados por D’Amore (2012).

Posteriormente, la imposibilidad de sostener la existencia real de los conceptos matemáticos independientemente de la mente humana, desde Wittgenstein en sus *Investigaciones Filosóficas*

(1953) se sostiene que la significatividad de una palabra depende de su función en los “juegos lingüísticos”. Bajo este principio, las teorías pragmáticas del significado permiten pensar que las expresiones lingüísticas adquieren significado dependiendo del contexto en el que se usan y de los propósitos con que se hacen las “jugadas verbales”.

Para el presente estudio se adopta una postura pragmática del significado, lo que permite reconocer que los conceptos matemáticos remiten a “no-objetos” reales independientes de la mente humana; es decir, no se asume su existencia real, sino que por el contrario, estos son de naturaleza no ostensiva, como lo plantean Godino y Batanero (1994) pues requieren de representaciones que se puedan exhibir en su nombre y que permitan comprenderlos.

En esta orientación pragmática, Chevallard (citado por D’Amore, 2001) defiende que el objeto matemático emerge de un sistema de prácticas que se expresan en diferentes registros semióticos que aluden a los sistemas de representación y sostiene también que en la variedad semiótica resultante ocurre la actividad matemática.

Esta postura pragmática se precisa con lo planteado por Duval (1999), cuando afirma que sólo a través de los sistemas semióticos de representación (registros de representación, distintos de las representaciones producidas por ellos) y a través de las transformaciones semióticas (tratamientos y conversiones), es posible acceder a los objetos matemáticos.

Derivado de lo planteado en el párrafo anterior, se asume que el significado de un objeto es de naturaleza epistémica-institucional y surge del sistema de prácticas institucionales/personales asociadas al campo de problemas de las que emerge dicho objeto en un momento dado, tal como lo define Godino y Batanero (1994); Santi (2011) y Rojas (2014, 2015).

Comprender el significado de un objeto matemático en términos de prácticas, tal como se propone en el enfoque ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2007), permite distinguir sentido y significado, entendiendo el sentido como un significado parcial debido a la posibilidad de parcelar las diferentes clases de prácticas mediante la configuración epistémica en donde cada una de ellas aporta en la construcción de sentido.

En cuanto al sentido cognitivo-personal del objeto matemático, en la tesis doctoral sobre "Articulación y cambios de sentido en situaciones de tratamiento de representación de objetos matemáticos" realizada por Rojas (2014), el sentido es considerado como el significado parcial asociado a lo contextual y temporal atribuido por el sujeto.

En conclusión, y de acuerdo con la revisión del sentido y el significado de los conceptos matemáticos, se asume una postura pragmática del significado matemático cercana a la asumida por D'Amore y por Godino, Batanero y Font, pero como la precisa Duval.

2.2 Las dificultades de comprensión de los racionales

La enseñanza y el aprendizaje de los sistemas numéricos llamados "números racionales", a veces "fraccionarios" o simplemente "fracciones", ha sido una preocupación latente, patente y vigente en la Didáctica de la Matemáticas desde antes de su consolidación como disciplina científica.

Las investigaciones sobre el concepto de fracción y las operaciones entre fracciones, así como los problemas relacionados con la interpretación del término "fracción" han circulado desde los años 60 y aún persisten. Pero para no hacer un listado cronológico de los diversos autores, se remite al texto "Las Fracciones: Aspectos Conceptuales y Didácticos", en donde Martha Isabel

Fandiño (2009) hace una amplia y rica descripción que facilita la comprensión de lo que ya se ha indagado en torno a este concepto matemático.

A partir del 2009, los trabajos que se han realizado recogen los aspectos teóricos y metodológicos abordados por autores representativos como Kieren (1980, 1983,1988, 1993); Hart (1980, 1981, 1985, 1989); Streefland (1990, 1991,1993); Ohlsson (1988); Llinares (2003); Lamon (2007); Gagatsis (2003).

En la enseñanza y el aprendizaje de los números racionales, tal como lo señala Fandiño (2009), existe un consenso en el acercamiento inicial que se hace en el aula a este concepto, ya que siempre se parte de un todo como objeto de referencia que generalmente es una figura de forma circular que sea familiar a los estudiantes, como la torta o la pizza, que es "partida" necesariamente en partes iguales y es repartida a un determinado número de personas.

En los trabajos posteriores al 2009, se hace referencia a encontrar nuevas maneras de construir el concepto de tal manera que se supere la noción *parte-todo* y la *equipartición*, que pueden volverse un obstáculo para el aprendizaje de las fracciones, en los casos en donde los racionales actúan como operadores multiplicativos (Cortina, 2013).

Sin embargo, al tratar de interpretar y comparar las teorías sobre los racionales que se expresan en los modelos de los autores desde Kieren (1983) hasta Fandiño (2009), la teoría de los registros y las representaciones semióticas propuesta por Duval (1995/1999; 2017) brinda recursos epistemológicos, metodológicos y semióticos que permiten reconstruir los esquemas conceptuales de los autores, a la vez que hacen evidentes las dificultades de comprensión que posee el aprendizaje de los racionales.

Este objeto matemático, comprendido en la presente investigación como sistema de los números racionales con sus componentes, relaciones y operaciones, tradicionalmente y tal como se expresa desde la teoría le ha dado prevalencia a la relación parte-todo.

Esa relación, si bien facilita su construcción inicial, deja de lado el operador o transformador "achicador" y "agrandador" como componente operacional del sistema desde la propuesta del archipiélago fraccionario de Vasco (1991, 1994, 1994a) y que se constituye en el principal antecedente para el presente estudio al considerar el sistema de números racionales como un archipiélago formado por varias islas: partidores, medidores, operadores, razón y cociente, postulando también que entre ellas existen múltiples puentes que permiten su interacción y su comunicación.

De este recorrido por las teorías y modelos en torno a los números racionales, se pueden concluir los siguientes aspectos:

- Kieren sugiere que un constructo de número racional completamente desarrollado, debe estar compuesto de cinco subconstructos: medida, cociente, razón numérica, operador multiplicativo y relación parte/todo (1983). Ohlsson (1988) reconoce los subconstructos, estudiando las relaciones entre ellos y asignándole una estructura global.

- La partición y la equivalencia considerados mecanismos constructivos propuestos por Kieren (1993) son usados en el desarrollo de los cinco subconstructos en donde a su vez el autor plantea que para que haya construcción de este concepto, se requiere la realización de actividades físicas o mentales en las que se pueda asociar 'a/b', lo que ha llevado a un excesivo uso del partidor como componente principal dejando de lado otras operaciones conceptuales asociadas al concepto de operador multiplicativo (Vasco, 1994; Fandiño, 2009).

- Tanto para Best, Post & Silver (1983); Nesher (1988); Freudenthal (1983); Vergnaud (1983); Ohlsson (1988); Vasco (1994) y Fandiño (2009), el concepto de número racional se reconoce también como operador multiplicativo.

- La fracción como parte-todo ha predominado en los procesos de enseñanza de la matemática y es el primer acercamiento que tiene el niño al concepto, sin tener en cuenta las magnitudes y cantidades implicadas. De acuerdo con Obando (2003), en el proceso de conceptualización de las fracciones, se construye en la partición en donde la medición no es el eje central ni hay un tratamiento cuidadoso del tipo de magnitud y del tipo de unidad.

- En el contexto escolar y en la resolución de problemas de la vida cotidiana, se emplean variadas representaciones semióticas producidas por diferentes registros semióticos del objeto matemático número racional, sin que el sujeto (sea el maestro o el estudiante) que hace uso de ellas sea consciente que está operando sobre el mismo objeto matemático.

- La construcción del objeto matemático del número racional se ha visto afectada por el intento de la llamada "Matemática Moderna" o "Nueva Matemática" de forzar a los niños y niñas a reconocer los racionales como una clase de equivalencia de parejas de naturales (Fandiño, 2009), y desde el otro extremo, a veces atribuido al movimiento Bourbaki, el excesivo uso de modelos intuitivos asociados a la partición física de objetos en "piezas", "pedazos" o "trozos". Ambos procedimientos son obstáculos didácticos presentes en su aprendizaje.

2.3 La teoría de las Representaciones Semióticas en el aprendizaje de los racionales

Desde la investigación en Didáctica de las Matemáticas se ha indagado por el papel que juegan las representaciones en el proceso de comprensión de los conceptos matemáticos, tal como se encuentra en Brown (1996, 1997); Sistemas de notación (Kaput, 1994, 1998); (Janvier,1987); con los sistemas matemáticos de signos (Kieran & Filloy, 1989), entre otros. Todos estos autores coinciden en afirmar que la naturaleza de las representaciones matemáticas ostensivas (Godino & Batanero, 1994), públicas o externas influyen en el tipo de comprensión que logra el alumno y, recíprocamente, que su comprensión determina el tipo de representación ostensiva que puede utilizar eficazmente.

Por lo tanto, y desde los resultados de investigación de los autores antes mencionados, es evidente reconocer que la interacción entre las representaciones externas e internas juega un papel clave en los procesos de aprendizaje de la matemática, puesto que las representaciones internas son inferidas a partir de la producción de un discurso matemático o su materialización en una representación externa.

Un concepto matemático es aprendido en la medida en que permita la producción de una gama de representaciones internas que se harán visibles y púbicas al materializarlas como representaciones externas.

Posteriormente, y con conceptos como registro y representación semiótica, surge la teoría noético-semiótica de Raymond Duval, presentada formalmente en 1993,1995 y traducida al español en 1999 como "Semiosis y Pensamiento Humano" (1995/1999) que en la edición del año 2017, el autor afirma que la actividad matemática es una semiosis, en tanto es una actividad de producción, interpretación y transformación de representaciones semióticas en otras representaciones, bien sea dentro del mismo registro (tratamientos) o de un registro a otro (conversiones).

A partir del texto en español de 1995 y el texto en su idioma original de 1993, la inclusión de la semiótica en la Didáctica de las Matemáticas y su papel en la construcción del conocimiento matemático empezó a ser motivo de discusión y reflexión cada vez más frecuente en la comunidad científica; puede decirse que su instalación definitiva se logró en 2006 con la publicación del número doble especial de *Educational Studies in Mathematics* dedicado a la semiótica, contando como editoras a Adalira Saénz-Ludlow y Norma Presmeg, que coincidió con la edición que publicó la revista *Relime* en el mismo año sobre la semiótica en la educación matemática cuyos editores fueron Luis Radford y Bruno D'Amore.

Ambas publicaciones marcaron un hito en esta línea de investigación sobre la que se siguen haciendo constantes reformulaciones por autores como Otte (2003, 2006, 2011); Radford (2006, 2006b, 2010,); Saenz-Ludlow (2006); Ernest (2006); Godino (2003); Godino, Font & Castro (2009); D'Amore (2001, 2003, 2006, 2012, 2017); Santi (2011) y Rojas (2014, 2015).

Para analizar el objeto matemático número racional, con la apuesta noético-semiótica de Duval se ha suscitado la necesidad de mantener en primer plano la distinción entre el objeto matemático número racional y sus distintas representaciones semióticas, aspecto que no había sido considerado de manera explícita en los modelos y teorías existentes sobre los racionales, como se evidencia inicialmente en Kieren (1983), cuando no se hace una distinción entre representaciones y objetos, ya que los constructos *objeto* y *representación* se emplean indistintamente.

Muchas veces en español y casi siempre en inglés, se asume el objeto matemático número racional con la fracción, que es solo una representación, aún en el texto clave para esta investigación, tal como ocurre en el archipiélago fraccionario de Vasco (1994), aunque ya se logran establecer diferencias entre los “monstruos”[3] que habitan cada una de las islas y sus representaciones como fracciones o cocientes indicados, el lente semiótico que permite distinguir el registro de las representaciones está todavía ausente.

Haciendo una lectura semiótica de este modelo de Vasco (1994), podría decirse que los registros son las lenguas y dialectos de los “monstruos” que viven en cada isla; que las reformulaciones que se efectúan dentro de la misma isla corresponderían a los tratamientos, y las traducciones que ocurren entre dos islas diferentes serían las conversiones, que no se encuentran presentes en el modelo original.

Siguiendo a Duval (1999, 2004, 2017), un sistema semiótico debe permitir la realización de tres actividades cognitivas: en primer lugar, la selección del registro de representación; en segundo lugar, la producción y eventual tratamiento de una representación y, en tercer lugar, debe hacer posible el tránsito entre representaciones semióticas producidas por distintos registros o conversiones.

Al trabajo de Duval le han sucedido numerosos trabajos de investigación que han abordado las transformaciones semióticas, entre las que se resaltan los escritos de Duval (1995/1999, 2004, 2006, 2017) y los de D’Amore (2004, 2006, 2009, 2013, 2017); Santi (2011) y Rojas (2014).

Para el caso del objeto matemático número racional, el análisis semiótico tuvo un primer acercamiento en Fandiño (2009), pero se hace necesario avanzar en el reconocimiento y diferenciación entre los distintos registros, las representaciones semióticas y los modelos conceptuales que puedan ofrecer mayores herramientas para comprender los modelos mentales

3 Se utiliza la palabra “monstruos” por fidelidad con los términos que emplea el autor del Archipiélago Fraccionario

públicos y privados de los maestros, los modelos públicos de los autores presenten en los libros de textos y por consiguiente los modelos mentales privados de los niños y las niñas.

Desde los planteamientos posteriores de D'Amore, Fandiño e Iori (2013), se reitera que, para ellos, las dos características esenciales que constituyen la actividad matemática son las siguientes:

- La selección del registro de representación sobre el cual se produce la representación
- Las transformaciones de las representaciones, que incluyen los procesos de tratamiento y de conversión.

Se parte del supuesto que el aprendizaje de los objetos matemáticos se hace teniendo como único acceso las representaciones semióticas y solo a través de ellas, es posible un aprendizaje conceptual. Por lo tanto, la disponibilidad y el uso de los sistemas de representación semiótica y las transformaciones semióticas que hace el sujeto, se convierten en la posibilidad de lograr este aprendizaje.

2.4 La Teoría existente sobre los Números Racionales

Para identificar los sistemas conceptuales de números racionales, el trabajo más relevante para la Didáctica de las Matemáticas fue iniciado por Kieren (1980), quien, desde una perspectiva constructivista, sostuvo que a partir de la expresión simbólica '$\frac{a}{b}$', se puede reconocer la existencia de al menos cuatro constructos relacionados con el término "fracción".

Los cuatro primeros constructos propuestos por él fueron: medida, cociente, operador multiplicativo y razón. Posteriormente, Kieren (1988) reconoció la existencia de un quinto significado o constructo: la relación parte-todo, y señala que esta relación puede estar presente en los otros cuatro constructos, al identificar en cada contexto, la unidad y sus partes.

A partir del recorrido teórico que inicia con Kieren (1980); Behr, Lesh, Post & Silver (1983) y es seguido por Freudenthal (1983); Nesher (1985); Vasco (1994): Adjiage (1999); Obando (2003, 2013); Pontón (2008, 2012) hasta Fandiño (2009), es reiterativo el reconocimiento de los constructos considerados por Kieren como mecanismos personales que emplea el sujeto para construir el conocimiento matemático de los racionales, lo que es clave para pensar el aprendizaje matemático.

Kieren (1980, 1983, 1988) argumentaba la existencia de significados distintos del término fracción, llamados *constructos*, pues las mismas palabras y símbolos aritméticos parecían interpretarse por parte de alumnos y maestros en distintos modelos, conceptos o prácticas. Aunque en las tres publicaciones citadas dichos constructos se fueron transformando en el tiempo, todos conservan una referencia común propia del concepto de racional no tanto como número sino asociado a la relación multiplicativa entre dos números o cantidades métricas, ya que en todos los constructos se establece algún tipo de relación multiplicativa entre una cantidad y otra, entre las cuales Kieren privilegia inicialmente la relación parte-todo y la relación de equivalencia.

Kieren sugiere desde 1980 que los números racionales, como campo de cocientes, puede manifestarse en cualquiera de los constructos y sus subconstructos; además, reconoce que el concepto de número racional completamente desarrollado debe tener estructuras conformadas por los constructos de medida, cociente, razón y operador multiplicativo.

Posteriormente Kieren, en 1983, describe, precisa e intenta caracterizar los números racionales a partir de las siguientes consideraciones, en las cuales el constructo razón no es tenido en cuenta:

- Son fracciones que pueden ser comparadas, adicionadas o sustraídas.

- Son fracciones decimales como una extensión de los números enteros.
- Son clases de equivalencia de fracciones.
- Son números de la forma ‘p/q’, donde p y q son diferentes a 0.
- Son operadores multiplicativos (agrandadores y achicadores).
- Son elementos de un número infinito ordenado del campo cociente.
- Son números de la forma x = p/q donde x satisface la ecuación qx = p.
- Son medidas o puntos de la recta numérica.

Los investigadores Behr, Lesh, Post y Silver (1983) conforman un grupo de trabajo llamado “Rational Number Project” que realiza investigaciones sobre la enseñanza de los números racionales, ligado inicialmente a la propuesta de Kieren (1980) y asumen además de los cuatro constructos, dos “subconstructos” de fracción.

- *El subconstructo medida* de la fracción que Behr, Lesh, Post y Silver (1983) propone como una reformulación del concepto parte-todo.
- *El subconstructo razón* (ratio) como la comparación entre dos cantidades.
- *El subconstructo razón* (rate) que se refiere a una nueva cantidad que establece una relación entre otras dos cantidades.
- *El subconstructo cociente*, que supone el número racional como el resultado de una división.
- *El subconstructo coordinate linear*, que interpreta el número racional como un punto en la recta numérica.
- *El subconstructo decimal*, asociado con el sistema de numeración decimal.
- *El subconstructo operador*, que reconoce la fracción como una transformación.

Otra manera de desglosar el concepto de fracción basado en la partición y la relación de las partes con el todo fue propuesta por Nesher (1985) con cuatro interpretaciones diferentes:

- Es el *resultado de una división* entre dos números enteros que en Estados Unidos enteros a veces significa naturales.
- El *número racional como ratio,* implica una comparación entre dos cantidades.
- Como *operador* reconoce que actúa sobre la cantidad y cambia la cantidad.
- El *numero racional como probabilidad*.

Con respecto a esta última interpretación, esta conceptualización del número racional como frecuencia de eventos favorables entre todos los eventos simples equiprobables (concepción laplaciana de la probabilidad de un evento) no había aparecido en análisis anteriores, pero se pone en evidencia en la tesis doctoral de Pedro Javier Rojas (2015), "Articulación de saberes matemáticos: Representaciones semióticas y sentidos", en el doctorado en educación DIE de la Universidad Distrital, cuando encontró esta interpretación directamente referida por algunos estudiantes al modelo de los puntos en las seis caras de los dados, al reconocerla como otro registro.

Los análisis realizados por Kieren (1980, 1983, 1988); Behr et al (1983) y Nesher (1988) representan un considerable progreso en torno al conocimiento de la fracción. Estos trabajos coinciden en reconocer que cociente, operador, razón y algunas versiones de la relación parte-todo son conceptos centrales, pero difieren respecto al objeto de análisis, pues en algunos casos son los números racionales y en otros son las fracciones, lo que acentúa la confusión o el uso indiscriminado del término: racionales y fracciones.

Freudenthal (1983), también asume las fracciones como recurso fenomenológico del número racional y que este recurso se vincula con "romper", "fracturar" pero también está relacionado con "razón" asociado a la proporción y medida.

El referente que se asume en este estudio corresponde al trabajo realizado por Vasco (1994) cuando construyó el modelo del archipiélago fraccionario, debido al enfoque de sistemas, en donde se considera que cualquier sistema matemático se descompone en "tres bandas", o "aspectos": los componentes, las relaciones y las operaciones, las cuales permiten establecer una diferencia entre los *sistemas simbólicos*, que son los que aparecen a primera vista como "sistemas de numeración", no como "sistemas numéricos", y que se relacionan ahora con los sistemas semióticos; los *sistemas conceptuales*, que corresponden a los modelos mentales y sus teorías en forma mental, verbal y escrita (en este caso los sistemas conceptuales o sistemas numéricos de los racionales) y los *sistemas concretos* que pueden ser objetos materiales de la vida cotidiana que son complejos y requieren instrucciones de manejo, que se llaman ordinariamente "sistemas", pero en este contexto se refieren a sistemas de prácticas, actividades y situaciones concretas y familiares de las cuales se han construido históricamente algunos sistemas matemáticos.

Estos sistemas que son llamados "pre-matemáticos" (Vasco, 2020), son prácticas, actividades y situaciones concretas presentadas a los alumnos en las cuales se usan los sistemas simbólicos y de las cuales se espera que los estudiantes capten las regularidades que van a contribuir a la construcción mental de los sistemas conceptuales.

El modelo del Archipiélago fraccionario mantiene los cinco constructos de Kieren que Vasco(1994) llama "las islas" que conforman el archipiélago, en donde la isla principal corresponde a la de *los operadores o transformadores achicadores o agrandadores,* considerados como construcciones mentales o 'monstruos imaginarios´ que achican o agrandan.

La *isla de los partidores,* considerada la principal isla en algunos de los libros de texto, genera confusiones debido a que se refieren a partidores de objetos cuando en la realidad a lo que se refiere es a la repartición equitativa de determinada magnitud.

La *isla de los medidores*, que dependen del sistema de medida.

La *isla de los fraccionarios como razones.*

La *isla de los fraccionarios como cocientes indicados,* en la que se intenta hacer la división pero que se deja indicada que está relacionada con el algoritmo de la división euclidiana con posible residuo y con la división que produce un número racional como corte en la recta numérica real) y la división diá (diá dos, diá tres… más relacionada con el cambio de base).

Con la analogía del archipiélago fraccionario, se avanza en la teoría de los sistemas de los números racionales, en un planteamiento clave que es la necesidad de crear puentes entre una isla y otra que puede considerarse, desde una lectura en clave de Duval (1999), la conversión de las diferentes representaciones semióticas provenientes de distintos registros de representación apropiados para distintas islas, mientras que los tratamientos serían transformaciones internas al mismo registro interpretado en el mismo modelo correspondiente a una isla específica.

Siguiendo un orden cronológico, Adjiaje (1999, 2007) llama la atención en torno a las magnitudes y en especial al dominio de las razones y desde la perspectiva de las representaciones semióticas, hace un llamado a separar los aspectos representacionales y los aspectos relacionados con las situaciones físico-empíricas, criticando la clasificación inicial de Kieren (1980, 1988).

Al sugerir esta separación se reconoce que dentro de los aspectos físico-empíricos (razones entre dos cantidades heterogéneas, medida, mezcla, frecuencia, dilataciones y cambio de unidad) a partir de marcos representacionales como los gráficos (lineales, bidimensionales) y notacionales como las (fracciones, decimales), se permiten comprender los aspectos matemáticos relacionados con las razones (relación multiplicativa entre dos cantidades físicas), las proporciones y la proporcionalidad (relación lineal entre dos cantidades variables).

En el trabajo de investigación realizado por Obando (2003) se presenta la importancia de recuperar los aspectos relacionados con la medida, el tipo de magnitud y el tipo de unidad, ya que cuando en la fracción como relación parte-todo, se involucran los aspectos mencionados, es posible avanzar en la construcción del concepto de racional desde relaciones de orden, la relación de equivalencia y la operación aditiva en los números racionales. También asume que cuando en el aula predominan las actividades matemáticas centradas en la noción parte-todo no se logra avanzar hacia el reconocimiento de los aspectos relativos a la estructura multiplicativa de los racionales.

Ponton (2008) centra su estudio en la relación parte-todo con un enfoque multiregistro desde la perspectiva de Duval con la coordinación entre los registros figural y numérico que dotan de sentido a la actividad matemática en el proceso de conceptualización de los racionales.

Finalmente, en este recorrido de los trabajos más relevantes en torno a los racionales, el estudio de las fracciones realizado por Fandiño (2009) recoge aspectos conceptuales y didácticos en torno al concepto de fracción, con un aporte para comprender este objeto matemático, que da cuenta de las siguientes interpretaciones:

- La fracción como *parte de una unidad-todo*, a veces continua y a veces discreta
- La fracción como *cociente*
- La fracción como *relación*
- La fracción como *operador*
- La fracción en *probabilidad*
- La fracción en los *puntajes*
- La fracción como *número racional*

- La fracción como *punto de una recta orientada*
- La fracción como *medida*
- La fracción como *indicador de cantidad de elección*
- La fracción como *porcentaje*
- La fracción en el *lenguaje cotidiano*

CAPÍTULO III. MARCO TEÓRICO

3.1 La TGPS: Identificación de los sistemas matemáticos en donde se ubican las teorías sobre los racionales como sistemas y permitirán interpretar las teorías y modelos de los estudiantes de quinto grado

En primer lugar, se intenta reconstruir el movimiento inicial en el que, a partir de los modelos interpretados y expresados a través de teorías que han sido construidos por los matemáticos e interpretada por autores de libros de texto, se fueron identificando algunos modelos públicos de los sistemas de números racionales, ampliamente difundidos en la literatura.

En este sentido, las teorías sobre las cuales se construyeron los modelos mentales y que fueron "lenguajeados" o expresados como se presenta a continuación, parten del planteamiento epistemológico de la TGMT - Teoría General de Modelos y Teorías - que permitió la construcción de los sistemas conceptuales de los números racionales en sus tres aspectos: componentes, relaciones y operaciones de acuerdo con la TGPS y los sistemas de representación semiótica de los racionales de acuerdo con la TGRI, también con sus componentes, relaciones y operaciones.

3.1.1 Sistemas conceptuales numéricos, geométricos, métricos y otros más

En la teoría sobre los sistemas matemáticos, se reconocen ocho tipos de sistemas matemáticos escolares, que se han venido difundiendo en Colombia desde la primera publicación del marco teórico del área de Matemáticas del programa de Renovación Curricular del Ministerio de Educación Nacional en 1984. Después de ocho años de diseño y experimentación (1976-1984), los programas oficiales para todas las áreas curriculares de la Educación Básica Primaria se publicaron en cinco libros, uno para cada grado (1º a 5º), acompañados de un libro con los fundamentos generales del currículo y otro con los Marcos Generales de los Programas Curriculares (MEN, 1984), entre ellas el programa de Matemáticas (pp. 141-172). El Decreto 1002 de 1984 aprobó estos programas para su gradual implementación grado por grado de 1985 en adelante. En el año de 1989 se deberían publicar los programas de 6º a 9º grado, lo que no ocurrió por la oposición radical de los profesores afiliados a la Federación Nacional de Educadores — Fecode — y de algunos grupos de profesores universitarios que los asesoraban.

En el marco teórico del área de Matemáticas de 1984 se propuso una distribución global de todas las disciplinas matemáticas para todos los nueve grados de la Educación Básica Primaria en ocho columnas verticales según el enfoque de sistemas. Los cuatro primeros, los sistemas numéricos, los sistemas geométricos, los sistemas métricos y los sistemas de datos (después llamados "sistemas aleatorios" o "estocásticos") se tratarían durante la básica primaria (pp. 160-161); para la básica secundaria se agregó el Análisis Real o de los sistemas analíticos (p. 158), posteriormente llamados "algebraico-analíticos".

3.1.2 Sistemas numéricos aditivos y multiplicativos construidos sobre distintos conjuntos de números

Posteriormente se hizo una distinción entre los sistemas numéricos aditivos y multiplicativos construidos sobre los números naturales ***N***, incluyendo el cero natural como elemento neutro ó módulo de la adición, y los sistemas construidos sobre los números fraccionarios, entendiéndose por estos los números racionales no negativos, $\boldsymbol{Q}^{+}$, incluyendo también el cero fraccionario como elemento neutro ó módulo de la adición.

Estos son los únicos sistemas numéricos que se propusieron en los cinco grados de básica primaria, dejando para el grado séptimo de básica secundaria los sistemas construidos sobre la totalidad de los números enteros positivos y no positivos *Z* y sobre la totalidad de los números racionales positivos y no positivos ***Q***. También se propuso una introducción de los sistemas de los números reales ***R*** en grado octavo y la de los números complejos ***C*** para resolver ecuaciones cuadráticas en grado noveno.

3.1.3 Sistemas numéricos conceptuales y sus sistemas simbólicos de numeración

En cada sistema numérico se establece una distinción entre los *sistemas conceptuales*, llamados “sistemas numéricos”, el de los naturales (***N***, 0, 1; +, x) y el de los fraccionarios ($\boldsymbol{Q}^{+}$, 0, 1; +, x), considerados únicos en cada grado de primaria, y los distintos sistemas de representación que se pueden utilizar para representar, graficar, nombrar y calcular resultados en distintos *sistemas simbólicos*, llamados “sistemas de numeración”.

No sobra decir que esta tercera distinción entre sistemas conceptuales numéricos, cuyos elementos son los *números*, y los sistemas simbólicos de numeración, cuyos elementos son los distintos tipos de *numerales* para representarlos, no fue aceptada por los docentes de Primaria —solo por algunos docentes de la Secundaria, Media y Terciaria o Superior— y más bien provocó duras críticas y rechazos a los programas de 1984.

Para el caso de los sistemas conceptuales numéricos construidos sobre los fraccionarios $\boldsymbol{Q}^{+}$, pretendió establecer una del número fraccionario conceptual o mental tan conocido y tan útil que llamamos “la mitad” o “un medio”, de los numerales ‘$\frac{1}{2}$,’ , ‘$\frac{2}{4}$’, ‘$\frac{3}{6}$’, ‘$\frac{4}{8}$’, ‘$\frac{5}{10}$’, ‘0,5’, ‘0,50’, ‘0,500’ que lo representan, y más difícil todavía, convencerlos de que el símbolo “50%” era apenas otro numeral para el mismo número conceptual.

Hasta el año 1984 no se había establecido la distinción que propuso Duval entre los registros semióticos como sistemas productores de representaciones semióticas y las representaciones mismas como sistemas de numerales, literales y otros símbolos de los elementos, como los citados arriba; de símbolos de relaciones binarias, como ‘=’, ‘≠’, ‘>’, ‘≥’ ‘, ‘<’, ‘≤’ y de símbolos de operaciones como ‘+’, ‘–‘, ‘x’, ‘÷’, ‘/’.

3.2 La TGPS y la TGMT. Identificación de la teoría de los racionales como sistema y construcción de los modelos sobre los racionales para interpretar las teorías desde los morfismos de interpretación y expresión

El análisis de las teorías que se expresan oralmente y por escrito a partir de los morfismos de expresión con los cuales los agentes noético-semióticos (autores de libros de texto o docentes) pretenden hacer explícitos algunos de los modelos construidos por ellos; permiten inferir dichos modelos como construcciones mentales a partir de fenómenos de la realidad, de procesos y subprocesos que pueden describirse y analizarse verbalmente o por esquemas o diagramas que permiten a los autores y docentes proponer a los estudiantes a través de distintos registros semióticos de representación.

Sin embargo, las representaciones observables públicamente no son suficientes para la identificación de los modelos mentales, pues se requiere adicionalmente un proceso metateórico que permita develar en las teorías como sistemas de representaciones semióticas sus elementos constituyentes y, en los diagramas, dibujos y gestos, los elementos constituyentes del modelo mental.

Es allí donde se desarrolla por parte del agente noético-semiótico, un ejercicio analítico y sintético sobre las teorías y su interpretación en los modelos mentales, y en los intentos de expresión de esos modelos en esquemas, dibujos y gestos públicos que ayuden a quienes los perciben a reconstruir lo que se quería expresar con las múltiples representaciones semióticas.

Este proceso metateórico implica descomponer y desagregar las teorías identificadas como sistemas que requieren una interpretación subjetiva reconocida como modelo, considerado por Vasco (2014), un sistema mental que se construye para representar un proceso, subproceso u otro sistema.

- Para interpretar las teorías como sistemas se asume que estas teorías cuando se van articulando y expresando, también se pueden analizar en los tres aspectos de todo sistema: Los componentes y sus agregados, es decir, los elementos y conjuntos de base
- Las relaciones, nexos, lazos o referencias mutuas entre componentes
- Las operaciones o transformaciones sobre componentes, sobre relaciones o sobre otras operaciones.

El *sustrato* de un sistema de números racionales es el conjunto, agregado o sistema de componentes o elementos que seleccionamos y recortamos del campo sobre el cual se ubica la actividad o práctica, la clase o tarea, el proyecto de aula o el examen sobre este tema, que es, en este caso, el campo aditivo y multiplicativo sobre el que se trabaja en el aula de matemáticas de cuarto y quinto grado.

Los componentes del sustrato de un sistema de números racionales son cada uno de los elementos del conjunto $\boldsymbol{Q}$ que el estudiante puede nombrar, señalar, sumar o multiplicar. Inicialmente es un subconjunto muy restringido de $\boldsymbol{Q}$, en el que suelen aparecer solo algunos racionales positivos menores que uno, que se refieren a parejas de números de un solo dígito cada uno, con frecuencia iniciados con una partícula que no parece un número sino un artículo indeterminado: “un”, seguido de “medio”, “tercio”, “cuarto”, “quinto” o “décimo”, sin que ni el estudiante ni el maestro se perturben porque las tres últimas palabras suenan lo mismo que los componentes correspondientes de la lista de los números ordinales antiguos: “primero, segundo, tercero, cuarto, quinto, …, décimo”.

Expresiones como “la mitad” no parecen ni siquiera referirse a una pareja de números naturales, pero si se escribe “$\frac{1}{2}$” o se lee “un medio”, sí aparece claramente la pareja de naturales. Ya en este nivel del sustrato podría haber distintos elementos, componentes u objetos que permitan decir que los sustratos son distintos de las clases de equivalencia de parejas ordenadas de números enteros $\boldsymbol{Z}$ con los enteros no nulos, $\boldsymbol{Z}$x$\boldsymbol{Z*}$, del sistema estandarizado $\boldsymbol{Q}$.

La *estructura* de un sistema de números racionales es el conjunto, agregado o sistema de relaciones o nexos entre los componentes o elementos del sustrato ya seleccionados para la tarea, lección, clase o ejercicio propuesto por el docente. Lo que determina o especifica que dos sistemas diferentes construidos sobre el mismo sustrato son sistemas diferentes no es la naturaleza de los componentes del sustrato, sino la estructura como red de relaciones que construimos mentalmente para reparar los cortes y recuperar la interconexión entre los componentes que recortamos en la fijación del sustrato.

En este caso, las relaciones binarias asociadas con los números naturales en los grados escolares iniciales, como la relación de igualdad y las relaciones correspondientes al orden aditivo y al orden multiplicativo de los números naturales, se reducen ahora a un nuevo tipo de igualdad y a las relaciones aditivas que en el registro semiótico de la lengua natural oral o escrita corresponden a expresiones como “mayor que”, “menor que”, “más grande que” y “más pequeño que”, pues las relaciones multiplicativas referidas a los factores, divisores, múltiplos ya no parecen tener sentido entre dos números racionales, porque siempre se cumplirían. Aparecen también nuevas relaciones como “tienen el mismo denominador” o “son inversos (recíprocos)” y otras similares.

La *dinámica* de un sistema de números racionales es el conjunto, agregado o sistema de operaciones, transformaciones o transiciones que construimos mentalmente para reparar los cortes y congelamientos temporales que se hicieron al fijar el sustrato y la estructura, y que nos sirven para recuperar el dinamismo de los procesos. En nuestro caso, la dinámica de los números racionales incluye la composición o aplicación sucesiva de racionales, confundida fácilmente con la multiplicación, aunque esta parece que siempre agranda o amplía el número natural a la que se le aplica, mientras que en los racionales esto no necesariamente sucede, y entre los pocos racionales entre cero y uno que manejan los niños nunca sucede; también aparece en la dinámica la adición o suma de dos racionales, aunque no muy naturalmente para los niños, y las operaciones inversas de división y de sustracción o resta no aparecen casi nunca espontáneamente entre los estudiantes, aunque estos son forzados por los docentes a aceptarlas y a calcularlas, aun sin poder interpretar la manipulación de símbolos escritos que les exigen los docentes.

Habiendo reconocido los aspectos de los sistemas de números racionales que aparecen en los grados cuarto y quinto de básica primaria desde la perspectiva epistemológica presente en la TGMT propuesta por Vasco (2013) se acude al reconocimiento, análisis y descripción de los distintos modelos propuestos desde los autores que han construido teoría en este campo de conocimiento.

En la siguiente tabla, se ponen en evidencia los diferentes modelos de los racionales, que se hacen explícitos al interpretar la teoría:

Tabla 1.

Modelos y Teorías sobre los racionales

	Sistema semiótico de Representación									
autor	Sistema conceptual									
	mecanismos constructivos	Representaciones semióticas								
Kieren (1980, 1983, 1988)		parte /todo	cociente indicado	operador multiplicativo	medida	razon				
Behr, Post & Silver (1983)	operador (como transformador)				Medida (relación parte /todo)	razon (relación entre cantidades)	decimal	Punto en la recta numérica		
Nescher (1985)	operador (actua sobre la cantidad y cambia la cantidad)	Fraccion (parte /todo)	cociente indicado			razon (comparador entre dos cantidades)			como probabilidad	
Freudenthal (1983)	operador	Fracturador			comparador (fracción y magnitud)	operador razon	fracciones decimales			lenguaje cotidiano
Stellan Ohlsson	operador multiplicativo		números de la forma ´p/q´		medida		decimales	puntos en la recta		
Vergnaud (1983)	Estructura multiplicativa	fracción				razon				
Vasco (1994)	operador o transformador	Fraccion (parte /todo)	cociente indicado		medidores	razon	decimales	puntos en la recta	porcentuales	
Fandiño (2009)	operador	Fraccion como parte de unidad-todo	cociente		medida	fracción como relación		punto de una recta	en probabilidad	lenguaje cotidiano

3.2.1 Los cuatro constructos centrales: Operadores, partidores, medidores y razones

Desde los autores identificados en el estado del arte realizado y que se constituyen en el marco teórico sobre el cual se fundamenta inicialmente la tesis, a partir de los constructos de Kieren (1983); con los subconstructos de Behr, Lesh, Post y Silver (1983); las interpretaciones de Nesher (1988); las islas del archipiélago de Vasco (1994) y, finalmente, las interpretaciones de Fandiño (2009) sobresalen algunos aspectos que aportan a la construcción de los tres aspectos considerados para la comprensión de los sistemas de los números racionales:

La consideración de un constructo central, que es el *Sistema Operador (o Transformador)*, está presente en los diferentes modelos, al reconocer que en los racionales siempre hay un nuevo tipo de "cantidad operativa" o "número activo", que actúa sobre otra cantidad o número, bien sea para achicarlo, agrandarlo, o "empujarlo".

Al descomponer el Sistema Operador en sus elementos, relaciones y operaciones y, de acuerdo con los mecanismos constructivos propuestos por Kieren: el de partición y el de equivalencia, es posible darle cabida a los siguientes sistemas que también son compartidos por Vasco en su modelo del archipiélago fraccionario:

El *Sistema Partidor*, debido a la importancia que tiene en el sistema fraccionario la partición "en partes iguales" y la representación más comúnmente empleada que es '$\frac{a}{b}$', leído como "a b-avos".

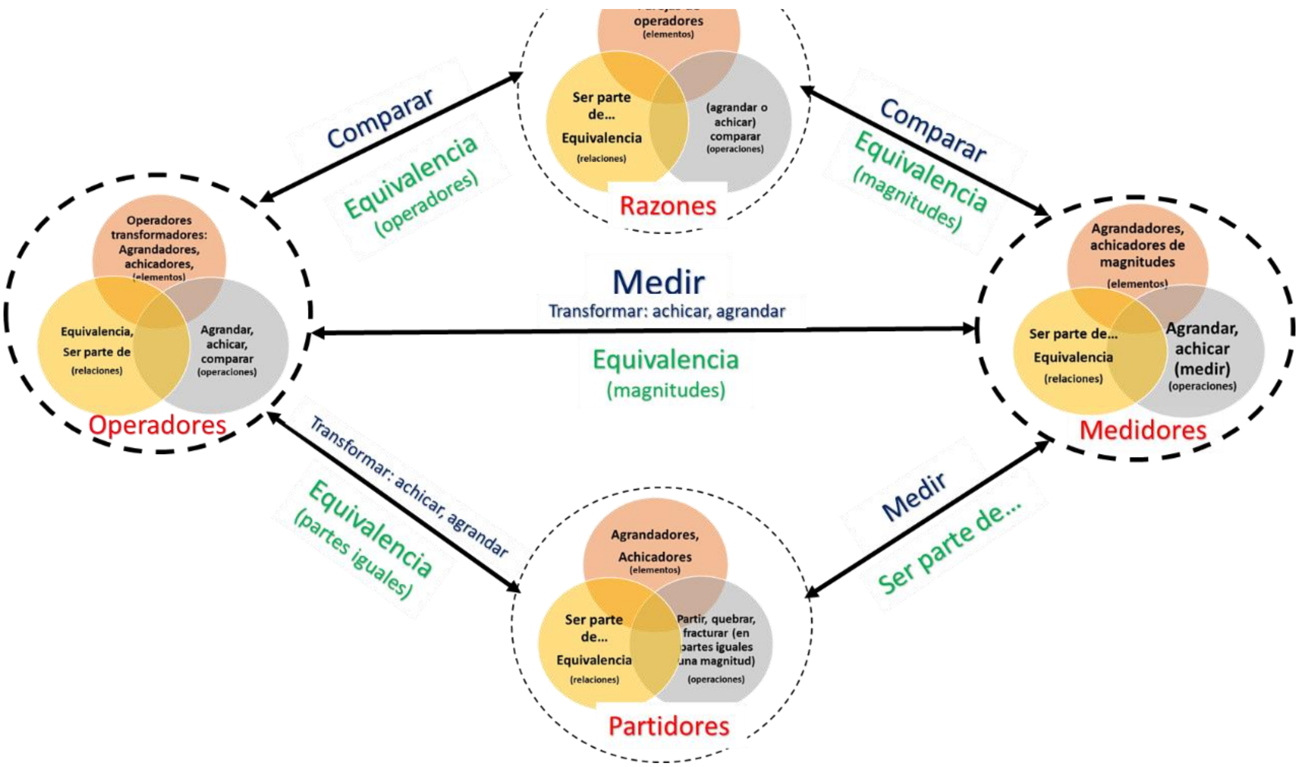
A partir del sistema anterior y dada la necesidad de establecer diferencia entre el partidor o fracturador de objetos y el más abstracto partidor o fracturador de cantidades de distintas magnitudes físicas, surge el *Sistema Medidor*, que se refiere al reconocimiento de cierta magnitud en la que cada cantidad puede repartirse “equitativamente” en un número finito de cantidades “de la misma medida”.

El *Sistema Razón*, emerge al hacer explícito un sentido de relación entre dos magnitudes (Fandiño, 2009) o entre dos números y se remite al uso geométrico y aritmético en Euclides y Eudoxo, en el antiguo Egipto, Mesopotamia, la India y la China.

Por lo tanto, desde la propuesta inicial de Kieren (1983), el modelo del archipiélago fraccionario de Vasco (1994) y la perspectiva semiótica de Fandiño (2009), se propone para esta tesis este primer modelo genérico que permite interpretar las distintas conceptualizaciones de los sistemas de números racionales, centrado en el Sistema Operador y ramificado en los tres restantes:

Figura 1.

Sistemas Conceptuales de los números racionales



A continuación, se describen cada uno de los sistemas conceptuales, después de analizar el "archipiélago fraccionario" y diferenciar aquellas "islas y puentes" que subyacen al objeto matemático de aquellas que hacen parte de sus recursos semióticos.

Sistema Operador

En el archipiélago fraccionario, la isla de los operadores se considera la isla principal, ya que los operadores se pueden describir como "monstruos imaginarios que achican o agrandan", a quien se le acerque, en este caso, una cantidad o una magnitud.

Al reconocer los aspectos del sistema, el racional es considerado un operador multiplicativo, por lo tanto, los *componentes o elementos* de este sistema son operadores que pueden ser en algún momento agrandadores, achicadores, empujadores, comparadores, partidores, dependiendo de la operación que se ejerza sobre alguna de las cantidades o magnitudes que se encuentran relacionadas.

En cuanto a las *relaciones* que se identifican entre los elementos del sistema, se evidencia la relación de equivalencia, inequivalencia, con todas las posibles formas $\{ =, \neq, \leq, <, >, \geq \}$.

Teniendo en cuenta que los elementos o componentes de este sistema son operacionales, las *operaciones* del sistema corresponden a las acciones de agrandar, achicar, partir, medir, comparar.

En este sentido, cada una de estas acciones, dan vida a los demás sistemas de los números racionales, así desde los operadores partidores y desde la operación de "partir" surge el sistema partidor, que agrandan, achican o empujan cantidades:

Sistema Operador Partidor

En cuanto a los *componentes o elementos* (sustrato) en el sistema partidor de objetos, se identifica una cantidad que suele llamarse Todo o la Unidad que puede ser discreta o continua y puede ser partida en un número indeterminado de partes, con la condición de que al partir o "quebrar" la unidad o el todo, esto debe hacerse "en partes iguales". Para este sistema, los elementos son relacionales ya que se relacionan y operan dependiendo de la naturaleza del "todo", que puede ser además de discreto o continuo, puede ser una magnitud.

En cuanto a las *operaciones* que constituyen la dinámica del sistema, la acción es en primera instancia una acción física de partir, quebrar pero que al afirmar que debe hacerse en partes iguales, se requiere restringir la acción para garantizar que cualquier partición ulterior sea un refinamiento de la inicial en partes más pequeñas pero iguales entre sí. En esta operación de partir "en partes iguales", los objetos y magnitudes se agrandan o achican lo que coincide con las operaciones del sistema operador.

Al identificar las *relaciones* que corresponden la estructura del sistema, la relación que existe entre los componentes del sistema, es "ser parte de", porque necesariamente se requiere la identificación de un todo, o una unidad sobre la cual recae la acción de fracturar, partir cada una de esas partes que componen el todo-unidad o una magnitud. Al pensar en la relación de "ser parte de", necesariamente debe acudirse al tipo de todo-unidad sobre la cual se asume esta relación, ya que no es lo mismo hablar de unidades continuas que pueden atribuirse a unidades de medida como de superficie, longitud o volumen entre otras magnitudes a hablar de unidades discretas, en donde el todo-unidad cambia.

También se identifica la relación de equivalencia en el sistema partidor, que de acuerdo con los modelos mentales y gráficos se suele suponer que es equivalencia en área, pero el área puede esconder otras diferencias, por ejemplo, en espesor. Además, se confunde la partición física en dos partes iguales de volumen, por ejemplo, y esa partición produce dos mitades, pero la fracción ½ representa la mitad de la unidad, con artículo definido singular (que denota una función), no "las mitades" ni "una de las mitades".

En el sistema partidor, el "cociente indicado" no efectuada, hace parte de los recursos semióticos ya que permite afirmar que se tienen *a* objetos y los dividimos en *n* partes.

Volviendo al sistema Operador, cuando los operadores son partidores de longitud, área, volumen, tiempo, entre otros, que agrandan o achican, surge el sistema medidor, tal como se evidencia a continuación:

Sistema Operador Medidor

En cuanto a los *elementos o componentes* del sistema, se reconocen las unidades de medida, lo que implica que el todo, en este caso, es una medida estandarizada que se descompone en sus partes y que al ser medidas estandarizadas, corresponden a una magnitud y dan cuenta del todo-unidad de medida. Otro elemento importante que se tiene en cuenta en este subsistema es que la cantidad que se descompone siempre va a establecer relación con la unidad de medida, que hace referencia a que cuando se obtienen $\frac{3}{4}$ de algo por poner un ejemplo, necesariamente debe dar cuenta de “ese algo”, que en este caso puede ser un litro, un metro, una vuelta, entre otros. Para el sistema medidor los elementos o componentes son operacionales, lo que lo vincula con los operadores agrandadores y achicadores del sistema operador.

En cuanto a las *relaciones* en el sistema medidor, la relación “ser parte de”, se hace evidente en tanto las partes sobre las cuales se descompone la magnitud dan cuenta de la totalidad, en el sentido de que si se suman, recuperan el todo que era la unidad de medida previamente establecida. En Euclides se distinguía entre la relación específica de ser parte propia o alícuota (meros) que “mide exactamente al todo”, y la de ser parte genérica (mere), que puede ser cualquier trozo de la unidad, pero esa distinción no se encuentra ahora en los libros de aritmética escolar.

Las *operaciones* del sistema medidor, hacen alusión en primera instancia a medir, al tener una unidad de medida, que puede expresarse tanto en representación fraccionaria o en decimal con una unidad de medida.

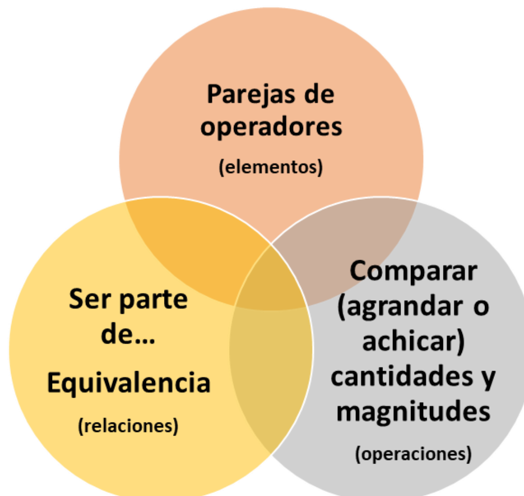
Otras operaciones del sistema medidor corresponden al agrandar y achicar la magnitud, por la acción que se hace desde la unidad de medida y la descomposición en sus múltiplos y submúltiplos. De igual manera los porcentajes hacen parte del sistema medidor en cuanto también atienden a una magnitud.

En el sistema medidor, existen varios recursos semióticos que han sido considerados representaciones semióticas como lo es la recta numérica, en donde la unidad de medida representa la distancia entre el origen y el punto de la recta, dando origen a los números flacos y gordos como los propone Vasco.

Teniendo en cuenta que los racionales denotan siempre una relación, esta puede establecerse atendiendo una magnitud, cantidad, objetos entre otras formas de establecer relación entre dos números.

Por lo tanto, desde el sistema Operador y como un componente relacional surge el sistema Razón, tal como se muestra a continuación:

Sistema Razón



Los *elementos o componentes* del sistema, se refieren a la existencia de al menos dos cantidades que son comparadas entre sí, son elementos relacionales dado que el sustrato está compuesto por la relación entre dos magnitudes. Estas magnitudes pueden ser variables al asumir valores distintos pero recíprocamente unidos por la misma relación (Fandiño, 2009).

Al considerar la probabilidad como una relación entre dos cardinalidades, se reconocen otros componentes como el número de casos posibles y casos favorables, por citar un ejemplo de una probabilidad.

Por lo tanto, las *relaciones* en este sistema, están determinadas por la equivalencia de magnitudes que se evidencian en la relación entre las cantidades o relación de eventos equiprobables como es el caso de la probabilidad.

En cuanto a las *operaciones*, se refieren a las transformaciones entre los operadores, que están determinadas por la relación, tales como achicar y agrandar.

3.3 La TGPS – TGMT y La TGRI. Reconstrucción de los registros y las representaciones semióticas con las cuales se expresan los sistemas conceptuales de los racionales

3.3.1 Sistemas de representación semiótica de los números racionales

Este camino de interpretar teorías en los modelos y desagregar las teorías y los modelos como sistemas, que al construirse requieren ser interpretados o representados, se desplaza entre la TGPS y la TGMT permeadas permanentemente por la *semiótica* que se sistematiza en la Teoría General de Representaciones e Interpretaciones — TGRI —.

Por lo tanto, cuando ya se cuenta con varios modelos mentales públicos, en este caso de los sistemas conceptuales de los números racionales, se requiere representarlos desde los tres aspectos: sustrato/dinámica/estructura, pero que dado el carácter abstracto de los conceptos matemáticos, el autor, el maestro, el autor del libro de texto y el estudiante se valen de las representaciones semióticas consideradas como Sistemas de Representación Semiótica de los Racionales, producidos por los autores, los libros de textos y los maestros en la actividad matemática que se despliega en el aula.

Este ejercicio de "expresión e interpretación", es realizado por un agente noético-semiótico al interpretar las teorías, construir y reconstruir los modelos.

Cada sistema (operador, partidor, medidor y razón) con sus componentes, relaciones y operaciones, que constituyen los modelos conceptuales de los racionales y los morfismos de interpretación y expresión que permiten expresarlo mediante lenguajes y registros semióticos con sus productos que son las representaciones semióticas, permiten el acceso al objeto matemático, a partir de las acciones de tratamiento y conversión que sólo puede lograrse si se dispone al menos de dos registros semióticos diferentes para producir dos representaciones en donde la representación y el objeto representado puedan diferenciarse.

Teniendo en cuenta los modelos mentales públicos de los racionales, la actividad semiótica que permiten interpretarlos y expresarlos mediante registros semióticos que producen los sistemas de representación semiótica que se han utilizado en las matemáticas escolares, se hace necesario tomar por separado cada uno de los sistemas conceptuales identificados en la literatura y en la actividad del docente, para dilucidar y clasificar las diferentes representaciones semióticas que se encuentran en textos, tableros, cuadernos e interacciones de aula, y asignarlas al registro que las produjo, descubrir su origen, la manera como ha sido producida, que supone entrar en la estructura interna del registro y desde allí descubrir el "árbol genealógico" de la representación semiótica.

Por lo tanto, no es posible analizar la representación semiótica independientemente del registro que la produce, dado que en la actividad matemática nos movemos entre la diversidad de registros de representación semiótica, que permiten la construcción de diversas representaciones semióticas; la diferenciación entre representante – representado, es decir, la forma y contenido de una representación semiótica y la coordinación de registros de representación semiótica, que posibilita la conversión de las representaciones semióticas (Duval, 1999, 2017).

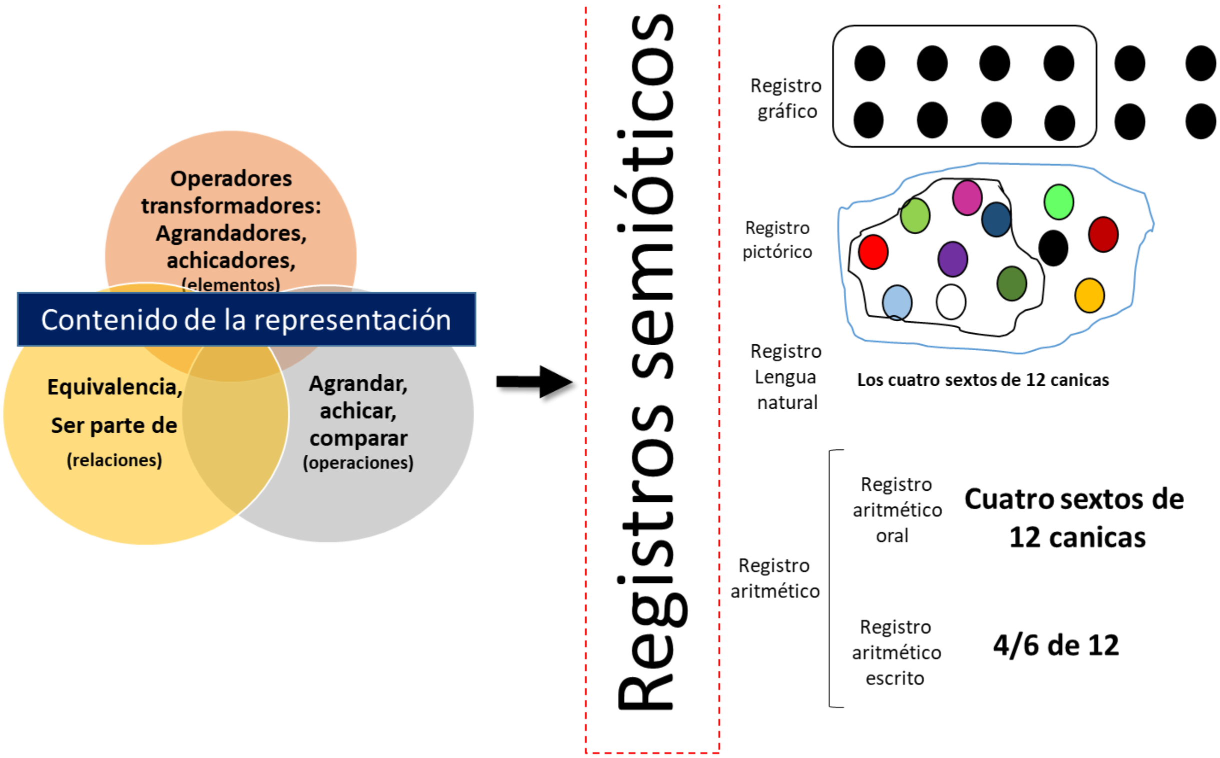
Ubicados en la TGRI, se presentan a continuación los sistemas semióticos de los racionales asociados a los sistemas conceptuales ya descritos, asumiendo que al igual que los sistemas conceptuales: partidor, medidor y razón, emergen de un sistema básico considerado el sistema operador.

Sistema Semiótico Operador

Entre los registros semióticos que permiten la producción de representaciones semióticas en el sistema Operador, se identifican el registro lengua natural, el registro pictórico, el registro gráfico y el registro aritmético, tanto oral como escrito.

Figura 2.

Sistema semiótico operador



En la representación semiótica producida por el registro semiótico *lengua natural*, los componentes corresponden a las cantidades discretas o continuas en donde existe en este caso, un "monstruo achicador", que actúa sobre una magnitud, permitiendo obtener una nueva cantidad.

En cuanto a las representaciones que se producen del registro aritmético, en la representación semiótica oral *"cuatro sextos de doce canicas",* se identifican dos componentes:

- Una cantidad, formada por la dupla: cuatro sextos (operador)
- Una cantidad discreta de los objetos de contar: doce canicas

La relación "*de"* que se establece entre ellas, puede interpretarse como "parte de" o contenido en. En cuanto a las operaciones, el operador actúa como achicador sobre la cantidad discreta dando como resultado una cantidad menor. En la *representación aritmética* escrita: si bien se reconocen los mismos componentes de la representación aritmética oral, en donde se combinan dos operadores una: achicar, en donde el operador que realiza esta acción, propicia la partición de la cantidad discreta, en este caso con otro operador que es estático pues es sobre él que recae la acción del operador.

$$\frac{4}{6}\ \text{de } 12$$

En el *registro pictórico,* la representación que se produce presenta como componentes una colección de cantidades discretas o continuas, con un subconjunto o grupo dentro de la cantidad.

Se evidencia una relación de "ser parte de" entre la cantidad discreta o continua que se ha distribuido en dos cantidades.

La operación que se logra identificar en esta representación muestra un operador que achica el todo o la cantidad, al formar un subconjunto.

Finalmente en el *registro gráfico*, produce una representación en donde también se identifican una colección de objetos discretos o continuos, en este caso círculos, distribuidos de manera equitativa.

La relación de equivalencia se presenta al reconocer, en la colección de canicas, que la cantidad se mantiene a pesar del subconjunto que se forma y el operador ejerce una acción de achicar la cantidad discreta.

Desde el sistema operador, como operadores o transformadores activos achicadores y agrandadores que pueden ser medidores de longitudes, masas, pesos, duraciones y también como partidores no de objetos materiales sino de unidades de distintas magnitudes, se pueden identificar dos sistemas semióticos:

Sistema semiótico Partidor

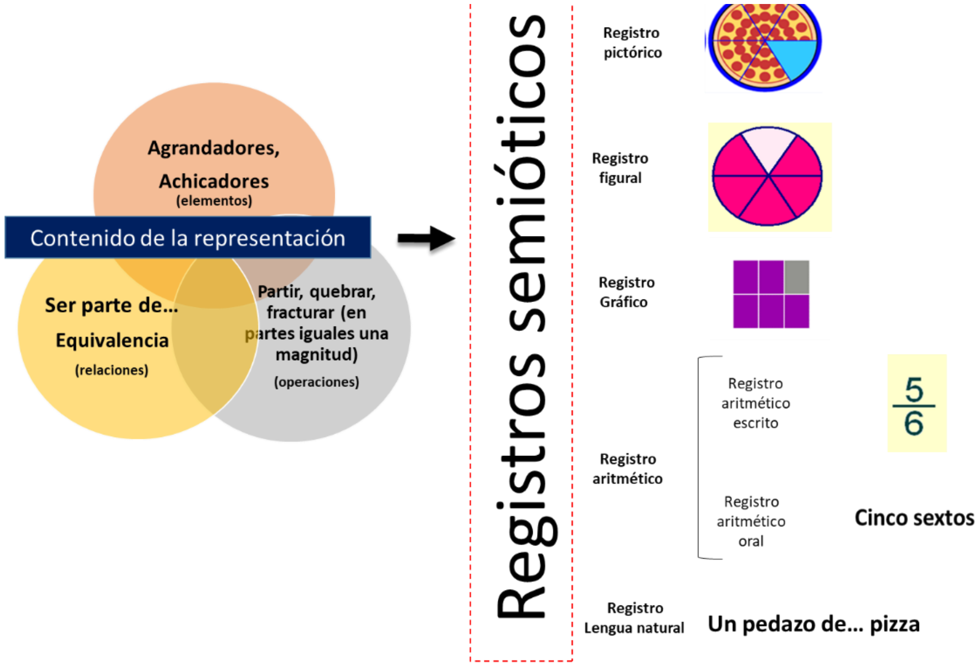
Es considerado el sistema concreto de los racionales, pues la operación que fundamenta este sistema es el "partir objetos" en "partes iguales", entendiendo que la pregunta por "iguales de qué", permanece oculta y corresponde a la magnitud.

La condición "partes iguales", es la característica de este sistema, que puede hacerse bien sea partiendo una totalidad o haciendo repartos equitativos de objetos en donde los objetos no pierdan sus propiedades.

En el sistema partidor se identifican los siguientes registros semióticos: pictórico, figural, gráfico, aritmético, que a su vez contiene el registro aritmético oral y registro aritmético escrito y el registro en lengua natural. Todos los registros producen representaciones semióticas que al descomponerlas, se logra identificar los aspectos del sistema.

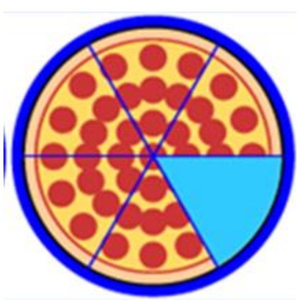
Figura 3.

Sistema semiótico partidor



El *registro pictórico*, produce representaciones semióticas a partir de objetos concretos, desde ejemplo de alimentos como es el caso de la pizza, por citar algunos de ellos presentes en los libros de texto.

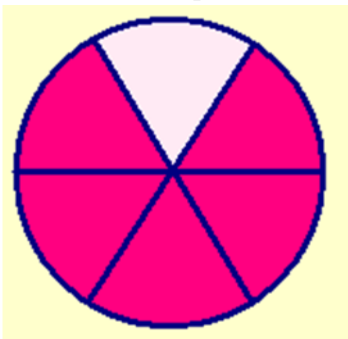
Entre los componentes de la Representación Semiótica (RS), se identifica un *todo* (en este caso una pizza), así como también los *pedazos o porciones* que componen la pizza, que en este caso eran seis, pero de ellos ya se ha tomado un trozo.



Las relaciones en esta RS producida por un registro pictórico, se reconoce que en la conformación del todo (pizza), *hacen parte* cada uno de los pedazos, porciones o trozos.

Las operaciones en este registro semiótico pictórico y su representación corresponden a *partir*, como la acción que transforma la pizza que deja de ser un todo para convertirse en seis porciones, pedazos o trozos de pizza y *quitar*, ya que de la pizza que estaba dividida en partes, se ha retirado una porción de ella, que es la que representa la fracción, lo que indica que si no se retira la porción no se presenta el racional.

Es posible entonces reconocer que, en esta RS de la fracción, los componentes muestran la relación entre dos cantidades, el todo, que para este caso sería una pizza y las partes en las que ella está dividida, a partir de la operación realizada sobre ella.



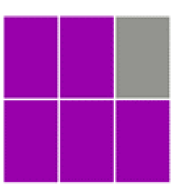
El *registro figural*, parte de una forma geométrica en este caso, el círculo para producir una RS de la fracción, haciendo evidente la igualdad en sus partes.

Así, sus componentes corresponden al *círculo con dos líneas inclinadas y una línea horizontal*. Además del color en las partes que surgen del trazo de las líneas.

Las relaciones que se identifican en este sistema de RS, corresponde a la "pertenencia" de cada una de las partes del círculo en la figura completa. También podría decirse que se identifica una relación "ser parte" al identificar que el círculo se conserva a pesar de las líneas trazadas, pero las líneas trazadas lo dividen en partes iguales, entonces hay una relación de equivalencia entre cada una de las partes.

La operación que se identifica es la de *trazar*, *rayar* y no se evidencia el *partir*, ya que el círculo conserva su forma, pero surge una condición en la operación que es la igualdad.

En el *registro gráfico* emerge esta RS que consiste en una figura que tenga como propiedad, ser dividida en partes iguales.



En este sentido, la RS que resulta de este registro, tiene como componentes, una forma (todo) que tiene dos líneas verticales y una horizontal, lo que permite “ver” este caso un rectángulo que a su vez contiene seis rectángulos de menor área.

Las relaciones en este sistema de registro gráfico que produce esta RS de la fracción, es una relación de “ser parte de”, “pertenencia”, así como “igualdad” entre los rectángulos pequeños.

Las operaciones que son las transformaciones que se generan en este caso en la RS, se refieren a los trazos realizados en la figura del rectángulo que originan los rectángulos más pequeños.

El registro aritmético que produce representaciones semióticas en el sistema partidor, se expresa a su vez en dos registros: oral y escrito.

$$\frac{5}{6}$$

El registro aritmético escrito, la RS corresponde a un sistema cuyos componentes son en este caso *dos números* (5 y 6), uno encima del otro, separadas mediante una línea horizontal en medio de ellas.

En cuanto a las relaciones que se identifican en este sistema y atendiendo a su registro productor, y a las condiciones de producción, *“parte y todo*”, en donde la cantidad numérica que se encuentra en la parte inferior es el todo como operador agrandador o achicador y la cantidad expresada en la parte superior de la línea horizontal corresponde a las partes tomadas del todo. La línea horizontal en medio de las cantidades da cuenta de la relación entre ellos.

Se trata de situaciones en las que un todo constituido por uno o más objetos se divide en “partes iguales” y se toman o consideran algunas de esas partes. Cuando escribimos o decimos

“$\frac{5}{6}$”, se quiere decir que el total se ha dividido en 6 partes iguales y que 5 trozos, corresponde a una parte de total.

La operación en este sistema, se identifica como “quebrar”, “partir” el todo, achicando o agrandando. El todo en este registro numérico y por consiguiente en la RS que se produce no es una unidad, es una cantidad que puede ser continua o discreta.

En el *registro aritmético oral,* los componentes se refieren a dos cantidades numéricas en donde la primera expresa un número y la segunda una cantidad ordinal “sextos”. Las relaciones se infieren a partir de la dependencia entre la primera cantidad y la segunda que por su estructura hacen alusión a un todo. En cuanto a las operaciones, se nota que la primera cantidad actúa como operador agrandador sobre la segunda cantidad.

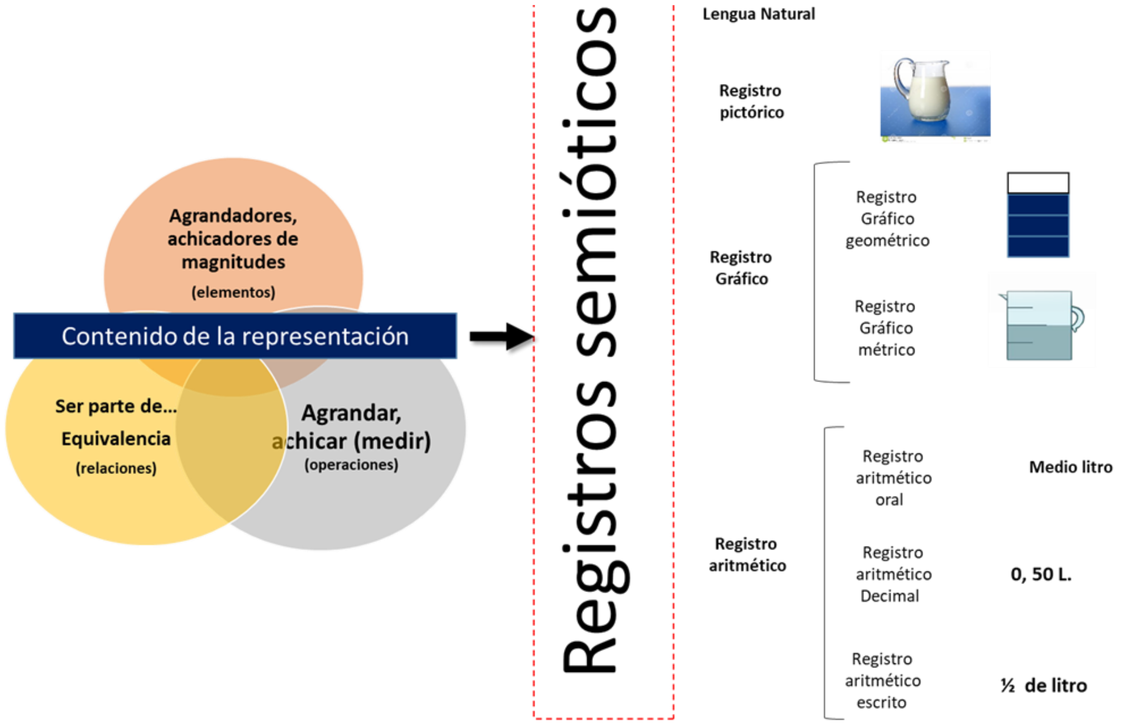
En cuanto al *cociente indicado,* es un recurso semiótico en el que se intenta hacer la división pero se deja indicada y el resultado de esta división es una manera de expresar el resultado de la división.

Sistema semiótico medidor

Partiendo de los operadores achicadores y agrandadores que le dan sentido a este sistema, la condición que cumplen los operadores es que son operadores sobre una magnitud. Por lo tanto, la condición de igualdad está determinada por la magnitud que se agranda o achica.

Figura 4.

Sistema semiótico medidor



En cuanto a este sistema, los registros semióticos productores de las RS, son:

Registro Lengua natural, permite identificar los siguientes aspectos del sistema de RS. Los componentes, que para este caso son las palabras que constituyen la frase “medio litro de leche” en donde hay una medida de capacidad (litro) y un líquido (leche).

Las operaciones que se hacen evidentes en este SRS, corresponden a medir, para determinar que es “medio litro”, por lo tanto, también hay un operador achicador.

Al identificar las relaciones en este registro, *"ser parte de"*, en cuanto la leche corresponde a la unidad que ha sido medida con el litro.

En el *registro pictórico*, la representación semiótica permite reconocer los siguientes componentes: un recipiente para almacenar líquidos que es una jarra y un contenido dentro de ella, que en este caso es la leche.

Como relaciones en esta representación se reconoce que, si el contenido está "dentro" del recipiente, entonces hay una relación de *"ser parte de",* en donde la leche representa la cantidad medida, que en este caso, se dice que es "un litro".

Las operaciones dan cuenta de una acción de *"medir"*, en este caso la capacidad. Se asume que es medio litro porque al medir se determina que corresponde a la *"mitad de un litro"*.

Surgen dos representaciones semióticas producidas por el registro gráfico, que a su vez se subdivide en dos registros: gráfico métrico y gráfico geométrico.

En el registro gráfico geométrico, los componentes de la representación se refieren a una forma geométrica rectangular que a su vez se encuentra dividida en cuatro rectángulos más pequeños, de igual tamaño.

"Ser parte de…", es una relación en este sistema de representación semiótica, porque cada rectángulo hace parte de la forma rectangular más grande, además hay una relación de equivalencia entre las partes.

La operación que logra hacerse evidente para esta representación desde las características de su registro es la de partir, por cuanto las líneas horizontales "cortan" la forma geométrica completa.

En cuanto al *registro gráfico métrico,* los componentes del sistema de representación semiótica corresponden a recipiente con los medidores por cada cuarto de litro, además del contenido que se encuentran en el recipiente.

Las relaciones están determinadas por la medida de capacidad, en este caso el litro y el recipiente que lo contiene. Hay una relación de "ser parte de".

La operación que transforma los componentes y sus relaciones, es la de *medir*.

En cuanto al registro aritmético, se pueden identificar tres registros:

Registro aritmético decimal, en este caso, los componentes se refieren a la cantidad presentada en el sistema de numeración decimal **0, 50 L,** dado que, en el sistema medidor, la capacidad está medida en litros, que bien puede presentarse como decimal o como fracción. Otro componente es la unidad de medida, en este caso el litro.

La relación de equivalencia se establece entre sus componentes. También es posible identificar la relación "de", en cuanto hay una dependencia de la medida con respecto al litro. *Registro aritmético oral,* la representación semiótica que se produce es **medio litro,** en la que se identifican como componentes dos palabras, "medio" que implica mitad de algo y litro.

La operación es un achicador que recae sobre el litro y hay una relación de "ser parte de", entre los componentes.

Los componentes del sistema se refieren a una cantidad expresada en fracción y "litro" como medida estandarizada.

Las relaciones entre estos componentes corresponden a la relación “ser parte de”, y la operación se reconoce en donde el litro se presenta como un todo que es “partido” en mitades.

Además de los registros semióticos anteriores, se puede evidenciar un recurso semiótico como la **recta numérica**, que no logra identificarse como sistema, pero desde el archipiélago fraccionario, se considera la “isla de los puntos”.

Sistema semiótico Razón

Se considera el sistema estático de los sistemas de los racionales, por cuanto la pareja de operadores establece relaciones de equivalencia y no operaciones sobre los elementos del sistema. Este sistema surge cuando se hacen comparaciones entre magnitudes.

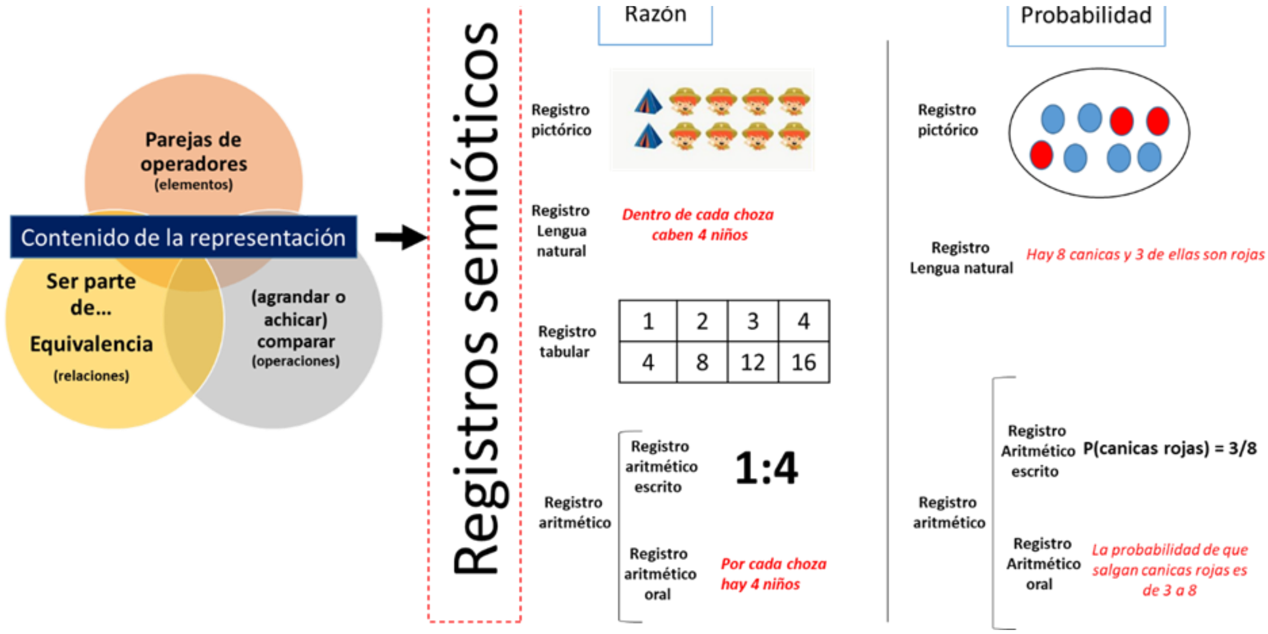
En el sistema razón, el *registro aritmético escrito*, produce una representación que establece como componentes dos operadores, en donde el signo “:” indica la relación entre las dos cantidades, que propone una acción de agrandar, en este caso, pero también puede ser de achicar. Es una acción que se reconoce en la representación ya que no es posible determinar que uno de sus operadores la ejerza sobre el otro.

En tanto, en el *registro aritmético oral* y la representación producida: “*por cada choza hay cuatro niños*”, la representación en sí misma indica una relación entre dos objetos. Choza y niños.

La relación que se establece entre las dos cantidades de diferente dimensión como son la choza y los niños, implica una comparación.

Figura 5.

Sistema semiótico Razón



Al analizar el *registro pictórico*, en la representación semiótica que se produce, que los componentes siguen siendo choza y niños, dada la naturaleza de ambas, se puede reconocer una relación parte de, que permite comparar ambas cantidades, dándole sentido al concepto de proporción.

Para el *registro semiótico tabular*, los componentes siguen siendo dos magnitudes variables que pueden asumir diferentes valores, pero manteniendo la misma relación, bien sea agrandadora o achicadora.

En el caso de la probabilidad, en el *registro pictórico* hay cantidades de la misma naturaleza, en donde el todo que son las canicas, es considerado el número posible de casos y algunas de ellas son el número favorable de casos atendiendo a una condición establecida en la relación.

Las operaciones se consideran operaciones relacionales, en tanto la acción que se ejerce sobre las cantidades, es ser parte de.

En el registro *lengua natural*: "hay 8 canicas y 3 de ellas son rojas", los componentes son las canicas, con diferente color.

La organización del texto, da cuenta de una relación "ser parte de", al proponer que hay un todo que son canicas, en este caso 8 y tres de ellas corresponden a un color diferente, lo que permite asumir que la relación está determinada por una condición, en este caso de color.

Finalmente, en el *registro aritmético*, hay una diferencia entre la representación producida por el *registro aritmético oral* y la representación producida por el *registro aritmético escrito*.

Para la representación semiótica en el registro aritmético oral, los componentes son dos operadores que dan cuenta de una acción de agrandar en este caso, en la relación entre ellos.

En el *registro aritmético escrito*, la representación semiótica se identifica con un fraccionario pero que no se puede considerar que hay una relación parte-todo, sino que es una relación mediada por una condición previamente establecida.

CAPÍTULO IV. METODOLOGÍA

4.1 Apuesta metodológica: La Teoría General de Procesos y Sistemas —TGPS —, la de Modelos y Teorías — TGMT — y la de Representaciones e Interpretaciones —TGRI—.

Cuando nos aventuramos a proponer, diseñar o construir un proyecto de investigación sobre el aprendizaje de alguna asignatura escolar, como el presente trabajo sobre la aritmética de los números racionales en la Básica Primaria, acudimos en primer lugar a identificar tanto en las teorías construidas por los miembros de las comunidades científicas —que no son accesibles en los libros, artículos, manuales y libros de texto— como en las teorías interpretadas, reconstruidas y reformuladas por los sujetos maestros y alumnos, profesores y estudiantes.

En ambos contextos, pretendemos identificar aquellos aspectos de esas representaciones semióticas externas que nos permitan conjeturar en qué modelos mentales las podrían haber estado interpretando cada uno de dichos sujetos como agentes noético-semióticos cuando las estaban formulando y reformulando mentalmente para expresarlas verbalmente o por escrito.

Además de reconocer las fuentes lingüísticas mencionadas en el párrafo anterior, acudimos en segundo lugar a las representaciones gráficas en dibujos, diagramas, esquemas o figuras producidas por los que formularon y reformularon públicamente las teorías, así como a las que producen los estudiantes en sus esfuerzos para interpretar y reconstruir las teorías que oyen y leen. La ventaja que tienen estas representaciones producidas en registros semióticos gráficos es que conservan en los libros, revistas, manuales, textos, materiales educativos, tableros, cuadernos, libretas, hojas de borrador o pantallas de computador, algunas huellas más directas de esos modelos mentales internos que estamos rastreando, precisamente en el sentido en que Peirce llama "íconos" a los signos distintos de los símbolos y de los índices, como son los diagramas y las figuras.

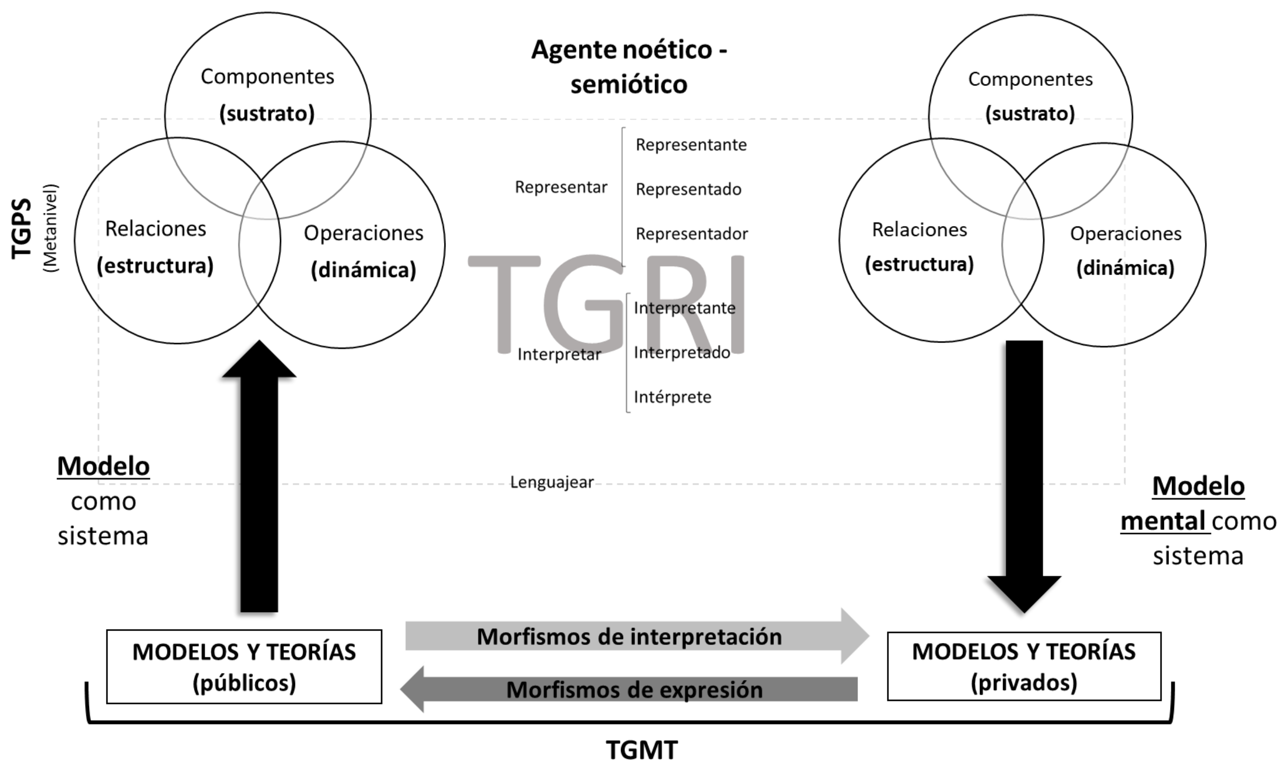
Estas huellas como productos de registros semióticos gráficos o icónicos dan cuenta directa de los componentes, la estructura y la dinámica de los modelos mentales como sistemas, pero para reconocerlos se requiere descomponer, desagregar o analizar las teorías o porciones de las teorías ya formuladas por escrito, tomadas como sistemas semióticos simbólicos muy complejos, y también analizar las figuras, esquemas o diagramas, tomándolas también como otro tipo de sistemas semióticos icónicos muy complejos, de tal manera que posteriormente podamos extraer todas las pistas para lograr el propósito de identificar al menos algunos rasgos de los modelos mentales en cada sujeto cuando está interpretando o expresando teorías o diagramas.

Después de este planteamiento inicial, y de intentar reconocer los procesos y subprocesos que corresponden a la Teoría General de Procesos —TGP—, reinterpretada desde la Teoría General de Sistemas —TGS—Vasco (1995, 2014) se propuso configurar una Teoría General de Procesos y Sistemas —TGPS—, partiendo de los procesos y subprocesos reales hacia los sistemas hipotéticos que llamamos "modelos mentales", los cuales, a su vez, representan parcialmente algunos de esos procesos y subprocesos reales, y sobre los cuales se interpretan las teorías y modelos mentales por medio de los morfismos de interpretación.

A partir de lo anterior, el proceso metodológico se sitúa en la Teoría General de Modelos y Teorías —TGMT— y en la Teoría General de Representaciones e Interpretaciones —TGRI—, siguiendo el siguiente esquema:

Figura 6.

Perspectiva Ontológica, Epistemológica y Semiótica del estudio



En la teoría matemática sobre los sistemas de números racionales con sus objetos, relaciones y operaciones, y la meta-teoría que, para este caso, es de tipo semiótico; una cosa es el nivel de producción de nuevas representaciones semióticas y su manejo por tratamientos y conversiones y el nivel de interpretación de representaciones semióticas producidas por otros, y otra cosa es el nivel metateórico sobre el cual intentamos reconstruir sus modelos a partir de los morfismos de interpretación considerados como los recursos semióticos y lingüísticos con los cuales un agente noético-semiótico, activo y dinámico, intenta comunicar el modelo mental que ha construido, y en torno a los morfismos de expresión de intentos de comunicación que parten de otros agentes.

Ambos niveles requieren del reconocimiento del modelo como sistema con la triada sustrato, estructura y dinámica y de las tres categorías clave de la TGRI: representar, interpretar y lenguajear. Son estos dos primeros aspectos, llamados morfismos o flechas, las herramientas con las que se enlazan los modelos hacia las teorías.

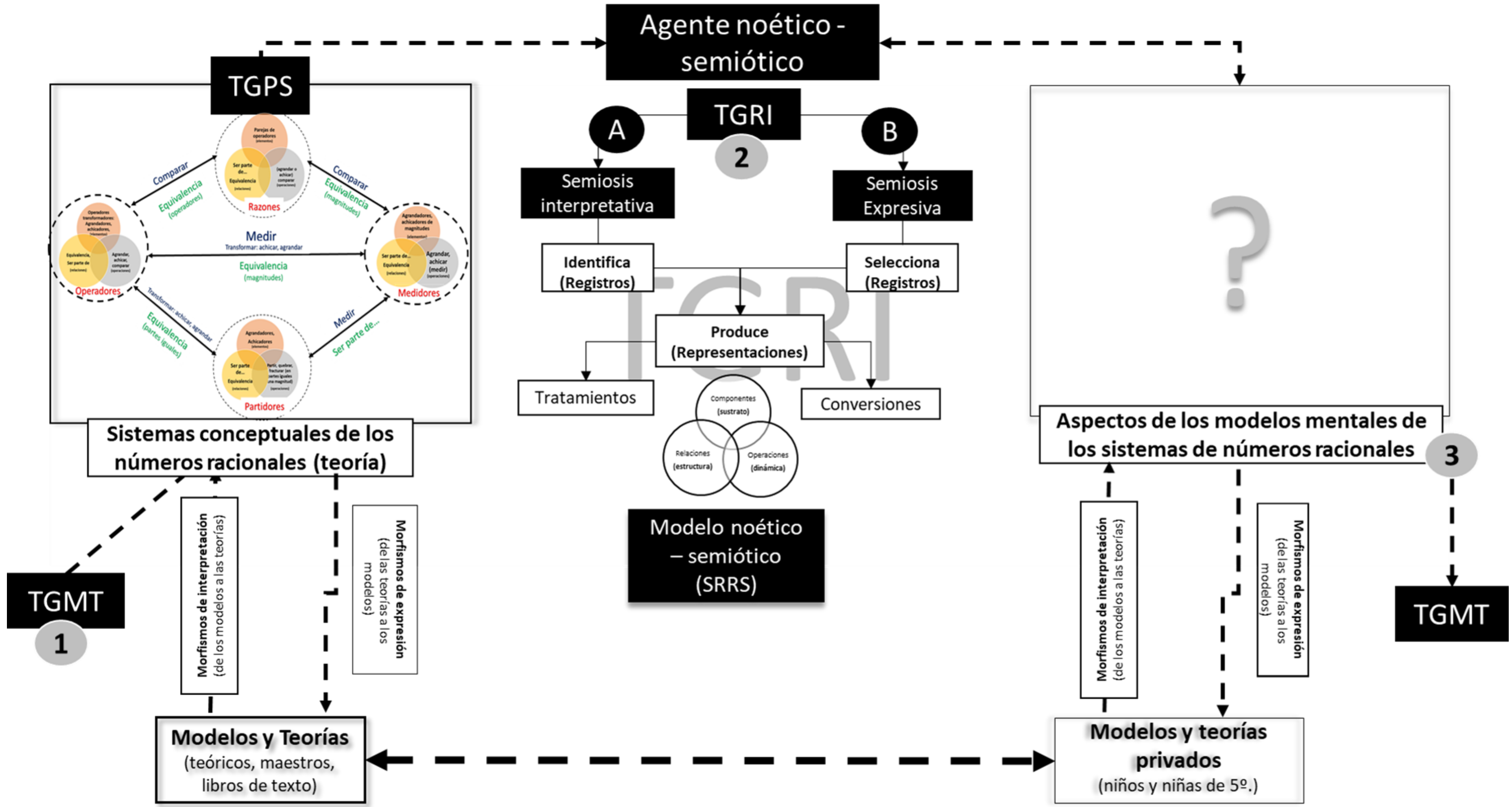
La expresión “modelos teóricos” que se encuentran en algunos documentos corresponde a las combinaciones de los modelos mentales entrelazados con las interpretaciones de la teoría matemática de que se trate, tenida por aceptada por las comunidades de expertos y de maestros, que para este caso es la de los números racionales.

El proceso metodológico llevado a cabo va de la teoría públicamente accesible de los números racionales —como asumimos que estaría interpretada en los modelos mentales estáticos y dinámicos que les atribuimos a la comunidad científica de la Didáctica de las Matemáticas, los autores de los libros de texto y a los docentes—hacia los modelos mentales estáticos y dinámicos que construyen los alumnos a partir de las representaciones públicas producidas por ellos mismos en distintos registros semióticos como el lenguaje natural verbal oral y escrito, el lenguaje técnico-simbólico de la aritmética escolar o en otros registros gestuales y gráficos.

El siguiente esquema muestra la ruta metodológica con la que se pretendió dar respuesta a la pregunta de investigación desde el presente estudio, partiendo de la TGPS y la TGMT para reconocer en las teorías sobre los racionales, que son entendidas como sistemas semióticos públicos el punto de partida para tratar de reconstruir los modelos mentales de los estudiantes como sistemas (TGPS), lo que nos sitúa de nuevo en la TGMT mediada por la TGRI.

Figura 6.

Proceso metodológico del estudio



Siguiendo la gráfica, se presentan a continuación cada uno de los pasos de manera detallada:

4.2 El tránsito entre la TGPS-TGMT y la TGRI:

4.2.1 Entre la TGPS y la TGMT. Identificación de la teoría de los racionales como sistema y construcción de los modelos sobre los racionales para interpretar las teorías desde los morfismos de interpretación y expresión:

La pregunta de investigación surge en el análisis de las teorías que se expresan a partir de los morfismos de expresión, con los cuales se hacen explícitos los modelos construidos por los autores, autores de libros de texto y maestros, acerca de los fenómenos de la realidad con procesos y subprocesos que puede ser explicada, comprendida y/o intervenida.

Sin embargo y a pesar de inferir los fenómenos, no es suficiente su identificación pues se requiere de un proceso metateórico que permita develar en las teorías sus elementos constituyentes y es allí donde se desarrolla por parte del agente –noético-semiótico, en este caso el investigador, un ejercicio analítico y sintético sobre las teorías, que implica descomponer y desagregar las teorías identificadas como sistemas que requieren una interpretación subjetiva reconocida como modelo, considerado por Vasco (2013), un sistema mental que se construye para representar un proceso, subproceso u otro sistema.

Como producto de este primer paso metodológico surgieron los sistemas conceptuales de los racionales con sus sistemas de representación semiótica que ya fueron ampliamente presentados en el marco teórico.

En todo este proceso de ir a las teorías e interpretarlas desde los modelos, ocurre la actividad semiótica que permitió identificar las teorías, pues esta es considerada teoría si está formulada en un lenguaje articulado, así como comunicar una teoría; por lo tanto, la TGRI permea la actividad ontológica y epistemológica, lo que lleva al siguiente paso metodológico:

4.2.2 Entre la TGPS – TGMT y la TGRI. Reconstrucción de los tratamientos y conversiones de las representaciones semióticas a partir del análisis de la semiosis expresiva e interpretativa presente en la actividad matemática de los niños y niñas de quinto grado:

Solo la Teoría General de Procesos y Sistemas (TGPS) y la Teoría de Modelos y Teorías (TGMT) no basta, se requiere la conexión entre ellas, para expresar hacia afuera los modelos mentales privados y para interpretar las teorías de los demás en modelos mentales públicos. Para ello surge la semiótica como teoría de la representación y la comunicación, en la dirección de la producción de representaciones como expresión de los modelos mentales y en la dirección opuesta de interpretaciones de otras representaciones en los modelos mentales propios.

Por lo tanto, la base del análisis está en la Teoría General de Modelos y Teorías pero esta, a su vez, requiere de una teoría semiótica que permita observar y determinar con cierto rigor, lo que representan, interpretan y lenguajean, en primer lugar los autores, autores de libros de texto y maestros y para se acude a la Teoría General de Representaciones e Interpretaciones – TGRI como sistema.

La metodología parte de la TGMT, que se convierte en un proceso abstracto al subir de nivel (a un metanivel), para analizar las teorías, descomponerlas e interpretarlas desde la construcción de los modelos que se reconocen los modelos como sistemas que tienen componentes, operaciones y relaciones, y se distinguen estos modelos mentales sistémicos de los sistemas lingüísticos técnicos de las matemáticas elementales y sus diversas variantes más o menos cercanas al lenguaje natural materno de los estudiantes o al lenguaje técnico de los expertos.

A manera de ejemplo podemos reconocer que hay una subteoría de las interpretaciones de las representaciones semióticas usuales del número racional desde sus tres aspectos: como objeto, como relator y como operador, lo que nos ha permitido ver que para los estudiantes hay números *gordos* y *flacos*, que hay números *monstruos agrandadores*, *achicadores y empujadores*, y nos permite ubicar las razones como relaciones desde Euclides.

La expectativa de esta tesis es que la teoría de Duval nos permite identificar en la actividad noético-semiótica expresiva e interpretativa de los estudiantes, los morfismos de representación e interpretación, al asumir que tanto el niño como el maestro, el matemático y el investigador somos agentes noético-semióticos que orientamos nuestra acción por la comunicación a través de distintos lenguajes, signos y símbolos.

En este sentido, en atención a los postulados de Duval, al enfoque noético-semiótico se le atribuye un papel esencial a los procesos de formación y manejo de las representaciones mentales (noesis) y a las diferentes representaciones semióticas producidas por los diferentes registros semióticos. La disponibilidad y el uso que se hace de las representaciones, se considera un aspecto imprescindible para la construcción de los objetos matemáticos, teniendo en cuenta que la semiosis no es espontánea y está mediada por el proceso de aprendizaje.

La representación semiótica es un producto del proceso de representar una noesis de dentro hacia afuera (semiosis expresiva o proyectiva) y el de interpretar una representación semiótica de afuera hacia adentro (semiosis interpretativa o inyectiva). Ambos procesos son diferentes y en el proceso expresivo lo primero es seleccionar un registro y luego producir la representación semiótica de acuerdo con la sintaxis del registro, antes de los tratamientos intra-registro o las conversiones ínter-registros. En el proceso interpretativo hay que identificar primero el registro en el que podrían haber sido producidas las representaciones.

Para abordar metodológicamente este planteamiento teórico propuesto por Duval (1999), el tratamiento de los datos requiere elementos lingüísticos y semióticos que permiten reconocer:

- La diversificación de los registros de representación, teniendo en cuenta que el lenguaje natural no es el único registro semiótico que se emplea en la actividad matemática, puesto que los símbolos y otras formas representacionales no pueden considerarse dentro de un solo registro.
- La diferenciación entre representante y representado, es decir, entre forma y contenido de una representación semiótica. Esta diferenciación está asociada a la comprensión de lo representado y, por lo tanto, la posibilidad de asociar otras representaciones y de integrarlas en los procedimientos de tratamiento.
- La coordinación entre los registros de representación semiótica disponibles a partir de la identificación de las reglas de correspondencia que se dan entre dos o más registros.

Con este planteamiento de Duval, se fundamenta la necesidad de recurrir a un estudio con un enfoque semiótico, pues "la actividad conceptual no puede ser desligada de la actividad semiótica, porque la comprensión conceptual está vinculada al descubrimiento de la invarianza entre representaciones semióticas heterogéneas" (1999, p. 60).

El producto de este segundo paso, que trae consigo a su vez dos momentos: semiosis interpretativa y semiosis expresiva es el Sistema de Representación Semiótica de los sistemas conceptuales de los racionales que se realiza mediante los morfismos de expresión e interpretación es la reconstrucción de la actividad semiótica que despliegan los estudiantes al resolver situaciones con números racionales.

En este paso y como categorías iniciales de análisis se tuvieron en cuenta los sistemas numéricos conceptuales sobre el conjunto de los números racionales y sus sistemas de numeración como registros de representación semiótica para el manejo y comunicación de dichos sistemas numéricos que se encuentran en el marco teórico.

4.2.3 Desde la TGRI hacia la TGMT. Interpretación de la teoría sobre los racionales que poseen los niños y niñas de quinto grado a partir de la reconstrucción de los modelos mentales privados asociados a las transformaciones semióticas que ellos realizan:

Este momento se inicia a partir de la semiosis interpretativa, que como se ha dicho antes, empieza con la identificación de los registros sobre los cuales los niños como agentes noético – semióticos producen representaciones o los registros sobre los cuales las actividades en la clase de matemática propuestos y realizan transformaciones semióticas.

Para ello, se cuenta con los modelos de los sistemas conceptuales de los racionales y sus sistemas de representación semiótica, haciendo evidente:

- El invariante dentro del mismo registro semiótico que emerge en el tratamiento de las representaciones semióticas.
- El invariante entre registros semióticos que emerge en la conversión de las representaciones semióticas.

El producto que se espera obtener de este tercer momento es la reconstrucción de los modelos mentales de los niños sobre los racionales que se infiere desde la selección y la identificación de los registros semióticos que hacen los niños, de los procesos de tratamiento que se hacen entre el mismo registro semiótico y al interior de cada uno de los sistemas conceptuales de los racionales y la actividad de conversión entre registros bien sea al interior del mismo sistema conceptual o entre los sistemas que se despliegan en la actividad matemática.

4.3 Tipo de investigación

Tal como se viene presentando a lo largo del documento, se reitera que desde el enfoque de TGMT y la TGRI y dada la pretensión del estudio, se acoge una perspectiva cualitativa comprensiva en tanto se hace un ejercicio inferencial que parte de la producción e interpretación de las representaciones semióticas y sus transformaciones que realizan los niños de quinto grado en la actividad matemática que despliegan en un entorno natural de aula.

La reconstrucción de los aspectos de los modelos mentales sobre los racionales no se hace desde una lógica deductiva aunque se cuente con categorías iniciales de análisis que se construyeron a partir de inferir los aspectos de los modelos y las teorías propuestas por autores y maestros.

El ejercicio inductivo que se tuvo en cuenta en el análisis permitió emerger de los datos, aquellos aspectos de los modelos mentales que se hacen presentes en la producción e interpretación de representaciones semióticas y en las transformaciones semióticas que realizan los niños de quinto grado.

Por lo tanto, no se trata de comprobar hipótesis o validar las teorías existentes, sino aportar a la comprensión que poseen los niños de los sistemas conceptuales de los racionales, adoptando una perspectiva noético-semiótica como recurso analítico.

4.4 Diseño de la investigación

Antes de iniciar la descripción de lo ejecutado, para llegar a obtener los datos que permitieron reconstruir los aspectos de los modelos mentales sobre los números racionales, se requiere ubicar dentro de la metodología de investigación (TGPS-TGRI-TGMT), el agente como un subproceso, que tal como lo propone Vasco (2014),

> Cada uno de nosotros actúa, acciona o reacciona, se defiende o ataca, se deja llevar o se resiste a esos procesos y, en la experiencia del actuar, de la acción o actividad, va tomando conciencia de que él o ella es también un cierto tipo de proceso, o mejor, apenas un cierto tipo de subproceso separable, así sea muy difícilmente, de muchos otros procesos indefinibles. (p. 26)

Los agentes en el proceso investigativo, los llamamos sujetos o personas que pueden hacer parte de un universo o totalidad o pueden ser considerados participantes en el estudio. En cualquiera de los casos, los sujetos "agentes" dejan entrever sus modelos en sus discursos, actuaciones y comportamientos, por lo tanto, se convierten en agentes noético-semióticos desde Duval, al comprender que lo que se reconoce como semiótico es el resultado de la noesis de un agente cuando trata de comunicar o interpretar la realidad.

4.4.1 Sujetos de la investigación: Agentes noético-semióticos

Para la selección de la unidad de trabajo y por consiguiente de los sujetos participantes en el estudio, fue necesario revisar dentro de los estándares básicos de competencias del MEN (2006), la aparición del concepto de racional dentro de los contenidos escolares del área de matemáticas y se encontró que de acuerdo con los lineamientos curriculaes, para quinto grado, se sugieren los siguientes estándares:

- Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones.
- Identifico y uso medidas relativas en distintos contextos.
- Utilizo la notación decimal para expresar fracciones en diferentes contextos y relaciono estas dos notaciones con la de los porcentajes

Teniendo en cuenta lo anterior, la unidad de trabajo corresponde a dos grupos de quinto grado de una institución educativa pública de Manizales, el primer grupo con 20 estudiantes y el segundo grupo con 26 estudiantes. Las edades de los niños se encuentran entre 10 y 13 años, ambos grupos son mixtos pero con un porcentaje mayor de niños que de niñas; el estrato socioeconómico al que pertenecen los niños y niñas está entre el uno y el tres, todos los niños y niñas viven con sus familias conformadas por cuatro miembros en promedio, se encuentran en buen estado de salud y con condiciones escolares adecuadas.

Al recoger la información derivada de las actividades realizadas por los 46 estudiantes se seleccionaron seis estudiantes (tres estudiantes de cada grupo), con quienes se hizo el análisis final y por ello son considerados los participantes en el estudio.

4.4.2 Participantes en el estudio

De acuerdo con la pregunta de investigación y los objetivos propuestos, después de haber recogido toda la información en ambos grupos, se seleccionaron los datos teniendo en cuenta los siguientes criterios de inclusión:

- *La edad*: se privilegiaron los datos de los niños que se encontraban entre los 10 y los 13 años correspondiente a la edad establecida para los niños que se encuentran en grado quinto, de tal manera que no se contara con estudiantes extraedad. Se solicitó además con el consentimiento informado de la institución y de los padres de familia.

- *El nivel cognitivo*: se indagó con la maestra acerca de la historia académica de los niños y niñas, de tal manera que se pudiera constatar que atendía al momento evolutivo y a la edad y el grado de tal manera que al momento de desarrollar las actividades propuestas no presentaran dificultades relacionadas con el aprendizaje.
- *El nivel de participación de los niños*, así como su disponibilidad para brindar información adicional que permitiera constatar los procesos noetico-semióticos presentes en la actividad matemática.
- Se tuvo en cuenta en la selección de la información, el material que contó con mayores recursos semióticos empleados por los niños y niñas, de tal manera que se pudieran evidenciar las representaciones semióticas que producen e interpretan y las transformaciones semióticas que realizan.

Atendiendo a los anteriores criterios de inclusión, la caracterización de los estudiantes finalmente seleccionados, se presenta en la siguiente tabla:

Tabla 2. Participantes en el estudio

Código asignado	**Género**	**Edad**	**Desempeño Académico**
Estudiante 1	Masculino	13	Medio
Estudiante 2	Masculino	11	Medio
Estudiante 3	Masculino	13	Alto
Estudiante 4	Femenino	11	Alto

Estudiante 5	Masculino	11	Superior
Estudiante 6	Masculino	12	Alto

4.4.3 Contexto de aplicación: El cronotopos

Dado que desde el proyecto de investigación se propuso un ejercicio de exploración en un ambiente natural de aula, todas las situaciones propuestas a los niños y niñas de quinto grado fueron realizadas en la clase de matemáticas con la presencia de su maestra.

Se realizaron cuatro sesiones, cada una de ellas con dos actividades, el trabajo de campo se realizó por espacio de dos meses en ambos grupos, en donde se contó con una actividad semanal que se llevaba al aula habiendo tenido una previa preparación de la agenda con la maestra de tal manera que no se interfiriera en las actividades escolares cotidianas. Las actividades propuestas fueron desarrolladas con los niños por un espacio de tres horas cada sesión.

La investigadora con apoyo de la maestra presentaba la actividad a los estudiantes, se presentaban las instrucciones para su resolución, se aclaraban las dudas que planteaban los estudiantes y se procedía a observar su desempeño durante la ejecución.

En algunos momentos de la realización de las actividades se hicieron algunos vídeos, por considerarlos necesarios para tener evidencias del tratamiento y la conversión de las representaciones semióticas que realizan los niños durante la actividad matemática, dada la posibilidad de volver sobre la actividad cognitiva realizada in situ.

En algunos casos y después de haber revisado el material que proporcionaban los niños, se requirió la realización de algunas preguntas adicionales por parte de la investigadora que pudiera aclarar algunas de las respuestas. Esta entrevista se realizó en un espacio diferente al aula ya que solo se hizo con los seis estudiantes seleccionados.

Atendiendo a las implicaciones éticas que conlleva la investigación educativa, las actividades propuestas se desarrollaron con la totalidad de los estudiantes de ambos grupos, por considerarla una experiencia de aprendizaje de la cual no era necesario excluir a ningún estudiante.

4.5 Procedimiento: Obtención de la información

Desde la apuesta metodológica basada en la TGPS, TGRI y la TGMT con los pasos allí expuestos, se realizaron las siguientes acciones**:**

4.5.1 Operacionalización de las categorías.

El ejercicio de operacionalización surge a partir de la reconstrucción de los modelos para interpretar las teorías de los matemáticos, autores de libros de texto y maestros que permitiera determinar las técnicas e instrumentos de recolección de información.

Para determinar las técnicas de recolección de información se acude a la perspectiva noético-semiótica propuesta por Duval (2017) al afirmar que en la actividad matemática ocurren las transformaciones semióticas que permiten el acceso a los objetos matemáticos, al reconocer el mismo objeto en diferentes representaciones.

La primera versión de los instrumentos de recolección de información parte de una investigación previa sobre "La clase multimodal: Formación y evolución de conceptos científicos" (Vasco, Tamayo, Suárez, García y otros, 2007) en donde se diseñó una prueba de exploración de ideas previas con estudiantes del grado séptimo para identificar el concepto de número racional que tenían los estudiantes después de haber adquirido este concepto desde el grado quinto.

Algunas de las actividades propuestas en esta investigación sirvieron de base para el diseño de la primera prueba piloto, especialmente en el tipo de pregunta y la pertinencia de la actividad para los niños del grado quinto.

Tanto el instrumento de la investigación previa, como las dos pruebas piloto, permitieron validar la técnica de recolección de información que correspondió a un cuestionario abierto y una entrevista de corte didáctico.

***4.5.2 Aplicación de prueba piloto*.**

Los instrumentos de recolección de información fueron validados mediante dos pruebas piloto, realizadas previamente a otros estudiantes de quinto grado con condiciones y características semejantes a la unidad de trabajo definida finalmente: La primera *prueba piloto*, tomó como referencia las investigaciones realizadas por Hart (1988) quien partió de los cinco constructos propuestos por Kieren y recogiendo algunos componentes de la investigación de Kieren, Nelson & Smith (1985), centrada en la partición como mecanismo constructivo.

En este sentido, se diseñaron tres instrumentos que recogieran los cinco constructos pero además enfocados en la partición como aspecto central considerado en la teoría de Kieren (1980, 1983,1988). Los tres instrumentos fueron entregados a los niños y niñas para que ellos desarrollaran las actividades matemáticas propuestas.

El *instrumento 1* contenía dos situaciones, una de ellas de partición de cantidades continuas y la segunda actividad la ubicación de frecuencias en una gráfica pastel.

El *instrumento 2,* proponía dos actividades de partición en cantidades continuas y otra partición en cantidades discretas, la tercera actividad sugería el empleo del concepto de razón.

El *instrumento 3*, continuaba explorando la noción parte-todo, el racional como cociente y el racional como medida.

Al igual que en la prueba final, este primer piloto se aplicó en un contexto de aula al grupo de estudiantes presentes en el aula con la participación de la maestra durante las actividades y con la observación del desempeño de los estudiantes en toda la ejecución.

Al terminar la aplicación se reconocieron algunos aspectos a mejorar en el diseño de los instrumentos tales como:

- Las actividades propuestas privilegiaban la partición como mecanismo constructivo tal como lo propone Kieren (1983), lo que resultaba ser inducido en la actividad.
- Dadas las limitaciones de espacio de la hoja de papel en donde se proponían las actividades, el constructo de medida presentaba dificultades para hacerse evidente debido a que los niños no contaban con un instrumento de medida como la regla.
- Algunas actividades generaron permanentemente preguntas a los niños debido a las dificultades de comprensión, lo que llevó a modificarlas para la segunda aplicación.
- El empleo del cuestionario abierto como única técnica de recolección de información es limitado para identificar los procesos de tratamiento y conversión.

Con el fin de determinar la confiabilidad de los instrumentos propuestos se realizó *un segundo pilotaje* con otros niños y niñas que presentaran características similares a los niños y niñas de la primera aplicación, pero haciendo los ajustes pertinentes a los instrumentos.

Para esta segunda *prueba piloto*, se incorporó la entrevista didáctica al finalizar el desarrollo de las actividades de tal manera que se pudiera contrastar la información del cuestionario diligenciado, con el “pensamiento en voz alta” de los niños y niñas, además se pudiera indagar con los estudiantes las transformaciones semióticas realizadas.

4.5.3 Diseño y aplicación final de instrumentos de recolección de información:

A partir de los modelos de los racionales construidos a partir de la teoría existente y tomando como referente el “Archipiélago Fraccionario” de Vasco (1994), el texto de “Las Fracciones” de Fandiño (2009) y la perspectiva semiótica de Duval (1999, 2017), se realizó una nueva operacionalización de categorías que dio origen a los instrumentos finales.

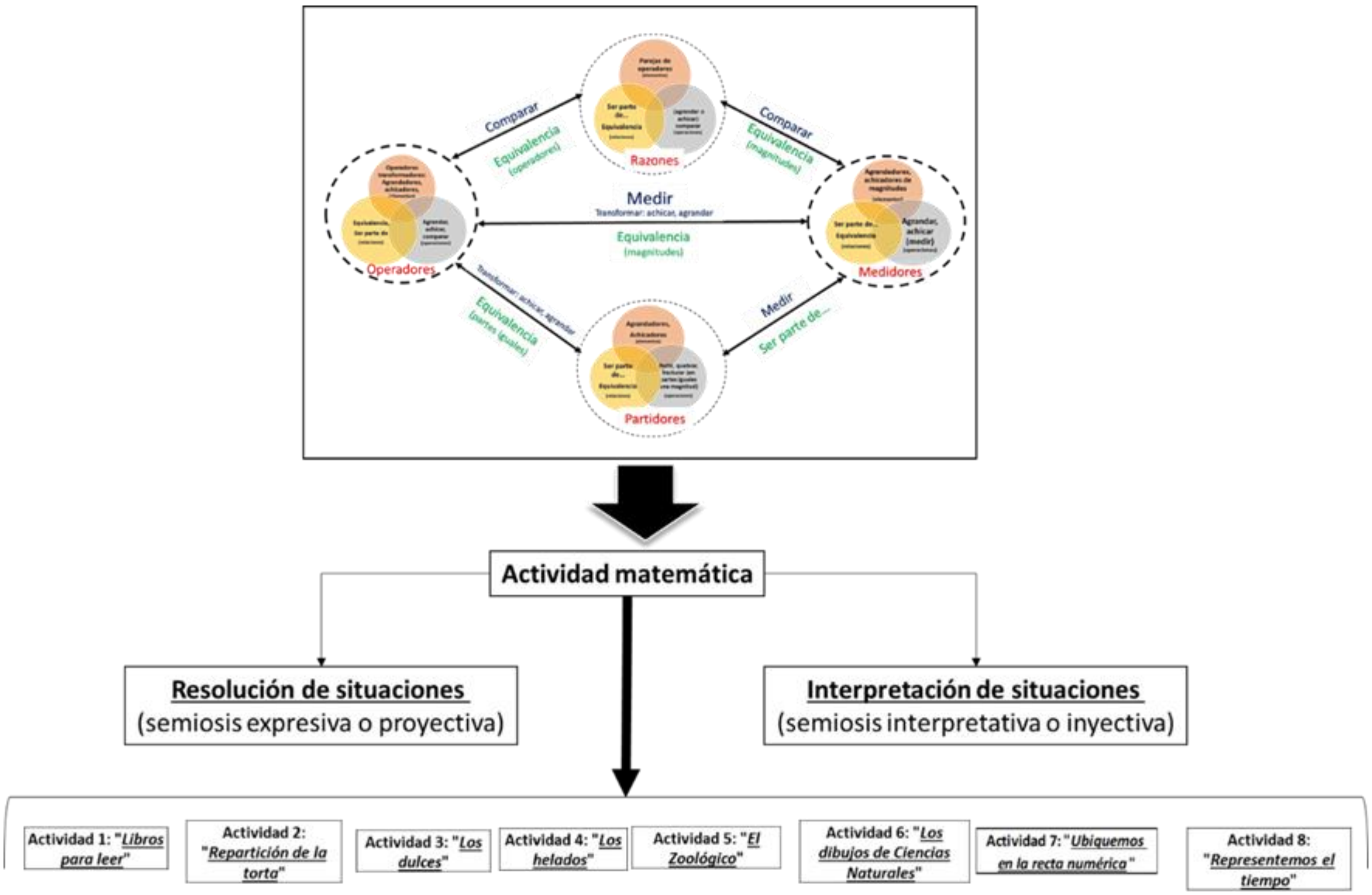
Por lo tanto, se propusieron actividades matemáticas en donde se involucraron los cuatro sistemas conceptuales de los racionales con sus sistemas de representación semiótica también construidos por parte de la investigadora.

En cada actividad se realizaron preguntas que provocaran la actividad semiótica, en algunos casos proponiendo los registros de representación semiótica y en otros casos permitiendo que los niños y niñas seleccionaran los registros semióticos sobre los cuales producirían sus representaciones semióticas.

Al revisar investigaciones realizadas por Duval (1999, 2004, 2006, 2017); D’Amore (2007); Fandiño (2009) y Rojas (2014) desde una perspectiva semiótica surgen ocho actividades de resolución de problemas, partiendo de situaciones cercanas al contexto de los niños y niñas de quinto grado.

Figura 8.

Categorías y actividades propuestas en el estudio



Tal como se explica en la gráfica, se hizo necesario diferenciar durante la actividad matemática, la semiosis interpretativa que parte de la identificación del registro semiótico, de la semiosis expresiva que inicia con la selección del registro semiótico y continúa con las transformaciones semióticas de tratamiento y conversión. Para ello fue necesario caracterizar cada actividad matemática de tal manera que al proponerla a los estudiantes se pudiera provocar intencionalmente uno de los actos de semiosis bien sea interpretativa o proyectiva.

Tabla 3.

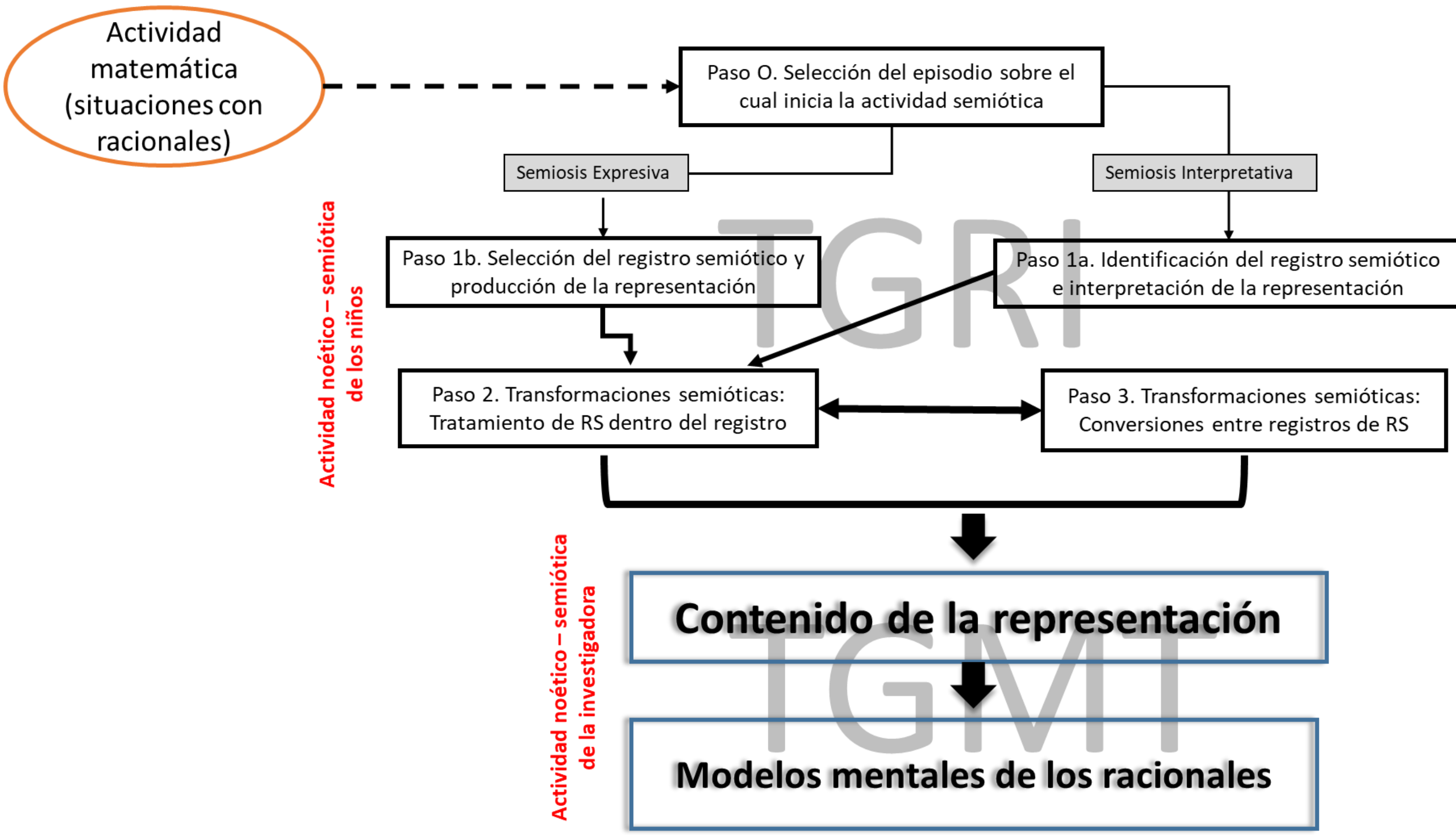
Diseño de instrumentos

Actividades propuestas	Sistemas conceptuales de los racionales	Sistemas de representación semiótica	Semiosis expresiva	Semiosis interpretativa
Actividad 1: "*Libros para leer*"	**Sistema partidor: cantidades discretas**	Representación tabular Representación gráfica Representación en lengua natural	Selección del registro semiótico y producción de la representación Transformaciones semióticas: Tratamiento de RS dentro del registro Conversiones entre registros de RS	Identificación del registro semiótico e interpretación de la representación
Actividad 2: "*Repartición de la torta*"	**Sistema partidor: cantidades discretas**	Representación gráfica Representación en lengua natural	Selección del registro semiótico y producción de la representación Transformaciones semióticas: Tratamiento de RS dentro del registro Conversiones entre registros de RS	Identificación del registro semiótico e interpretación de la representación
Actividad 3: "*Los dulces*"	**Sistema partidor: cantidades continuas**	Representación pictórica Representación gráfica Representación en lengua natural Representación numérica	Selección del registro semiótico y producción de la representación Transformaciones semióticas: Tratamiento de RS dentro del registro Conversiones entre registros de RS	Identificación del registro semiótico e interpretación de la representación
Actividad 4: "*Los helados*"	**Sistema razon**	Representación pictórica Representación gráfica Representación numérica	Selección del registro semiótico y producción de la representación Transformaciones semióticas: Tratamiento de RS dentro del registro Conversiones entre registros de RS	Identificación del registro semiótico e interpretación de la representación
Actividad 5: "*El Zoológico*"	**Sistema operador**	Representación gráfica Representación en lengua natural Representación numérica	Selección del registro semiótico y producción de la representación Transformaciones semióticas: Tratamiento de RS dentro del registro Conversiones entre registros de RS	Identificación del registro semiótico e interpretación de la representación
Actividad 6: "*Los dibujos de Ciencias Naturales*"	**Sistema operador**	Representación pictórica Representación gráfica Representación numérica	Selección del registro semiótico y producción de la representación Transformaciones semióticas: Tratamiento de RS dentro del registro Conversiones entre registros de RS	
Actividad 7: "*Ubiquemos en la recta numérica*"	**Sistema medidor**	representación figural Representación en lengua natural Representación numérica	Selección del registro semiótico y producción de la representación Transformaciones semióticas: Tratamiento de RS dentro del registro Conversiones entre registros de RS	Identificación del registro semiótico e interpretación de la representación
Actividad 8: "*Representemos el tiempo*"	**Sistema medidor**	Representación gráfica Representación numérica Representación en lengua natural	Selección del registro semiótico y producción de la representación Transformaciones semióticas: Tratamiento de RS dentro del registro Conversiones entre registros de RS	Identificación del registro semiótico e interpretación de la representación

4.6 Plan de procesamiento y sistematización de la información

Figura 7.

Plan de análisis de la información



Dado que la actividad semiótica inicia con la actividad matemática que realizan en este caso los niños de quinto grado, en el ejercicio de análisis, se consideraron los siguientes momentos:

4.6.1 Momento Descriptivo: Análisis de la actividad noético-semiótica realizada por los niños

Para el análisis descriptivo se acoge la teoría de Duval al enfatizar en la estrecha relación entre noesis y semiosis, desde la producción o interpretación de una representación identificable en algún registro; el tratamiento y la conversión lo que requiere su coordinación por parte del sujeto que en este caso es el niño quien la efectúa.

Por lo tanto, a partir de los datos obtenidos en la actividad noético-semiótica realizada por los niños y niñas de quinto grado, se realiza un análisis descriptivo para reconocer las representaciones y transformaciones semióticas a través de la actividad matemática bien sea desde la semiosis interpretativa o inyectiva, que corresponde a la interpretación que hace el estudiante de las representaciones semióticas que le propone el docente o desde la semiosis expresiva o proyectiva que implica la producción de representaciones semióticas, así como su tratamiento y conversión.

La estructura de este primer momento del análisis partió de las situaciones matemáticas sobre la cual se inicia la actividad noético-semiótica que sugiere la semiosis interpretativa o la semiosis expresiva.

Para realizar este análisis se contó con la siguiente matriz:

Tabla 4.

Matriz de análisis

<table>
<tr><th>Actividad Cognitiva/semiótica</th><th colspan="2">Categoría</th><th>Subcategorías</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Identificación/selección del registro semiotico (identificación de unidades constitutivas del registro y de la representación producida)</td><td colspan="2">Recursos</td><td>Determinación de unidades elementales a partir de los elementos propios del registro</td></tr>
<tr><td colspan="2">Reglas de conformidad</td><td>Reconocimiento de las condiciones para que las unidades constitutivas del registro permitan la construcción de una representación coherente</td></tr>
<tr><td colspan="2">operaciones</td><td>isomorfismos, elementos propios del registro que permiten las operaciones del tratamiento</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Tratamiento de la representación semiótica (aspectos dentro del registro que permiten el despliegue de la representación)</td><td colspan="2">Recursos</td><td>elementos como el borrado, coloreado, trazos con regla, distribución del espacio</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Operaciones</td><td rowspan="2">Expansión discursiva</td><td>Reglas de derivación, producción, coherencia temática, reglas asociativas de contiguidad y similitud</td></tr>
<tr><td>Reglas de producción, coherencia temática, condensación, reglas asociativas de contiguidad y similitud</td></tr>
<tr><td>Contracción</td><td>Reglas de derivación, de naturaleza inferencial, sustitución</td></tr>
<tr><td>Reformulación</td><td>Empleo de otros términos para expresar lo mismo (parafrásis)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Conversión de la representación semiótica (Comparación de la dupla de representaciones de diferente registro)</td><td rowspan="3">Criterios de congruencia</td><td>Correspondencia semántica</td><td>Identifica las unidades significantes tanto en el registro de partida como en el registro de llegada</td></tr>
<tr><td>Univocidad semántica</td><td>A cada unidad significante elemental de la representación de salida solo le corresponde una unidad significante elemental de la representación de llegada</td></tr>
<tr><td>Organización de las unidades significantes</td><td>Las organizaciones respectivas de las unidades significantes de las dos representaciones comparadas conducen a aprehender las unidades en correspondencia semántica según el msmo orden en las dos representaciones</td></tr>
</table>

Teniendo en cuenta los criterios descritos en la matriz, se procedió a analizar la actividad noético-semiótica realizada por los niños, con el fin de identificar los aspectos semióticos que entran en juego en la actividad matemática.

Antes de volver nuevamente a la Teoría General de Modelos y Teorías — TMGT—, emergió un momento intermedio que requirió el análisis de los hallazgos derivados de la actividad noético-semiótico y de los modelos conceptuales de los racionales (institucional/personal) y corresponde al contenido de las representaciones semióticas.

4.6.2 Momento interpretativo: Identificación del contenido de las representaciones que permanece bajo las transformaciones semióticas realizadas por los niños y niñas de quinto grado

Este segundo momento se considera interpretativo ya que requiere que la investigadora infiera a partir de las transformaciones semióticas realizadas por los niños, el contenido de la representación, es decir el "invariante", pese a los cambios en las representaciones dentro del mismo registro o lo que es más relevante a las transformaciones que ocurren con los cambios de registro dadas las reglas de conformidad de cada uno de ellos.

Para la realización de este análisis fue necesario poner en correspondencia al menos dos representaciones semióticas de diferentes registros producidas a partir de la actividad de conversión. Es en esta actividad que es posible comprender la naturaleza de la relación entre noesis y semiosis propuesto desde Benveniste y acogido por Duval (1995/1999) en su teoría.

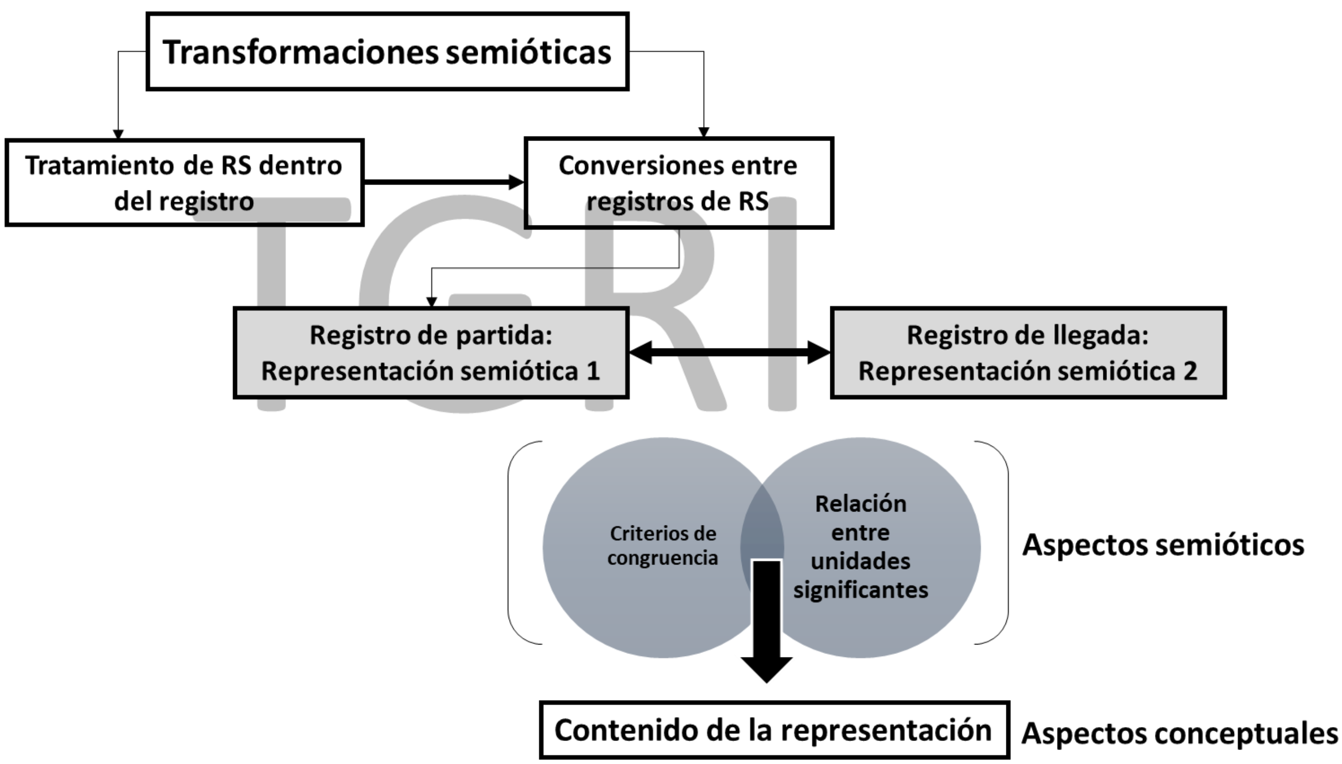
Por lo tanto, la actividad interpretativa tuvo en cuenta los siguientes pasos:

- Comparación de las representaciones semióticas del registro de partida y de llegada.
- Coordinación de registros de representación semiótica del registro de partida con respecto al registro de llegada.

- Identificación de los aspectos que se conservan en las unidades significantes tanto en el registro de partida como en las unidades significantes que corresponden en el registro de llegada.
- Diferenciación de los aspectos semióticos derivados de las transformaciones de tratamiento y conversión, de los aspectos conceptuales que se conservan en las unidades significantes de ambas representaciones.

Figura 8 .

Identificación del contenido de la representación

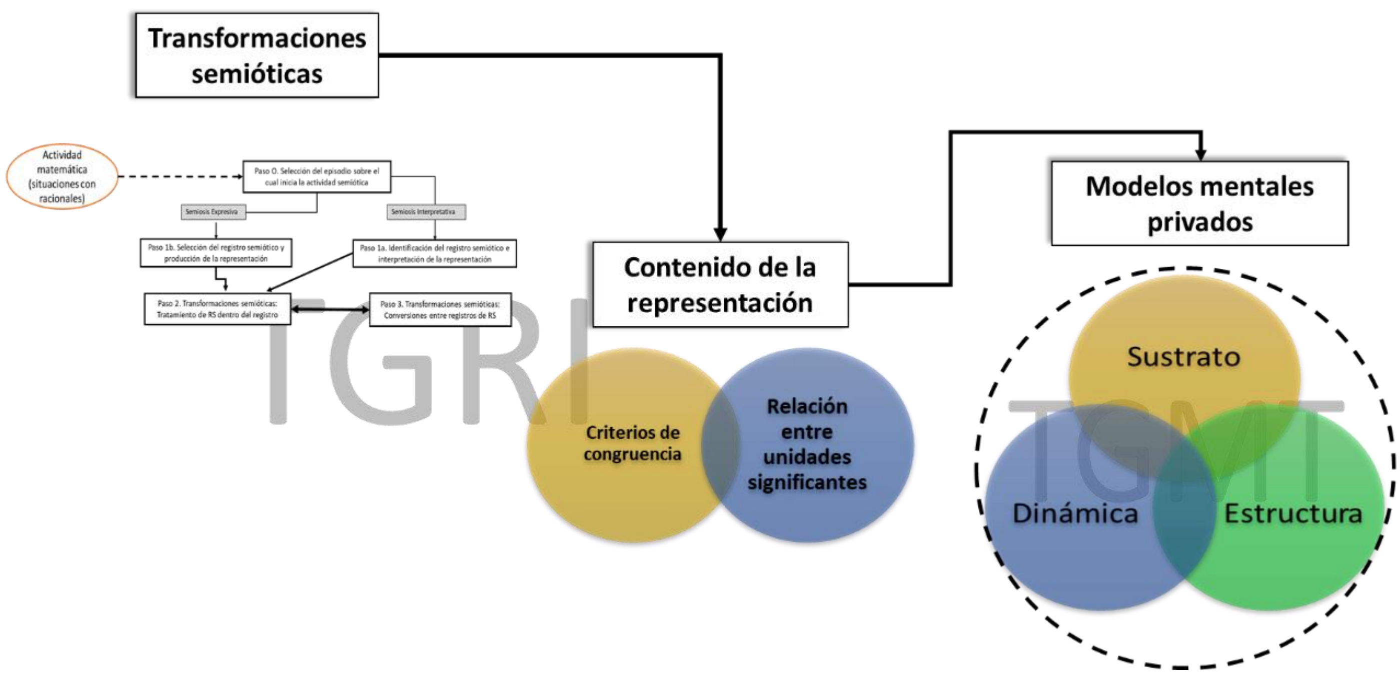


4.6.3 Momento noético-semiótico de reconstrucción de los modelos mentales de los racionales de los niños y niñas de quinto grado a partir de los contenidos representacionales

En esta última etapa del proceso metodológico fundamentado en la TGPS – TGRI y es la TGMT que parte de la reconstrucción de los modelos mentales privados de los niños y niñas de quinto grado que nos lleva a la teorización a través de morfismos o flechas de representación de los modelos y de los morfismos o flechas de interpretación de las teorías. Finalmente volvemos a la comprensión de los modelos como sistemas con su tríada sustrato/dinámica/estructura.

Figura 11.

Trayectoria de los aspectos del modelo mental sobre los racionales



Capítulo V. SISTEMATIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN

En la investigación cualitativa, uno de los momentos fundamentales en el proceso metodológico, se refiere al tratamiento de la información y los datos (Coffey & Atkinson, 2003). En este sentido, autores como Miles y Huberman (1994); Dey (1994) y Wolcott (1994) proponen acciones diferenciadas que inician con el procesamiento de la información y el tratamiento de los datos hasta llegar a la interpretación y obtención de conclusiones.

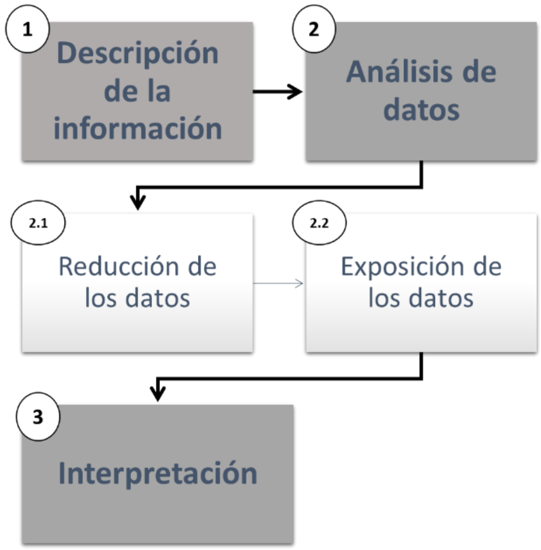
Apoyados en los modelos propuestos por estos autores se presenta la manera como se llevó a cabo el proceso de sistematización de la información, partiendo de Wolcott (1994) cuando propone tres momentos: Descripción, análisis e interpretación. Teniendo en cuenta que el análisis se compone a su vez de otros procesos, se adopta lo expuesto por Miles y Huberman (1994) cuando proponen que el análisis requiere: la reducción de los datos, exposición de los datos y el establecimiento de conclusiones.

Conjugando los procesos tanto de Wolcott (1994) como de Miles y Huberman (1994), la sistematización inicia con la organización y clasificación de la información recolectada en el trabajo de campo que a partir del análisis permitió seleccionar la información relevante dando paso a los datos que finalmente corresponden a los hallazgos.

Los momentos o etapas del proceso se presentan tal como aparece en la siguiente gráfica:

Figura 9.

Proceso de sistematización y análisis de datos



En la trayectoria entre la TGMT en donde se exponen los modelos y las teorías en torno a los racionales que corresponden a los modelos institucionales expresados e interpretados a través de la TGRI desde el enfoque noético-semiótico de Duval, se construyeron los instrumentos de recolección de información que después del trabajo de campo requirieron de la organización y clasificación de la información para reconstruir los aspectos de los modelos mentales sobre los racionales (TGMT), mediante la TGRI para expresar e interpretar los modelos privados.

En este proceso, la obtención de la información y la selección de los datos a partir de instrumentos cualitativos permitió establecer relaciones, extraer e interpretar significados y conclusiones de manera cíclica y circular tal como lo señala, Spradley (1980).

A continuación, se presentan de manera detallada cada uno de los pasos presentados en la figura 12.

5.1 Descripción de la información

En las investigaciones en Didáctica de la Matemáticas y para esta investigación desde la teoría de Duval (2017), el análisis de la actividad matemática se basa en la movilización de diferentes registros de representación semiótica, por lo tanto, la información recolectada en este estudio debía provocar intencionalmente la producción e interpretación de diferentes representaciones semióticas en diferentes registros, así como la transformación bien sea en tratamiento o conversión.

Para este estudio, la información recolectada corresponde a:

- 46 Cuestionarios divididos en 3 partes y desarrollados de manera individual por los estudiantes, con la supervisión y acompañamiento de la docente y de la investigadora.
- Videos y fotografías tomadas durante la actividad matemática realizada por los niños con el fin de evidenciar las transformaciones semióticas. Durante los vídeos se solicitó (de manera individual) a los estudiantes pensar en voz alta en el momento de producir las representaciones semióticas correspondientes con el fin de hacer evidente el tratamiento y a conversión.
- Vídeos y grabaciones en audio de las entrevistas que se hicieron a algunos estudiantes inmediatamente después de desarrollar las actividades propuestas en los cuestionarios que permitiera corroborar la información obtenida.
- Notas de campo de la investigadora tomadas in situ o posterior al trabajo de campo que se iba realizando derivadas de lo observado en la clase, al igual que las notas en borrador que algunos estudiantes realizaron cuando hacían transformaciones semióticas.

Esta información se encuentra registrada en dos formatos: uno de ellos, los relatos de los niños, dibujos, procedimientos, operaciones matemáticas relacionados con el desarrollo de cada una de las actividades propuestas en los cuestionarios y la otra, son las transcripciones de las grabaciones en audio y video de las entrevistas y las notas de campo que se tomaron durante las observaciones de clase.

Cuando se obtuvo la información, se hizo un primer acercamiento a partir de la revisión de la producción individual de cada uno de los estudiantes en relación con la tarea, en este caso con la resolución de problemas escolares propuestos en los cuestionarios; el segundo acercamiento se hizo a través de la lectura y revisión de la información que debió cotejarse con la información derivada de las entrevistas, videos, fotografías y notas de campo tomadas por la investigadora.

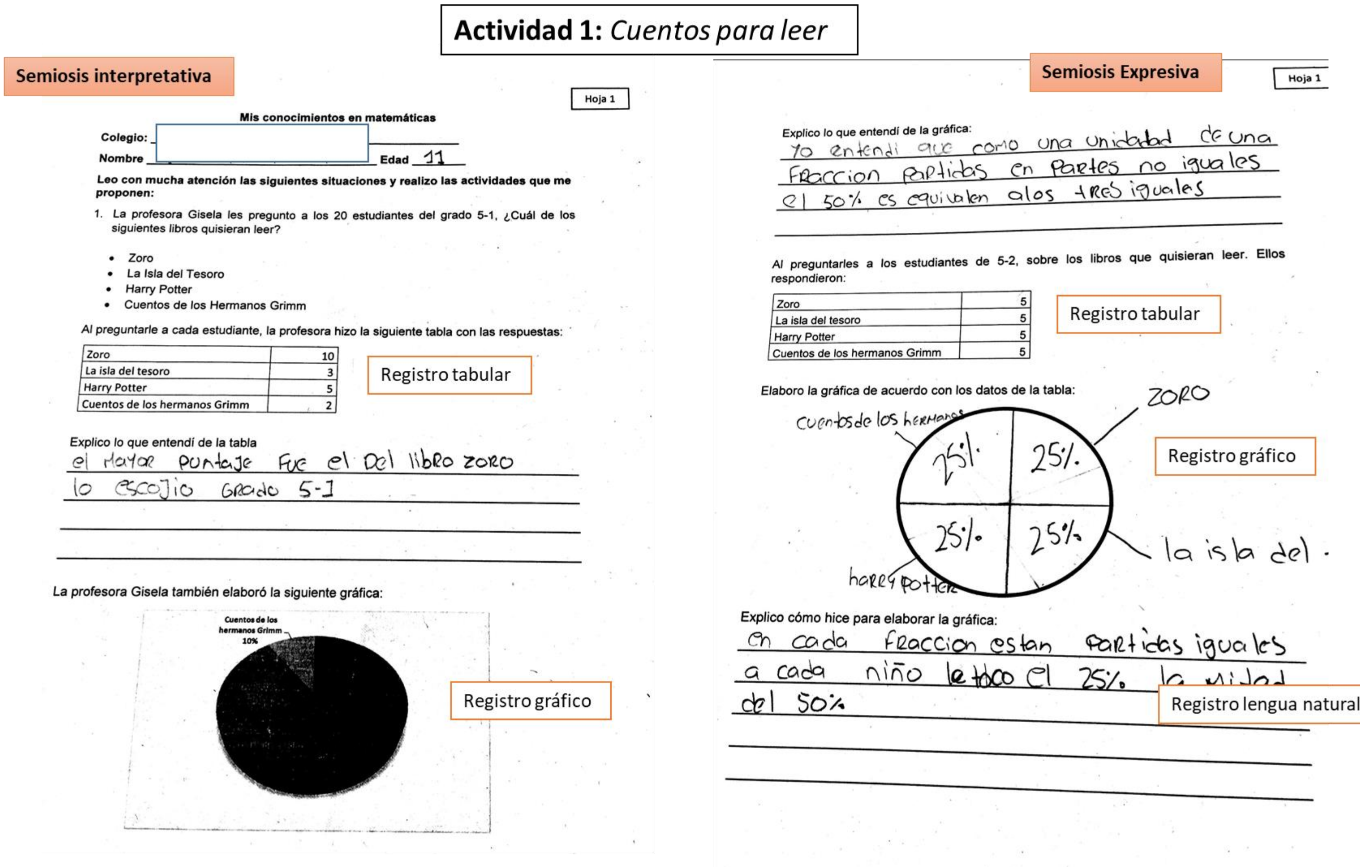
Posteriormente y con el fin de seguir la trayectoria de la información, todos los cuestionarios diligenciados por los estudiantes fueron escaneados para poder tener acceso a la información y así volver permanentemente sobre las imágenes que permitieran analizar de manera detallada las representaciones semióticas producidas.

A manera de ejemplo se muestra a continuación, la revisión inicial de los registros y representaciones que interpreta y expresa uno de los estudiantes durante el desarrollo de la actividad 1.

La actividad de revisión de la información inició con el reconocimiento de la actividad de semiosis, las representaciones y los registros de representación empleados por los estudiantes. Para esta primera revisión se tuvo en cuenta la caracterización de cada una de las actividades en donde se pudo diferenciar la actividad de semiosis expresiva de la interpretativa, tal como se muestra en la siguiente figura:

Figura 10.

Caracterización de las acciones noético-semióticas



En esta primera actividad se concluyó con una lista de chequeo de las acciones de semiosis interpretativa e identificación de registros semióticos y semiosis expresiva y la selección de registros semióticos y producción de representaciones semióticas realizadas por los estudiantes, tal como se presenta en la siguiente tabla:

Tabla 5.

Revisión inicial de la información

Actividades propuestas	Sistemas conceptuales de los racionales	Sistemas de representación semiótica	Semiosis expresiva	Semiosis interpretativa
Actividad 1 "*Libros para leer*": 1. La profesora Gisela les pregunto a los 20 estudiantes del grado 5-1, ¿Cuál de los siguientes libros quisieran leer? • Zoro • La Isla del Tesoro • Harry Potter • Cuentos de los Hermanos Grimm	**Sistema partidor: cantidades discretas**	Representación tabular	Selección del registro semiótico y producción de la representación	Identificación del registro semiótico e interpretación de la representación
		Representación gráfica	Transformaciones semióticas: Tratamiento de RS dentro del registro	
		Representación en lengua natural	Conversiones entre registros de RS	
Actividad 2. "*Repartición de la torta*":Queremos hacer una fiesta para celebrar los cumpleaños del mes de agosto, para ello necesitamos torta, helado y dulces. Tenemos 4 tortas y debemos partirlas en 24 pedazos para que nos alcance para todos. ¿Cómo puedo partir cada torta?	**Sistema partidor: cantidades discretas**	Representación gráfica	Selección del registro semiótico y producción de la representación	Identificación del registro semiótico e interpretación de la representación
		Representación en lengua natural	Transformaciones semióticas: Tratamiento de RS dentro del registro	
			Conversiones entre registros de RS	
Actividad 3. "*Los dulces*": El rector del colegio nos dió 85 dulces para la fiesta. ¿Cuántos dulces nos tocaron a cada uno de los estudiantes de mi grupo? ¿Cómo los podemos repartir?	**Sistema partidor: cantidades continuas**	Representación pictórica	Selección del registro semiótico y producción de la representación	Identificación del registro semiótico e interpretación de la representación
		Representación gráfica		
		Representación en lengua natural	Transformaciones semióticas: Tratamiento de RS dentro del registro	
		Representación numérica	Conversiones entre registros de RS	
Actividad 4. "*Los helados*": En Crem Helado nos regalaron 3 cajas de helado. Por cada caja de helado se pueden sacar 20 vasitos de helado. ¿Cuántos vasitos de helado tengo si juntamos las tres cajas?	**Sistema razón**	Representación pictórica	Selección del registro semiótico y producción de la representación	Identificación del registro semiótico e interpretación de la representación
		Representación gráfica	Transformaciones semióticas: Tratamiento de RS dentro del registro	
		Representación numérica	Conversiones entre registros de RS	

Actividades propuestas	Sistemas conceptuales de los racionales	Sistemas de representación semiótica	Semiosis expresiva	Semiosis interpretativa
Actividad 5"*El Zoológico*": El zoológico de Pereira tiene 180 animales que están distribuidos en dos zonas. Una zona A y una zona B. De los 180 animales están en la zona A y los demás animales están en la zona B. ¿Cuántos animales hay en la zona A?	**Sistema operador**	Representación gráfica	Selección del registro semiótico y producción de la representación	Identificación del registro semiótico e interpretación de la representación
		Representación en lengua natural	Transformaciones semióticas: Tratamiento de RS dentro del registro	
		Representación numérica	Conversiones entre registros de RS	
Actividad 6. "*Los dibujos de Ciencias Naturales*": Tres estudiantes deben hacer un dibujo para pegarlo en su cuaderno de Ciencias Naturales, pero no cuentan sino con dos hojas de papel para los tres. ¿De qué manera se pueden repartir las hojas para hacer el dibujo?	**Sistema operador**	Representación pictórica	Selección del registro semiótico y producción de la representación	
		Representación gráfica	Transformaciones semióticas: Tratamiento de RS dentro del registro	
		Representación numérica	Conversiones entre registros de RS	
Actividad 7. "*Ubiquemos en la recta numérica*": Supongamos que tenemos la siguiente regla y ubico las siguientes cantidades	**Sistema medidor**	representación figural	Selección del registro semiótico y producción de la representación	Identificación del registro semiótico e interpretación de la representación
		Representación en lengua natural	Transformaciones semióticas: Tratamiento de RS dentro del registro	
		Representación numérica	Conversiones entre registros de RS	
Actividad 8. "*Representemos el tiempo*": Si una hora tiene 60 minutos, que significa decir que son las 9 y cuarto?	**Sistema medidor**	Representación gráfica	Selección del registro semiótico y producción de la representación	Identificación del registro semiótico e interpretación de la representación
		Representación numérica	Transformaciones semióticas: Tratamiento de RS dentro del registro	
		Representación en lengua natural	Conversiones entre registros de RS	

Con la información ya clasificada que corresponde a la producción de representaciones semióticas y a las transformaciones semióticas se da inicio al proceso de análisis tanto desde la semiosis interpretativa como desde la semiosis expresiva y se constituye en la entrada al reconocimiento de los aspectos de los modelos mentales que emergen en las producciones e interpretaciones semióticas de los niños de quinto grado, ya que de acuerdo con este estudio, la actividad matemática sólo es posible reconocerse a partir de la actividad semiótica.

5.2 Análisis de datos

Siguiendo a Wolcott (1994), el proceso de análisis implica la transformación de la información en los datos a partir del reconocimiento de categorías que permitan responder a la pregunta de investigación, es el proceso por medio del cual se expanden y se extienden los datos más allá de la descripción de la información.

De acuerdo con Miles y Huberman (1994), el análisis se define en tres subprocesos ligados entre sí: reducción de los datos, exposición y obtención de conclusiones. En este capítulo se describe sólo la reducción y exposición de los datos, ya que el tercer proceso que corresponde a la interpretación será presentado en detalle en el capítulo siguiente.

Después de realizar esta revisión sistemática de organización y clasificación de los datos con los cuestionarios (3) que desarrollaron los 46 estudiantes de quinto grado, se hizo una saturación de la información que permitió reconocer algunas regularidades en las producciones de todos los estudiantes y así determinar que en el paso siguiente del análisis se seleccionara la información inicialmente de diez estudiantes, teniendo como único criterio de selección, el despliegue de recursos semióticos y su contrastación con los vídeos, entrevistas y notas de campo para determinar su consistencia.

5.2.1 Reducción de los datos

Esta actividad permitió organizar y seleccionar la información cualitativa disponible a partir de la identificación de las dimensiones que permiten establecer categorías analíticas y definir códigos que para el presente estudio, correspondieron a la selección y condensación de los datos de acuerdo con las categorías iniciales que en este caso, se refieren a los modelos y teorías de los racionales desde los matemáticos, maestros y autores de libros de texto.

Posterior al análisis descriptivo de las producciones semióticas de los estudiantes y habiendo caracterizado las representaciones, se procede a reconocer las transformaciones semióticas de tratamiento y conversión que conlleva una primera categorización y codificación a partir de la identificación de las unidades significantes elementales constitutivas de cada registro semiótico (Duval, 1999, 2004,2017).

Por lo tanto y atendiendo a la pregunta de investigación en torno al reconocimiento de los modelos mentales sobre los racionales que se asocian a las representaciones semióticas y transformaciones semióticas que interpretan y expresan los niños y niñas de quinto grado; se realizó una condensación de los datos al descomponerlos en unidades analizables, las cuales corresponden con las acciones noético-semióticas:

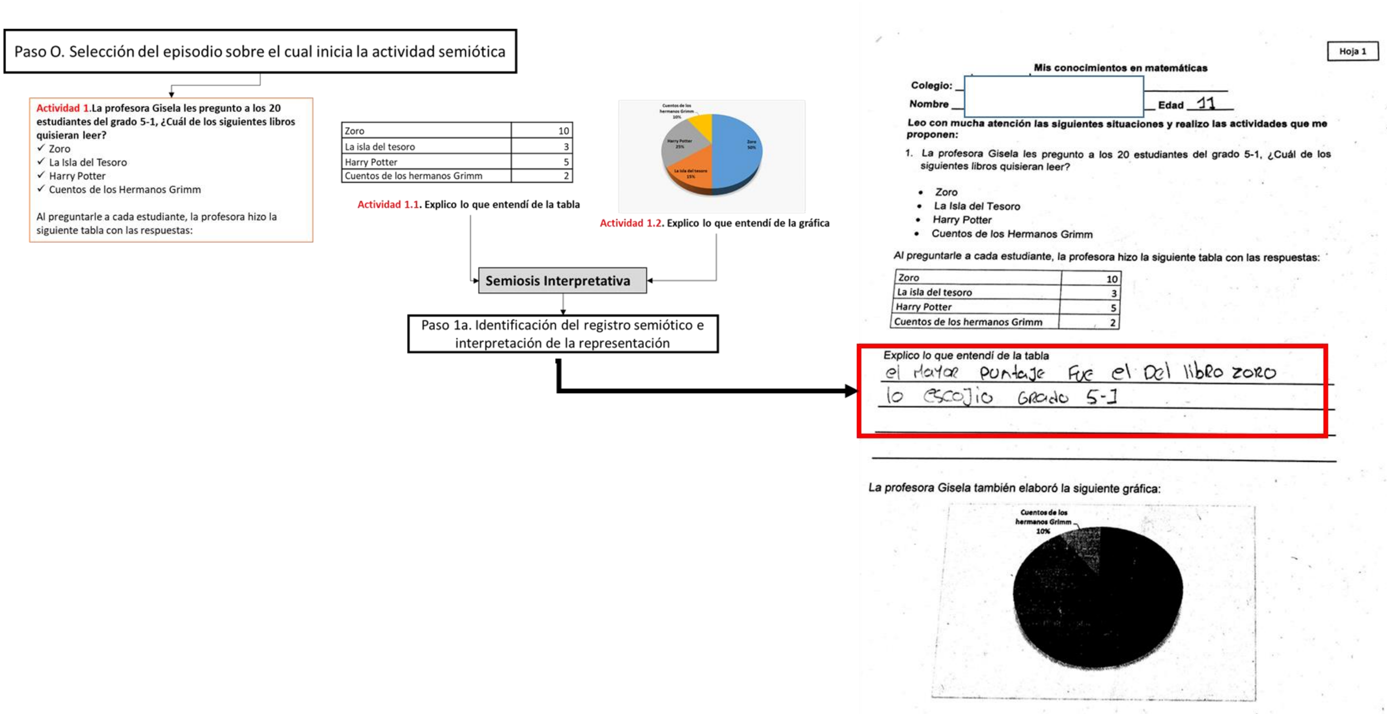
- Selección del episodio sobre el cual inicia la actividad semiótica (paso 0).
- Selección/identificación de registros semióticos y producción/interpretación de representaciones semióticas (paso 1a y 1b).
- Transformaciones semióticas: Tratamiento de la representación (paso 2)
- Transformaciones semióticas: Conversión (paso 3)

A manera de ejemplo se presenta a continuación, la clasificación de la información y descomposición en estas categorías temáticas partiendo de un ejercicio previo de caracterización de cada una de las actividades presentadas en los cuestionarios en donde se pudo establecer diferenciación entre las actividades que conllevan a una semiosis interpretativa de las actividades propias de la semiosis expresiva.

En primer lugar se muestra la manera como fue realizado el análisis realizado en una actividad de semiosis interpretativa:

Figura 14.

Análisis de semiosis interpretativa

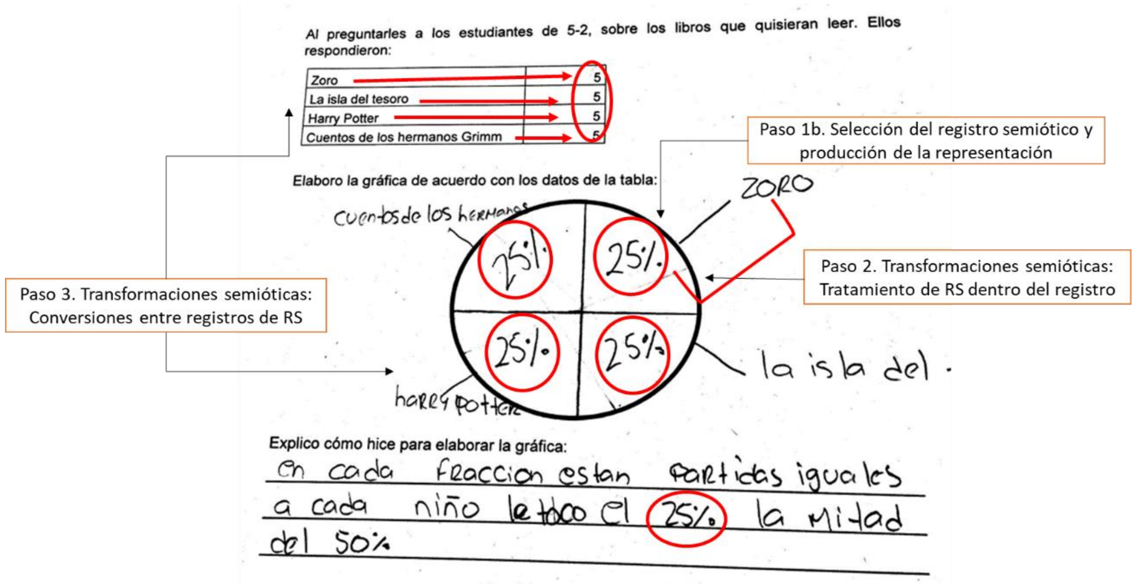


En cuanto a la semiosis expresiva, se hizo necesario segmentar y diferenciar la información desde la selección del registro para producir la representación semiótica hasta la transformación semiótica de conversión.

El reconocimiento de los registros semióticos sobre los cuales se producen las representaciones semióticas así como sus transformaciones semióticas se realizó teniendo en cuenta los criterios expuestos en la matriz de análisis presentada en la tabla 4 expuesta en el diseño.

Figura 15.

Análisis de semiosis expresiva



Después de reducir los datos, agruparlos según las actividades noético-semióticas y realizar su categorización, se hizo una nueva depuración que permitiera seleccionar los más significativos, lo que llevó a determinar que en el paso siguiente del análisis que se refiere a la identificación del contenido de las representaciones y la reconstrucción de los modelos mentales privados sobre los racionales, se seleccionara la producción de seis estudiantes, cuyas características ya fueron descritas en el diseño de la investigación al reconocerlos como los actores noético-semióticos del estudio.

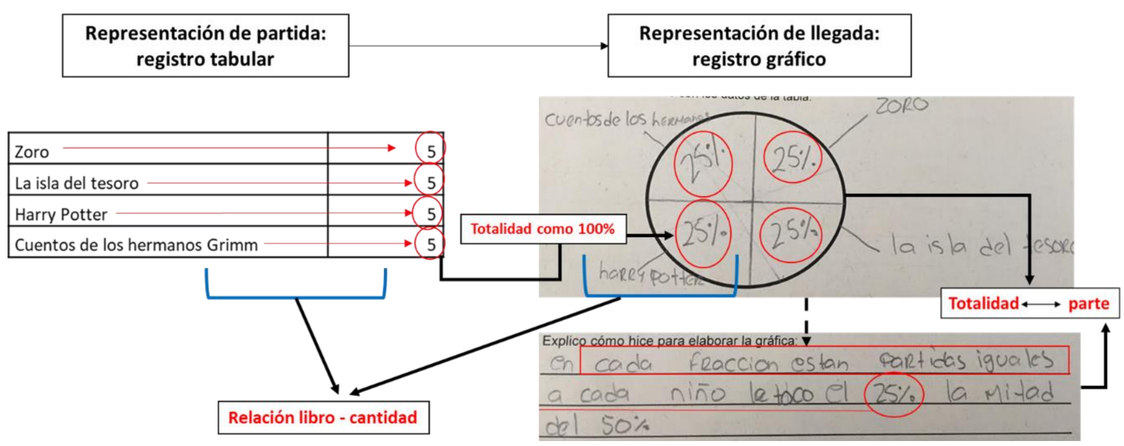
Siguiendo a Duval (1999, 2004, 2017), la identificación del contenido o invariante de la representación requiere que se perciba la diferencia entre lo que Frege llamaba el sentido y la referencia de los símbolos y signos, es decir, la diferencia entre el contenido de una representación y lo que ésta representa.

Por lo tanto, para reconocer el contenido de la representación se requiere en términos del tratamiento de datos cualitativos, lo que Tesch (1990) denomina un proceso de recontextualizar de los datos que implica "ensamblarlos" en este caso en el contexto de la transformación de conversión, para identificar los componentes semióticos que se modifican en el paso de un registro a otro de acuerdo con las reglas de conformidad y así determinar los componentes conceptuales que permanecen aún después del cambio de registro.

Habiendo puesto en correspondencia dos representaciones semióticas, una de partida y otra de llegada perteneciente a dos registros diferentes, al analizar la conversión se llega a inferir el contenido de la representación.

Figura 11.

Contenido de la representación



Para determinar los contenidos de la representación se tuvieron en cuenta, en primer lugar, la segmentación de las representaciones semióticas de acuerdo con las condiciones y límites de cada registro y así extraer las unidades significantes. En segundo lugar, el comportamiento de los criterios de congruencia de tal manera que se pudiera evidenciar el aspecto invariante en cada una de las representaciones.

En la siguiente tabla se presentan los contenidos de las representaciones identificados en las producciones y transformaciones semióticas de los seis participantes en el estudio:

Tabla 6.

Contenido de la representación

Actividad propuesta	**Contenido de la representación**					
	Estudiante 1	**Estudiante 2**	**Estudiante 3**	**Estudiante 4**	**Estudiante 5**	**Estudiante 6**
Actividad 1: "*Libros para leer*"	Relación libro a cantidad de lectores	Relación libro - cantidad	Relación libro - cantidad	Relación libro - cantidad	Relación libro - cantidad	Relación libro - cantidad
	totalidad como número de niños que lo prefieren	Totalidad como 100%	Totalidad como número de libros	Totalidad como número de libros (5%)	Totalidad como 100%	Totalidad como 100%
	Número de partes - número de libros	Número de partes - número de libros	Número de partes - número de libros	Número de partes - número de libros	Número de partes - número de libros	Número de partes - número de libros
Actividad 2: "*Repartición de la torta*"	totalidad – parte	totalidad – parte	totalidad-parte	totalidad-parte	totalidad-parte	Totalidad-parte
	parte-totalidad	parte – totalidad	parte-totalidad	parte-totalidad	parte-totalidad	parte-totalidad
Actividad 3: "*Los dulces*"	repartición en relación con (niños - dulces)	repartición en relación con (niños - dulces)	repartición en relación con (grupo - dulces)	repartición en relación con (grupo - dulces)	repartición en relación con (grupo - dulces)	repartición en relación con (grupo - dulces)
	Asignación sucesiva (de a 1)	Asignación sucesiva (de a 1)	Asignación en grupos de a 20 (total de estudiantes)	Asignación sucesiva (de a 1)	Asignación en grupos de a 25 (total de estudiantes)	Asignación en grupos de a 25 (total de estudiantes)
	Distribución equitativa	Distribución equitativa	Distribución equitativa	Distribución equitativa	Distribución equitativa	Distribución equitativa
	Totalidad – parte	Totalidad – parte	Totalidad-parte	Totalidad-parte	Totalidad-parte	Totalidad-parte
			Repartir es distribuir			
Actividad 4: "*Los helados*"	Relación cajas de helado - vasitos de helado	Relación cajas de helado - vasitos de helado	Relación cajas de helado - vasitos de helado	Relación cajas de helado - vasitos de helado	Relación cajas de helado - vasitos de helado	Relación cajas de helado - vasitos de helado
	operador (conteo de 20 en 20)	operador multiplicativo	operador multiplicativo	operador multiplicativo	operador multiplicativo	operador (conteo de 20 en 20)
	Totalidad – parte	Totalidad – parte	Totalidad-parte	Totalidad-parte	Totalidad-parte	Totalidad-parte
	Distribución equitativa	Distribución equitativa	Distribución equitativa	Distribución equitativa	Distribución equitativa	Distribución equitativa

Actividad 5: "*El Zoológico*"	totalidad – parte	totalidad – parte	totalidad-parte	totalidad-parte	totalidad-parte	totalidad-parte
Actividad 6: "*Los dibujos de Ciencias Naturales*"	Relación entre niños y hojas de papel	Relación entre niños y hojas de papel	Relación entre niños y hojas de papel	Se pierde relación entre niños y hojas	Se pierde relación entre niños y hojas	Se pierde relación entre niños y hojas
	Distribución equitativa	Distribución equitativa	Distribución equitativa	partición no repartición	partición no repartición	partición no repartición
	totalidad – parte	totalidad – parte	totalidad-parte	totalidad-parte	totalidad-parte	totalidad-parte
Actividad 7: "*Ubiquemos en la recta numérica*"	Números gordos y flacos	Números gordos y flacos	Números gordos y flacos	Números gordos y flacos	Números gordos y flacos	Números gordos y flacos
Actividad 8: "*Representemos el tiempo*"	parte-totalidad	parte – totalidad	parte-totalidad			
	totalidad-parte	totalidad – parte	totalidad-parte			
	medida como condición de la partición	medida como condición de la partición	medida como condición de la partición			

Volviendo a la TGMT como apuesta metodológica, se procedió a modelar o modelizar las teorías sobre los racionales que poseen los niños y niñas de quinto grado, desde la comprensión del modelo como sistema en sus tres aspectos: sustrato, dinámica y sistema a los que hace alusión Vasco (2014).

Para llegar a la reconstrucción de los aspectos de los modelos mentales privados que los niños de quinto grado poseen sobre los racionales se tuvieron en cuenta las categorías que emergieron de las transformaciones semióticas diferenciándolas de los aspectos conceptuales implícitos en ellas, que determinaron los invariantes en el contenido de la representación:

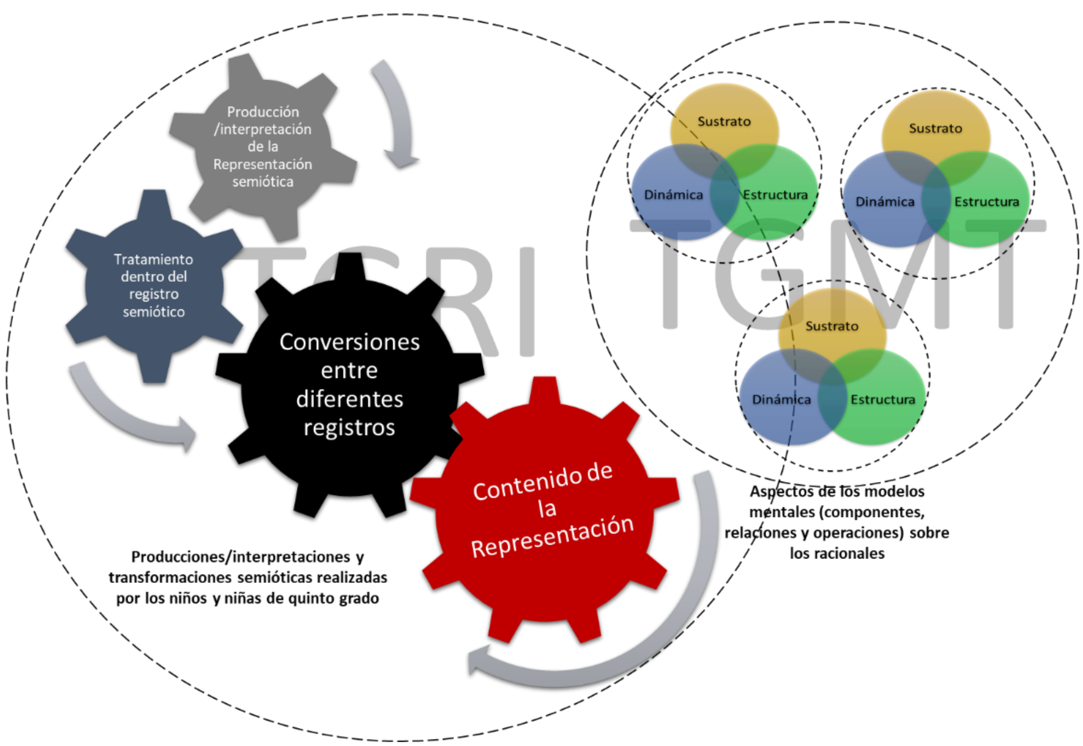
a. Descripción y caracterización de las representaciones y transformaciones semióticas que los seis participantes realizaron en las ocho actividades propuestas.

b. Interpretación de las unidades significantes presentes en las transformaciones semióticas y el comportamiento de los criterios de congruencia que permitió develar el contenido de las representaciones.
c. Inventario de los contenidos de las representaciones de los seis participantes en las ocho actividades realizadas.

Con los datos codificados se procedió a la selección de datos significativos que se logra a partir de la búsqueda de patrones, regularidades, contrastes e irregularidades presentes en las ocho actividades matemáticas que desarrollaron los estudiantes.

Figura 17.

Proceso de reconstrucción de los modelos mentales privados sobre los racionales que poseen los niños y niñas de quinto grado



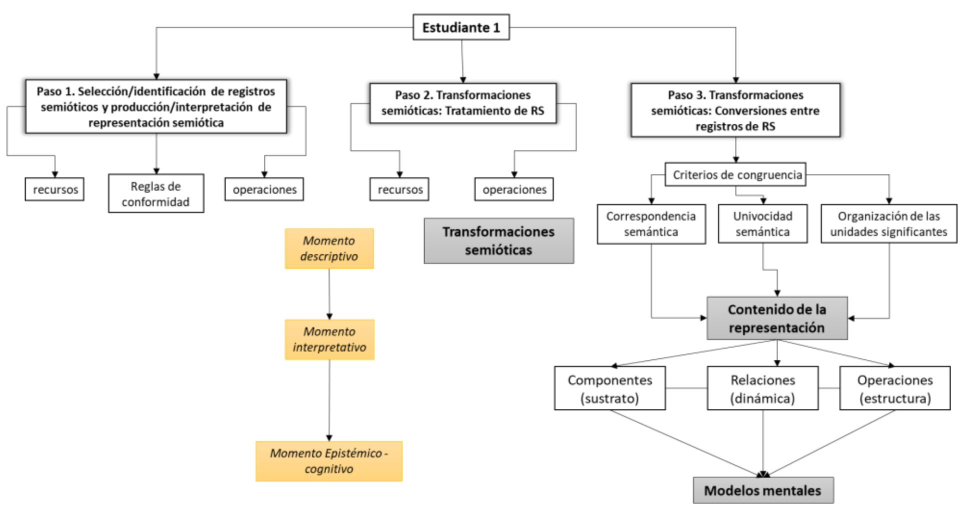
En esta etapa final del análisis se hizo una revisión de cada uno de las categorías emergentes que dan cuenta del contenido de la representación, las cuales son puestas en correspondencia con los aspectos del modelo como sistema (sustrato, dinámica y estructura). Posterior a ello se recurrió nuevamente al proceso de transformación semiótica con el fin de identificar las relaciones, organización, jerarquías entre los diferentes componentes del modelo con los cuales se pudieron reconstruir los modelos mentales sobre los racionales que poseen los niños y niñas de quinto grado.

5.2.2 Exposición de los datos

De acuerdo con Miles y Huberman (1994) quienes definen que la exposición de los datos hace alusión a la organización de los datos ya reducidos en forma de diagramas, lo que permite "el ensamblaje organizado y comprimido de la información" (p. 429).

Figura 18.

Exposición de los datos



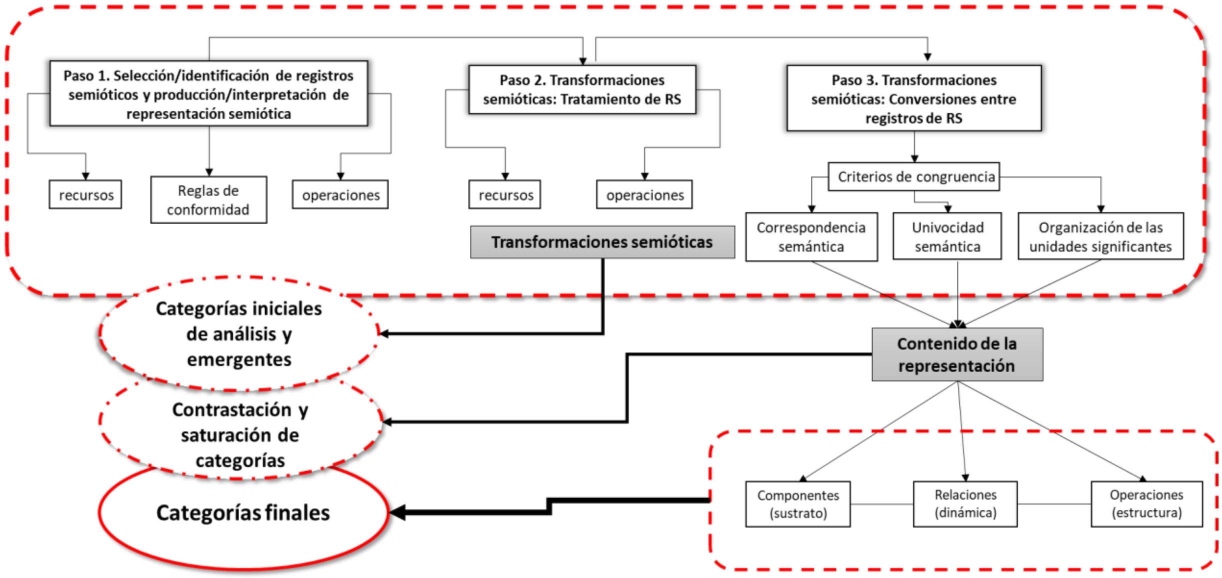
CAPÍTULO VI. RESULTADOS

Volviendo a la TGMT y para responder a la pregunta de investigación que pretende comprender los aspectos de los modelos mentales sobre los racionales (componentes, relaciones y operaciones) que asocian los niños y niñas de quinto grado a la interpretación y expresión de las representaciones y transformaciones semióticas que realizan para resolver problemas escolares; se presentan de manera descriptiva los datos seleccionados de los seis estudiantes participantes en el estudio, que inicia con la actividad noético-semiótica: expresiva e interpretativa que se recoge con la producción e interpretación de representaciones así como las transformaciones semióticas que permitieron develar el contenido o invariante de la representación.

Durante las diferentes etapas del proceso de análisis, las categorías iniciales se fueron contrastando y saturando hasta llegar a las categorías finales que se sustentan en los datos que se seleccionaron de los seis participantes.

Figura 129.

Análisis e interpretación de los datos



Tal como se refleja en la gráfica, en el proceso de análisis llevado a cabo para identificar el contenido de la representación se requiere despojar de contenido semiótico las representaciones producidas e interpretadas, dándole apertura al contenido conceptual que finalmente permite "ver" las categorías finales del estudio.

Por lo tanto, en la presentación de cada una de las categorías que corresponden a alguno de los aspectos del modelo mental (componentes, relaciones y operaciones) y con la pretensión de dar respuesta a la pregunta de investigación, se llega a las categorías que corresponden a los contenidos representacionales, los cuales se sustentan con el análisis descriptivo de la semiosis interpretativa o expresiva realizada por los estudiantes en la producción o interpretación de las representaciones y en las transformaciones semióticas que realizan durante la actividad matemática ya que el análisis noético-semiótico realizado por la investigadora se analiza en detalle en la discusión de los resultados.

Al finalizar este ejercicio de depuración de los datos, emergieron de los datos obtenidos mediante el análisis noético-semiótico, tres categorías, que se describen a continuación:

6.1 Categoría 1. El operador o transformador presente en todos los sistemas conceptuales de los racionales

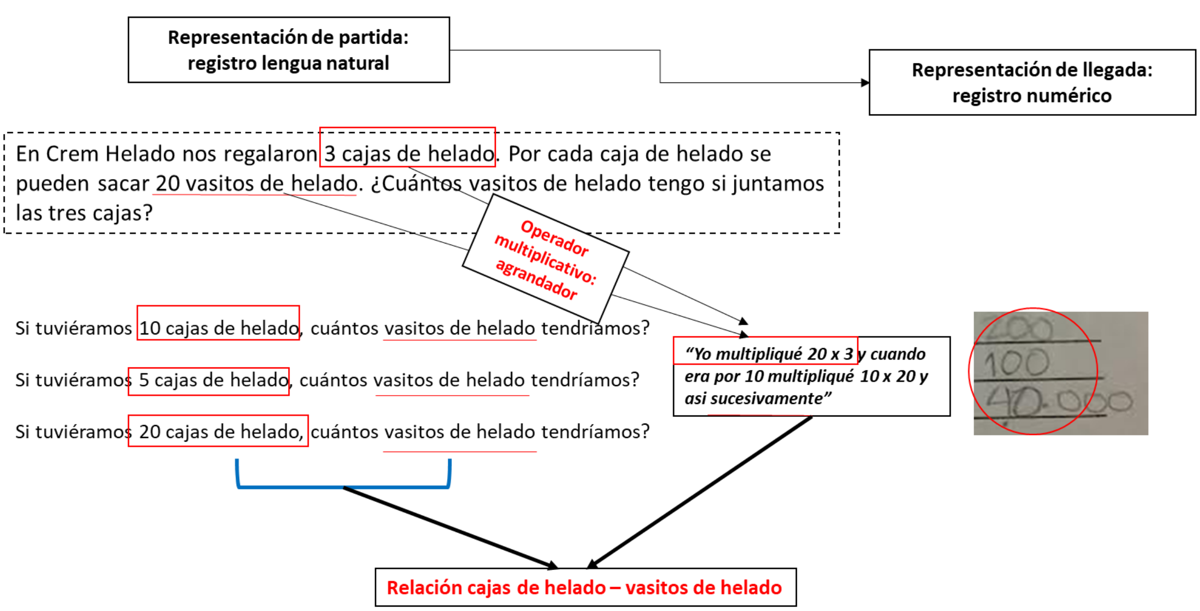
En todas las actividades propuestas fue posible identificar los operadores, como actividad transformadora (achicadora o agrandadora) de las cantidades sobre las cuales se establece relación al resolver problemas escolares con racionales.

Sin embargo, para poder identificar esta categoría fue necesario pedirle a los estudiantes que "echen a andar" el modelo, de tal manera que se pudiera interpretar su dinámica, aunque al presentarlo mediante gráficos y esquemas se vuelva al modelo estático.

Tal es el caso de la situación No. 5 del Zoológico,

Figura 20.

Contenido de la representación (Act.4 – Est.4)



De acuerdo con el análisis realizado, se parte de la relación cajas de helado-vasitos de helado, que hace alusión a la razón como relación entre cantidades, pero surge el operador multiplicativo que muestra la transformación de las cantidades.

En la actividad 4, para la realización de una fiesta se tienen unas cajas de helado. Tal como ya se ha dicho en los casos anteriores, ante la pregunta: *¿Cuántos vasitos de helado tengo si juntamos las tres cajas?,* todos los estudiantes coinciden en su respuesta cuando afirman que tendríamos 20 vasitos de helado.

Cuando se les hace a los niños otras preguntas en donde se solicita imaginar lo que pasaría si se tienen 10, 20 y 5 cajas de helado, al preguntarle a la *estudiante 4* sobre la manera como lo resolvió, en su relato hace evidente en la estructura de la representación numérica la operación realizada: *"multipliqué"*.

Además se identifican unidades elementales, tales como: *multipliqué 20 x 3; cuando era por 10 multipliqué por 10 x 20 y así sucesivamente.* En la producción de la interpretación propone que de manera reiterativa, puede multiplicarse, cuando afirma:

"Yo multipliqué 20 x 3 y cuando era por 10 multipliqué 10 x 20 así sucesivamente" (Est.4).

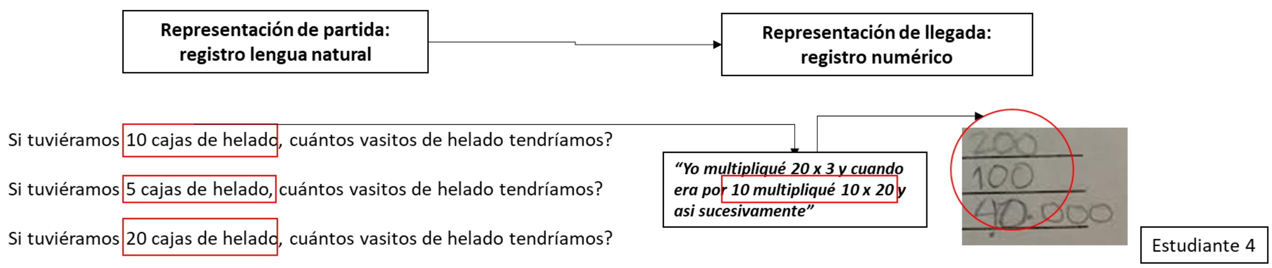
En cuanto a la actividad de conversión entre el registro lengua natural y el registro de llegada seleccionado por la *estudiante 4* que es el registro numérico, además de cumplir con la correspondencia semántica derivada de las unidades significantes tanto del registro de partida como el de llegada, añade una unidad significante elemental al registro de llegada cuando evoca la situación anterior que le permite reconocer la regularidad en la operación que resulta de multiplicar las cajas de helado por el número de vasitos que caben en cada caja y se anticipa a lo que pueda pasar si se continúa estableciendo la relación cajas de helado y vasitos de helado cuando dice "*así sucesivamente*".

Al decir "*así sucesivamente*", está reconociendo la razón establecida entre las cantidades.

Aunque en la tercera situación, al hacer el procedimiento no se logra correspondencia con la representación de llegada porque al multiplicar 20 x 20 tal como lo propone en su relato, la cantidad resultante de la multiplicación no puede ser "*40.000*". Lo anterior no permite afirmar que se pierde la relación sino que el resultado pudo deberse a un error en el manejo del algoritmo y por lo tanto no hizo parte del análisis.

Figura 21.

Contenido de la representación (Act. 4 – Est.4)

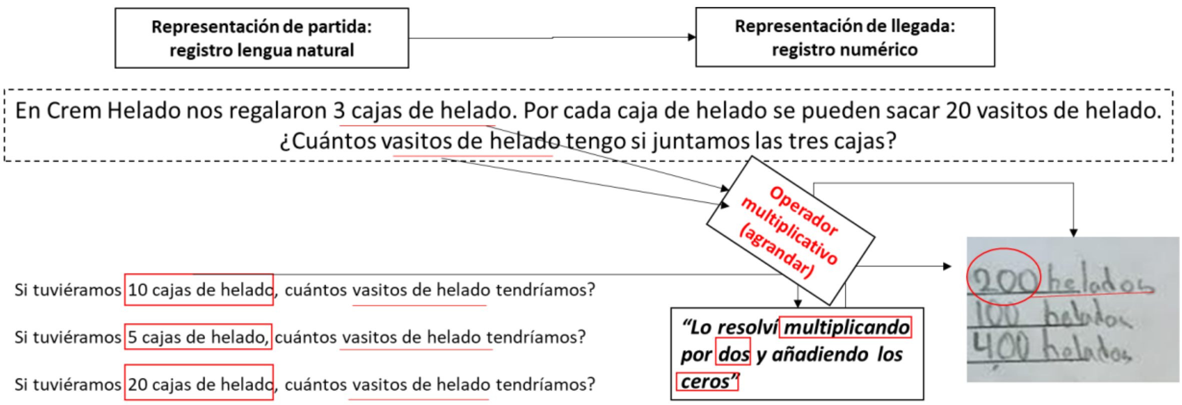


En ambas representaciones se puede identificar que las organizaciones respectivas de las unidades significantes permiten encontrar correspondencia semántica, surgiendo el operador multiplicativo como parte del contenido de la representación.

En cuanto al *estudiante 5* inicia la actividad semiótica interpretando la información que se le presenta y respondiendo a la pregunta: *¿Cuántos vasitos de helado tengo si juntamos las tres cajas?*, en donde todos los estudiantes coinciden al responder que tendríamos 20 vasitos de helado.

Figura 22.

Contenido de la representación (Act. 4 – Est.5)



Al preguntarle si juntáramos 20, 10 y 5 cajas de helado cuántos vasitos de helado tendríamos, además de responder a la pregunta, agrega una unidad elemental que es la representación numérica del objeto sobre el cual se está haciendo la operación matemática, en este caso, *los vasos de helado*.

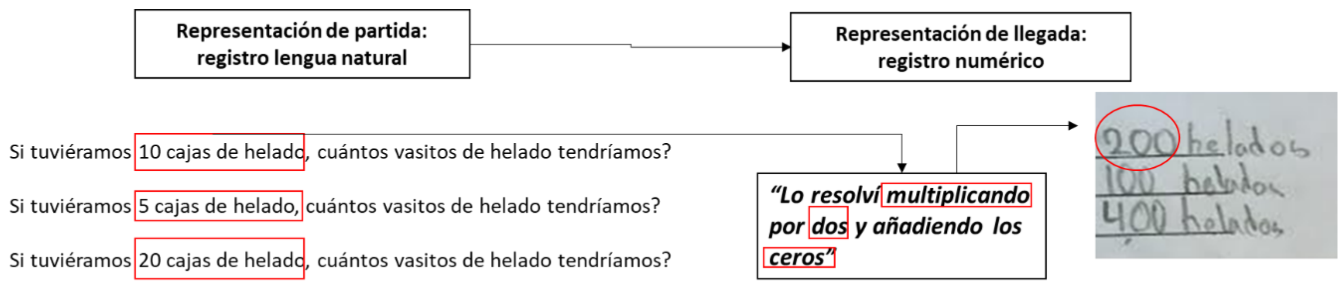
Para analizar el tratamiento en la representación semiótica numérica se indaga a los estudiantes acerca de su respuesta, en la representación producida por el *estudiante 5* se reconoce una unidad significante de orden superior cuando combina unidades elementales que dan cuenta de la operación realizada y el conocimiento del algoritmo en el registro numérico desde el sistema decimal, cuando afirma: *"Lo resolví multiplicando por dos y añadí los ceros" (Est.5).*

Al analizar la transformación semiótica de conversión realizada por el *estudiante 5*, entre el registro gráfico y el numérico se puede determinar que se cumplen los criterios de congruencia.

En la primera actividad de conversión, se indaga por el cambio de registro entre la representación de partida en lengua natural y la representación de llegada en registro numérico. La correspondencia semántica se reconoce a partir de la relación que se hace explícita teniendo en cuenta la información previa sobre la cantidad de vasitos de helado que tiene cada caja (20).

Figura 23.

Contenido de la representación (Act. 4 – Est.5)



6.2 Categoría 2: sistema partidor: la relación parte-todo

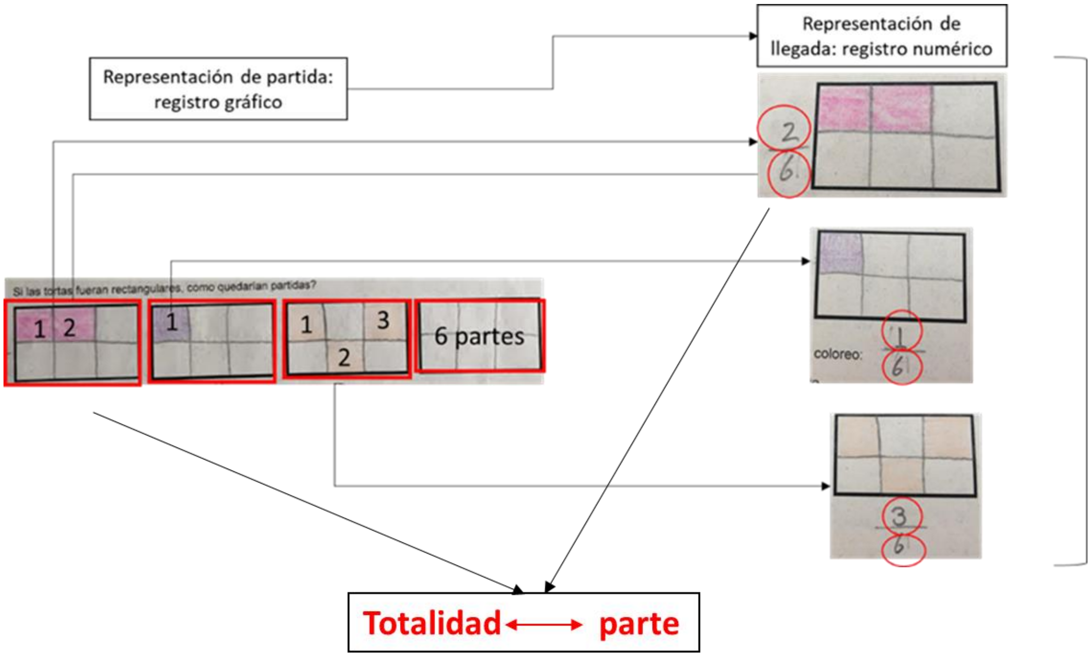
El surgimiento de esta categoría se reconoce a partir de la siguiente actividad que se les propone a los estudiantes:

Actividad 2: *Queremos hacer una fiesta para celebrar los cumpleaños del mes de agosto, para ello necesitamos torta, helado y dulces. Tenemos 4 tortas y debemos partirlas en 24 pedazos para que nos alcance para todos. ¿Cómo puedo partir cada torta?*

Partiendo del contenido de las representaciones que producen los estudiantes en las transformaciones semióticas, se presenta lo realizado por el *estudiante 1*:

Figura 24.

Contenido de la representación (Act.2 – Est.1)



De acuerdo con la producción semiótica, se conserva la relación parte-totalidad en ambos registros, teniendo en cuenta que en el registro lengua natural el sentido de la relación es de la parte a la totalidad en tanto en el registro gráfico de acuerdo con el orden de aparición de las unidades significantes, primero es la totalidad y luego la parte.

En cuanto a la semiosis interpretativa, el estudiante reconoce las unidades elementales del registro lengua natural lo que le permite comprender la actividad a realizar.

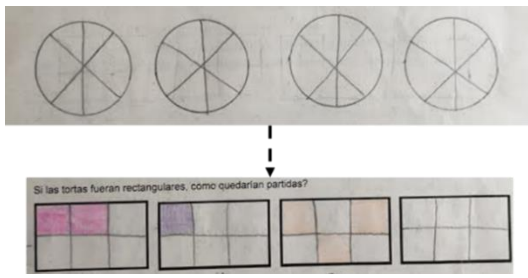


Figura 13. Transformación semiótica Est.1

En la semiosis expresiva, el *estudiante 1* selecciona el registro semiótico gráfico para realizar la representación acudiendo al empleo de recursos asociados con las formas geométricas circulares y rectangulares. Se identifican unidades constitutivas del registro y el uso de los recursos propios del mismo. Se evidencia también que hace un tratamiento dentro del mismo registro al emplear formas rectangulares para producir la representación gráfica.

Cuando se le solicita interpretar la representación en registro lengua natural y después producir una representación en registro gráfico: emplea los recursos propios del registro, se evidencian trazos horizontales y verticales al momento de hacer la partición física intuitiva[4].

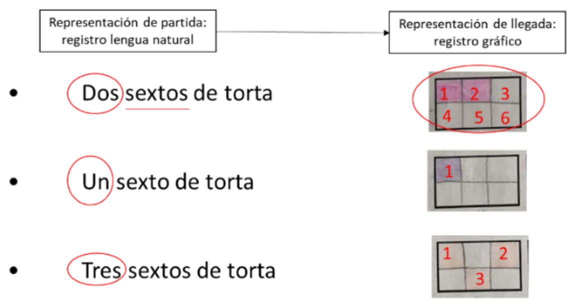


Figura 14. Conversión del registro escrito al registro gráfico

Es evidente que en el tratamiento del registro en lengua natural se inicia con la parte "dos sextos" y luego la totalidad "de torta", en tanto en el tratamiento en el registro gráfico se inicia con la totalidad y luego la parte.

Al realizar la actividad de conversión desde el registro gráfico al registro numérico en el *estudiante 1*, se reconoce que el coloreado de los dos sextos y un sexto se hace en orden y en el coloreado de tres sextos intercala el coloreado[5].

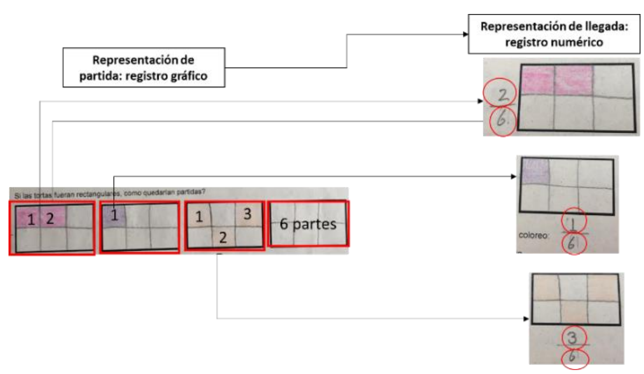


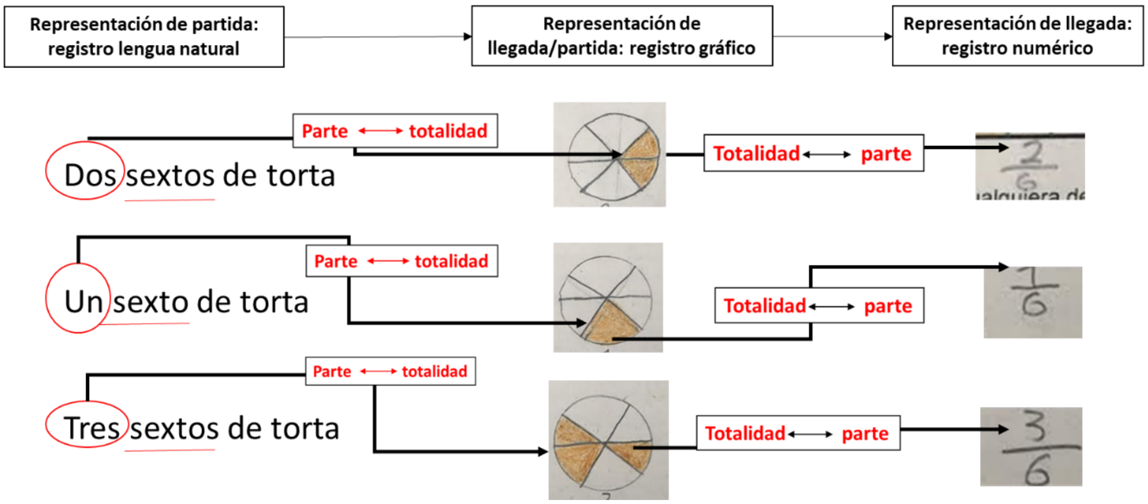
Figura 15. Conversión de registro gráfico al registro numérico

Al analizar el contenido de la representación del *estudiante 2*, se evidencia la aparición de esta categoría:

4 Las cantidades numéricas que aparecen en rojo, son escritas por la investigadora para visualizar el número de partes en que el niño divide la totalidad.
5 Las cantidades numéricas que aparecen en negro en la representación gráfica son asignadas por la investigadora para hacer visible al lector el número de partes en que el niño divide la totalidad.

Figura 28.

Contenido de la representación (Act.2 – Est. 2)



La relación parte-totalidad se identifica entre la representación en registro lengua natural y la representación gráfica; entre la representación gráfica y la representación numérica la relación es de totalidad-parte.

El *estudiante 2* hace uso de los recursos propios del registro, que se identifican en las unidades elementales, así como las reglas de conformidad al combinar unidades elementales que permiten formar unidades de nivel superior.

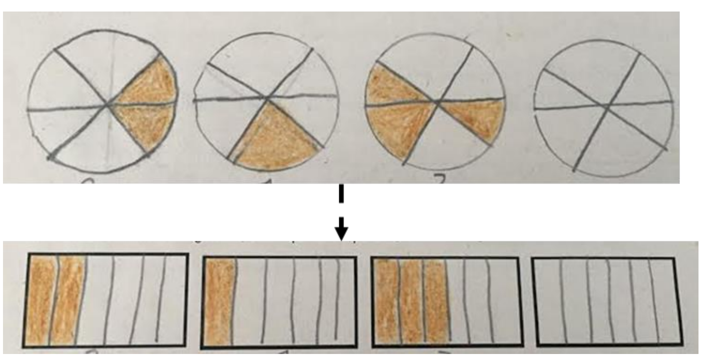


Figura 16. Tratamiento del registro gráfico

Emplea recursos como regla, borrado que en el primer círculo intentó hacer los trazos mediante una línea horizontal y luego vertical, pero al darse cuenta que la distribución debe hacerse en 6 partes, decide hacer una partición (física) horizontal para luego trazar dos líneas inclinadas de tal manera que se lograra la partición equitativa. En cuanto a la representación gráfica rectangular traza 5 líneas verticales para obtener las 6 partes.

En la conversión, selecciona el registro gráfico como registro de llegada, en el que se evidencia

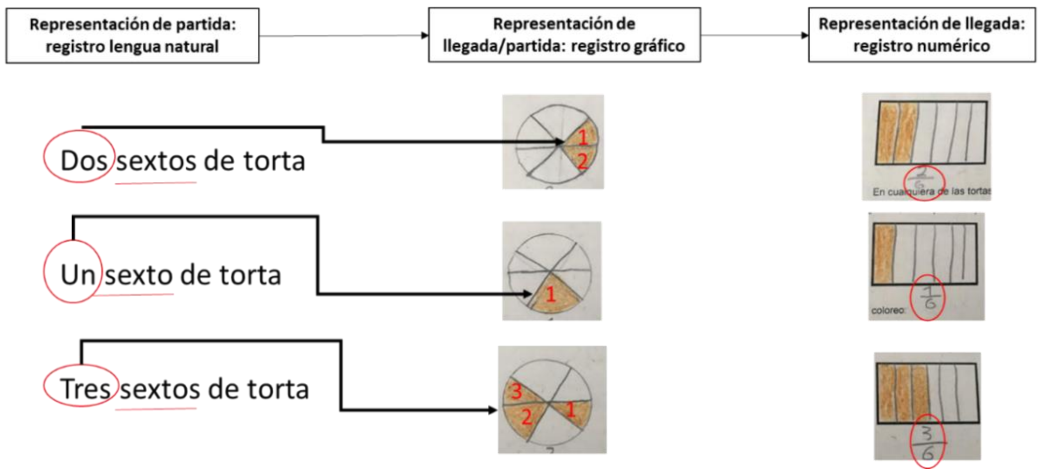


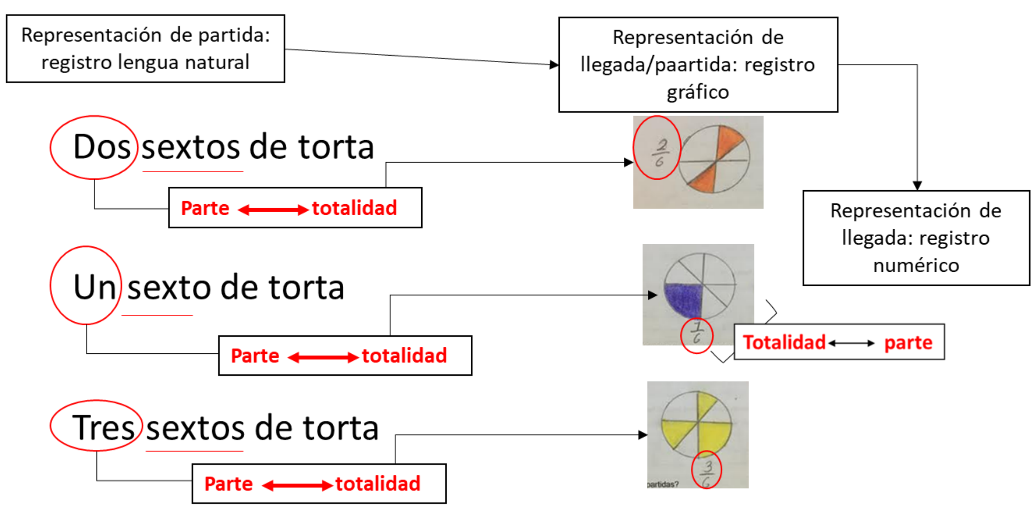
Figura 30. Conversión entre registros escrito, gráfico y numérico

cumplimiento de los criterios de correspondencia y univocidad semántica. En la organización de las unidades significantes, la expresión "*dos sextos*", corresponde al reconocimiento de la totalidad en seis partes y la selección de dos de ellas, que en la representación en registro gráfico primero se presenta la totalidad y luego se realizan los trazos y el coloreado para representar la parte[6].

En cuanto al contenido de las representaciones semióticas del *estudiante 6*:

Figura 31.

Contenido de la representación (Act.2 – Est. 6)



6 Lo resaltado en rojo lo hace la investigadora para llamar la atención en el análisis

Entre el registro lengua natural se reconoce como contenido de la representación parte-totalidad que cuando pasa del registro gráfico al numérico cambia de sentido esta relación.

La relación totalidad-parte se reconoce en la actividad de conversión entre estos dos registros.

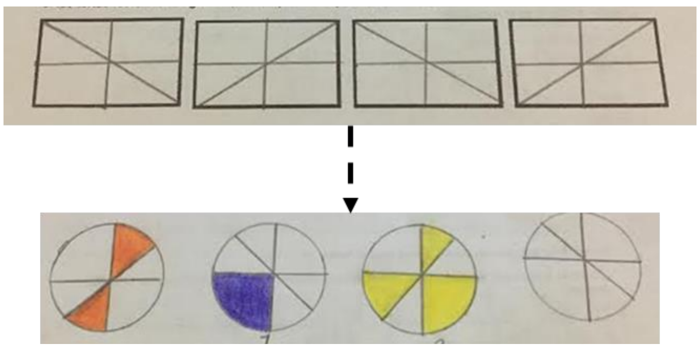


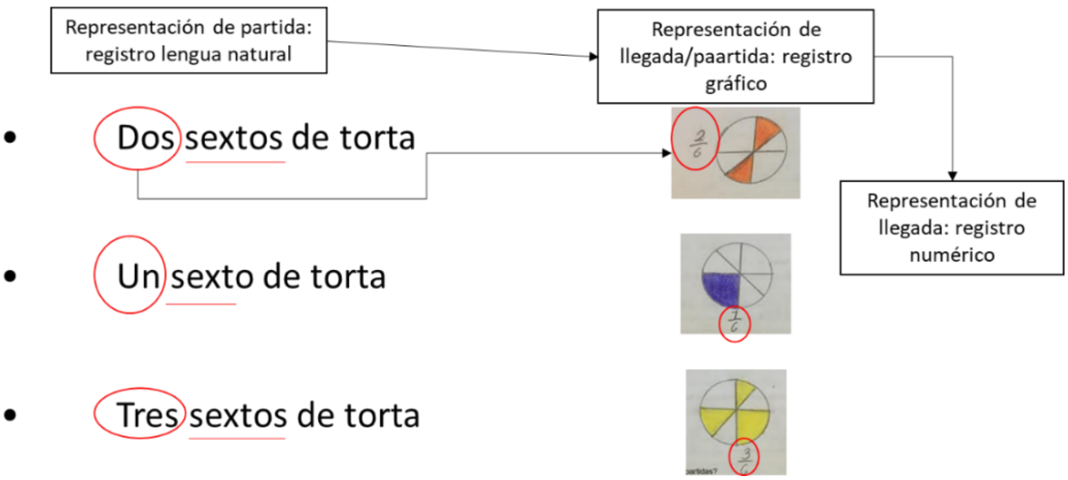
Figura 32. Tratamiento entre registros

En el momento descriptivo se reconoce también en el *estudiante 6* que realiza en la representación gráfica rectangular, un trazo inclinado, una línea horizontal y otra vertical, en la representación gráfica circular, intercala la dirección de las diagonales en cada uno de los rectángulos y de los círculos. La diagonal que traza para lograr la partición en seis partes no permite que se mantenga la partición equitativa.

Además se identifica correspondencia semántica entre las unidades elementales del registro de partida y el registro de llegada, pero teniendo en cuenta la organización de las unidades significantes en ambos registros, cada fracción representada en el registro de llegada que se refiere al registro gráfico no es congruente debido a los trazos que se hicieron para lograr las seis partes tampoco logran ser congruentes.

Figura 33.

Conversión entre registros



A partir del análisis de las representaciones y transformaciones semióticas realizadas por los niños y niñas de quinto grado, se pudo identificar que existen diferencias en el tratamiento, ya que se hace de manera discriminada si se trata de partir, repartir o distribuir.

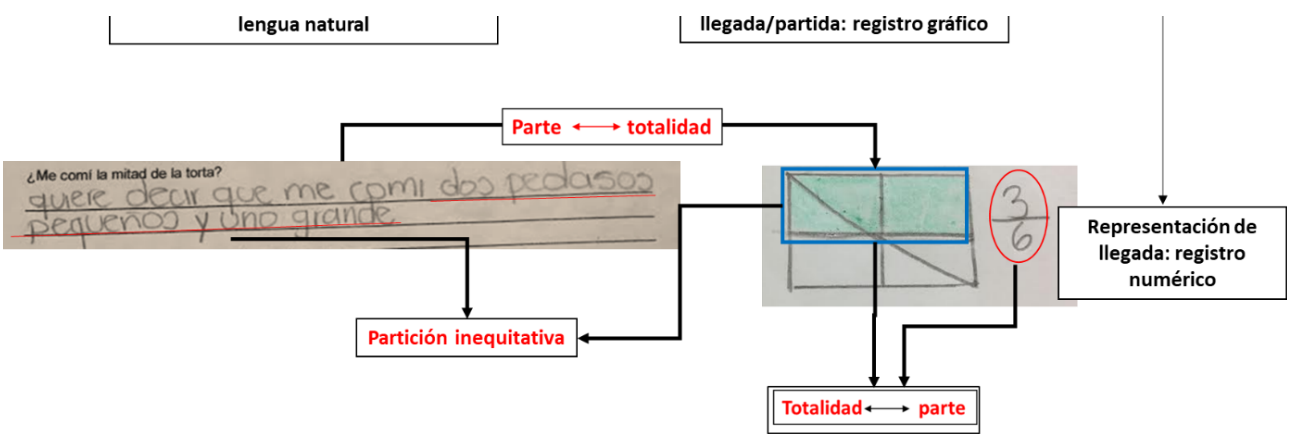
Para dar cuenta de esta afirmación, se presentaron de manera diferenciada los resultados desde cada una de estas acciones.

<u>En la partición,</u>

Ante la pregunta de la actividad 2.4 sobre la expresión: *¿Me comí la mitad de la torta?*, se pudo reconocer en las transformaciones semióticas realizadas por la estudiante, la ausencia de la igualdad, pero si sostiene lo que indica hablar de la mitad.

Figura 17.

Contenido de la representación (Act.2.4 – Est. 4)



De acuerdo con la pregunta realizada por la investigadora, que orienta la selección del registro lengua natural para luego pasar a una representación gráfica y finalmente al registro numérico. Las reglas de producción en cada uno de los registros se identifican en su estructura dado que tienen en cuenta sus unidades constitutivas.

Es de resaltar que en la representación gráfica se conservan los 6 pedazos en los que se partieron las tortas y allí se representa la mitad de la torta y la la *estudiante 4*, aplica reglas de

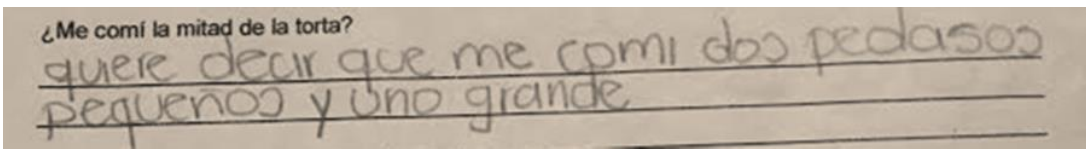


Figura 18. Argumento Est.4

coherencia temática haciendo una expansión discursiva en lengua natural, tal como se evidencia en su relato:

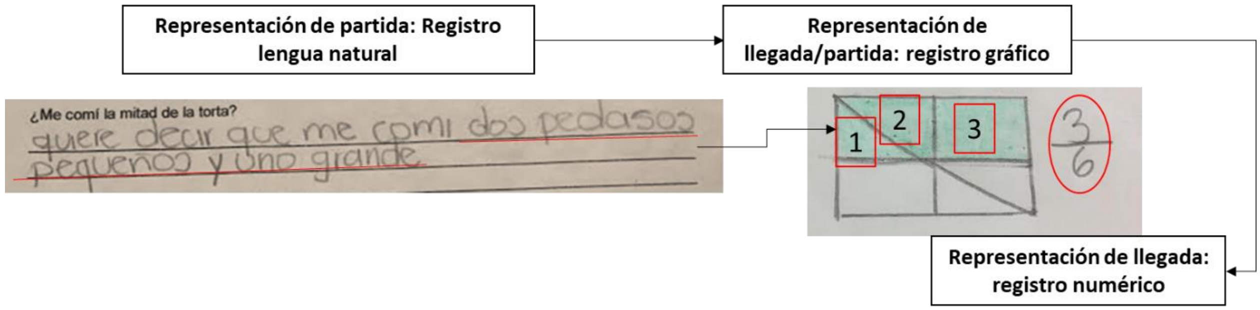
Como previamente había realizado la representación en registro gráfico, se evidencia correspondencia semántica desde la relación entre las siguientes unidades significantes elementales:

- "*Comí dos pedazos pequeños y uno grande*" con la partición en seis partes en una de ellas ocupa más espacio que las otras dos, debido al trazo realizado en el tratamiento del registro gráfico lo que evidencia correspondencia semántica.

- Conserva la partición en seis partes en los tres registros reconociendo que la "*mitad de la torta*", tiene correspondencia semántica con la forma rectángular partida en 6 y con la representacion numérica de $\frac{3}{6}$.

Figura 19.

Conversión entre registros Est.4

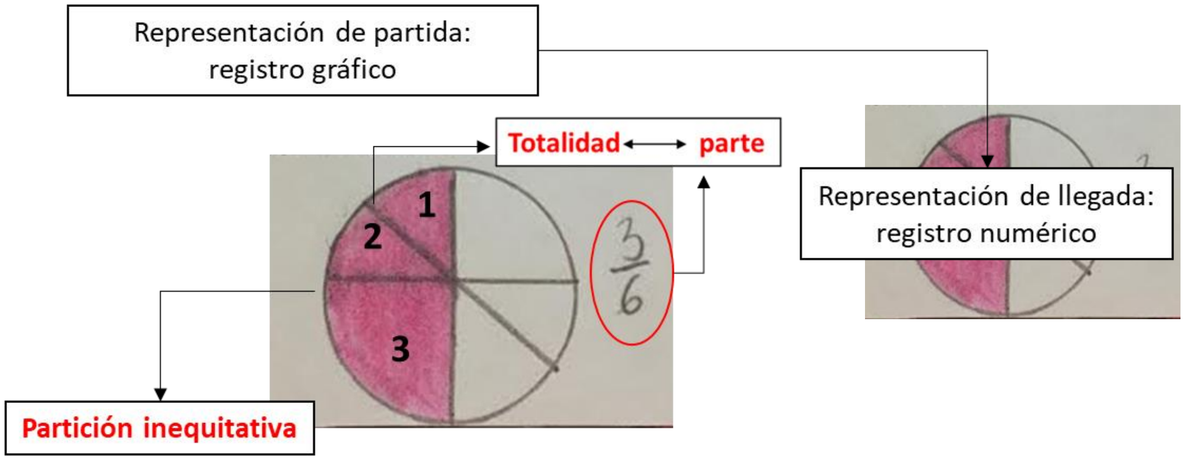


Hay univocidad semántica entre las duplas; representación en lengua natural y representación gráfica, así como entre esta y la representación numérica, ya que se conserva la totalidad en la que fue "partida" la torta y se reconoce la particion inequitativa que hace en el tratamiento de la representación gráfica.

De igual manera ocurre en la actividad de partición que hace el estudiante 6:

Figura 20.

Contenido de la representación (Act.2.4 – Est. 6)



Elabora una representación gráfica atendiendo a la actividad inicial en donde la torta estaba dividida en 6 partes, de igual manera que lo hacen con la representación numérica.

Las unidades significantes de la representación gráfica corresponden con la representación numérica $\frac{3}{6}$

Hay univocidad semántica terminal al reconocer que cada unidad significante elemental de la representación de partida le corresponde una unidad significante en la representación de llegada, de acuerdo con los elementos que se evidencian en cada tratamiento.

Al analizar las transformaciones semióticas de conversión realizadas por cada estudiante, con el fin de identificar las diferencias en el cumplimiento de los criterios de congruencia:

El *estudiante 6*, también asume la mitad de la torta desde la partición en seis pedazos como se planteó inicialmente la actividad.

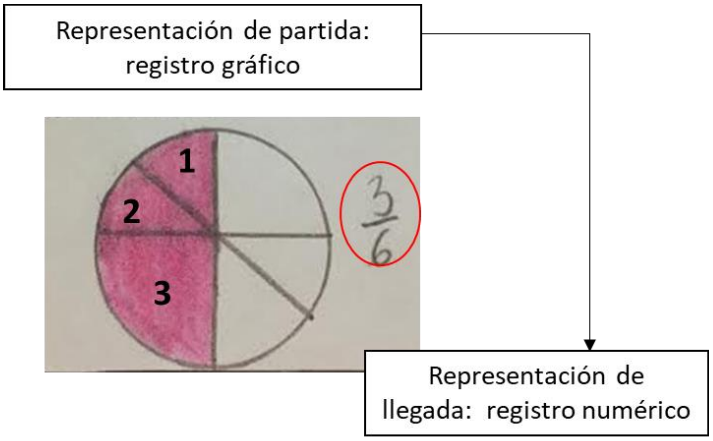


Figura 21. Análisis conversión entre registro gráfico y numérico

Por consiguiente, hay correspondencia semántica y univocidad semántica entre la representación gráfica que presenta como unidades significantes, la partición en seis partes de manera inequitativa una totalidad, de las seis partes se colorean tres de ellas.

<u>En la actividad de repartición,</u>

Se presentaron dos actividades a los estudiantes que permitieron el surgimiento de esta categoría.

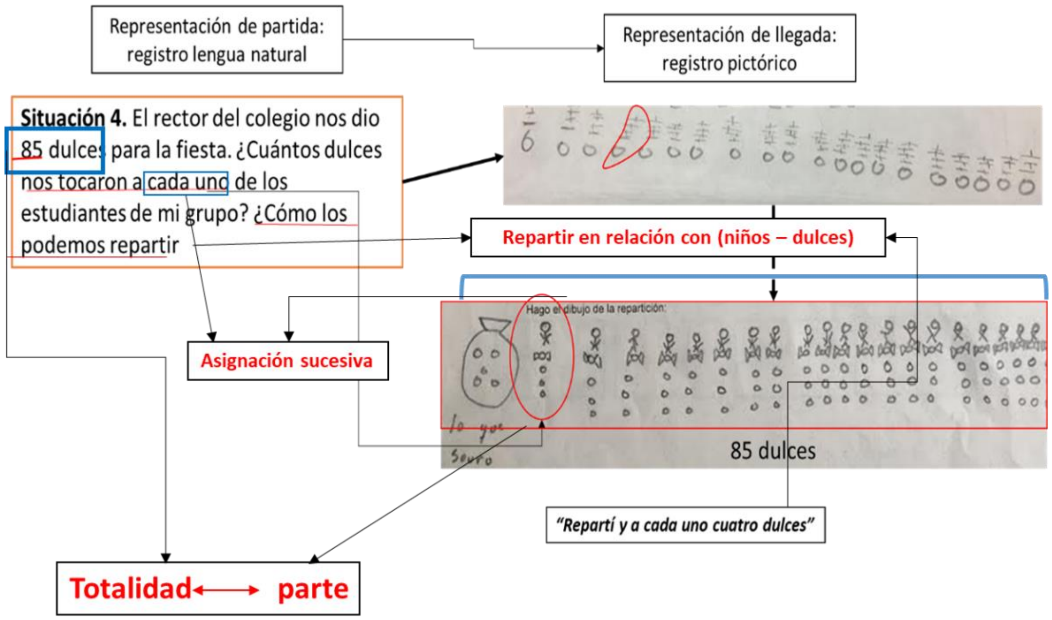
Actividad 3. *El rector del colegio nos dio 85 dulces para la fiesta. ¿Cuántos dulces nos tocaron a cada uno de los estudiantes de mi grupo? ¿Cómo los podemos repartir?*

En el estudiante 1, se identifica el siguiente contenido de la representación:

Figura 40.

Figura 41.

Conversión entre registros Est.1



Cuando se les pregunta a los estudiantes sobre cómo se pueden repartir los dulces, el *estudiante 1* responde: *"Repartí y a cada uno cuatro dulces"*

Se reconoce en ambas representaciones después de la conversión de la representación del registro lengua natural a la representación en el registro pictórico:

- Totalidad-parte que se refiere al total de los dulces y la parte al número de dulces que le corresponden a cada niño.
- Hay una relación niño-dulces que está determinada por la repartición, lo que también da cuenta de una manera de repartir que se refiere a la asignación sucesiva "*de a uno*". En esta operación el niño busca agotar la totalidad que corresponde a los 85 dulces y mantener la igualdad

De acuerdo con la respuesta del estudiante, lo primero que hizo fue repartir los dulces "de a uno", ubicando los "niños" en la parte superior de la hoja y realiza una operación de reformulación a partir del despliegue que hace de la representación pictórica cuando en "*borrador*" hace la repartición de los dulces, entregando a cada uno de los niños un dulce hasta agotar los 85 dulces que tiene para repartir entre 20 niños[7]. La manera de representar la repartición uno a uno de los dulces la realiza "*tachando*" cada dulce que va repartiendo.

Se evidencia correspondencia semántica entre las unidades significantes de la representación de partida y la representación de llegada producida en el registro pictórico.

Se identifican las siguientes unidades:

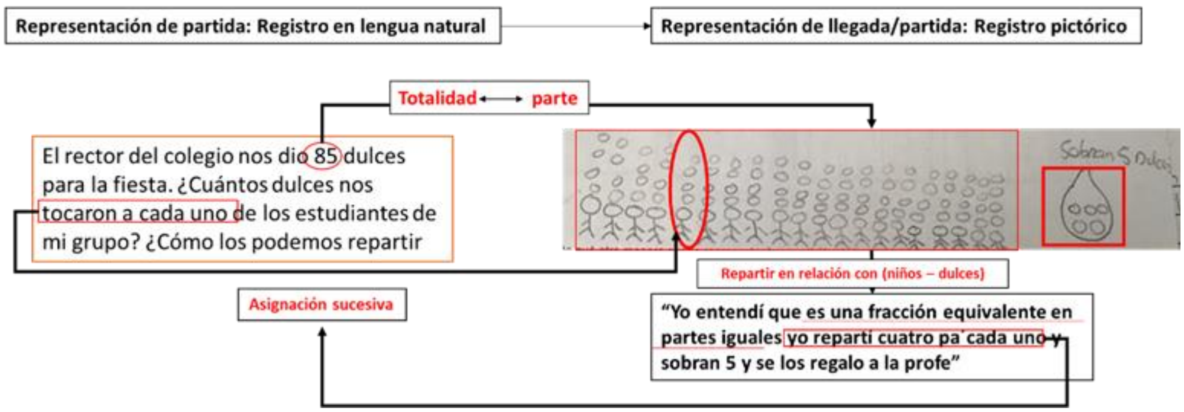
- 85 dulces representados en lengua natural corresponden con 85 bolitas que se reparten en la representación pictórica.
- "20 muñequitos" sobre los que se reparte la cantidad de dulces, en una asignación de uno en uno.

Para el caso del estudiante 2,

7 La repartición se hace entre 20 niños que son los estudiantes del grado 5 - 1

Figura 42.

Contenido de la representación (Act.3 – Est.2)



La asignación sucesiva como contenido representacional da cuenta de la conversión que el estudiante realiza de la expresión "nos tocaron a cada uno" lo que implica repartir "de a uno". Se reparte en relación con (niños y dulces).

El *estudiante 2* en su tratamiento combina unidades elementales en las formas empleadas tanto para representar los niños, como los dulces. Cuando se le pregunta sobre la manera como puede repartir los dulces, relata lo siguiente:

> *"yo entendí que es una fracción equivalente o en partes iguales y yo repartí cuatro para cada uno y sobran 5 que se los regalo a la profe"*

Lo anterior se evidencia cuando elabora la representación correspondiente con las reglas de producción propias del registro pictórico, emplea reglas asociativas de contigüidad y similitud, para producir una representación pertinente. Ubica los "niños" en la parte inferior de la hoja e inicia a repartir "*uno a uno*" los dulces ubicándolos al frente de cada niño, tal como se observa en la imagen:

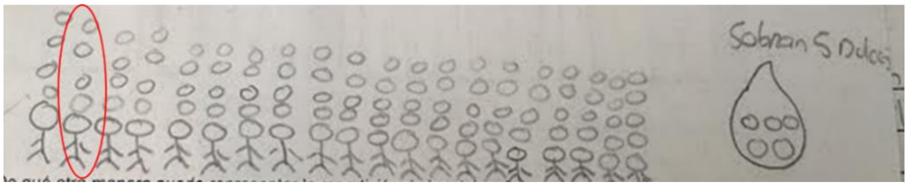


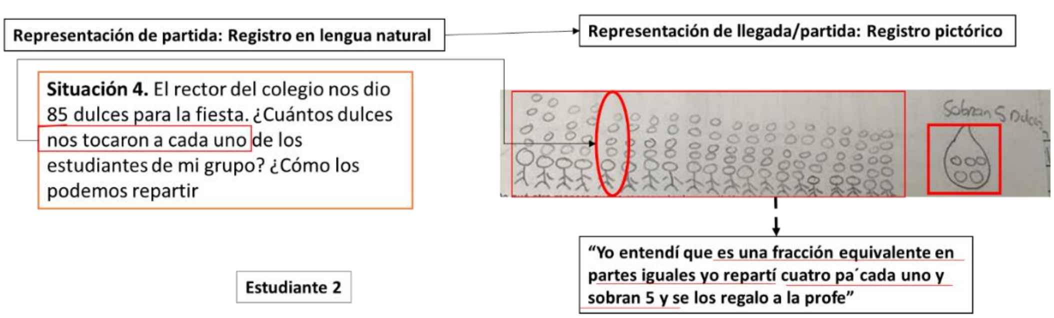
Figura 43. Tratamiento en el registro pictórico

Al realizar la actividad de conversión entre el registro en lengua natural y el registro pictórico, Se evidencia coincidencia en las siguientes unidades elementales lo que permite afirmar que hay correspondencia semántica entre:

- 85 dulces representados en el registro en lengua natural que corresponden con 85 bolitas que se reparten y están representadas en la representación pictórica.
- 20 dibujos de figura humana sobre los que se reparte la cantidad de dulces, en una asignación de uno en uno.
- La consideración de fracciones equivalentes como la repartición en partes iguales que corresponde con la distribución equitativa de los dulces.
- La necesidad de agotar la totalidad de los dulces cuando propone compartir los dulces “sobrantes” con su profesora.

Figura 44.

Conversión del registro lengua natural al registro pictórico



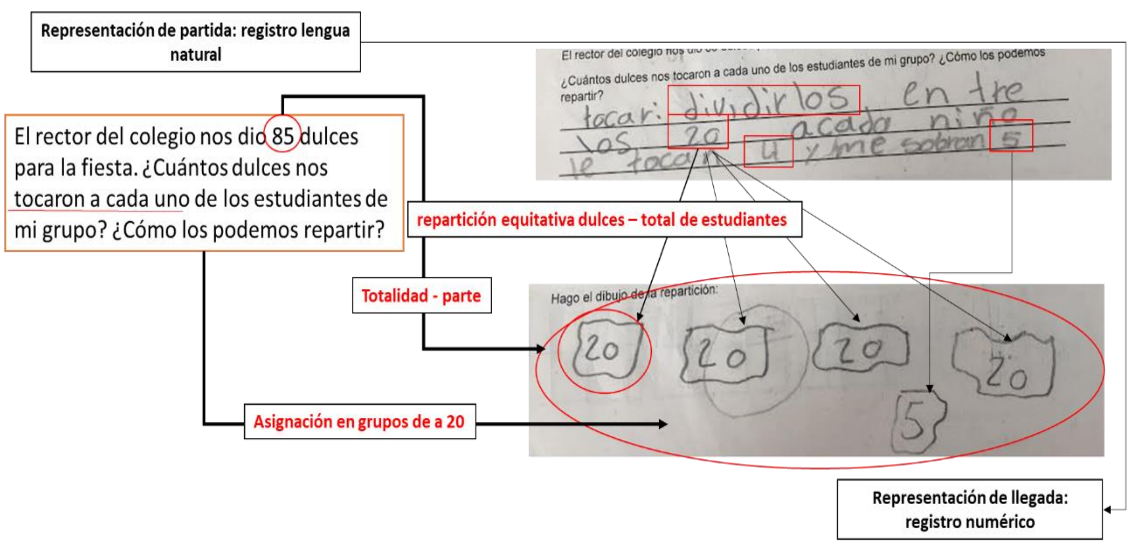
En cuanto a la univocidad semántica terminal coinciden en el registro de llegada con las unidades significantes del registro de salida, pero emerge una unidad significante en la representación pictórica que corresponde a los dulces que “sobraron” representado con una bolsa aparte en donde se encuentran los 5 dulces restantes.

La organización de las unidades significantes que se evidencia al yuxtaponer ambas representaciones, es posible identificar que el orden se invierte en tanto en el registro de partida, la representación en lengua natural parte del reconocimiento del todo, en tanto en la representación de llegada en el registro pictórico, se tienen en cuenta inicialmente los niños sobre los cuales se reparte la cantidad.

Otra manera de representar la repartición de los dulces de manera equitativa, la realiza el estudiante 3:

Figura 22.

Contenido de la representación (Act.3 – Est.3)



Se identifica la distribución equitativa de dulces y estudiantes en donde la asignación se hace por grupos "de a 20". En la representación en lengua natural se reconoce la totalidad y en la distribución surge la parte, pero para el *estudiante 3,* la totalidad (85 dulces) está implícito y a partir de allí inicia la repartición en grupos que están conformados por el número de estudiantes a los cuales hay que repartir.

Al analizar las representaciones y transformaciones semióticas que requiere la repartición de 85 dulces, el *estudiante 3,* selecciona el registro numérico para producir la representación en donde en el tratamiento, realiza la repartición formando 4 grupos y a cada grupo le asigna la cantidad 20 y al grupo restante la cantidad 5, tal como lo expresa en su relato:

"*Toca dividirlos entre los 20 a cada niño le tocan 4 y me sobran 5*"

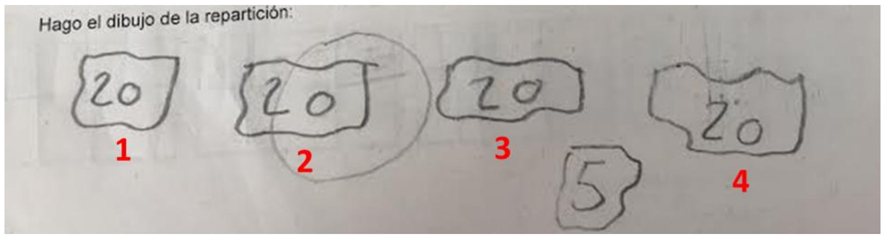


Figura 23. Tratamiento de la representación Est.4

En cuanto a la representación, se reconoce la unidad significante elemental del registro que corresponde a las cantidades numéricas. Emplea recursos como el borrado en donde se evidencia varios intentos de repartición.

Cuando se le pide que relate la manera como hizo la repartición afirma lo siguiente:

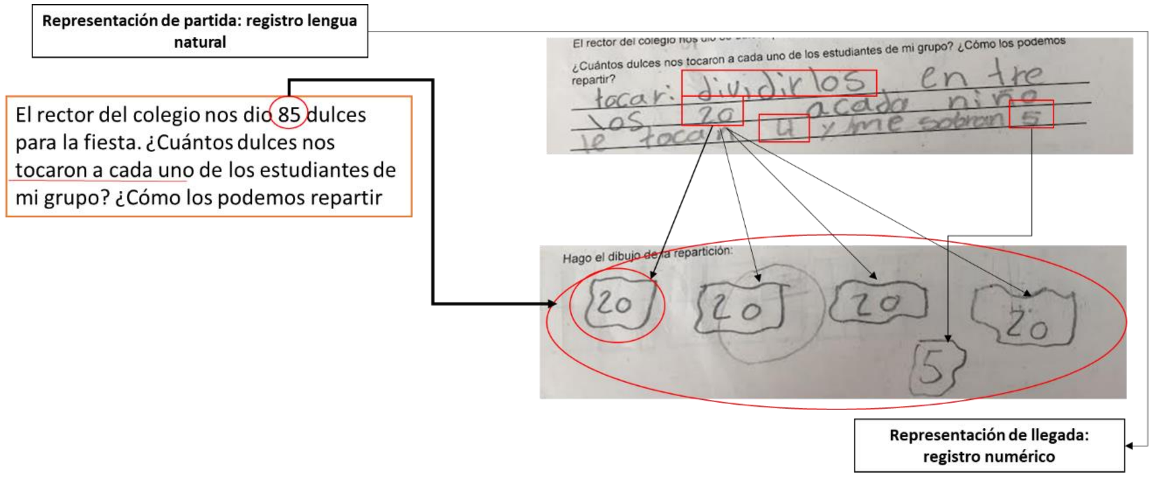
"…ya di 20 me quedan sobrando 65, luego vuelvo a repartir 20 y me quedan 45 y ya les he dado de a 2 dulces. Luego reparto otros 20 y les di de a tres, todavía me quedan 25 y vuelvo a repartir y me quedan 5, les di de a cuatro… no puedo seguir repartiendo porque no es equivalente*….como queda darles a 5 niños no más y a los otros nada…".*

En la actividad de conversión realizada por el *estudiante 3* cumple con los criterios de congruencia, en los siguientes aspectos:

Hay correspondencia semántica entre los 85 dulces que se reconocen en el registro numérico distribuidos en grupos de a 20 y un grupo de 5; también se evidencia en la repartición de los dulces en donde es representada por el estudiante a partir de la descomposición de la cantidad 85.

Figura 24.

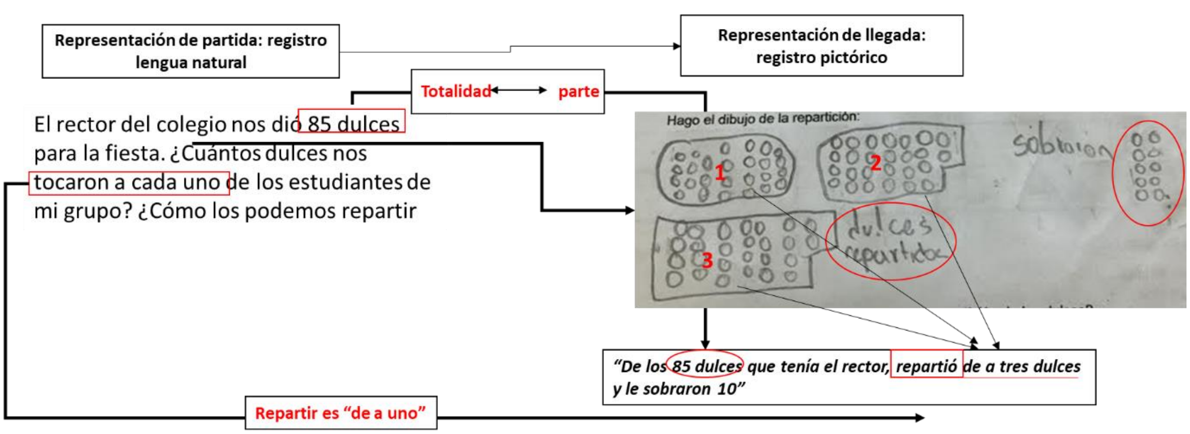
Conversión realizada por la Est.4



De igual manera hay univocidad semántica al reconocer que a las unidades significantes elementales del registro de salida como son la totalidad de los dulces y la repartición, les corresponden las unidades significantes elementales de la descomposición de la totalidad de los dulces en 4 grupos que se presentan en el registro numérico.

Figura 48.

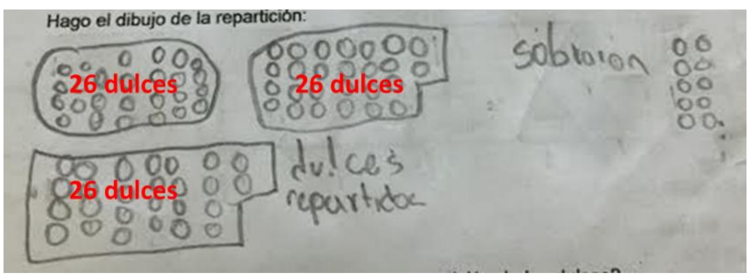
Contenido de la representación (Act.3 – Est.5)



La partición está determinada por la repartición "*de a uno*", que en este caso se hace mediante formación de grupos con el fin de garantizar la condición de equitativa. El grupo es el resultado de la repartición.

El *estudiante 5* reconoce las unidades constitutivas del registro, haciendo una inferencia para determinar la relación entre dos cantidades; el número de dulces que regala el rector del colegio con el número de estudiantes del grupo ya que esta información no aparece explícita en la situación dada por la investigadora[8].

Frente a lo que se solicita en esta actividad, selecciona el registro pictórico y algunos recursos para producir la representación semiótica como las bolitas y cerramientos que le permite agrupar las cantidades repartidas. De acuerdo con la representación producida se forman tres grupos los cuales son "encerrados" haciendo referencia a la repartición tal como aparece en la representación y por fuera quedan los dulces que "sobraron", tal como se observa en la imagen:



Cuando se les pregunta a los estudiantes sobre cómo se pueden repartir los dulces, el *estudiante 5*, responde: *"A cada estudiante le toco de a tres dulces y los reparten de a 3 dulces".*

En el tratamiento se reconoce que forma tres grupos de a 26 dulces cada uno, con una distribución semejante en los grupos conformados que se reconocen por el "cerramiento" que hace

[8] Es necesario recordar que tal como se indicó en la unidad de trabajo, los estudiantes seleccionados pertenecían a dos grupos de grado quinto, uno de 20 estudiantes y otro de 26 estudiantes. Por lo tanto, en la repartición algunos estudiantes lo hicieron en grupos de a 20 y otros en grupos de a 26.

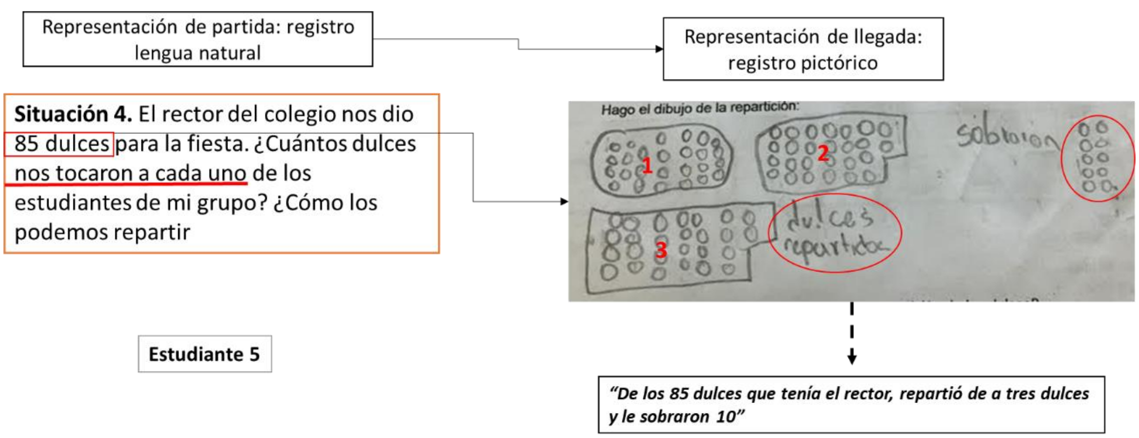
el niño. Al lado de los tres grupos de dulces que formó indica que son los “*dulces repartidos*” y a un lado aparece la palabra “*sobraron*” con 10 bolitas sueltas.

En la actividad de conversión también coincide en los criterios de congruencia, al establecer correspondencia semántica entre las siguientes unidades significantes:

- Los 85 dulces del registro de partida se corresponden con las “85 bolitas” repartidas en tres grupos.
- El número de estudiantes del grupo 5-2 en donde ambos estudiantes consideraron que se refiere a 26 estudiantes.

Figura 25.

Conversión entre el registro en lengua natural y el registro pictórico. Est.5



Al analizar la univocidad semántica terminal, se reconoce que a las unidades significantes simples del registro en lengua natural se le puede asignar una unidad significante del registro de llegada, en este caso el pictórico debido a lo siguiente:

A la pregunta ¿*Cómo lo podemos repartir*?, como una unidad significante simple del registro de partida le corresponde la unidad significante elemental de la formación de los tres grupos. Lo anterior indica que la repartición uno a uno se evidencia a partir de la formación de grupos atendiendo al número de estudiantes (en este caso 26).

La organización de las unidades significantes que se evidencia como tercer criterio de congruencia se presenta a partir de la distribución de los 85 dulces como primera unidad significante tanto en la representación de salida como en la representación de llegada.

Así mismo cuando se pregunta en la representación de partida por ¿*cuántos dulces nos tocaron a cada uno*?, en la unidad significante del registro de llegada, la respuesta a esta pregunta no se hace explícita, sino que se puede inferir a través de los grupos de a 25 dulces que se hace en tres grupos. La tercera representación que corresponde a la explicación que proporciona el estudiante para justificar la organización de las unidades significantes en el registro de llegada permite comprender que a cada niño se le entregarían tres dulces, aspecto que no es visible en la representación pictórica realizada.

En la actividad 6,

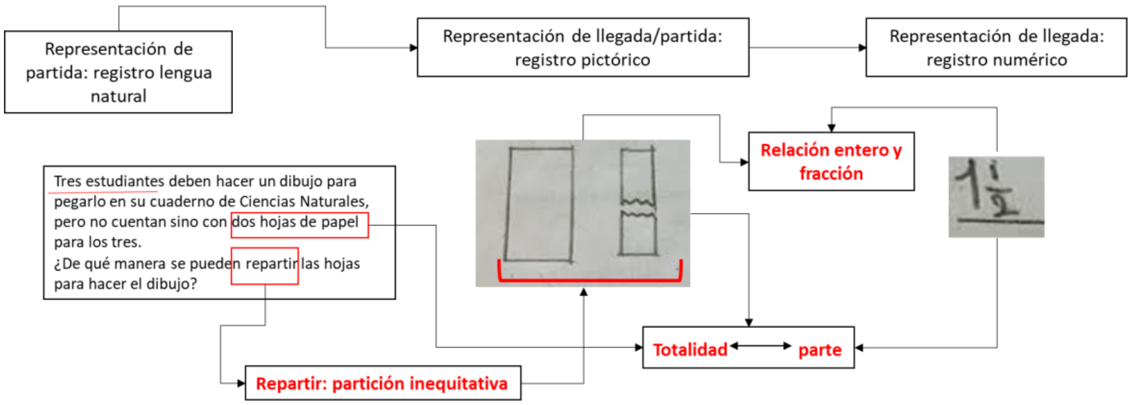
Tres estudiantes deben hacer un dibujo para pegarlo en su cuaderno de Ciencias Naturales, pero no cuentan sino con dos hojas de papel para los tres.

También se pudo identificar que en algunos casos la repartición no es congruente:

Figura 50.

Contenido de la representación (Act.6 – Est.5)

Se conserva la relación totalidad–parte y se asume la partición que no necesariamente es



congruente. También surge la relación entero y fracción.

Cuando en la actividad 6, se propone a los estudiantes repartir dos hojas de papel entre tres estudiantes, el tratamiento que realiza el *estudiante 5* aplica las siguientes reglas de producción:

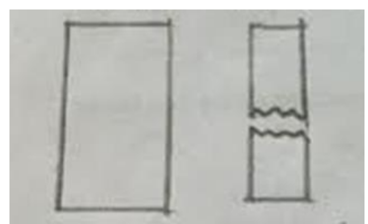


Figura 51. Tratamiento del registro pictórico Est.5

- Una unidad elemental formada por dos rectángulos que simulan las hojas pero no se hacen del mismo tamaño. Empleando recursos como la regla para su producción.
- Una de ellas es "*rasgada*" para formar dos partes que tampoco son del mismo tamaño.
- En la descripción del tratamiento, dice: *"la puedo repartir, dejo una completa y parto una a la mitad"*

Al analizar las transformaciones semióticas de conversión realizadas por el *estudiante 5* no se evidencia el cumplimiento de los criterios de congruencia por las siguientes razones:

- La unidad elemental simple *"tres estudiantes"* presente en el registro en lengua natural no tiene correspondencia con ninguna unidad significante del registro de llegada.

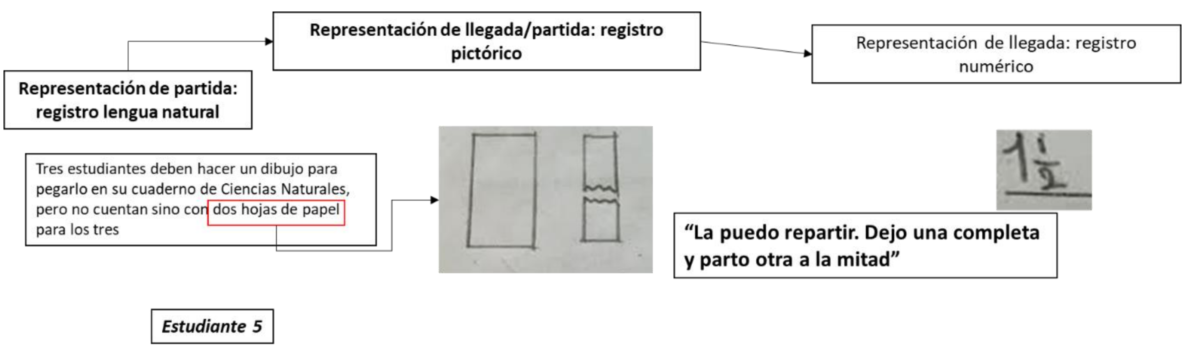
- Las “*dos hojas de papel”* como unidad significante elemental en la representación de partida corresponde con las dos hojas dibujadas en el registro pictórico.
- En la “*repartición”,* la representación producida en el registro de llegada oculta los estudiantes sobre los cuales se hace la repartición, ya que no son visibles en las unidades significantes así como tampoco en el relato que describe el tratamiento.

Cuando se les pregunta sobre cómo se pueden repartir las dos hojas, en el registro de llegada se hacen dos hojas y una de ellas con un corte horizontal o “rasgada” como es el caso del *estudiante 5*.

En la actividad de conversión entre el registro pictórico y el registro numérico no se cumple con los criterios de congruencia, tal como se evidencia en las siguientes imágenes:

Figura 52.

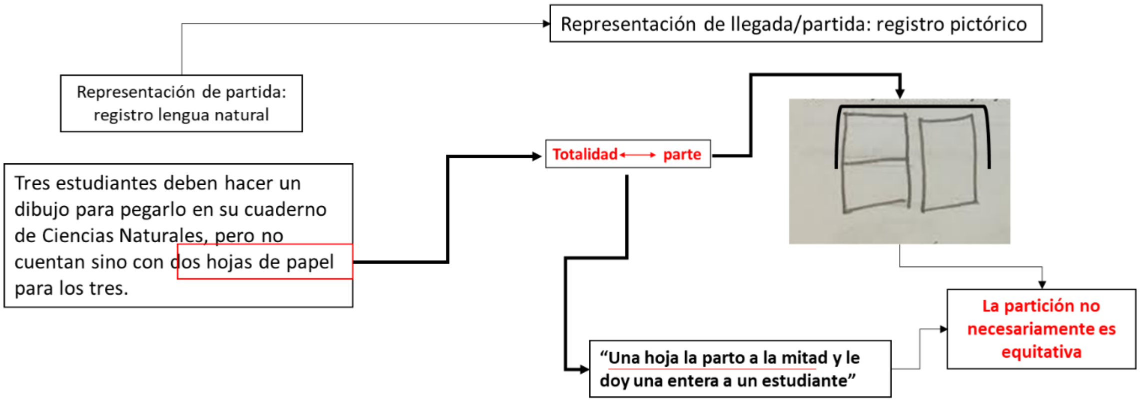
Conversión entre registros Est.5



A la unidad significante *“¿Qué cantidad le correspondió a cada estudiante?”*, responde con la cantidad numérica $1\frac{1}{2}$, no tiene correspondencia semántica con la unidad significante del registro de partida.

Figura 53.

Contenido de la representación (Act.6 – Est.6)



Se reconoce la totalidad-parte entre las dos hojas de papel y los pedazos de hoja. La partición no es equitativa ni en registro pictórico ni en lengua natural.

En la actividad 6, se le solicita a cada estudiante la elaboración de una representación que le permita responder a la pregunta: *¿De qué manera se pueden repartir las hojas para hacer el dibujo?* esta actividad propuesta requiere la interpretación de la pregunta y de manera simultánea seleccione el registro sobre el cual va a producir la representación.

Selecciona el registro gráfico para producir la representación teniendo en cuenta las siguientes unidades constitutivas: dos rectángulos, uno de ellos con un trazo bien sea horizontal o vertical.

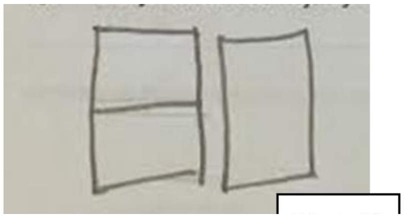


Figura 26. Tratamiento de la representación pictórica Est.6

Utiliza dos rectángulos y uno de ellos con un trazo vertical y traza una línea horizontal para "cortar" una de las hojas.

Al indagar sobre la manera cómo se hace la repartición que lleva a producir la representación, *la estudiante 6* responde: *"una hoja la parto a la mitad y le doy una entera a un estudiante"*

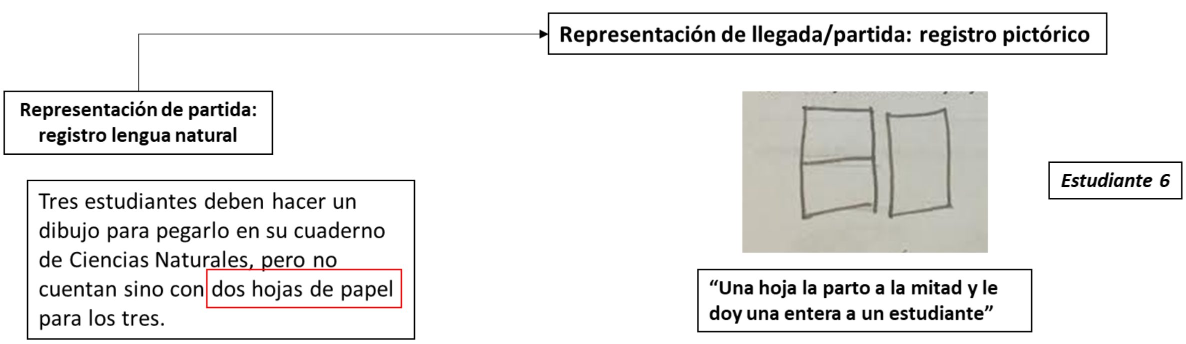
Al analizar las transformaciones semióticas de conversión no se evidencia el cumplimiento de los criterios de congruencia por las siguientes razones:

- La unidad elemental simple *"tres estudiantes"* presente en el registro en lengua natural no tiene correspondencia con ninguna unidad significante del registro de llegada.
- Las "*dos hojas de papel"* como unidad significante elemental en la representación de partida corresponde con las dos hojas dibujadas en el registro pictórico.
- En la "*repartición",* la representación producida en el registro de llegada oculta los estudiantes sobre los cuales se hace la repartición, ya que no son visibles en las unidades significantes así como tampoco en el relato que describe el tratamiento.

En la conversión, *el estudiante 6* sólo hace una actividad de conversión entre el registro en lengua natural y el registro pictórico, tal como se observa en la imagen:

Figura 27.

Conversión entre registros Est.6



En cuanto a la distribución,

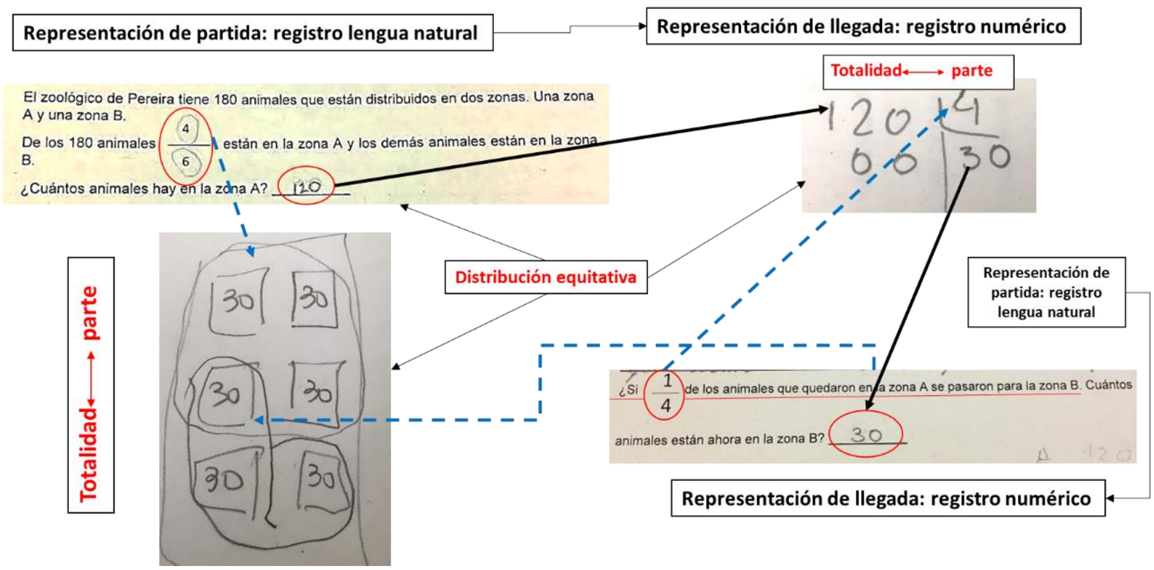
Se observa en la siguiente situación que se les propone a los estudiantes:

__Actividad 5.__ El zoológico de Pereira tiene 180 animales que están distribuidos en dos zonas. Una zona A y una zona B. De los 180 animales $\frac{4}{6}$ *están en la zona A y los demás animales están en la zona B.*

En el estudiante 1, se reconoce el siguiente contenido en su representación:

Figura 56.

Contenido de la representación (Act.5 – Est.1)



La relación totalidad-parte se conserva de manera gráfica y numérica, en donde la parte que corresponde a la cantidad “30” se asigna cuando se hace una distribución equitativa de los animales en el zoológico. La operación de agrandar y achicar también se hace evidente en la distribución de los animales en las zonas y se encuentra determinada por la cantidad de partes (zonas) en las que se propone distribuir la totalidad (número de animales).

Durante la actividad noético-semiótica del estudiante 1, se evidencia lo siguiente:

El *estudiante 1*, selecciona el registro numérico para producir la representación inicial. El tratamiento de la representación numérica parte de la aplicación de las reglas de producción propias del registro en donde de manera implícita realiza una división de la totalidad que en este caso es de 180 (animales) en 6 grupos tal como indica la actividad y luego hace la distribución en los grupos tal como aparece en la imagen.

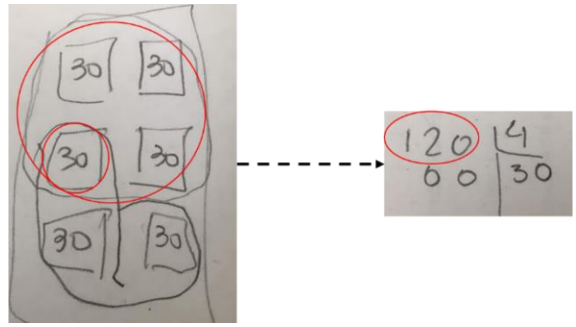


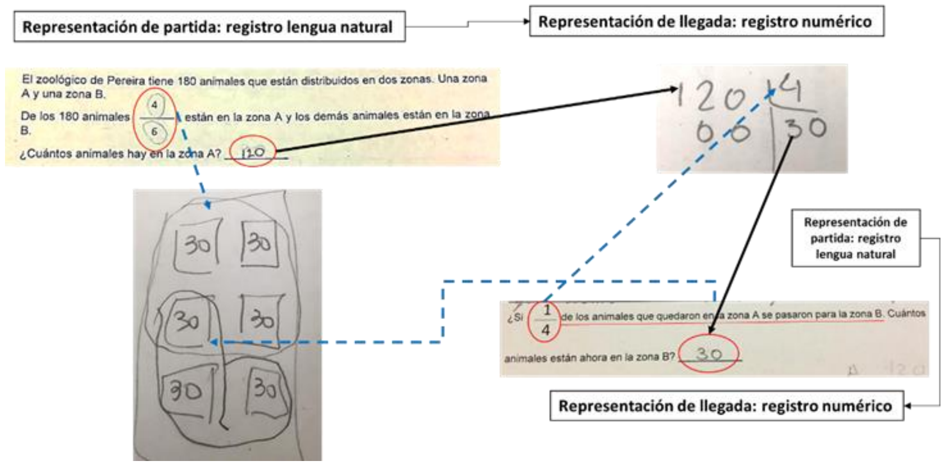
Figura 28. Conversión del registro gráfico al registro numérico

En la actividad de conversión entre la dupla de la representación de partida en lengua natural y la representación de llegada en el registro numérico, hay correspondencia semántica entre las unidades significantes del registro en lengua natural con el registro numérico.

Para dar respuesta a la pregunta: *¿Si* $\frac{1}{4}$ *de los animales que quedaron en la zona A se pasaron para la zona B. ¿Cuántos animales están ahora en la zona B?*

Figura 29.

Conversión del registro gráfico al numérico



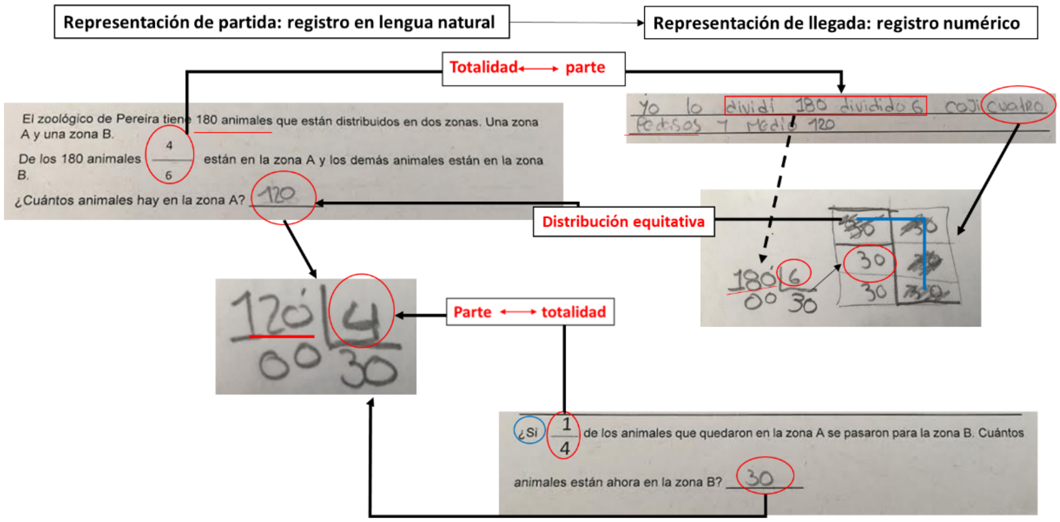
El *estudiante 1* acude a la representación en registro numérico. En esta transformación semiótica de conversión, se reconocen los siguientes criterios de congruencia:

- Se identifica la correspondencia semiótica entre los 180 animales representados en 6 cuadrados con la cantidad 30 en su interior.
- La cantidad 120 como una cantidad a repartir entre 4 el registro numérico que corresponde con la cantidad $\frac{1}{4}$.
- Cuando se realizan la división que surge de la conversión en el registro aritmético, la cantidad que surge como resultado es 30, que posteriormente se toma como la respuesta a la pregunta planteada.

En el contenido de las representaciones derivadas de las transformaciones semióticas, del *estudiante 2*:

Figura 59.

Contenido de la representación (Act.5 – Est.2)



La distribución equitativa es un contenido de la representación que se conserva en todas las representaciones producidas por el estudiante al igual que la relación parte-totalidad y totalidad-parte.

Tal como lo expresa en su relato, primero realiza una operación de división que corresponde con la expansión del registro numérico, continúa haciendo una reformulación al descomponer la totalidad (180) en seis partes de los cuales toma cuatro de ellos y nuevamente recurre a la división.

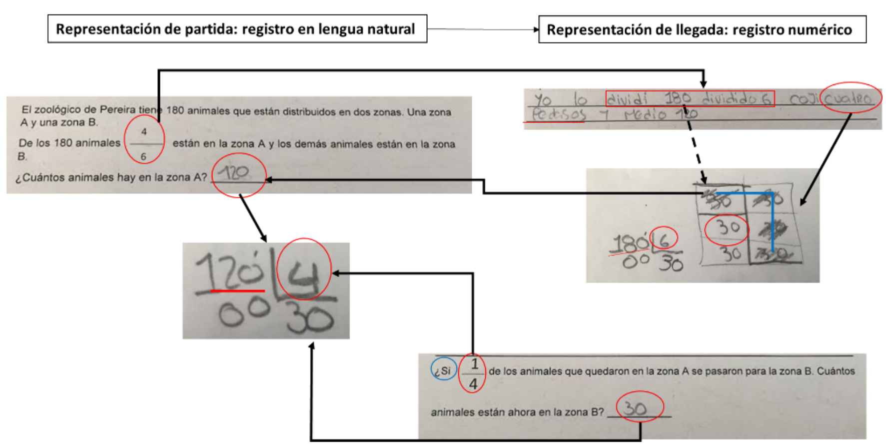


Figura 60. Conversión entre registros

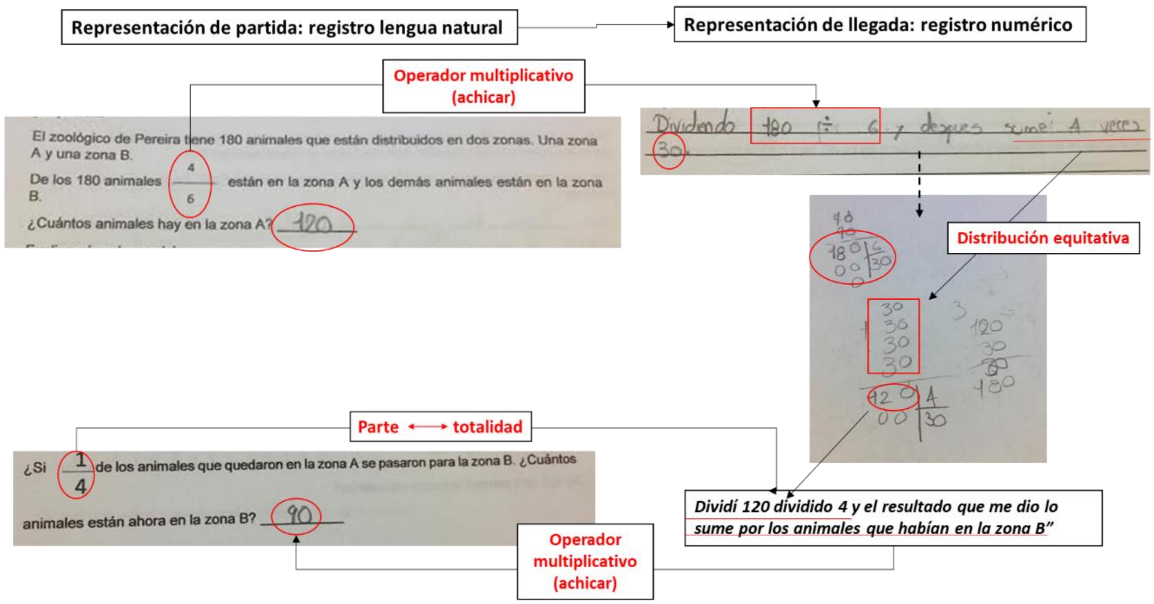
En la dupla de la representación de partida en lengua natural a la representación de llegada en el registro numérico, hay correspondencia semántica entre las siguientes unidades significantes del registro en lengua natural con el registro numérico:

- Los 180 animales que se encuentran en el zoológico corresponden con los 180 distribuidos en 6 grupos de a 30.
- La cantidad $\frac{4}{6}$ se representa “tachando” las cantidades.
- Los demás animales que se encuentra en la zona B del zoológico se representan dejando por fuera del recuadro anterior dos grupos representados por dos cuadrados con la cantidad de 30 en su interior.

Finalmente en el estudiante 6, también se identifica como contenido la distribución equitativa:

Figura 61.

Contenido de la representación (Act.5 – Est.6)

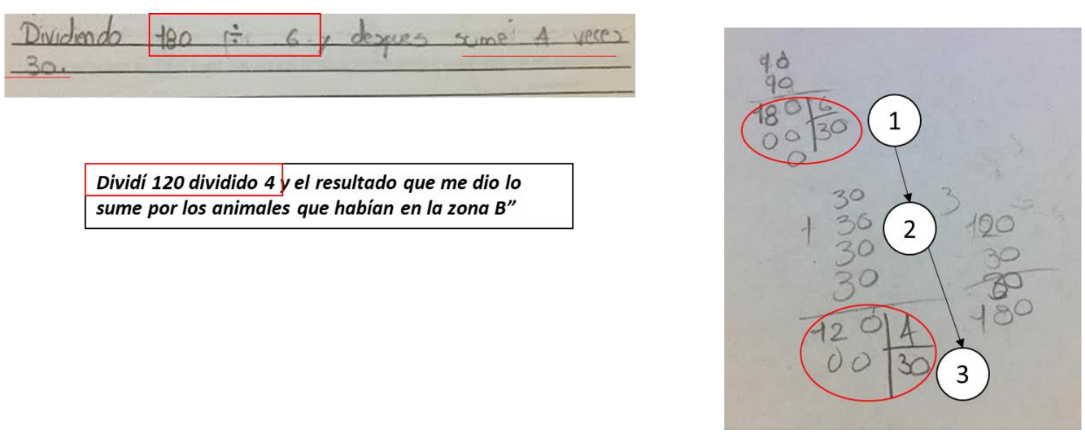


Se conserva en las representaciones el operador multiplicativo, en este caso de achicar. Además se reconoce la distribución como equitativa. Surge nuevamente relación parte – totalidad.

En la actividad 5, acerca de la distribución de los animales en el zoológico, el *estudiante 6*, también aplica en las reglas de producción, expansión informacional propia del registro numérico desplegando operaciones de suma y división.

Figura 62.

Conversión del registro en lengua natural al registro numérico

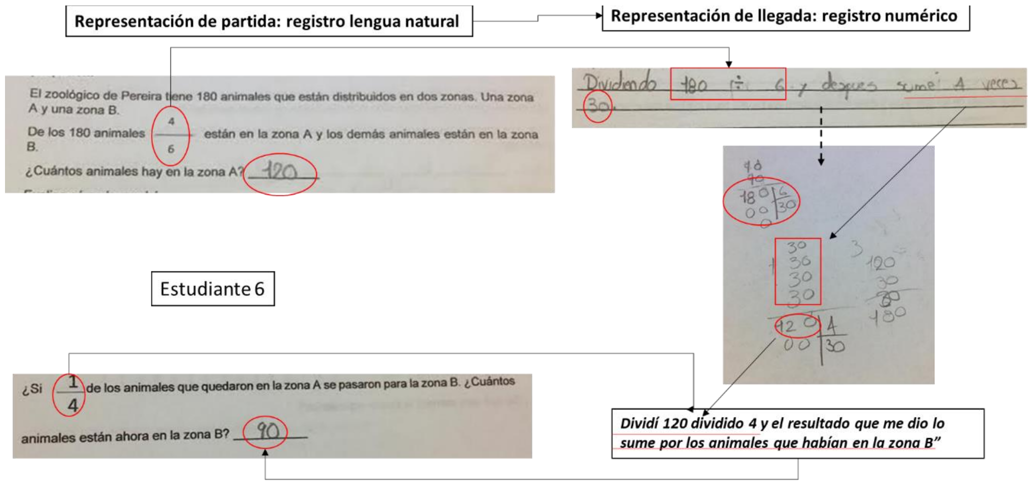


En su relato, da cuenta del procedimiento realizado en el tratamiento de la representacion numérica, cuando dice: “*dividiendo 180 ÷ 6 y después sume 4 veces 30*”.

En la actividad de conversión,

Figura 63.

Conversión entre registros Est.6

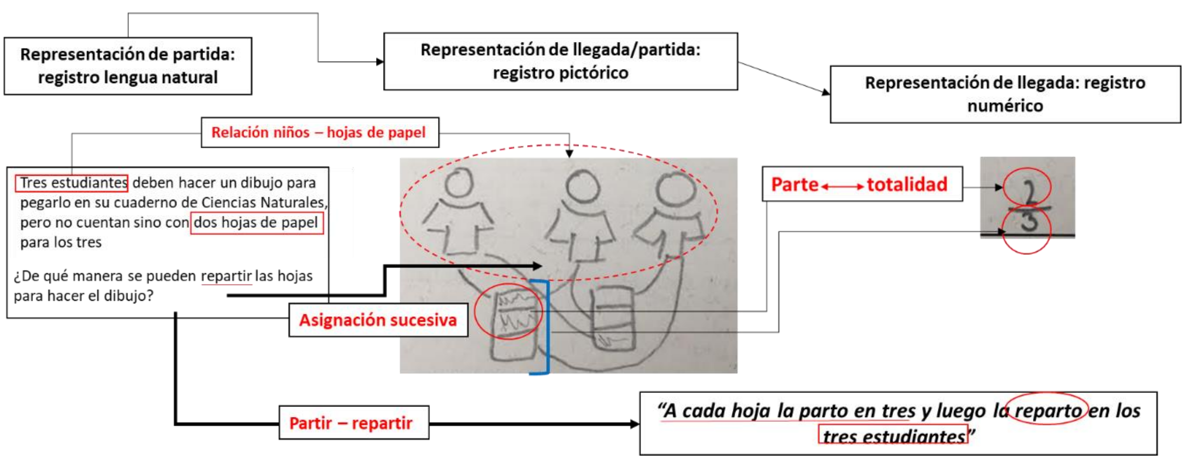


Una segunda actividad de distribución que corresponde a la actividad 6:

En esta actividad, el contenido de las representaciones que despliega el estudiante 1, se presenta en la siguiente figura:

Figura 304.

Contenido de la representación (Act.6 – Est.1)



Se establece relación entre niños y hojas de papel tanto en la representación en lengua natural como en la representación pictórica. En cuanto a la conversión entre la representación pictórica y la representación numérica hay una relación parte-totalidad.

La repartición de las hojas propuesto en la representación en lengua natural, se conserva en la representación pictórica a partir de la asignación sucesiva.

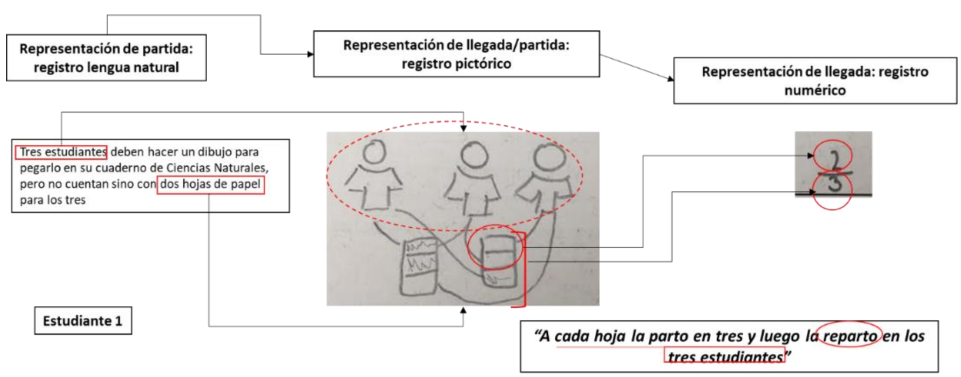
En este sentido, el estudiante selecciona el registro pictórico; las unidades constitutivas del registro que se identifican en las representaciones producidas por el *estudiante 1* son la figura humana, formas rectangulares que simulan las hojas de papel y la partición de las hojas mediante el trazo de líneas horizontales o verticales. Emplea la reformulación y expansión de la información.

Cuando se le pregunta al *estudiante 1* sobre su representación pictórica para obtener mayores datos que nos permita comprender el tratamiento, explica: *"Cada hoja la partí en tres y luego los repartí en los tres estudiantes"*

En cuanto a la actividad de conversión, el estudiante parte de la representación en el registro en lengua natural proporcionado por el docente produce una representación en registro pictórico y finalmente una representación semiótica numérica.

Figura 31.

Conversión entre registros



Tal como se evidencia en la transformación de conversión entre el registro pictórico y el registro numérico hay correspondencia semántica entre las unidades significantes del registro de partida que se identifica con las dos hojas dibujadas por el estudiante, cada una de ellas con particiones de a 3 y la repartición de a dos pedazos de hoja a cada niño, que se evidencia en la fracción producida.

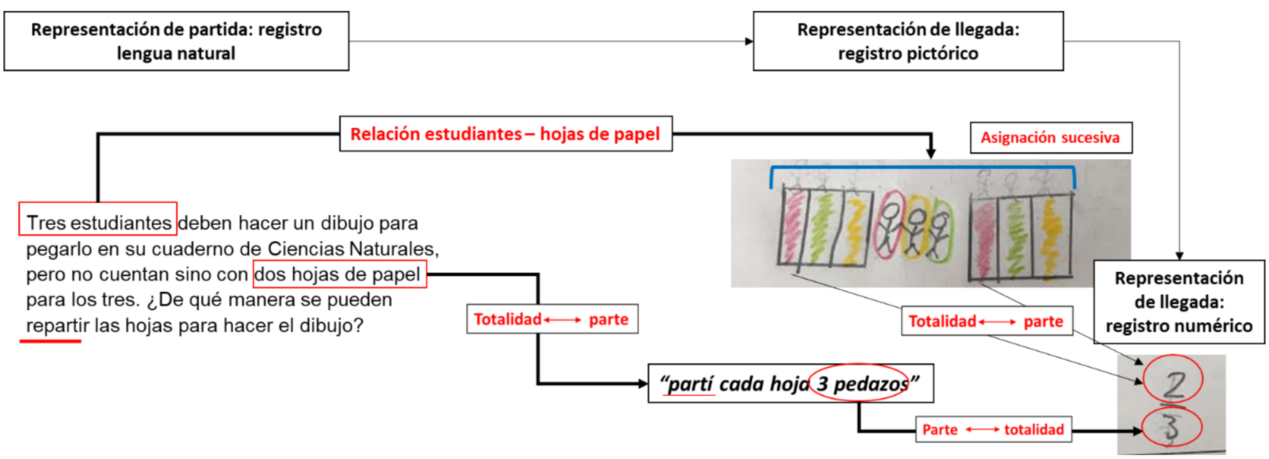
No se logra univocidad semántica debido a que en el registro numérico no se reconoce la unidad elemental del registro pictórico que corresponde con los niños a los cuales se les reparte la cantidad de hoja.

En la conversión del registro pictórico al registro numérico se pierde la relación entre los niños y las hojas de papel y solo se hace evidente la relación entre los trozos de papel y la hoja completa.

También se observa una distribución equitativa en el estudiante 3, de la siguiente manera:

Figura 32.

Contenido de la representación (Act.6 – Est.3)



Se establece la relación: estudiantes–hojas de papel tanto en la representación en lengua natural como en la representación pictórica. En cuanto a la representación numérica, se identifica la relación parte–totalidad.

Al repartir las dos hojas de papel entre los tres estudiantes se requiere la asignación sucesiva "de a uno", de los pedazos de papel que quedan después de la partición de las hojas.

El estudiante 3 selecciona el registro pictórico para producir la representación que les permita hacer la "repartición" de las hojas, haciendo uso de los recursos propios del registro ya que las unidades constitutivas del registro y que se identifican en las representaciones producidas por los estudiantes son: la figura humana, formas rectangulares que simulan las hojas de papel y la partición de las hojas mediante el trazo de líneas horizontales o verticales.

Las "*hojas de papel*" son partidas mediante dos líneas verticales, realiza una reformulación del registro combinando unidades elementales. Utiliza además recursos como el borrado, en donde inicialmente ubica a cada estudiante (muñequito) formado por palitos y bolitas al frente de las porciones que le corresponden de cada hoja pero luego utiliza el color para establecer relación entre la cantidad de hoja y el niño respectivamente. Lo anterior da cuenta de un tratamiento de la representación bastante enriquecido por la amplitud en los detalles.

Figura 33. Tratamiento de la representación pictórica Est.3

Cuando se le indaga por la producción de la representación, dice *"partí cada hoja 3 pedazos".* Según las unidades constitutivas de cada registro y las reglas de producción empleadas para producir cada representación, se reconoce correspondencia semántica y univocidad semántica en las transformaciones semióticas de conversión en las siguientes unidades significantes:

- *“Tres estudiantes”* en el registro en lengua natural que corresponden a los tres niños dibujados en la representación de llegada.
- *“Dos hojas de papel”* en el registro en lengua natural que son representadas por dos rectángulos en el registro pictórico.

Así mismo se conserva la organización de las unidades significantes al reconocer el orden en el que fueron producidas ambas representaciones y en el registro numérico establece la relación entre el número total de particiones que se le hace a cada hoja de papel y las porciones que le tocan a cada estudiante.

En la estructura de los modelos mentales que se lograron reconstruir con las transformaciones semióticas realizadas por los niños y niñas de quinto grado, fue posible diferenciar algunos aspectos que surgen como producto y corresponden a las representaciones semióticas resultantes las cuales dan cuenta de la naturaleza estática del modelo, pero en la expresión e interpretación de las transformaciones semióticas se lograron identificar algunos aspectos de la dinámica del modelo.

Las categorías siguientes permitieron reconocer que la razón es más una condición de la relación entre cantidades o sistemas de cantidades y que los operadores son los tratamientos implícitos que se hacen desde un mismo registro.

6.3 Categoría 3. La razón como aspecto del modelo que determina las operaciones o transformaciones en los sistemas conceptuales de los racionales

Al establecer la razón como una “relación”, se hace necesario en primer lugar establecer algunas diferencias entre relaciones homogéneas y relaciones heterogéneas. En el presente estudio se trabajaron las relaciones llamadas “homogéneas” que se dan entre dos cantidades discretas de la misma especie (ambas numéricas) o dos cantidades continuas de la misma especie (ambas cantidades pertenecientes a la misma magnitud: dos longitudes, dos áreas, dos volúmenes, dos duraciones, etc.).

En segundo lugar, hay que distinguir las relaciones aditivas o diferencias entre dos cantidades y las multiplicativas o razones, que para los estudiantes solo se les ocurren espontáneamente las aditivas entre dos cantidades desiguales y requieren indicaciones para poder pensar en las relaciones multiplicativas de ampliación o reducción entre cantidades desiguales, ya que cuando las cantidades son iguales no se les ocurre ninguna relación aditiva o multiplicativa fuera de la relación de igualdad.

Las relaciones aditivas homogéneas se pueden expresar con los dos tipos de diferencias (por defecto o lo que falta en la primera para llegar a una segunda mayor que la primera, y por exceso o lo que sobra de la primera dada la superposición sobre la segunda menor que la primera) y las relaciones multiplicativas homogéneas se pueden expresar con los dos tipos de razones (la propia o ampliadora de la cantidad menor con respecto a la mayor, y la impropia o reductora de la cantidad mayor a la menor).

En el caso de que ambas cantidades sean iguales, se suele decir que la diferencia es nula o cero, y que la razón es idéntica o unitaria o uno.

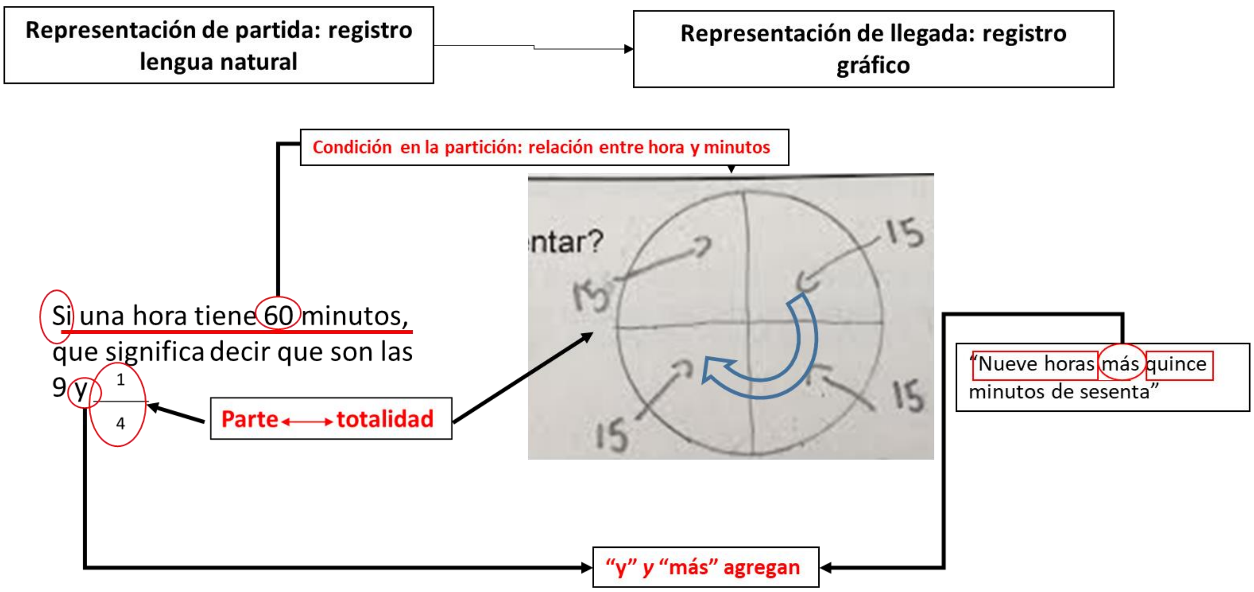
En el sistema medidor y de acuerdo con la siguiente situación hay una relación entre hora y minutos:

Actividad 8. *Si una hora tiene 60 minutos ¿Qué significa decir que son las 9 y* $\frac{1}{4}$ *?*

En esta actividad se identifica en el *estudiante 1*, el siguiente contenido en la representación después de realizar las transformaciones semióticas:

Figura 68.

Contenido de la representación (Act.8 – Est.1)



Se identifica la relación parte-totalidad que está determinada por la magnitud que se mide, en este caso de tiempo. Al hacer la partición se tiene en cuenta la medida como condición de la operación de partir.

La actividad propuesta parte del planteamiento de una situación con una representación en lengua natural en donde se le solicita al estudiante la producción de una representación que le permita responder a la pregunta: *¿Qué significa decir que son las 9 y* $\frac{1}{4}$ *?*

El *estudiante 1*, identifica el registro semiótico en lengua natural, a partir del reconocimiento de las unidades constitutivas de la representación:

- Interpreta la cantidad "9" que se refiere a la hora

- Reconoce que $\frac{1}{4}$ hace parte de una porción de la hora.

Selecciona la representación en lengua natural cuando dice que las 9 y $\frac{1}{4}$, significa decir:

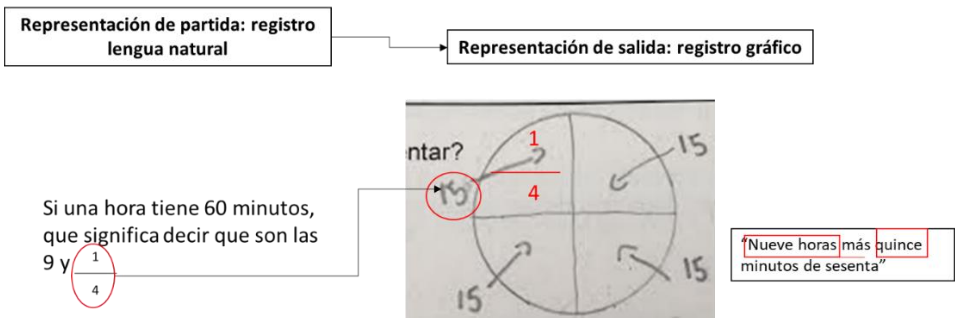
"Nueve horas más quince minutos de sesenta" (Est. 1).

En la representación gráfica se identifican las siguientes unidades constitutivas:

- Una forma circular dividida en cuatro partes iguales
- Al interior de cada una de las 4 partes aparece una flecha que señala cantidad "*15*" y al frente de cada cuadrante aparece el número 15.

Figura 34.

Conversión del registro lengua natural con el registro gráfico Est.1



Continuando con el *estudiante 1*, la actividad de conversión entre la representación de partida: registro en lengua natural y la representación de llegada en registro gráfico, se pueden reconocer los siguientes criterios de congruencia:

- La hora tiene 60 minutos del registro de partida y la forma circular dividida en cuatro partes en donde las cantidades asignadas suman 60.
- La cantidad $\frac{1}{4}$ y la ubicación en la forma circular dividida en cuatro partes.
- La cantidad $\frac{1}{4}$ y el "*15*" señalando con una flecha cada cuadrante.

Hay correspondencia semántica entre la expresión “quince minutos de sesenta” del registro de llegada y la distribución en grupos de a 15 que se presentan en la forma circular dividida en cuatro partes.

La univocidad semántica entre el registro en lengua natural y el registro pictórico no se logra pues la hora completa que corresponde a las “9”, se pierde en la representación pictórica.

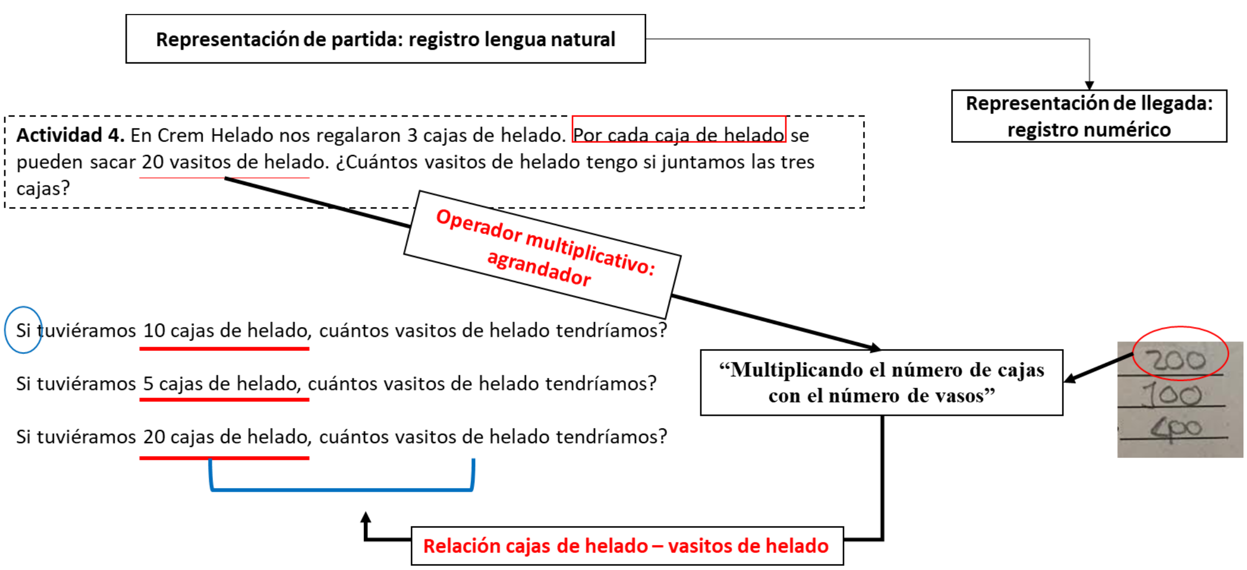
En la actividad 4, el *estudiante 2* también hace evidente la razón cuando establece la relación entre dos cantidades:

Actividad 4. *En Crem Helado nos regalaron 3 cajas de helado. Por cada caja de helado se pueden sacar 20 vasitos de helado. ¿Cuántos vasitos de helado tengo si juntamos las tres cajas?*

Al respecto en el estudiante 2, se identifican el contenido de la representación:

Figura 70.

Contenido de la representación (Act.4 – Est.2)



La cantidad "*20 vasitos de helado*" es una unidad significante que hace parte de la relación entre las cajas de helado y los vasitos de helado, que posteriormente permite la acción del operador multiplicativo agrandador de acuerdo con la transformación semiótica que se reconoce en las representaciones del estudiante.

Pasando a la actividad 4 y frente a la pregunta: *¿Cuántos vasitos de helado tengo si juntamos las tres cajas?*, todos los estudiantes coinciden al responder que tendríamos 20 vasitos de helado, lo que da cuenta de una actividad de semiosis interpretativa que permite comprobar que reconocen el registro y sus reglas constitutivas.

Cuando se pregunta por el número de vasitos de helado que se tendrían si tiene 10, 20 y 5 cajas, el *estudiante 2* selecciona el registro numérico y produce la representación en la que se identifican unidades elementales de orden superior cuando de manera implícita se reconocen las operaciones realizadas. Además, establece una relación entre las dos variables sobre las cuales se presenta la situación: vasos y cajas cuando responde acerca del tratamiento con la respuesta: *"Multiplicando el número de cajas con el número de vasos" (Est.2)*.

En la actividad de conversión se cumplen los criterios de congruencia: correspondencia semántica, univocidad semántica terminal y organización de las unidades significantes a partir de la relación que establece entre número de cajas y número de vasos.

Figura 71.

Conversión entre registros

Representación de partida: registro lengua natural

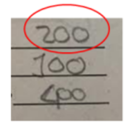
Representación de llegada: registro numérico

Si tuviéramos 10 cajas de helado, cuántos vasitos de helado tendríamos?

Si tuviéramos 5 cajas de helado, cuántos vasitos de helado tendríamos?

Si tuviéramos 20 cajas de helado, cuántos vasitos de helado tendríamos?

"Multiplicando el número de cajas con el número de vasos"



También se evidencia la razón como pareja ordenada, en la siguiente actividad:

Figura 72.

Conversión del registro lengua natural al registro tabular

Al preguntarles a los estudiantes de 5-2 ¿Cuál de los siguientes libros quisieran leer?
- ✓ Zoro
- ✓ La Isla del Tesoro
- ✓ Harry Potter
- ✓ Cuentos de los Hermanos Grimm

Al preguntarle a cada estudiante, la profesora hizo la siguiente tabla con las respuestas:

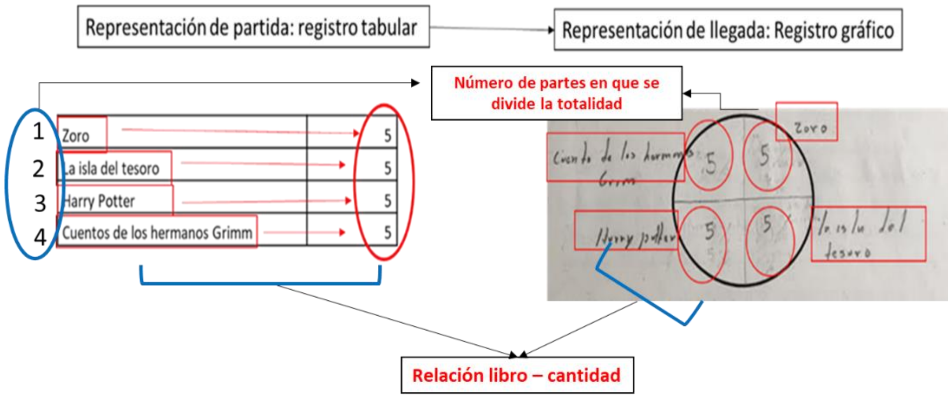
Zoro	5
La isla del tesoro	5
Harry Potter	5
Cuentos de los hermanos Grimm	5

Actividad 1.3. Elaboro la gráfica con los datos de la tabla

Se reconoce la relación que establecen entre libro y cantidad:

Figura 73.

Contenido de la representación (Act.1 – Est.1)



Se evidencia una relación entre partes y la totalidad que se mantiene a pesar de la conversión desde el registro tabular al registro gráfico (circular) lo que indica en esta actividad, la relación libro-cantidad como pareja ordenada.

En la primera instrucción el estudiante debe realizar la interpretación de la representación tabular y gráfica.

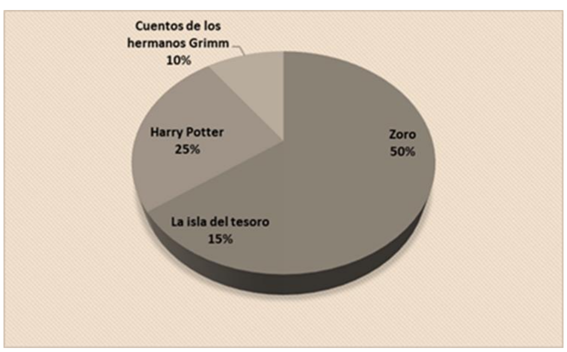


Figura 74. Representación tabular

Frente a la representación tabular el *estudiante 1* responde: "*Entendí que cada uno de los libros tienen diferentes números y unos tienen más que otros*…"

En su respuesta, la interpretación de la representación tabular permite reconocer que establece una relación entre los libros y las cantidades a partir de la lectura horizontal de la información que proporciona la tabla en la correspondencia entre libros y cantidades sin hacer referencia a la preferencia, tal como se refiere en la pregunta acerca de *¿Cuál de los siguientes libros quisieran leer?*

En la actividad 1.2 que corresponda a una actividad de semiosis interpretativa, el estudiante realiza la interpretación de la gráfica que se les presenta en la situación, identifica en el pastel que hay una distribución de los libros y afirma que, "*Entendí que hay un libro que quieren leer más que los otros*", porque logra identificar que hay un libro que ocupa más espacio de la gráfica circular que los demás, haciendo referencia a la frecuencia con la que los estudiantes del grado quinto seleccionaron el libro.

En la actividad 1.3, se activa la semiosis expresiva cuando los estudiantes deben construir una representación gráfica a partir de los datos de la tabla.

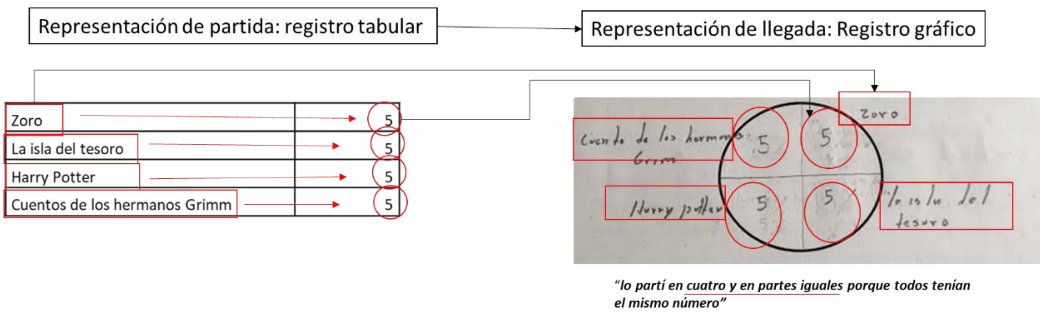
Al presentar la tabla, se le propone al estudiante la elaboración de la gráfica, lo que indica que se le presenta la representación tabular pero la producción de la representación gráfica la realiza el estudiante y cuando se le pregunta por el tratamiento de la representación, dice: *"Lo partí en cuatro y en partes iguales porque todos tenían el mismo número"*, lo que indica que no había ninguna preferencia por un libro en especial.

En el tratamiento de la representación tiene en cuenta recursos como el trazo de líneas horizontales y verticales, le asigna la cantidad (5) y por fuera del círculo pone los nombres de los libros haciéndolos corresponder con la cantidad y la región que ocupa en la gráfica circular.

En la actividad de conversión entre la representación tabular y la representación gráfica se evidencia correspondencia entre las unidades significantes de ambas representaciones, como son: los nombres de los libros, la partición de la forma circular en cuatro partes que atiende al número de libros con los que se hizo la selección por parte de los niños.

Figura 75.

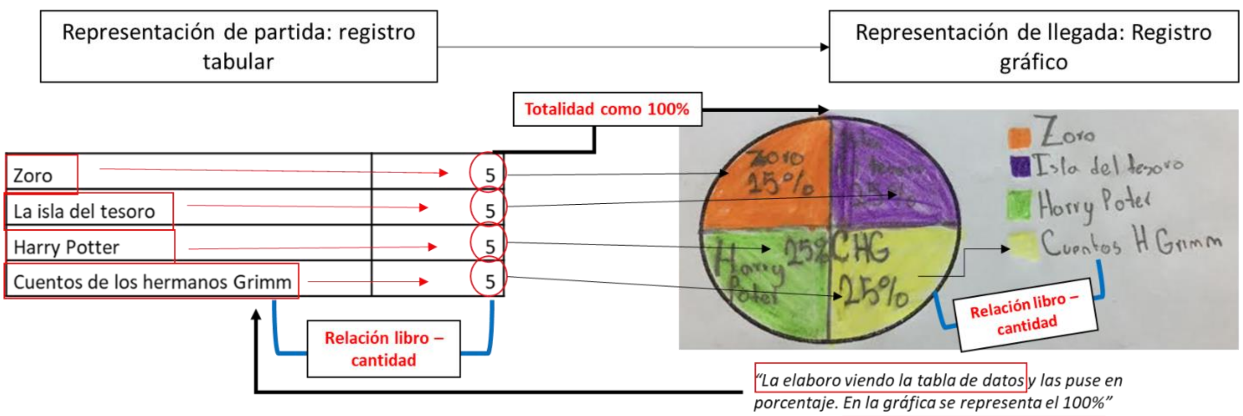
Conversión entre el registro tabular y el registro gráfico



En esta actividad de conversión, el estudiante interpreta la representación tabular estableciendo relación entre filas y columnas de la tabla, que corresponde con la relación entre los libros y cantidades presente en la representación gráfica circular. Por lo tanto, hay univocidad semántica entre la representación de partida y de llegada.

Figura 76.

Contenido de la representación (Act.1 – Est.5)



En las representaciones producidas en diferentes registros, se reconoce la relación que establece entre libro y cantidad en donde a partir del reconocimiento de las unidades constitutivas de ambos registros se establece diferencia entre la totalidad en la tabla y la totalidad en la gráfica.

En la actividad 1 acerca de los libros que los niños prefieren leer, en el caso del *estudiante 5*, recrea su interpretación dando una explicación amplia de la situación que produce la representación tabular e interpreta la tabla al reconocer el número de estudiantes que votaron por el libro Zoro: *"Que la profesora hizo una encuesta a cada estudiante para leer un libro y los libros eran: el Zoro, la isla del tesoro, Harry Potter y cuentos de los hermanos Grimm y los estudiantes votaron más por el zoro"*

El estudiante reconoce en su interpretación de la gráfica, que la totalidad es el 100%, al describir la representación gráfica circular, cuando dice: *"Porque la gráfica representa el 100% y se entiende mejor los datos de la tabla" (Est.5).*

Cuando se le solicita la producción de una representación gráfica, además de combinar las unidades elementales dando cuenta de una unidad de nivel superior, emplea recursos como:

- El color para identificar cada porción que resultó de la partición en cuatro partes iguales.
- Combina diferentes unidades elementales lo que permite una construcción coherente y de nivel superior mediante el empleo de convenciones.

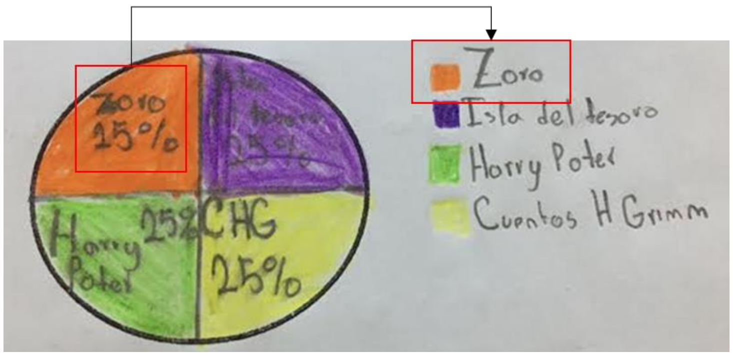


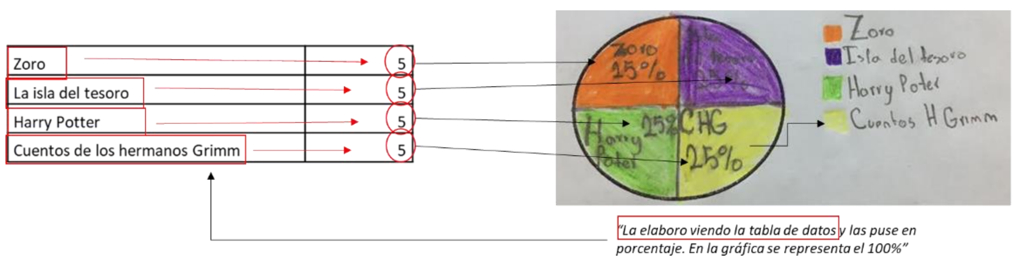
Figura 77. Tratamiento del registro gráfico

Al indagar con el estudiante el tratamiento, relata: *"La elaboré viendo la tabla de datos y las puse en porcentaje. En la gráfica se representa el 100%"*

En el *estudiante 5*, las representaciones producidas en la actividad de conversión permiten identificar los criterios de congruencia:

Figura 35.

Conversión del registro tabular al registro gráfico



La organización de las unidades significante se comprende desde que el estudiante dice que elabora la representación gráfica circular, "*viendo*" la tabla de datos, lo que quiere decir que, al comparar las unidades significantes del registro de partida con las unidades se identifica univocidad semántica, al hacer de manera consciente la conversión de acuerdo con las unidades constitutivas y reglas propias del registro gráfico circular en concordancia con las unidades constitutivas y reglas de registro tabular, por lo tanto, se evidencia correspondencia semántica.

En cuanto a la univocidad semántica,

- Los libros y su relación con la cantidad numérica tienen correspondencia con los libros y la cantidad porcentual que aparece como unidad elemental en el registro de llegada.
- La distribución equitativa de los libros y la preferencia de los estudiantes presente en el registro de partida corresponde con la partición equitativa de la gráfica.

CAPÍTULO VII. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Teniendo en cuenta el objetivo del estudio, que fue comprender los aspectos de los modelos mentales sobre los números racionales que asocian los niños de quinto grado a sus representaciones y transformaciones, es necesario precisar que dichos modelos se manifestaron de manera parcial en las representaciones semióticas expresivas producidas por ellos a través de algunos registros semióticos que reconocen y emplean, con el fin de comunicar algunos rasgos del modelo mental que activaron para resolver problemas y responder a las preguntas propuestas por la docente y la investigadora. Además, aun sin pretenderlo, los niños dan algunas pistas de los procesos de interpretación de algunas de las representaciones semióticas externas y públicas que se les proponen; también dan pistas sobre los procesos de cálculo mental apoyados en tratamientos y conversiones de esas representaciones semióticas mentales, privadas e internas, para obtener una respuesta verbalizada de manera oral o escrita a las tareas y preguntas derivadas de la actividad matemática propuesta.

Para ello, se acudió a los datos recolectados a través del texto escrito, el artefacto dibujado, la observación directa, los vídeos realizados durante la actividad noético-semiótica de cada uno de los 6 estudiantes que hicieron parte de la unidad de trabajo en el desarrollo de 8 problemas escolares propuestos en la clase de matemáticas de manera intencional.

Posterior al análisis de los datos como producto de la actividad noético-semiótica llevada a cabo por los estudiantes, se inició la actividad noético-semiótica de la investigadora que partió del análisis de la producción e interpretación de representaciones y transformaciones semióticas que realizaron los niños de quinto grado.

Con la obtención de los resultados (presentados de manera descriptiva en el capítulo anterior), se realizó la interpretación y clasificación del acervo de datos, teniendo como criterio de análisis, las representaciones y transformaciones semióticas de los niños, de tal manera que con la identificación del contenido o invariante de la representación posterior a la actividad de conversión, se permitiera emerger los aspectos de los modelos conceptuales de los racionales.

En primera instancia se reconocieron las categorías iniciales del estudio como punto de referencia para reconstruir los aspectos del modelo mental de los niños de quinto grado que corresponden a las categorías finales del estudio, los cuales se hacen visibles con los recursos que la semiótica ofrece para comprender el aprendizaje de la matemática, en este caso de los números racionales.

En este capítulo se hace el análisis de la selección de algunos episodios que llamamos "viñetas"[9] y que fueron descritos en el capítulo anterior. La selección de las viñetas se hizo teniendo en cuenta la información más condensada y representativa de la actividad noético-semiótica de los sujetos, acompañadas de la discusión respectiva.

De acuerdo con lo anterior, los puntos de discusión no son directamente los modelos y teorías construidas por matemáticos, autores de libros de texto, maestros, aunque indirectamente sí lo son, porque esas construcciones anteriores son las únicas orientaciones previas que tenemos para reconstruir los modelos mentales que utilizaron los niños de quinto grado en la actividad presentada en cada viñeta, pese a ello, el interés estuvo centrado en la actividad noético-semiótica de los niños.

Para lograrlo se intentó hacer esa reconstrucción por medio de las representaciones y transformaciones semióticas que emplearon durante la actividad matemática, que posiblemente les permitieron acceder a los objetos matemáticos. Lo que facilitó la primera ronda de análisis fue el conjunto de las actuaciones expresivas que correspondía a las categorías previas; pero lo más relevante de la segunda ronda de análisis es la detección de otras categorías que emergieron en la actividad matemática, que, en clave de la perspectiva semiótica de Duval, se asocian a los modelos y teorías de los niños y niñas de quinto grado en los procesos de aprendizaje matemático, en este caso de los sistemas de números racionales.

9 Para este estudio la idea de "viñeta" se asume desde Maher y Martino (1996), como una colección de diferentes tipos de datos centrados en un episodio o una serie de episodios que son de interés y permiten dar soporte a las categorías finales.

A continuación, se presentan las viñetas anunciadas, las cuales se clasifican según las categorías que se ubican dentro de los sistemas conceptuales de los racionales, con sus subcategorías que corresponden a algunos de los aspectos (componentes, relaciones y operaciones) que hemos podido reconstruir del posible modelo mental activado por cada estudiante. Dichos aspectos se hacen "visibles" en las representaciones y transformaciones semióticas producidas e interpretadas por los niños y niñas en cada una de las viñetas seleccionadas.

7.1 Categoría 1. El Operador o transformador presente en todos los sistemas conceptuales de los racionales

Operador Transformador en los sistemas conceptuales de los racionales

- Operador en el sistema partidor
- Operador multiplicativo

Al interpretar los modelos y teorías de los matemáticos, tal como se presentaron en el marco teórico, el *operador* ha sido considerado como uno de los constructos principales por Kieren (1983); como operador transformador por Nesher (1985) y, como operador multiplicativo por Behr, Post y Silver (1983).

Vergnaud (1983); Ohlsson (1988) y también Freudenthal (1983), le otorgan mayor importancia cuando afirman que el operador está presente en la construcción de todos los sistemas numéricos, no solo en los sistemas de números racionales.

Con el fin de refinar la categoría de operador, se acude al modelo del archipiélago fraccionario expuesto por Vasco (1994), en donde se utiliza la metáfora de que los operadores activos (achicadores y agrandadores) son *animalitos* que viven en la isla de los operadores, la cual representa la isla principal del archipiélago, desde la cual se pueden construir con naturalidad puentes hacia la comprensión de las otras islas, las de los partidores, de los medidores y de las razones.

Los puentes entre los operadores y su cercanía con los partidores se hacen evidentes, tanto en la *partición física concreta*, cuando el operador indica la división de la unidad en partes iguales sin tener en cuenta a qué corresponde la igualdad ("¿iguales de qué?"), como en la *partición geométrica intuitiva*, en donde la unidad es relativa a la magnitud que se quiere medir, prestando atención al sistema de medida, lo que facilita el acercamiento a la *partición matemática abstracta* que lleva a la comprensión de los operadores como medidores al reconocer cuándo operan sobre cantidades de alguna magnitud específica, generalmente la longitud o el área; finalmente, de manera indirecta, los operadores ayudan a comprender mejor las razones, entendiendo la razón como relación estática entre dos números o dos cantidades que están en una situación de proporcionalidad directa o inversa, pues esa razón se da precisamente porque las dos cantidades relacionadas se pueden obtener una de la otra por medio de uno de los dos operadores de una pareja de inversos achicador/agrandador.

Al realizar el análisis de los datos, se reconoce que en las metáforas del archipiélago no se contaba con la diferenciación entre "*partición física concreta*", "*partición geométrica intuitiva*" y "*partición matemática abstracta*"[10], inicialmente planteada por Obando (2003) como partición

10 Esta distinción es una contribución de la Dra. Martha Isabel Fandiño Pinilla, como evaluadora internacional de esta tesis.

física, geométrica y matemática, y que no se había señalado la partición geométrica como puente que facilita el paso entre la partición física y la partición matemática. Tampoco se había tenido en cuenta que los “monstruos” operadores (achicadores y agrandadores) podrían transitar a cualquier isla y “comerse” no solamente a otros animalitos que vivían allá, sino también a otros monstruos u operadores, bien sea medidores o partidores, y que también podrían actuar sobre las relaciones entre elementos o sobre el resultado que hubiera arrojado otro operador, función que lleva a la composición de operadores por la izquierda o por la derecha, y que corresponde precisamente a la llamada “multiplicación de fraccionarios”.

Esta operación binaria se comprende mucho mejor con el modelo mental de la composición de monstruos u operadores agrandadores y achicadores cuando actúan uno después de otro que con el de la multiplicación usual entre números naturales distintos de cero, la cual no puede achicar a ninguno de los dos factores.

Una vez que se refinan las metáforas del archipiélago fraccionario con las distinciones anteriores, ellas nos facilitan reconocer que los que antes se tomaban como operadores de la dinámica de un sistema de cantidades de una misma magnitud se vuelven ahora los componentes o elementos de un sistema de operadores que a su vez tiene la operación de composición en la dinámica de ese sistema de orden superior.

Esa era precisamente la descripción de la columna de los sistemas analíticos o algebraico-analíticos en el nuevo currículo del Ministerio de Educación Nacional en el marco teórico de 1984 y en los lineamientos generales de 2002: los sistemas algebraico-analíticos son nuevos sistemas de orden superior en los que se combinan relatores entre sí para producir nuevas relaciones entre parejas de elementos del nivel inmediatamente superior, o se combinan operadores que actúan sobre elementos del nivel inmediatamente inferior para producir nuevos operadores.

Por lo tanto, tal como lo afirma Vasco (1994), los símbolos de operadores que se escriben en papeles o tableros y suelen interpretarse como representantes de operaciones o transformaciones mentales de elementos de algún sistema matemático más o menos abstracto, también pueden referirse a construcciones mentales muy concretas para los estudiantes, las cuales se podrían describir como ciertos "monstruos imaginarios" que achican o agrandan a las víctimas que se les acerquen. Estos monstruos conforman la dinámica del sistema de cantidades que ellos se pueden comer y transformar, las cuales serían los elementos o componentes del sustrato del sistema.

Aunque no se pueda representar el proceso mismo de transformar (agrandar o achicar) un componente dado, al medir el "tamaño" del componente antes y después de que se lo coma el monstruo, es posible identificar si la operación representada por el símbolo que identifica al monstruo tiene el efecto de achicar o agrandar el tamaño del componente; por ejemplo, agrandarlo al doble o achicarlo a la cuarta parte. Así se puede estimar internamente con la imaginación, el efecto de la operación agrandadora o achicadora sobre el tamaño inicial, o el efecto de activar uno de los monstruos después de que el otro haya hecho su trabajo, luego se pueden precisar esos efectos y cambios con símbolos y numerales de un registro semiótico de representación pública de esas cantidades y de sus monstruos u operadores.

Se pueden pues utilizar números con rótulo para el tamaño inicial y el tamaño final, calculando mentalmente o con símbolos escritos en un papel con numerales, símbolos de operación y el signo de igualdad. Pero esas manipulaciones simbólicas ya no serán puramente mecánicas, sino que tendrán un sentido y un apoyo imaginativo para que el estudiante pueda interpretarlas en su modelo mental de los monstruos que comen cantidades.

Esos cambios gráficos de los numerales y otros símbolos de un registro semiótico permiten al estudiante expresar públicamente una actuación mental de su dinámica mental privada. Desde la teoría de Duval, esas transformaciones semióticas de las representaciones escritas coinciden con lo que él llama “un tratamiento” de las representaciones semióticas. El cambio de metáforas, como el paso de las operaciones numéricas a las transformaciones gráficas sobre representaciones pictóricas de otro registro semiótico, las cuales requieren una traducción explícita de un registro a otro, coincide con lo que Duval llama “una conversión”.

Ambos tipos de transformación, los tratamientos y las conversiones, permiten a quienes realizamos el análisis, extraer de los datos algunas pistas para reconstruir los aspectos de los modelos mentales activados por el estudiante que actúa como agente noético-semiótico.

Con las distinciones propuestas por Obando (2003) en cuanto a los tipos de particiones y con el reconocimiento de una variedad de monstruos partidores que existen en el archipiélago (Vasco, 1994), podemos afirmar que existen al menos los siguientes tipos de operador: operador partidor (físico concreto, geométrico intuitivo y matemático abstracto), operador multiplicativo y operador medidor.

Esta tipología depende de la acción que el operador ejerce sobre una cantidad o magnitud u otro componente o elemento del sustrato del modelo, o sobre la relación entre componentes o sobre un resultado previamente obtenido. Por lo tanto, existen *operadores partidores* que transforman una totalidad en un determinado número de partes que pueden ser “partidas” de manera subjetiva, atendiendo a la forma de la unidad o totalidad a partir o con respecto a una magnitud; pero también podemos hablar de *operadores multiplicativos* cuando agrandan o achican una cantidad o sistema de cantidades de acuerdo con la relación que se establece entre ellas y se logra reconocer el *operador medidor*, en cuanto transforma una totalidad atendiendo a una magnitud.

Lo anterior se hace evidente partir de las viñetas agrupadas según las subcategorías que atienden a los tipos de operador:

7.1.1 *Subcategoría 1: El Operador en el sistema partidor*

En el sistema partidor, el operador como partidor físico se hace explícito en el tratamiento de las representaciones que producen los estudiantes en acciones como partir, rasgar, romper y separar:

Viñeta 1:

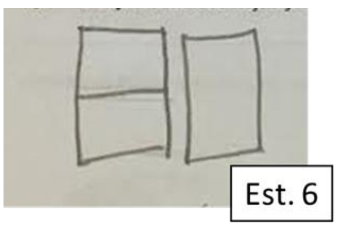


Figura 79. Tratamiento de la representación gráfica

En la actividad 6, se le solicita a cada estudiante la elaboración de una representación que le permita responder a la pregunta:

¿De qué manera se pueden repartir dos hojas entre 3 estudiantes? Esta actividad requiere en primer lugar, la interpretación de la pregunta y casi de manera simultánea, la selección del registro sobre el cual va a producir la representación que da cuenta de la respuesta.

El estudiante 6 selecciona el registro gráfico teniendo en cuenta las siguientes unidades constitutivas: dos rectángulos, cuya pretensión es simular las hojas de papel a las que se les asigna la misma magnitud de área, lo que garantiza que al realizar un “corte” horizontal a una de ellas, se pueden obtener dos hojas de igual dimensión de área acercándose a la partición geométrica.

El *operador partidor físico* se representa mediante a la acción de “cortar” con una línea horizontal una de las hojas, transformando el rectángulo que representa una hoja, en dos rectángulos, en tanto el *operador partidor geométrico,* permite reconocer que al trazar una línea horizontal en un rectángulo se pueden obtener dos rectángulos con la misma área.

Al preguntarle sobre la respuesta a la pregunta inicial, el *estudiante 6* realiza una actividad de conversión del registro gráfico al registro escrito y produce la siguiente representación:

"una hoja la parto a la mitad y le doy una entera a un estudiante".

Figura 80. Tratamiento de la representación de lengua natural

En el registro escrito, se vuelve a la partición física al asumir que una hoja fue "partida", pero en el producto que se obtiene que es la mitad se reconoce que una sola partición puede llevar a dos mitades, lo que se acerca a la partición geométrica en donde se asume que las partes resultantes corresponden a la cuantificación de dos cantidades homogéneas.

En esta situación, el operador es el aspecto dinámico del modelo del sistema partidor que actúa sobre una cantidad que corresponde a una hoja, para convertirla en dos mitades, en donde, al hablar de las dos mitades se hace alusión al partidor físico y no al partidor matemático, el cual supone la división de la unidad en partes equitativas o equivalentes, atendiendo a una misma dimensión, que para estos casos suele ser la longitud de un borde de la página o el área de la misma.

En este caso, el operador partidor físico se presenta en el niño por imitación de las acciones de romper o partir la hoja realizadas por el maestro, lo que dificulta –o aún impide– la conceptualización del partidor matemático. A esa conceptualización solo se tiene una posibilidad de aproximación desde el operador partidor geométrico en el registro gráfico, por el uso del recurso semiótico de las formas geométricas (como líneas rectas y los rectángulos), que permite avanzar en la producción de representaciones públicas que reflejen la actividad mental de construir un partidor matemático a partir de los partidores geométricos que representan los partidores físicos.

De igual manera se logra identificar en el tratamiento de ambas representaciones semióticas, tanto gráficas como escritas, que el operador es un aspecto del sistema partidor que actúa sobre los componentes del sistema, transformándolos.

Veamos el segundo caso:

Viñeta 2:

Ante la pregunta por la interpretación de la expresión:

¿Me comí la mitad de la torta?,

El estudiante 5, responde a la pregunta con una representación en registro escrito:

“separe ½ de la unidad”

Figura 81. Tratamiento de la representación

En este caso, el operador actúa en la relación que las partes tienen con la unidad de área en la representación gráfica circular de la torta: al “separar” una de ellas, el operador realiza una acción sobre la totalidad, que consiste en separar la mitad de la totalidad de la unidad, en este caso de área, que coincide con la separación como una acción física de partición.

En la segunda representación, se realiza una partición geométrica cuando acude a los recursos del registro gráfico, en este caso la gráfica circular. El operador aparece en el modelo estático representado con recursos como el coloreado que se hace a la mitad de la totalidad de la unidad de área que corresponde a la gráfica y que representa la torta.

Figura 36. Conversión del registro gráfico al numérico

Finalmente, representa la cantidad con el registro numérico, en donde el operador no se hace explícito en el tratamiento, pero si en el producto y se representa con la cantidad $\frac{1}{2}$ como resultado de la cuantificación de las dos porciones de la representación gráfica circular que tienen la misma área.

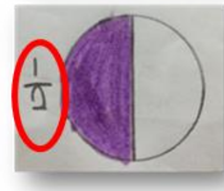


Figura 83. Representación numérica

El tratamiento de la representación semiótica realizado por la estudiante indica que el operador actúa transformando una unidad de área, que en este caso sería la gráfica circular que representa "*una torta*", en una nueva cantidad que expresa la relación cuantitativa entre una cierta cantidad tomada como unidad-todo y otra cantidad tomada como parte. Llama la atención que la única magnitud con la que se opera sea el área, pues en una torta puede haber otras magnitudes que se "esconden" detrás del registro gráfico, como el espesor o la masa.

Lo anterior permite reconocer que, de acuerdo con las representaciones y transformaciones semióticas, en el sistema partidor el operador es un aspecto del sistema que puede actuar como partidor físico para transformar la cantidad mediante "cortes" o "rasgados" que se hacen explícitos en el tratamiento de las representaciones en el registro oral, en el escrito, pero que al hacer la conversión al registro gráfico, en su tratamiento se acerca a la partición geométrica; pero aún no se tiende el puente entre la partición física concreta y la geométrica intuitiva para acceder a la partición matemática abstracta.

7.1.2 *Subcategoría 2: El Operador multiplicativo*

De acuerdo con los modelos y teorías sobre los racionales, existe un consenso en considerar que el racional también puede ser un operador o transformador multiplicativo de un sistema de cantidades hacia el mismo u otro sistema de cantidades, bien sea ampliando o reduciendo la cantidad, que en palabras de Vasco en el archipiélago fraccionario, permite distinguir entre los monstruos achicadores y los agrandadores.

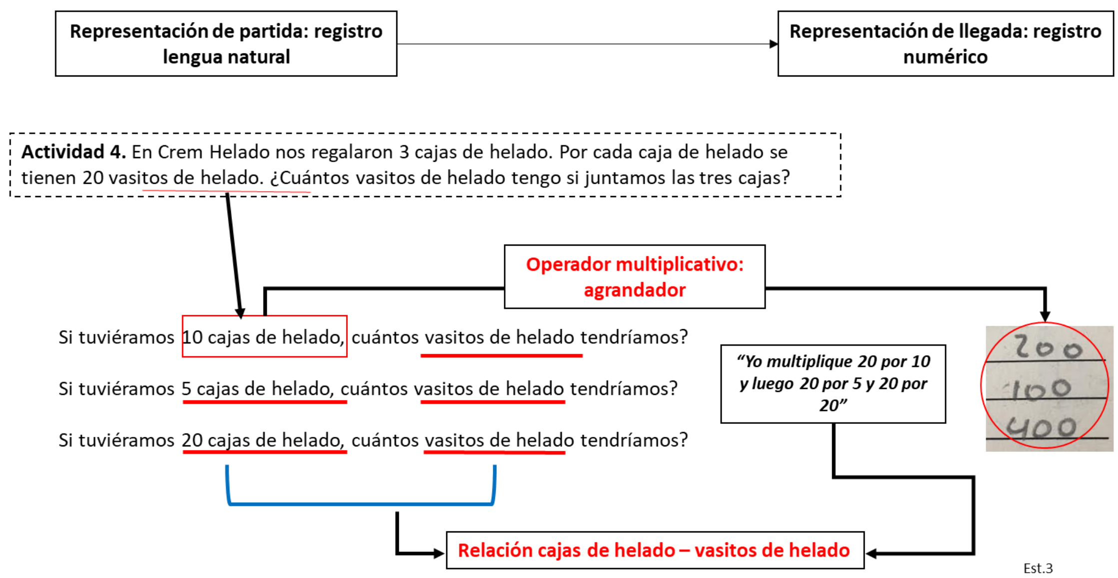
Ya se ha observado que para los niños resulta extraño que al "multiplicar" dos operadores en el sentido de aplicar uno después de otro ("composición" más que "multiplicación"), los resultados se achiquen, cuando para ellos "la multiplicación siempre agranda" en los números naturales.

Al revisar las representaciones semióticas producidas por los estudiantes en torno a una de las situaciones propuestas, el operador multiplicativo se reconoce en las siguientes viñetas:

Viñeta 3:

Figura 84.

Contenido de la representación (Act.4 – Est. 3)



En este caso, el operador multiplicativo surge después de establecer la relación entre dos sistemas de cantidades: el número de cajas de helado y la cantidad de vasitos de helado que se encuentran en cada caja, en donde se desconoce la capacidad de la caja y la capacidad del vasito, porque lo que pretende la maestra en esta actividad es establecer una relación entre objetos discretos (número de vasitos de helado y número de cajas con vasitos de helado) y no, en objetos y magnitudes continuas (como el volumen de helado o la capacidad de la caja de helado).

Pero el operador multiplicativo sólo se hace explícito cuando la investigadora les pregunta acerca del producto obtenido, en este caso las cantidades: 200, 100 y 400. Lo anterior indica que el operador multiplicativo hace parte del tratamiento que de manera implícita se hace de la representación en lengua natural y que posteriormente lleva a la transformación de *conversión*, como "*cálculo mental*", que indica que deben relacionarse dos cantidades: el número de cajas con el número de vasos y actuar sobre una de ellas realizando una multiplicación.

En la siguiente viñeta, se ejemplifica otra manera de expresar el operador multiplicativo en otras representaciones semióticas:

Viñeta 4:

Ante la siguiente pregunta:

Si nos sobró la cuarta parte de helado de una de las cajas,

¿Cuántos vasitos de helado quedaron?

Cabe aclarar que la pregunta del docente resulta ambigua, debido a que parece que se piensa en una unidad continua de volumen o de capacidad, por la cantidad de helado que pueda caber en la caja, cuando realmente se trata de unidades discretas, como el número de cajas, y el número de vasitos de helado ya servidos que se encuentran en una caja

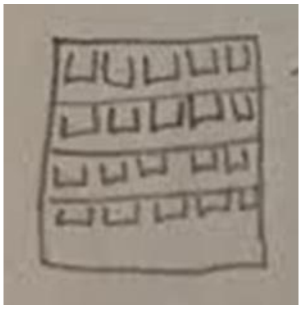


Figura 85. Representación pictórica

como la comercializa el vendedor, tal como es representado en la imagen por el *estudiante 4*:

El *estudiante 5* selecciona el registro gráfico para representar la situación, sustituyendo la caja de helado que representa una unidad discreta en donde caben 20 vasitos de helado, por un objeto continuo que se representa con una gráfica circular. Sobre esa gráfica realiza el tratamiento: divide la representación gráfica circular inicialmente en cuatro partes y, al interior de cada una de ellas, hace subdivisiones de tal manera que pueda ubicar la totalidad de los helados (20) que trae cada caja, haciendo trazos hasta obtener 20 divisiones o particiones.

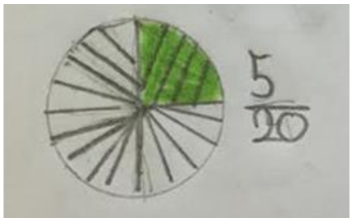


Figura 37. Conversión entre representación en registro gráfico al registro numérico

El operador multiplicativo se hace explícito en el conteo iterado de lo que se representa aquí como la caja de helado, cuando en primer lugar, divide la cantidad de vasitos de helado en cuatro grupos, para luego determinar el número de vasitos que quedan en cada una de las cuatro particiones.

Este es un tratamiento que si bien ocurre cuando se "echa a andar" el modelo mental, es posible inferirlo en el modelo estático, tal como se observa en la viñeta, al menos con la comparación de la representación inicial y la final.

En cuanto a la conversión en el registro numérico, en este caso el operador multiplicativo se infiere de la comparación entre la representación semiótica inicial y la siguiente pues la cantidad $\frac{5}{20}$ no refleja la acción del operador multiplicativo pero si muestra la transformación como producto de la actuación sobre la cantidad, en este caso, la caja de helados, teniendo en cuenta que se establece relación con unidades continuas en la representación circular que representa la caja de helado.

En ambas situaciones y a partir de la actividad semiótica expresiva de los estudiantes, se puede reconocer que el operador multiplicativo surge inicialmente como una relación entre sistemas de cantidades que luego en el tratamiento implícito de las representaciones se asume como transformador de una totalidad, bien sea achicándola o agrandándola.

Es de aclarar que en el registro pictórico y gráfico se logra expresar la actuación del operador, por lo que queda representado en el modelo estático inicial y en el final, lo que no ocurre con el registro numérico, en donde el operador se infiere de la representación en registro oral que se le solicita al estudiante.

Categoría 2: Sistema Partidor: la relación parte-todo

Sistema partidor: la relación parte / todo

- Relación totalidad – parte y parte - totalidad
- Las operaciones de partir, repartir y distribuir sin la condición de igualdad en los registros semióticos

Al apoyarnos en la TGMT y reconocer los modelos como sistemas en sus tres aspectos (sustrato, estructura y dinámica), pudimos identificar la existencia de cuatro sistemas conceptuales sobre los racionales: operadores, partidores, medidores y razones. Al identificar los operadores o transformadores como aspecto al interior de cada sistema, nos damos cuenta que la dinámica se activa cuando el sistema se “echa a andar” y en esa acción se selecciona el operador, el argumento u operando, para efectuar la operación “en acto”, no solo “en potencia” que se quedaría en el modelo estático.

La relación parte-todo se ha considerado –tanto por los autores como por los maestros y los autores de libros de texto como un eje a través del cual acceder a otros conceptos de los números racionales.

Autores como Hart (1981, 1985); Freudenthal (1983); Ohlsson (1988), Obando (2003) y Fandiño (2009) reconocen que en la introducción formal del concepto de fracción y otros conceptos relacionados con los números racionales se hace referencia a una *parte* de un *todo* cuando nos referimos a cantidades continuas o, cuando son cantidades discretas, se refiere al número de un subconjunto tomado como una *parte* en relación con el número total de objetos de la colección tomada como un *todo*.

7.2.1 *Subcategoría 1: La relación totalidad-parte y parte-totalidad*

A partir de las interpretaciones que los niños hacen de las representaciones de cantidades discretas que se les presentan, fue posible constatar que, en los registros y representaciones semióticas analizadas, estos siempre establecen una relación entre una *parte* y una *totalidad* o *todo*, dada la importancia y relevancia que ha tenido el desarrollo de actividades de partición que conllevan a la identificación del *todo* y de la *parte*, tal como se ha propuesto en los modelos y las teorías de los matemáticos, autores de libros de texto y maestros.

Sin embargo, y reconociendo que en los hallazgos del presente estudio también se hace evidente para los niños esta relación, llama la atención la *manera* como entre el registro verbal (oral o escrito) y el registro gráfico desde sus reglas de conformidad se va mostrando que la relación *parte-totalidad* cambia de sentido hacia la relación *totalidad-parte*; es decir, de acuerdo con la naturaleza de algunos registros, se puede presentar primero la *parte* como unidad elemental, para luego captar la *totalidad* como segunda unidad elemental significante, o —en la fase de conversión como en la de tratamiento que se le hace a la representación— la constitución de la *totalidad* puede aparecer como primera unidad elemental y luego la *parte*.

Para ilustrar mejor esta afirmación, se presentan los siguientes ejemplos:

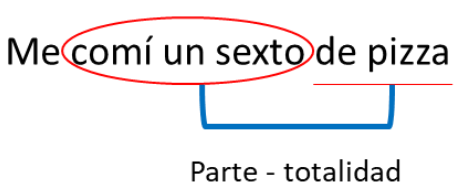
- En el registro oral, se dice tengo "un cuarto de pastel" haciendo alusión a la parte de una totalidad, mientras que, en el registro pictórico y el gráfico, la primera unidad elemental que aparece en el tratamiento es la totalidad en este caso, el pastel para luego "partirla" en cuatro partes e identificar el cuarto del pastel.
- En el registro numérico, se escribe inicialmente la cantidad que se toma de la totalidad, es decir, si voy a escribir $\frac{1}{2}$, lo que en el registro gráfico primero debo reconocer la totalidad para después identificar la parte.

A continuación, se presentan mediante un ejemplo, las producciones y transformaciones semióticas de los estudiantes en una actividad con cantidades continuas, ya que como veremos más adelante cuando hablamos de cantidades discretas, los niños no la asumen como partición.

Partiendo de una actividad de semiosis interpretativa, se les presenta a los estudiantes la siguiente situación:

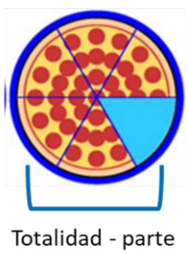
"*Me comí un sexto de pizza*"

Analizando el contenido de esta representación en registro en lengua natural desde el *tratamiento*:



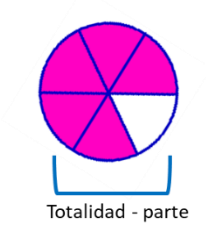
Al interpretar la representación, se puede evidenciar que se inicia con la parte que en este caso corresponde a la cantidad de pizza, lo que indica que se vuelve al partidor físico que actúa sobre el objeto concreto, y lo que se come: “comí un sexto”, lo cual hace notar que la cuantificación va con “un”, no con “el” y va en masculino, que es distinto a decir “una sexta parte” ó “la sexta parte”. La relación entre parte y totalidad surge a través del conector “de” y al terminar la frase “de pizza”, allí emerge la totalidad con la partición física indicada en la acción “comí un sexto” sin que se note la intermediación consciente de las cantidades de la magnitud respectiva.

Representemos la misma situación en registro pictórico:



Cuando se realiza la producción de esta representación que proviene del registro pictórico, se requiere como primera unidad constitutiva la definición de la totalidad, en este caso la pizza completa, para luego “extraer” de allí la parte, que corresponde a “un” sexto de pizza. Esto indica inicialmente una partición física de la totalidad en seis partes que corresponden a seis trozos o pedazos de pizza, pero también a la partición mental que se representa en la imagen. Además, de la ambigüedad en el tamaño de las partes, al no explicitarse que sean “iguales”, ni “iguales de qué” o “iguales en qué”, debido a que el registro semiótico gráfico no lo hace explícito y en el registro oral, en algunos casos, se omite.

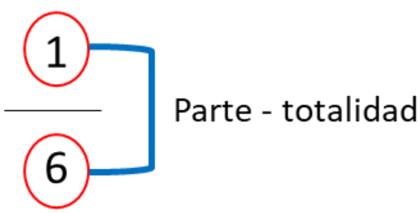
Posteriormente, en la representación en el registro gráfico se presenta el mismo tratamiento, debido a la semejanza y cercanía entre el registro pictórico y el registro gráfico. En el *tratamiento* de esta representación, las unidades constitutivas del registro emergen de igual manera que en el registro pictórico.



Se puede comparar el tratamiento en el registro verbal escrito y en el registro gráfico dibujado con el posible *tratamiento* en la imagen mental simplificada del disco, con o sin colores o sombreados.

De acuerdo con la metodología de modelos y teorías se explicita que se trata precisamente de "adivinar" el modelo mental sistémico a través del registro gráfico y la teoría verbalizada, que en "el discurso en acto" va acompañada con apoyos de gestos, pausas y tonos, aunque estos se pierden en la grafía (el texto escrito con o sin dibujos).

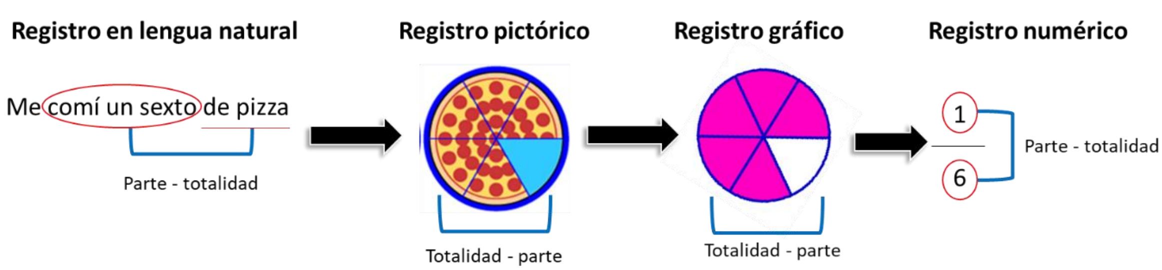
Ahora revisemos el *tratamiento* de la representación en el registro numérico:



De acuerdo con las reglas de conformidad, se inicia con la escritura de la parte que corresponde a la cantidad "1" como el numerador de la fracción y posteriormente la relación que se representa a partir de la línea horizontal para luego presentar el todo "6" como denominador.

Al analizar el tratamiento en cada uno de los registros se nota en su construcción como la "*parte*" y la "*totalidad*" aparecen a medida que se va produciendo la representación, que en unos registros aparece primero la "*parte*" y en otros registros aparece primero la "*totalidad*".

Al momento de acudir a la transformación semiótica de *conversión*, cobra relevancia el cambio de sentido de la relación "parte-totalidad" ya que complejiza la comprensión de este constructo de los racionales, tal como se ejemplifica a continuación:



En la semiosis interpretativa, cuando el niño identifica el registro sobre el cual se ha producido la representación, debe reconocer el sentido de la relación *parte-totalidad* que permite la conformación de las unidades elementales del registro.

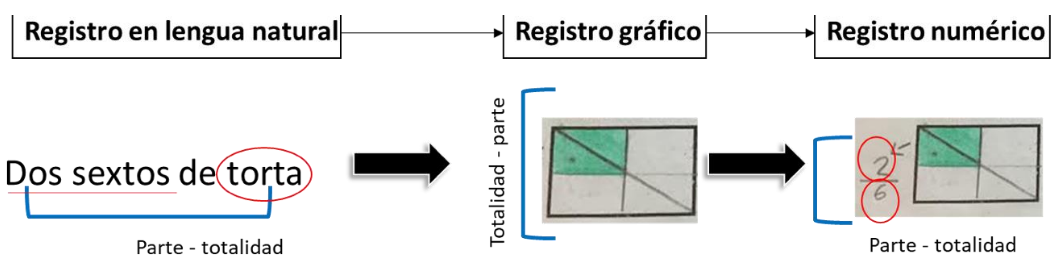
Para el caso de la semiosis expresiva y a partir del análisis de los datos obtenidos que dan cuenta de las transformaciones semióticas realizadas por los niños, se presenta la siguiente viñeta que permite argumentar la aparición de esta categoría, la relación *parte-totalidad* y *totalidad-parte* en los modelos mentales sobre los racionales que poseen los niños y niñas de quinto grado y que se hicieron evidentes en el presente estudio:

Viñeta 5:

Al solicitarle a los estudiantes producir una representación en registro escrito a partir de la representación en registro oral: "Dos sextos de torta", para luego realizar una actividad de *conversión* en registro gráfico y posteriormente en registro numérico, se nota el cambio de sentido de la relación *parte-totalidad* como se presenta a continuación:

Figura 87.

Conversión entre registro lengua natural, registro gráfico y numérico



En la actividad de semiosis expresiva, además de seleccionar el registro sobre el cual producirá la representación, se requiere identificar el sentido de la relación (*parte-totalidad* o *totalidad-parte*) e ir asumiendo el cambio de sentido que va ocurriendo al realizar la *conversión* entre los diferentes registros.

La relación *parte-todo* es la descripción de una partición de un objeto en partes en donde la idea de un "*todo*" es una característica básica de esta representación, lo que permite corroborar que la identificación del "*todo*" deberá aparecer en un primer momento de la representación de tal manera que se haga evidente para su construcción, lo cual ya hemos comprobado que no es posible debido a los recursos, reglas de conformidad y condiciones que desde los registros se imponen a las representaciones.

Con lo anterior, se puede concluir que pensar en la noción parte-todo como constructo derivado del mecanismo constructivo de partición propuesto por Kieren (1983), no supone una relación arbitraria entre la "*parte*" y la "*totalidad*", de acuerdo con la estructura de cada registro semiótico, ya que sugiere que la relación puede cambiar de sentido, es decir, va del "*todo*" a la "*parte*" y en otros de la "*parte*" al "*todo*" que se evidencia en el *tratamiento* y se acentúa en la *conversión*, lo que hace visible en la dinámica del modelo mental que poseen los niños y niñas de quinto grado sobre los racionales.

7.2.2 *Subcategoría 2: las operaciones de partir, repartir y distribuir sin la condición de igualdad en los registros semióticos*

La importancia y trascendencia que ha tenido la noción *parte-todo* en el aprendizaje de los racionales tiene varias implicaciones que si bien ya han sido abordadas por autores como Freudenthal (1983); Kieren (1983); Hart (1988) y Fandiño (2009), hay otros aspectos que desde un análisis semiótico como el realizado en el presente estudio, no han sido considerados y pueden dar cuenta de un obstáculo para su aprendizaje.

Cuando enfrentamos a los estudiantes a una actividad matemática que involucre la noción parte-todo, se evidencian diferencias en torno a lo que implica la acción de "*partir*", "*repartir*" y "*distribuir*", así como la condición de igualdad que demandan estas operaciones.

Desde los modelos y teorías sobre los racionales, Kieren (1983, 1993) concibe la *partición* como un mecanismo constructivo del número racional y el desarrollo de los cinco subconstructos: medida, cociente, razón y operador multiplicativo. De igual manera, autores como Steffe y Olive

(2010); Pitkethly y Hunting (1996); Confrey y Maloney (2008) consideran que la partición es una operación que consiste en la clasificación o asignación de cantidades bien sea continuas o discretas basada en el criterio de igualdad, asumiendo indistintamente la partición física, geométrica o matemática.

Ha sido tan generalizado y asumido en las teorías sobre los racionales que la partición trae consigo la condición de igualdad, que Vasco (1994) afirma en el Archipiélago Fraccionario que la mayoría de los libros de texto consideran que la única isla es la de los fraccionarios como partidores de objetos: panes, dulces, bananos, naranjas, pasteles y hojas de papel, siempre desde particiones físicas, en donde se parte cada objeto en tal número de partes “iguales” y se escogen tantas, dejando a quien realiza la acción de “partir” la decisión del criterio de igualdad (“¿iguales en qué?”). Con frecuencia se omite el criterio de igualdad de las partes, y cuando se explicita, no se verifica, especialmente si el número de partes es mayor que cuatro.

En este sentido, la iniciación del aprendizaje de la partición como proceso inicial para el acercamiento de los niños a los racionales ha llevado a que, en la clase de matemáticas, todas las acciones que realiza el docente se basen en la realización de cortes, dobleces, rasgados, entre otras particiones físicas.

Al analizar la actividad noético-semiótica en los estudiantes participantes en el estudio, fue posible reconocer que la equipartición no es una propiedad inherente a la operación de partir, situación que puede deberse a que no es explícita en los registros semióticos que permitan interpretar e inferir la “igualdad” en las representaciones y transformaciones semióticas así como tampoco en los recursos semióticos que ofrecen los registros para producir las representaciones semióticas por parte de los niños de quinto grado.

Para sustentar esta afirmación, recogemos algunas viñetas derivadas del tratamiento de la representación gráfica:

Viñeta 6:

Cuando se les pide a los estudiantes dividir una torta en seis partes (omitiendo la condición de igualdad en la instrucción), se evidencia que la *estudiante 4* realiza una "partición" geométrica

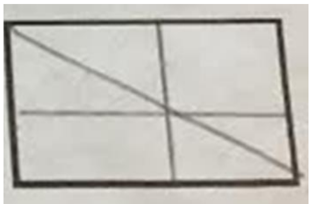


Figura 38. Tratamiento de la representación gráfica

de acuerdo con el recurso semiótico del registro gráfico que en este caso está representando una torta, realiza inicialmente una partición por mitades, mediante el trazo de una línea vertical y luego en cuartos, al realizar un trazo horizontal y para obtener las seis partes que le propone la instrucción, traza una línea inclinada.

Para la estudiante, la condición es "*partir*" en las partes que se sugiere en este caso en seis partes, sin tener en cuenta que cada una de las partes sea igual a las demás, cuando se les propone una partición física y de manera intuitiva se espera que realice una partición geométrica que lo lleve a la partición matemática abstracta.

Viñeta 7:

Figura 89. Tratamiento del registro gráfico

El *estudiante 5* al realizar la misma acción de partición geométrica intuitiva es seis partes la torta en la representación gráfica, hace inicialmente un trazo horizontal que le permite cortar en dos partes equitativas y luego traza dos línea inclinadas que pasen por el centro de la forma rectangular tratando de realizar una partición que le permita obtener las seis partes.

Lo que se manifiesta en las dos viñetas es que lo que les interesa a los dos estudiantes es partir la totalidad en las porciones que sean solicitadas, en este caso de la torta representada en una forma rectangular sin tener en cuenta el área de la forma geométrica que permita mantener la igualdad, que se refiere a la equiextensión en donde la igualdad desde la partición física concreta no sería suficiente.

La noción de racional emerge desde la conmensurabilidad al agotar la totalidad, tal como lo propuso Brousseau en los años 70 y no a la obtención de partes "*iguales*", lo que se evidencia en la actividad semiótica desplegada por los dos estudiantes.

De igual manera, y desde la actividad semiótica de *conversión*, se pueden reconocer las transformaciones semióticas que realizan los estudiantes. Algunas de ellas permiten confirmar la ausencia de la condición de igualdad en los diferentes registros semióticos, tal como se aprecia en la siguiente viñeta:

Viñeta 8:

Figura 90.

Partición congruente Est.4

Analizando la actividad semiótica expresiva que realiza el estudiante, se reconocen dos acciones que llaman la atención:

1. En el registro lengua natural se dice "*me comí la mitad de la torta*" que hace alusión a una partición física y la estudiante en la conversión al registro gráfico, realiza una partición geométrica coloreando la mitad de la torta y manteniendo las particiones en seis partes que se habían solicitado previamente; de igual manera en el registro numérico se mantiene la partición en seis partes y se toman la mitad de ellas (3) tal como se interpreta esta representación.
    2. Cuando se refieren a "*a la mitad*" se asume la partición en partes iguales en donde las dos partes en las que queda "*partida*" la totalidad, no hace alusión a la equipartición de las particiones internas, que en este caso las "*seis partes*" no son equitativas, lo que permite afirmar que el número de particiones puede influir en la condición de igualdad y puede atribuirse a una limitación de los registros pictórico y gráfico, que en el caso del registro oral y numérico, aparece dentro de los recursos del registro si la maestra o incluso el estudiante la tiene en cuenta.

Según lo anterior, solo es posible identificar la partición equitativa si en la representación en lengua natural que se les presente a los estudiantes se hace de manera explícita el requerimiento de la condición "*partes iguales*", que no es posible promoverla en los demás registros de representación semiótica, pues en las reglas de conformidad no se reconoce un recurso semiótico que lo promueva en la construcción de la representación.

Fandiño (2009), sin haberse referido a la dificultad semiótica que se está planteando en este estudio, ha hecho también referencia al uso del término "*partes iguales*", cuando dice que se constituye en un obstáculo en la construcción de conocimiento debido a su significado subjetivo, que nos permite volver a la pregunta: iguales en qué o iguales de qué.

En tal sentido, y sumado a lo observado en el proceso investigativo, la condición de equipartición además de ser un obstáculo cognitivo es un obstáculo semiótico e incluso emotivo, ya que la condición de igualdad en la partición, depende de la cercanía que el niño tenga con la totalidad a partir, el reconocimiento de su magnitud o el interés por la totalidad, pues en este caso si a un niño le gustara mucho la torta y le dijeran que uno de los pedazos sería para él, seguramente la partición no sería equitativa.

Otro aspecto a considerar es que partir en "*partes iguales*" debería incluir "*iguales en qué*", de tal manera que las acciones físicas de partir sugieran la magnitud sobre la cual se dice "*en partes iguales*", aspecto que los registros no permiten reconocer o sus recursos son limitados para ello y no permiten pasar de la partición física a la partición geométrica y posteriormente a la partición matemática.

En cuanto a la ***repartición***, tal como lo manifiesta Kieren (1983), esta tiene una génesis social que indica la acción de repartir, que puede ser "*de a uno*" como estrategia para intentar mantener la igualdad, sin negarse a la posibilidad de residuo o puede ser por reparticiones proporcionales, lo que no garantiza, ni requiere una partición equitativa, sino que está asociada a otro criterio que puede ser subjetivo.

Esta actividad de repartición, asociada al ***reparto***, se evidencia en las siguientes viñetas:

Viñeta 9:

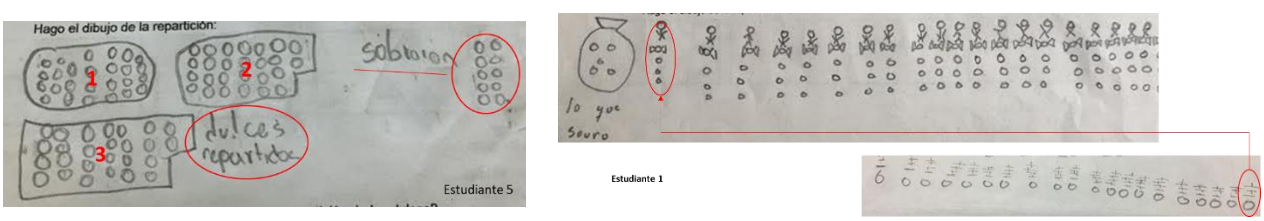
Ante la siguiente situación propuesta en el registro lengua natural:

El rector del colegio nos dio 85 dulces para la fiesta. ¿Cuántos dulces nos tocaron a cada uno de los estudiantes de mi grupo? ¿Cómo los podemos repartir?

Dos representaciones pictóricas que fueron realizadas por los niños que participaron en el estudio, muestran lo que indica para ellos, la acción de repartir:

Figura 91.

Repartición De a Uno



En ambos casos, los estudiantes reparten la totalidad de los dulces (85); en el *estudiante 5* lo realiza formando 3 grupos de a 26 dulces y en el *estudiante 1* hace una repartición "*de a uno*". Otro aspecto que tuvieron en cuenta en el tratamiento de la representación consiste en el reconocimiento de una cantidad que sobra (un residuo), porque si se seguía repartiendo no se lograba repartir nuevamente "de a uno" o en uno de los grupos formados por la *estudiante 5*, y dejaba de ser equitativa la repartición, al reconocer que cada una de las colecciones formadas deberían quedar con igual cantidad de dulces.

De acuerdo con lo anterior, es posible identificar reparticiones equitativas entre otras cosas porque para los niños de quinto grado que participaron en este estudio, la partición está más asociada a cantidades de objetos continuos y la repartición es una operación que cobra sentido en cantidades de objetos discretos que puede tener como criterio la condición de igualdad asociada a la génesis social de la que habla Kieren, pero no necesariamente hace parte inherente de los registros semióticos sino del tratamiento que se hace al interior de cada registro, en este caso del pictórico.

Tampoco se puede desconocer que existen repartos proporcionales asociados a reparticiones de herencias, tierras, ganancias en términos comerciales a los que también se hace alusión en el contexto de la clase de matemáticas y que conducen al concepto de proporcionalidad, pero que no hicieron parte del análisis ni de los resultados de este estudio.

En síntesis, cuando hacemos reparticiones, es posible que ocurra la equipartición o la repartición proporcional. Cuando ocurre la equipartición, se incluye un criterio subjetivo en el reparto; por lo tanto, se confirma en estos datos el obstáculo didáctico, cognitivo y semiótico frecuentemente observado que conlleva la condición de equipartición, tanto en las reparticiones proporcionales como en los problemas de las herencias. En muchos de estos problemas de herencia, explícitamente la igualdad no cuenta, sino la proporcionalidad. Las reparticiones de herencias suelen privilegiar al hermano mayor, y no se trata de repartir la herencia en partes iguales.

Otro aspecto que se hizo evidente desde esta perspectiva noético-semiótica, y que también ha sido considerada en el mecanismo constructivo de la partición, es la ***distribución***.

Viñeta 10:

Cuando se les pide repartir dos hojas de papel entre tres niños,

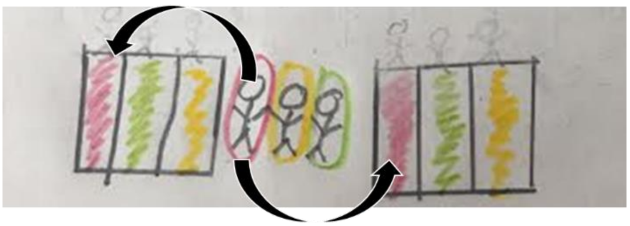


Figura 92. Repartición De a Uno

El estudiante realiza de manera implícita una partición de las hojas de papel de manera equitativa, haciendo cortes en cada hoja en tres partes trazando dos líneas verticales para obtener tres hojas con igual magnitud y de la misma manera hace la partición geométrica de la segunda hoja, para luego "distribuir" las porciones de hoja entre los tres niños. Es decir, la distribución ocurre después de la partición y como se va a distribuir se tiene especial cuidado para que la partición sea equitativa.

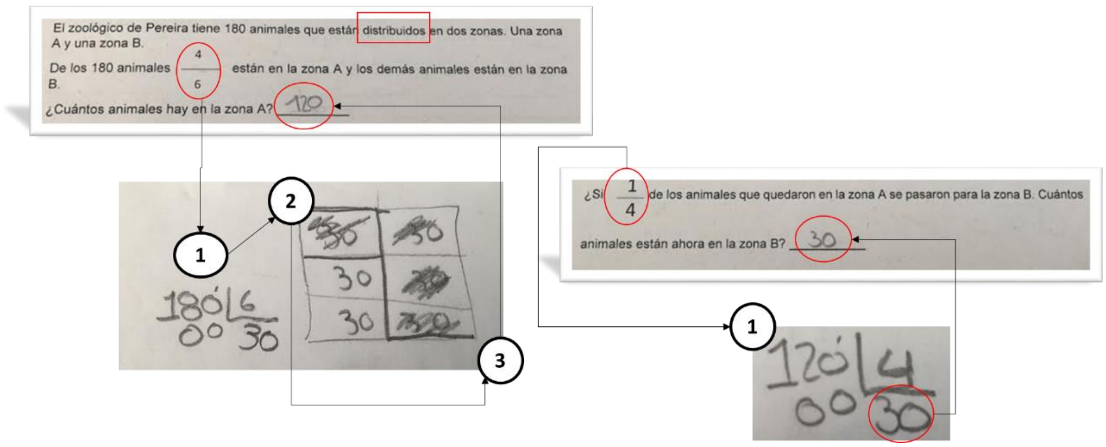
En esta primera viñeta se reconoce una distribución derivada de una partición en donde la condición de la partición es equitativa.

Además del ejemplo anterior, al analizar los datos se pudo reconocer otra manera de distribuir, tal como se presenta a continuación:

Viñeta 11:

Figura 93.

Repartición mediante la división



La distribución requiere la formación de grupos en cada uno de los cuales haya igual número de elementos. Según la viñeta, cuando se les propone a los estudiantes, la distribución de 180 animales teniendo en cuenta que se deben formar 6 grupos, el estudiante acude a la división (restas sucesivas) como recurso del tratamiento de la representación numérica para lograr una distribución equitativa de los animales del zoológico que en este caso se logra, porque no queda residuo.

Desde el análisis noético-semiótico realizado, los niños de quinto grado representan las particiones mediante cortes de una totalidad en los registros semióticos pictóricos y gráficos representados mediante la forma $\frac{a}{b}$ sin que necesariamente las particiones sean equitativas. En cuanto a los repartos, utilizan estrategias de repartición "*uno a uno*" hasta agotar la totalidad y preservando la equipartición, aspecto que es observado en el registro pictórico y gráfico pero dentro del registro numérico se convierte en un tratamiento implícito. En cuanto a la operación de distribuir, la división es la estrategia que busca obtener distribuciones equitativas cuando no hay residuo; en el caso del residuo, se suele presenta un dilema con respecto a "*qué hacer*" con lo que sobra.

Por lo anterior, se puede concluir que cuando se utilizan particiones, la igualdad no es un criterio cuando se acude a la partición física; en cuanto a la partición geométrica, el criterio está determinada por la forma de la totalidad a partir; solo en la partición matemática se atiende a una magnitud debido a la estandarización de los sistemas de medida; en cuanto a la repartición y distribución, supone un criterio de igualdad de partes equitativas o de proporcionalidad entre partes desiguales a partir de recursos como el “*repartir di-a-uno*” o cuando se hace una operación de división sin residuo.

Categoría 3. La razón como aspecto del modelo que determina las operaciones o transformaciones en los sistemas conceptuales de los racionales

La razón como aspecto del modelo que determina las operaciones o transformaciones en los sistemas conceptuales de los racionales	Relación “ser parte de” Relación multiplicativa entre cantidades o entre sistemas de cantidades

Son múltiples las acepciones sobre las cuales se presenta el concepto de razón, por lo tanto se puede decir que desde los modelos y las teorías, los autores coinciden en afirmar que:

- La razón es una relación multiplicativa entre dos cantidades *continuas*, como dos longitudes, o *discretas*, como dos números cardinales que está relacionada con la proporcionalidad (Obando, Vasco & Arboleda, 2013).
- La razón es una relación multiplicativa que se interpreta como una división indicada y se representa como una fracción (Fandiño, 2009).
- Los niños tienden a considerar que la razón es una relación aditiva debido a que la frase “dos es a cuatro, como seis es a …”, produce como respuesta “ocho”, cuando los docentes esperan que establece una relación multiplicativa y la respuesta sea “doce”, esto se debe a que cuando establecen relaciones entre cantidades tienden a hacer conteos que en algunos

casos, los resultados de la suma pueden coincidir con la multiplicación (Fernández y Llinares, 2010).

- La razón actúa como relator cuando cumple la función de cuantificar la relación por cociente entre dos cantidades o sistemas de cantidades distintas o actúa como operador cuando se aplica sobre una cantidad o sistema de cantidades conocida para hallar una cantidad o sistema de cantidades desconocida (Obando, Vasco & Arboleda, 2013).
- La razón también se considera el invariante en una serie de cantidades proporcionales entre sí, y el racional como emergente de la razón cuando se elige una cantidad arbitraria como unidad y las demás cantidades se comparan con respecto a esta cantidad (Confrey y Carrejo, 2005).

Desde la apuesta metodológica asumida en el presente estudio y con el interés de identificar la razón en los modelos conceptuales de los racionales que poseen los niños de quinto grado, bien sea como sistema o componente de los sistemas partidor, operador y medidor, surgen las siguientes subcategorías:

7.3.1 *Subcategoría 1: como relación "ser parte de"*

Al analizar la actividad noético-semiótica de los niños de quinto grado, participantes en el estudio, las representaciones semióticas y sus transformaciones, el concepto de razón surge en la relación parte-todo cuando la totalidad es una unidad de medida, tal como se reconoce a continuación:

Viñeta 12:

Figura 94.

Ser "parte de" en el Sistema Razón

Si una hora tiene 60 minutos ¿Qué significa decir que son las 9 y $\frac{1}{4}$?

"Nueve horas más quince minutos de sesenta" **(Est. 1)**

Podría decirse que esta razón, establecida como relación entre la medida de tiempo de una hora y que contiene 60 minutos, se representa en el registro lengua natural como la relación entre una hora y el cuarto de tiempo que corresponde a 15 minutos **de** 60 minutos.

La unidad significante elemental "*de*" permite reconocer la relación y por consiguiente la razón que establece el estudiante, al hacer explícito un sentido de relación entre dos magnitudes, que en este caso, es decir que los minutos están "contenidos" en la hora ó que 15 minutos se encuentran contenidos en 60 minutos que corresponden a una hora (Fandiño, 2009) y además reconoce que la relación está dada entre 60 minutos y los 15 minutos.

Cabe aclarar que ninguno de los niños y niñas que participaron del estudio, relacionan "de" presente en la representación semiótica en el registro lengua natural que establece una relación entre magnitudes, con la representación en registro numérico como fracción que siempre está asociada con el sistema partidor o con una división indicada.

En una representación numérica como la fracción, no se establece relación de manera explícita con la razón, porque lo más relevante en este registro y en la representación que se produce es el operador, no el relator o la relación.

De allí la dificultad para reconocer la razón, en la división indicada, en donde el numerador y el denominador pierden su valencia semántica de parte-todo al ser intercambiables (Fandiño, 2009), debido a que la razón se establece en doble dirección.

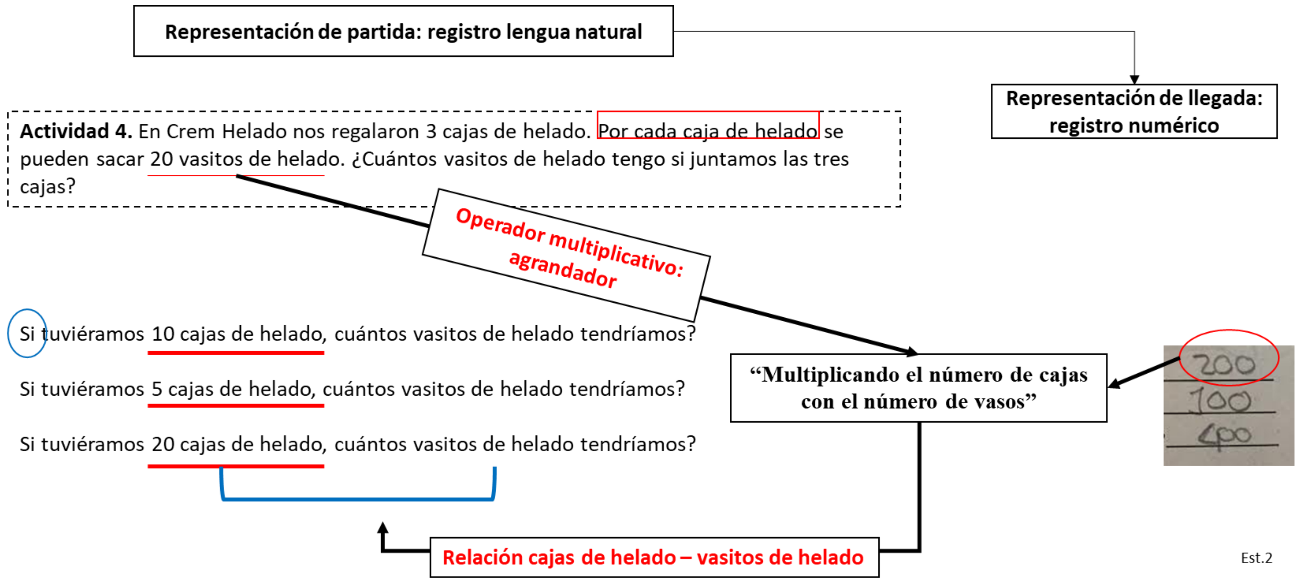
Ante esta representación semiótica producida en el registro lengua natural, la razón aparece de manera implícita en la relación entre ambas magnitudes (minutos y horas), pero no es evidente ni se hace consciente en los estudiantes, sólo se reconoce en el análisis de las representaciones y transformaciones semióticas producidas.

Subcategoría 2: la razón como relación multiplicativa entre cantidades o entre sistemas de cantidades

Viñeta 13:

Figura 95.

Contenido de la representación (Act.4 – Est. 2)



El estudiante establece una relación multiplicativa entre dos cantidades discretas: vasos de helado y cajas de helado que corresponde a dos magnitudes variables cuyo criterio es la cantidad "20". En tal sentido, la razón es de 1 a 20.

En este caso, la razón se expresa con una relación multiplicativa, en tanto existen dos cantidades (discretas) en donde la razón determina el operador que se aplica sobre una familia de cantidades "agrandándola" o "achicándola". Siguiendo a Lamon (2012), la razón es estructurante en los procesos de constitución del número racional.

Viñeta 14:

Figura 96.

Razón como pareja ordenada

Zoro	10
La isla del tesoro	3
Harry Potter	5
Cuentos de los hermanos Grimm	2

"Que los niños prefieren el libro Zoro, porque hay mas estudiantes que en los demás libros" (Est.5)

Desde la semiosis interpretativa, al presentarles la representación tabular acerca de la distribución del número de estudiantes y los libros de su preferencia, el estudiante establece la relación libro-cantidad de estudiantes y compara cada relación en el sistema de cantidades.

Veamos la siguiente viñeta que ilustra este concepto de razón:

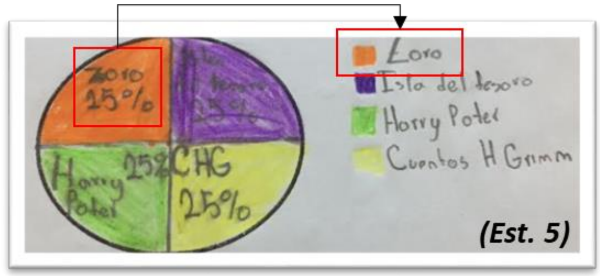
Viñeta 15:

Cuando se le pide al estudiante que, de acuerdo con los siguientes datos, elabore la tabla:

Figura 97.

Conversión del registro tabular al registro gráfico

Zoro	5
La isla del tesoro	5
Harry Potter	5
Cuentos de los hermanos Grimm	5



Se puede identificar que el estudiante establece al menos tres relaciones de parejas ordenadas:

La primera, entre el nombre del libro y la cantidad que le corresponde: (Zoro, 5), una segunda relación determinada por el libro y el color: (Zoro, color naranja) y la tercera relación entre el libro y la cantidad porcentual: (Zoro, 25%).

Al presentar esta situación matemática, se requiere la identificación de las cantidades a comparar, ordenar y operar. Lo anterior hace suponer que la razón no es un constructo en términos de Kieren, se constituye en un invariante de la actividad matemática con los racionales en donde en los sistemas operadores, partidores y medidores emerge de las relaciones multiplicativas, como relación entre cantidades, como pareja ordenada o como comparación.

Siguiendo a Ohlsson (1988), citado por Cortina (2014), en la vida cotidiana aparecen diversos tipos de situaciones en que se utilizan expresiones que relacionan dos números de manera multiplicativa, que pueden ser divisibles entre sí o no. Estas relaciones se representan mediante fracciones, razones, decimales y porcentajes, para el caso de los estudiantes que participaron en el estudio, las razones como fracciones no se presentaron de manera explícita en las representaciones semióticas.

La propuesta del archipiélago fraccionario de Vasco (1994), si bien presenta la razón como una “isla” independiente, también asume que en la comparación de razones, la razón es ambigua, ya que puede entenderse como relación entre las cantidades o como una pareja de operadores inversos, un achicador con su agrandador respectivo, dependiendo del sentido de la relación, lo que genera obstáculos para su comprensión.

En lo expuesto por Obando, Vasco y Arboleda (2013) afirman que la razón se comporta según sea la relación entre las cantidades involucradas en la situación en donde puede ser relator u operador, cuando concluyen que se pueden identificar cuatro funciones básicas de la razón: "como relator, como operador, como correlator, o como transformador, según si la situación compara dos cantidades o dos familias de cantidades" (p. 986).

Pese a la afirmación de Obando, Vasco y Arboleda, de acuerdo con el análisis noético-semiótico realizado en este estudio, al identificar las unidades constitutivas de las representaciones semióticas y reconocer el contenido de la representación, la razón no puede considerarse un sistema conceptual dentro de los racionales, pues al asumirse bajo los tres aspectos, la razón determina las relaciones entre los componentes, entre otras cosas porque la enunciación "a es *a* b como c es *a* d" y la notación tradicional a : b : : c : d son ambiguas para los estudiantes desde dos puntos de vista: no ven por qué los docentes privilegian el punto de vista multiplicativo y no el aditivo al hablar de"es *a*", y tampoco ven por qué las razones que parecen "agrandadoras" como la de dos a cuatro, los profesores hacen la conversión de "2 : 4" en "$\frac{2}{4}$", que les parece a algunos niños que es "un achicador".

CAPÍTULO VIII. CONCLUSIONES, LIMITACIONES E IMPLICACIONES TEÓRICAS, INVESTIGATIVAS Y EDUCATIVAS

8.1 Conclusiones

Siguiendo el objetivo general de la tesis, cuya pretensión fue comprender los aspectos de los modelos mentales (componentes, relaciones y operaciones) sobre los números racionales que asocian los niños de quinto grado a la interpretación de las representaciones y transformaciones semióticas que se les presentan y averiguar cómo expresan sus modelos a través de las representaciones que ellos producen y de las transformaciones semióticas que realizan para resolver problemas escolares, las conclusiones que a continuación se presentan surgen de los resultados de los análisis, de las interpretaciones y discusiones presentados en los dos capítulos anteriores.

En este proceso de intentar comprender los tres aspectos de esos modelos mentales (componentes, relaciones y operaciones) a partir de los productos del proceso de semiosis expresivas e interpretativas realizadas por los niños durante todo el estudio emergió una y otra vez el reconocimiento de la centralidad de la semiótica como herramienta teórica y metodológica privilegiada para el análisis de los aspectos matemáticos, epistemológicos y didácticos de la actividad matemática escolar de maestros y alumnos, sus modelos y teorías y sus esfuerzos por comunicarlos entre sí y a la investigadora.

Aunque en los últimos quince años en el análisis didáctico han entrado en escena los aportes de la semiótica de Charles Sanders Peirce y Umberto Eco, con los juegos de lenguaje desde Adalira Sáenz-Ludlow, el enfoque Onto-Semiótico de Godino, Batanero y Font y el enfoque Semiótico-Cultural de Radford; el presente estudio se ubica en el enfoque noético-semiótico propuesto por Raymond Duval, que nos ha permitido poner en discusión desde su teoría de los registros semióticos de representación semiótica y su precisa distinción entre las transformaciones de las representaciones semióticas llamadas por él "tratamientos" y "conversiones", los modelos mentales que se han construido por matemáticos, maestros, autores de libros de texto, niños y niñas en torno a los racionales.

Al revisar las teorías de los autores, autores de libros de texto y los maestros, que se exponen en el marco teórico y su contraste con los datos obtenidos mediante el análisis noético-semiótico de la actividad matemática realizada por los niños quinto grado; en algunos autores no es posible reconocer si están tratando sobre los conceptos abstractos y los sistemas conceptuales o si se refieren a la notación y los sistemas de representación semiótica, como en el caso de "fracción" y "fraccionario"; o la diferencia entre el numeral "arábigo" y el "3", o el llamado número "romano"y "III" entre otros.

Lo anterior que pretende ser una conclusión derivada del análisis semiótico, fue posible afirmarlo teniendo en cuenta que este estudio que se guía por la Teoría General de Representaciones e Interpretaciones –TGRI– considerada desde la perspectiva semiótica de Duval, permitió la indagación de las producciones noéticas internas (modelos mentales y teorías) de los maestros y los estudiantes, que son privadas y directamente inaccesibles, y de las producciones semióticas de tipo expresivo que utilizaron ambos tipos de sujetos para representar públicamente esos modelos y teorías privados.

Por lo tanto, las conclusiones que siguen, la consideración de las limitaciones del proceso adelantado en esta investigación y las recomendaciones, se han elaborado desde la perspectiva ontológica de los procesos y los sistemas, desde la perspectiva epistemológica de los modelos y las teorías, y desde la perspectiva semiótica de las representaciones e interpretaciones.

Teniendo en cuenta dos puntos de vista metodológicos, las categorías emergentes y la relevancia de la semiótica en la investigación en didáctica de la matemática que se adelantó en este estudio, las conclusiones se presentan en el siguiente orden:

8.1.1 *Desde lo metodológico:*

Los dos puntos de vista metodológicos que se concluyen del trabajo realizado son conceptuales y semióticos. Son ***conceptuales***, porque surgen de la noción inicial de sistema conceptual de la aritmética elemental a una sucesión de sistemas diferentes con distintos modelos y teorías mentales interpretables en esos modelos, y expresables públicamente en figuras, diagramas, maquetas y otros modelos externos, con teorías enunciadas públicamente en distintas producciones lingüísticas articuladas en lenguas y lenguajes digitalizados, simbólicos, orales o escritos producidos por los que llamamos registros semióticos verbales naturales o cotidianos, que suelen estar enriquecidos por registros técnicos a la más refinada de modelo mental sistémico privado o público en el que se interpreta una teoría aritmética, con sus tres aspectos (componentes, relaciones y operaciones).

Son ***semióticos*** porque parten de la noción inicial de sistema simbólico a la distinción entre registro semiótico como sistema productor de representaciones semióticas (por ejemplo, el registro algebraico escrito para la aritmética que tiene numerales para los términos constantes y literales para los términos variables) y representación semiótica como sistema ya producido (por ejemplo, una fórmula bien formada de la aritmética generalizada que llamamos algebra elemental, como la fórmula de solución de la ecuación cuadrática).

Habiendo explicado los puntos de vista metodológicos, se aborda a profundidad cada uno de ellos desde los modelos y teorías existentes en torno a los racionales:

Desde los aspectos **conceptuales** en este estudio fue posible reconocer y explicitar los sistemas conceptuales de los racionales en los modelos y las teorías de autores que, partiendo de la categorización inicial esbozada por Kieren (1983), han influenciado tanto a los investigadores como a los maestros y a los autores de libros de texto y otros materiales didácticos para promover el aprendizaje de los números racionales.

Kieren (1983) sugiere inicialmente la existencia de siete subconstructos que finalmente recoge en cuatro subconstructos acerca del significado de los números racionales: los subconstructos de medida, cociente, razón y operador, que se encuentran interrelacionados, son de tipo conceptual (y no solo de manipulación simbólica) y hacen alusión a alguno de los mecanismos constructivos del concepto de número racional, bien sea a la equivalencia y a la partición, que desde la TGPS permite reconocer que la equivalencia pertenece al aspecto relacional, a la estructura, mientras que la equipartición pertenece al aspecto operacional, es decir a la dinámica del sistema.

De acuerdo con lo anterior, a lo largo de todo el desarrollo de la presente investigación se reconoce y se confirma la vigencia de algunos supuestos de la teoría de los racionales propuesta por Kieren, cuando plantea que el número racional hace parte de una red conceptual con varios subconstructos, al menos los cuatro enunciados por él, lo que agrega mayor complejidad al aprendizaje de este concepto matemático, pero también abre distintas vías de acceso a dicho concepto por parte de los estudiantes y distintas vías de acercamiento a sus procesos mentales por parte de la investigadora.

En este reconocimiento de los cuatro subconstructos como sistemas conceptuales de diferente naturaleza, así parezcan soportados por el mismo sustrato de elementos que se llaman diversamente “racionales”, “quebrados”, “fraccionarios” o simplemente “fracciones”, se confirma la existencia de varios modelos mentales correspondientes a esos sistemas conceptuales y de varias teorías que los relacionan y organizan; por lo tanto, se puede afirmar que no es posible abordar el concepto de número racional desde un solo subconstructo o sistema conceptual, sino que cada autor de un libro de texto, maestro o estudiante que se ha analizado en esta investigación, ha quedado claro que conviven al menos dos o tres y, en algunos casos, los cuatro sistemas conceptuales de los racionales propuestos por Kieren.

Según la Teoría General de Procesos y Sistemas, en cada uno de estos cuatro sistemas conceptuales y en cada uno de sus modelos mentales se pueden diferenciar los tres aspectos principales de todo sistema: su sustrato o conjunto de componentes, su estructura o red de relaciones y su dinámica o inventario de operaciones y transformaciones internas.

Siguiendo con los modelos y teorías de los autores, Vergnaud (1983) propone que los números racionales conforman un campo de cocientes, en donde los objetos y actividades que se requieren para su construcción deben partir del conocimiento de estructuras aditivas y multiplicativas, centrándose en el campo multiplicativo y haciendo evidente la importancia de los operadores, dejando de lado la "adición de fracciones" como campo cercano a los partidores.

La relevancia del modelo de Vergnaud radica en importancia que le otorga al sistema operador en la construcción del concepto de número racional desde los operadores multiplicativos reductores y ampliadores, que los estudiantes prefieren llamar "achicadores y agrandadores". Ya se vio en la discusión precedente que los aspectos operatorios sí están presentes en los maestros y sobre todo en los estudiantes, así los autores de libros de texto y los maestros parezcan referirse solo a las particiones.

En cuanto a Behr, Lesh, Post y Silver (1983), ellos centran su modelo en el mecanismo constructivo de partición de Kieren, pero también reconocen otros subconstructos como medida, razón, cociente, decimal y operador, el cual es el que más claramente actúa como transformador; de igual manera Nesher (1985) y Ohlsson (1988) retoman los constructos considerados por Kieren.

Posteriormente, la fenomenología didáctica de Freudenthal (1994) trató la adquisición del concepto de número como objeto de pensamiento a partir de una relación múltiple entre el 'noumenon' (objeto de pensamiento) —que en este caso es el número racional— y sus 'phainomena' como todos los fenómenos perceptibles desde el punto de vista sensorio-motriz que aparecen ante la mirada o la imaginación de los distintos sujetos concretos en la actividad y en el lenguaje cotidiano y en las actividades escolares y que aparecen como relacionados con ese mismo 'noumenon'.

De igual manera se presenta en la formulación inicial de la Teoría General de Sistemas en el marco teórico de la Renovación Curricular (MEN, 1984), con la distinción entre los sistemas concretos y familiares a los alumnos, que corresponden al "phainomenon" o al mundo de los fenómenos, y los sistemas conceptuales que corresponden al “noúmenon” o al mundo de los conceptos.

En el de los números racionales, se toma como recurso fenomenológico inicial el trabajo con las fracciones, los porcentajes y las razones, hecho por maestros y alumnos con el apoyo de signos numéricos o numerales, a veces llamados “números quebrados”, “fracciones” y “decimales”, tanto en situaciones escolares como extraescolares.

En el recorrido anterior queda claro que, a comienzos de los noventa, estaba ya bien dispuesto el terreno para intentar sistematizar todos estos acercamientos múltiples que parecían terminar en un único concepto o ‘noumenon’: el número racional, estaban ya dadas las condiciones para analizar los distintos acercamientos, procedimientos, concepciones y nociones vagas sobre los racionales, para precisar en qué estaban las diferencias, hasta dónde llegaban las coincidencias y para ponderar si dichas diferencias llegaban a cuestionar la unicidad del concepto de número racional, que parecía ser compartido por todos los matemáticos de la segunda mitad del siglo XX como concepto ya bien definido y refinado como eslabón central en la cadena de inclusiones $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$[11].

Tanto en la primera formulación de 1984 como en la fenomenología didáctica de Freudenthal (1994), no quedaba clara la distinción entre los sistemas simbólicos como representaciones de los sistemas conceptuales ya producidas externamente y los registros semióticos de representación o sistemas productores de esas representaciones semióticas. Esa distinción solo fue posible después

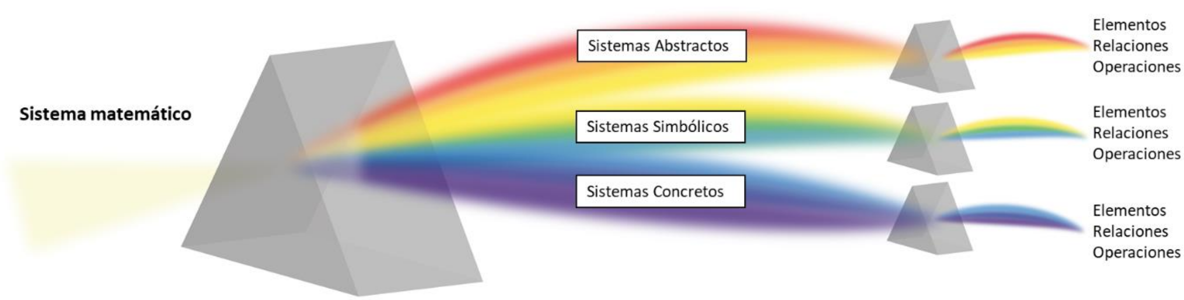
[11] Aunque para algunos matemáticos, no es aceptable esta cadena, aquí se reconoce porque al menos alguno de los elementos de uno de los sistemas numéricos está contenido en el siguiente. Al hablar del isomorfismo de N por ejemplo a un subconjunto de Z no se niega que se encuentra incluida en Z, pues conservan el sustrato.

del libro “Semiosis y Pensamiento Humano” de Raymond Duval (1995) que marca la incursión de la semiótica en la Didáctica de las Matemáticas.

Pese a lo anterior, Vasco (1984), años antes de formular su metáfora del archipiélago en la Teoría General de Sistemas de la Renovación Curricular, sugirió que cualquier sistema matemático, en particular cualquier sistema matemático de la aritmética elemental, como, por ejemplo, un sistema armado, montado o soportado sobre los racionales, las razones, los quebrados o decimales, se descompone en tres bandas, franjas o capas, como si fueran franjas de un haz de luz blanca que pasa por un prisma: los *sistemas simbólicos* como aquellos que aparecen a primera vista en los textos y en las escrituras y los artefactos gráficos que hace el sujeto, los *sistemas conceptuales* y los *sistemas concretos* (en el sentido de ser familiares para los alumnos), que pueden aparecer en actividades cotidianas y estar compuestos de objetos materiales o imaginarios, pero que ya han sido manipulados en alguna forma por el niño de manera informal antes de comenzar la instrucción escolar.

Figura 98.

Sistema matemático



Ya en el modelo del archipiélago fraccionario (Vasco, 1991,1994), y desde una lectura actual con la teoría noético-semiótica de Duval (1999), se reconoce que el modelo propone una diferenciación clara entre los sistemas simbólicos (inicialmente propuestos sin la distinción entre sistemas simbólicos ya producidos y sistemas productores de representaciones o registros semióticos), los sistemas concretos o familiares para los alumnos y los sistemas conceptuales.

Posteriormente Fandiño (2007), después de una amplia revisión de las investigaciones realizadas en torno a los racionales, reconoce que el término “fracción” ha tenido varias interpretaciones, lo que –según la autora– tiene profundas repercusiones matemáticas y didácticas que conllevan a dificultades en su aprendizaje. Por lo tanto, en un libro de la autora –publicado en italiano en el 2005 y el texto enespañol en el año 2009– se presentan los principales significados de la fracción en los que se hace alusión a sistemas conceptuales y a sistemas de representación, típicos de esos años.

Por lo anterior, y proponiendo una teoría que permita diferenciar las situaciones, los invariantes y las formas lingüísticas, Fandiño (2009) retoma la definición de campo conceptual propuesta por Vergnaud y establece que las estructuras multiplicativas contribuyen a dar sentido al concepto de fracción, lo que implicaría que todas las interpretaciones que se tienen de la fracción deberían ser elaboradas y puestas en relación las unas con las otras desde una relación multiplicativa.

Esta propuesta podría implicar que solo habría una única isla, la de los operadores multiplicativos con distintas apariencias y utilizaciones, pero también, en palabras de Vasco (1994), podría implicar que para Vergnaud el operador es precisamente lo que le da estructura del sistema y parece referirse solo a sistemas multiplicativos, lo que dejaría por fuera el sistema aditivo de los partidores; en tanto en el modelo de Vasco, el sistema se refiere a los operadores como componentes o el sustrato y son monstruos achicadores o agrandadores que pertenecen a la isla de los operadores, manteniendo la autonomía de otras islas, aunque reconociendo que esas formas diferentes podrían ayudar a tender, según Vasco "los puentes para cruzar de una isla a otra, siendo las diferentes acepciones o islas profundamente distintas"[12]

En cuanto a la ***semiótica*** como el segundo punto de vista metodológico, desde el "lente noético-semiótico" de Duval, los resultados del estudio permiten sospechar de la confusión entre los registros semióticos como sistemas productores de las representaciones semióticas y de los sistemitas de símbolos o representaciones producidos por el registro.

Para ejemplificar el uso de la semiótica en este análisis, se requiere volver a los modelos y teorías de los racionales. En primer lugar, en el modelo propuesto por Kieren, se considera el *cociente* como aquel subconstructo del número racional que representa una operación de división indicada por el símbolo 'p/q'. Al analizarlo como sistema simbólico, sistema conceptual y sistema concreto, desde los componentes, operaciones y relaciones, es posible afirmar que este "cociente" o "cociente indicado", más que un constructo independiente, es una representación semiótica que tiene como contenido la operación de distribuir o dividir, relacionada con el operador o transformador del sistema conceptual partidor.

Lo que para Kieren hace parte de uno de los sistemas conceptuales de los racionales y, desde nuestra perspectiva, podría ser solo una representación semiótica que permite expresar o interpretar cada uno de los componentes del sistema conceptual partidor.

En todas las teorías citadas se puede ver la constante que se reveló en la investigación que se encuentra a menudo en los maestros y en los libros de texto y por consiguiente se replica en los

12 Esta distinción no está referida a la analogía original del archipiélago, es una interpretación de Vasco (2019) apoyado en la noética-semiótica.

niños, es la confusión entre objeto y representación que se evidencia tanto en el modelo de Vergnaud (1983) como en el de Behr, Lesh, Post y Silver (1983); Nesher (1985) y Ohlsson (1988).

Derivada de la conclusión anterior, se puede afirmar que hay por lo menos dos sistemas conceptuales diferentes: el *operador* y el *partidor*, que posteriormente fueron considerados como sistemas separados o "islas principales" en el modelo del archipiélago fraccionario de Vasco (1994).

Siguiendo con el modelo del archipiélago refinado con la teoría noético-semiótica de Duval (1999), se propone que los sistemas simbólicos (inicialmente propuestos sin la distinción entre sistemas simbólicos ya producidos y sistemas productores de representaciones o registros semióticos), son el intermediario entre los sistemas concretos o familiares para los alumnos y los sistemas conceptuales.

Siguiendo a Fandiño (2009), el campo conceptual de Vergnaud (1983) y su esquema conceptual ternario permiten aproximarnos a lo que la autora llama "el aprendizaje conceptual", que podría acercarse al ejercicio de lo noético en Duval, al afirmar que existen formas lingüísticas diferentes que permiten expresar el mismo concepto —lo que podría corresponder con la existencia de diferentes representaciones semióticas — y que los invariantes pueden homologarse con el contenido de las representaciones, y esos contenidos podrían ser los conceptos subyacentes. Todo esto sería compatible con la hipótesis de que hay una sola isla conceptual con distintos registros semióticos para representar a sus habitantes, pero también con la hipótesis contraria de que hay distintas islas conceptuales, cada una de ellas con distintos registros semióticos. La presente investigación trató de explorar esta situación, y podríamos ahora decir que los resultados confirman la segunda hipótesis, sin ser ésta una pretensión explícita de este estudio.

De acuerdo con lo anterior, esta forma de diferenciar la noética de la semiótica expuesta en Fandiño (2007, 2009) no se había considerado en ninguna de las teorías sobre los racionales anteriores incluida la expuesta por Vasco (1994), lo cual le da un valor agregado al modelo de Fandiño y desde allí se deriva su amplia difusión en investigaciones posteriores.

Con el gran avance que hace la autora en cuanto a pensar en la actividad matemática desde la actividad noético-semiótica, mediante la distinción entre aprendizaje conceptual y aprendizaje semiótico, se considera que lo que ella llama "la fracción" hace parte del aprendizaje conceptual, lo que coincide con los estudios en lengua inglesa, en donde se utiliza "fraction" para el concepto y para el símbolo.

Pero falta todavía precisión en cuatro frentes: en la distinción entre el número fraccionario como concepto y la fracción como símbolo; en la explicitación de los distintos registros semióticos para cada sistema conceptual; en la diferencia entre las representaciones provenientes de cada uno de ellos, así sean superficialmente parecidas, y en la crucial distinción entre tratamientos y conversiones de esas representaciones.

En el presente estudio, los números racionales son los elementos del campo conceptual en el cual se movilizan diferentes sistemas conceptuales, cada uno de ellos con uno o más registros de representación semiótica; entre las distintas representaciones se encuentra la fracción 'p/q' no como un concepto sino como una representación en un registro semiótico muy particular, acompañada de otras representaciones semióticas muy distintas, como los decimales, los porcentajes y las razones expresadas oralmente o con los símbolos clásicos de razón 'p : q' y proporción 'p : q : : r : s'.

Este aspecto semiótico dificulta la interpretación de la literatura en inglés y hace difícil comunicar los resultados de esta investigación en ese idioma, pues, como se dijo en el párrafo anterior, en inglés no se presenta distinción entre "fraction", tomada como "número fraccionario" o "número racional" conceptual, y "fraction" tomada como representación semiótica de la forma 'p/q', perteneciente a un registro semiótico muy particular, tanto que no faltan algunos docentes que crean que es mejor presentar a los alumnos más jóvenes solo el registro semiótico decimal, que es el que se usa en las calculadoras y en los empaques de alimentos, y pretenden evitar durante un tiempo el uso de las fracciones, y aún el empleo de las palabras "numerador" y "denominador".

El conocimiento por parte de los docentes de algunos de esos sistemas conceptuales distintos del habitual en los libros de texto podría facilitar el manejo de los grupos y de los estudiantes más lentos o de aquellos con capacidades excepcionales, sin obligarlos a todos a manipular mecánicamente los símbolos para llegar a los mismos resultados numéricos. En palabras de Duval, esta práctica de aula que se repite en todas partes del mundo —así sea "exitosa" en facilitar los aprendizajes memorísticos—, estaría contribuyendo a que los estudiantes confundan las representaciones semióticas y sus tratamientos con el sistema conceptual matemático y su manejo mental, e impidan el ejercicio de conversiones de un registro semiótico a otro y el reconocimiento de invariantes que podrían pertenecer a posibles sistemas conceptuales alternativos.

Recogiendo esta premisa y haciendo una lectura noético-semiótica, los sistemas simbólicos que se presentaron en el modelo inicial del archipiélago fraccionario (Vasco, 1994), en la presente investigación se pudo notar que en él se desconocía la potencia de la multiplicidad de registros semióticos, que ahora se reconocen como partiendo del registro de la lengua materna oral, complementándose con la introducción de otros registros orales, escritos y gráficos que posibilitan la formación del sistema conceptual como invariante de distintos registros.

Si el modelo hubiera tenido en cuenta la diferenciación entre sistemas simbólicos producidos y representados públicamente y los registros semióticos productores de dichas representaciones, se habría posibilitado una conceptualización mucho más fina de las islas del archipiélago y de los puentes entre ellas, a partir de las transformaciones semióticas en el mismo registro o *tratamientos*, internos a cada una de las islas, y de las transformaciones de representaciones de un registro a otros diferentes o *conversiones* entre registros utilizados en islas diferentes.

Vista en otro sentido, la metáfora del archipiélago fraccionario propuesta por Vasco (1994), refinada con los presupuestos teóricos y epistemológicos que la teoría de Duval, nos aportó conceptos y métodos que nos permitieron identificar distinciones entre los sistemas de representaciones semióticas producidos por maestros y alumnos — antes denominados indistintamente "sistemas simbólicos" — y los sistemas productores de dichas representaciones o registros semióticos, que no se habían explicitado antes, y precisar la diferencia entre los sistemas conceptuales que corresponden a las diferentes islas del archipiélago y los diferentes registros semióticos como sistemas productores de las representaciones públicas de esos sistemas conceptuales, que podrían ser distintos para un mismo sistema conceptual. Así se logró hacer inferencias sobre los contenidos conceptuales como invariantes de las representaciones, con los respectivos modelos mentales y las teorías interpretadas en ellos, como productos de la actividad mental noético-semiotica de los sujetos maestros y alumnos.

Extendiendo la metáfora del archipiélago, los registros semióticos podrían ser las lenguas o distintos dialectos que se hablan en cada una de las islas —que podrían ser distintas en una misma isla— que permiten expresar e interpretar los modelos mentales de los habitantes de esa u otras islas por medio de traducciones entre lenguas diferentes, que corresponden a las conversiones. Las cercanías lingüísticas entre las lenguas o registros permiten establecer puentes entre las islas, que permiten transportar la información de una isla a otra.

En cuanto a la isla independiente denominada por Vasco “cocientes indicados”, la definición que hace de sus habitantes apunta a que —más que pertenecer un sistema conceptual diferente— se trata de representaciones semióticas producidas por ciertos registros semióticos que producen esos cocientes indicados ‘p/q’ como representaciones semióticas, cuyo contenido conceptual se ubicaría más bien en el sistema conceptual de los partidores, puesto que el cociente indicado ‘p/q’ es interpretado como “p-veces un qu-avo o un qu-ésimo”.

Pero también puede considerarse como otra representación semiótica producida por el registro de los operadores, cuando desde el sistema conceptual operador, el cociente indicado p/q es el resultado de aplicar primero el achicador 1/q, “un qu-avo” o “un qu-ésimo” a la cantidad inicial dada, y luego el agrandador p/1 o “p-veces” al resultado, para lo que también ‘p/q’ es un buen símbolo del operador resultante, pues (p/1)•(1/q) = (p/q), con la multiplicación como aplicación sucesiva.

En cambio, la isla de las razones sí aparece como una isla conceptual independiente, con distintos sistemas productores –registros semióticos– de representaciones, de relaciones multiplicativas entre cantidades o sistemas de cantidades homogéneas o heterogéneas, como se trabajó en la tesis doctoral de Obando (2015).

Reformulando esta complementariedad entre lo expuesto por Duval (1999) y la metáfora del archipiélago fraccionario propuesta por Vasco (1994), es posible proponer un modelo enriquecido con elementos semióticos que distingue algunas “islas conceptuales” como los partidores, los operadores y las razones, y otras “islas simbólicas”, que podrían ser los registros semióticos, como los cocientes indicados, o los números decimales, o los porcentajes, o las gráficas rectangulares y circulares, con los animales que viven en cada una de esas islas como representaciones semióticas particulares pertenecientes a ese mismo registro.

Las transformaciones entre representaciones semióticas que viven en la misma isla simbólica serían *tratamientos* y las correspondencias activas entre dos representaciones de dos islas simbólicas diferentes que pretenden "expresar lo mismo" serían las *conversiones*. En este sentido y con estas precisiones, el modelo del archipiélago sigue estando vigente y contribuye a reconocer en la estructura de los modelos conceptuales de los racionales y sus diferencias con los registros de representación semiótica a través de los cuales se propone el aprendizaje de los racionales.

En síntesis, recogiendo los diferentes modelos y teorías sobre los racionales que permitieron la construcción del marco teórico y posteriormente se convirtieron en puntos de referencia para analizar y contrastar los resultados, se pudo evidenciar la ausencia de la semiótica en los estudios realizados hasta finales del siglo XX, la cual, en la actualidad, ocupa una posición prominente en la investigación de la didáctica de la matemática, con el reconocimiento de la actividad matemática como una actividad noético-semiótica. Por todo lo anterior se pueden formular las siguientes conclusiones:

- La existencia de diferentes constructos, acepciones o significados de las representaciones semióticas de números racionales permite afirmar que también se refieren a diferentes sistemas conceptuales de los números racionales con sus modelos mentales diferentes (Kieren, 1983; Nesher, 1985; Ohlsson, 1988; Behr, Lesh, Post & Silver, 1983; Freudenthal, 1983/1994; Vasco, 1994 & Fandiño, 2009).
- La distinción entre sistemas conceptuales y sistemas semióticos en términos de Fandiño (2009), aporta al conocimiento de los objetos matemáticos y permite reconocer la paradoja

cognitiva, ya que no hay otra forma de acceder a ellos sino a través de sus representaciones parciales, ninguna de las cuales es identificable con el objeto sistémico. Desde la paradoja cognitiva de Duval (1999), esa parcialidad no se remedia buscando otros registros menos ambiguos, pues no sabríamos que se ha construido el mismo objeto matemático aun cuando se sepa manejar dos o tres registros semióticos, aspecto que no había sido considerado en las conceptualizaciones precedentes.

- Los diferentes registros de representación semiótica permiten expresar e interpretar públicamente los diferentes sistemas conceptuales privados, ya que la correspondencia entre los registros a partir del reconocimiento del invariante con respecto a las conversiones entre registros, permite la conceptualización matemática.
- Al establecer la diferenciación entre sistemas conceptuales, sistemas semióticos productores o registros y representaciones semióticas como productos del registro respectivo, es posible reconstruir distintos modelos en torno a los racionales y, posiblemente, construir nuevos modelos que faciliten su aprendizaje. Cada modelo permite seleccionar tareas y actividades matemáticas que propicien y privilegien tanto la semiosis expresiva como la interpretativa.

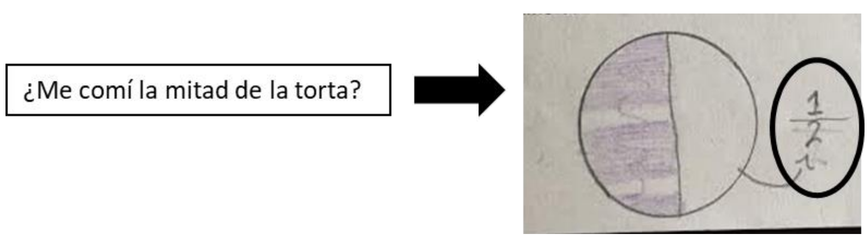
8.2.2. *Desde las categorías emergentes en el estudio*

Involucrar la semiótica en la Didáctica de las Matemáticas y en el análisis de la actividad matemática permitió reconocer que la comprensión de los sistemas conceptuales de los racionales por parte de los niños–en este caso, de quinto grado– se hace explícita en la interpretación y producción de representaciones semióticas, en las transformaciones semióticas de tratamiento y, más que todo, en las transformaciones de conversión que ellos realizan, aspecto a considerar en futuras propuestas de actividades para la clase de matemáticas.

A lo largo de esta investigación, las implicaciones de tener en cuenta los registros de representación y la sintaxis de las representaciones propiciaron el surgimiento de las siguientes categorías:

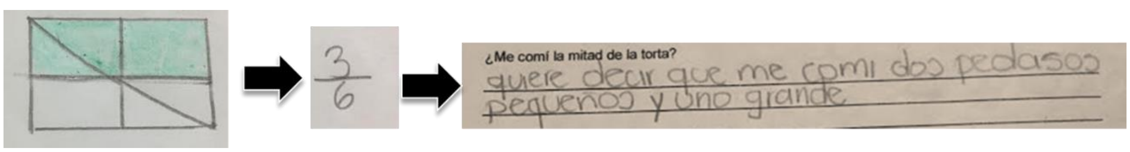
- El reconocimiento de la relación parte-totalidad y totalidad-parte se hace evidente en las transformaciones semióticas. En el caso del tratamiento, desde el registro en lengua natural, tanto oral como escrito, se inicia con una referencia la parte y luego se nombra la totalidad. Ej. "*Me comí la mitad de la torta*". En cambio, al realizar la conversión al registro gráfico, pictórico o numérico, el tratamiento al interior de cada uno de estos registros, dados los recursos que cada uno de ellos posee, lleva a que se inicie con la totalidad y luego se llegue a la parte, tanto en la interpretación como en la expresión de las representaciones semióticas.

Veamos un ejemplo extraído de los resultados que confirma la anterior afirmación:



- La equipartición, que tanto los autores, maestros y libros de texto suelen asumir como condición de la partición y que, además, es un mecanismo constructivo para Kieren, sí se usa con frecuencia en la construcción de los números racionales en los sujetos analizados. Después de realizar el análisis de los datos, este concepto se hace visible en el registro en lengua natural únicamente cuando quien la interpreta y la produce recurre a identificar o incluir en la construcción de las unidades elementales la condición de igualdad (“en partes iguales”) que aún en los casos en que aparece ese marcador lingüístico, no se especifica la magnitud que se utiliza para precisar “iguales de qué” o “iguales en qué”; sin embargo, al realizar procesos de conversión a otros registros como el pictórico, gráfico y numérico, no se encuentra dentro de los recursos semióticos utilizados y, por consiguiente, no aparece explícita en el contenido de la representación. Por lo tanto, para el niño, que la partición sea equitativa, en el sentido de que todas las partes sean iguales, no es condición de la partición.

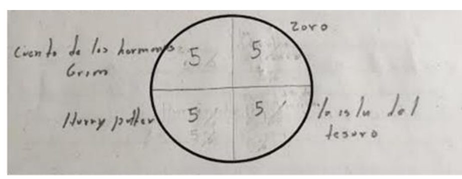
Dentro de los hallazgos del estudio, la anterior afirmación se ejemplifica de la siguiente manera:



- Como ya se ha hecho referencia en la teoría general de procesos y sistemas –TGPS– y en la de modelos y teorías –TGMT–, dentro de los componentes de todo sistema se identifican tres aspectos: componentes, relaciones y operaciones, que corresponden al sustrato, la estructura y la dinámica de cada sistema, respectivamente. Dentro de los hallazgos del presente estudio, se pudo identificar que los operadores de un modelo mental sistémico actúan como transformadores internos implícitos que cambian unos elementos por otros del mismo sustrato, unas relaciones por otras dentro de la misma estructura y unos operadores por otros dentro de la misma dinámica interna de cada sistema. Pero la dinámica misma en acción no se puede describir y por eso se tienen solo símbolos estáticos de operadores, que suelen ser representados a su vez por los matemáticos con su gráfica de parejas ordenadas (argumento, resultado). Estas parejas solo representan relaciones estáticas “antes y después”, sin indicar el proceso que llevó a transformar el argumento en el resultado, el cual solo se puede rastrear cuando el estudiante trata de calcular con precisión el resultado por medio de tratamientos simbólicos intermedios dentro del mismo registro (internos).

- Esto ocurre debido a que el modelo estático solo permite identificar el producto que es la representación resultante del proceso, y el paso de la representación inicial del argumento a la del resultado podría ser solo una asociación memorística que no permite “ver” la dinámica en marcha, que requiere “echar a andar” o “echar a correr” el modelo mental dinámico. Es el movimiento mismo, la actuación mental de “correr” la dinámica lo que propicia la aparición de los operadores como transformadores activos y, por consiguiente, permite efectuar la operación mentalmente y aun corregir la escritura, tal como se observa en el siguiente ejemplo extraído de los datos:

Zoro	5
La isla del tesoro	5
Harry Potter	5
Cuentos de los hermanos Grimm	5



El estudiante intenta incluir dentro de la gráfica circular además de las cantidades, los nombres de los libros pero finalmente los ubica por fuera y en el orden de las manecillas del reloj.

Por lo tanto, el cálculo simbólico es un tratamiento, porque cuando se trata de calcular el resultado de un operador, se está haciendo un tratamiento de la representación llamada “argumento” para obtener otra, llamada “resultado o producto”, ambas dentro del mismo registro semiótico. Lo anterior permite explicar y comprender que “partir” no es propiamente un operador hasta que no se “eche a andar” el modelo. Para que esto se haga evidente es necesario pedirle a quien produce o interpreta la representación que externalice el tratamiento que realizó, o que infiera lo que fue el tratamiento a partir de estudiar la representación del argumento y la del producto.

Se corrobora en el análisis que el constructo llamado “la razón” se considera una comparación multiplicativa de dos cantidades pero sin relacionar dicho constructo con los de la isla de los partidores o de la de los operadores, ya que solo parece usarse en la comparación entre dos cantidades de la misma magnitud, como por ejemplo decir “es el doble de larga” para dos líneas rectas o franjas horizontales o verticales que parece ser una razón agrandadora o ampliadora, pero tanto los maestros como los niños parecen creer que solo los reductores son fraccionarios y por esa razón identifican la razón “es la mitad de larga” como un número racional o razón, lo que no ocurre con la razón doble o triple, porque el agrandador p-veces no vive en ninguna de las islas del archipiélago fraccionario sino en la gran isla de los números naturales, cardinales o contadores.

8.1.3. *Desde la relevancia de la semiótica en el aprendizaje de los racionales*

Retomando el análisis de los modelos y las teorías de autores, maestros y libros de texto sobre los racionales, así como la reconstrucción de los modelos de los niños y niñas de quinto grado, fue posible confirmar en este estudio la potencia de los registros de representación semiótica que como sistemas productores de las representaciones ponen en evidencia las comprensiones y obstáculos para el aprendizaje de todos los conceptos matemáticos, en particular del concepto o de los conceptos de número racional.

La teoría de Duval (1999, 2004, 2006, 2017) focaliza el análisis de los sistemas de registros de representación semiótica durante la actividad matemática, en la cual circulan registros y representaciones semióticas desde la semiosis tanto interpretativa como la expresiva, que lograron diferenciarse en este estudio, debido a que en cada una de ellas se presentan demandas cognitivas diferenciadas, como veremos a continuación:

Cuando el maestro propone una situación matemática, el estudiante realiza una actividad de semiosis interpretativa, mediante las siguientes acciones:

- Identificación del registro semiótico sobre el cual el maestro produce la representación.
- Reconocimiento de las unidades constitutivas de la representación semiótica producida por el maestro y del tratamiento realizado.

Estas acciones se pueden reconocer en la actividad de semiosis interpretativa que hace el estudiante, cuando se le pregunta acerca de la expresión:

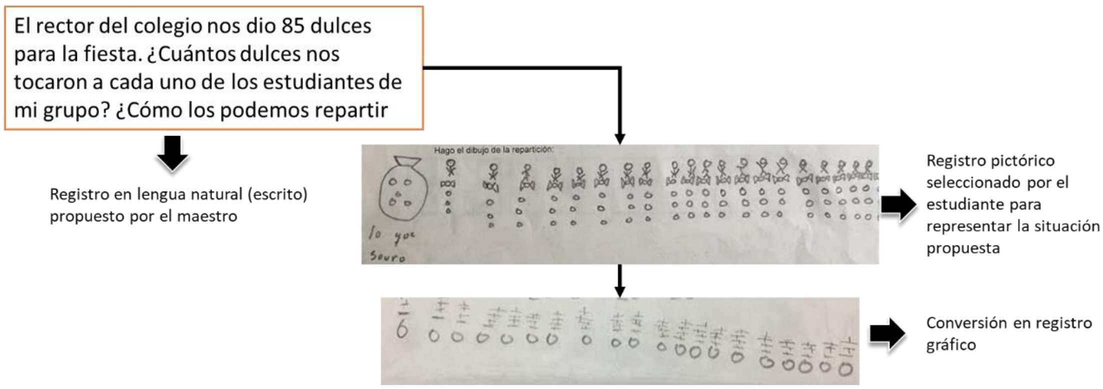
¿Me comí la mitad de la torta? ➡ ***“Que separe ½ de la unidad”***

Lo anterior, derivado de los resultados de la presente investigación implica la identificación y comprensión de los registros semióticos en donde ha tenido acercamiento mediante la semiosis expresiva, lo que indica que, si no se han hecho tratamientos al interior de los registros o conversiones entre los registros, se pueden presentar dificultades para interpretar las representaciones propuestas por los alumnos y si responden o no a las esperadas por el maestro.

Cuando se pretende dar respuesta a la situación matemática propuesta por el maestro, el estudiante realiza una actividad de semiosis expresiva, mediante las siguientes acciones:

- Selección del registro de representación sobre el cual va a producir la representación semiótica, cuando se les pide que represente de otra manera la siguiente expresión “repartir 85 dulces entre 20 niños”.

- Identificación de las reglas de conformidad del registro sobre el cual realizará el tratamiento de la representación semiótica.
- Conversión de la representación semiótica de un registro a otro.



Para la semiosis expresiva, se requiere del estudiante no sólo la identificación del registro sobre el cual produce las representaciones, sino también poner en juego los recursos semióticos de que dispone el registro en el cual se produce la representación, de tal manera que pueda producir una representación pertinente al registro y de fácil comprensión para quien hará la semiosis interpretativa.

8.2 Limitaciones del estudio

La actividad matemática de maestros y alumnos analizada desde una perspectiva noético-semiótica pone en evidencia algunas limitaciones que se presentaron en la puesta en marcha de las técnicas de recolección de los datos y de análisis, debido al carácter implícito de los registros y de la producción de las representaciones y sus tratamientos, así como de las comprensiones que los sujetos, puedan tener en torno a los registros semióticos de representación. Por lo tanto, el análisis puede aparecer a veces sesgado, ya que la interpretación y expresión de las representaciones semióticas se hace a través de la inferencia que pudo realizar la investigadora de la actividad mental del sujeto, en este caso del estudiante. Estas inferencias pueden ser muy subjetivas, a pesar del esfuerzo que se hizo por triangularlas con los tutores y colegas investigadores.

De igual manera, la producción de representaciones semióticas resultantes de las operaciones indicadas en los ejercicios sucede cuando el estudiante “echa a andar” el modelo mental, dada la naturaleza del mismo que es dinámico y no estático; por lo tanto, se debió acudir a grabaciones de video durante la realización de las transformaciones semióticas que permitiera evidenciar su construcción y no esperar a que quedara registrado en el cuaderno, “congelando” el modelo producido y activado por el estudiante. Pero estas representaciones ya dibujadas y escritas son las que se prestan más para el análisis, y los intentos de reconstruir el proceso mental y los modelos puestos en marcha dependen en gran medida de las experiencias previas y sesgos de la investigadora.

Con el fin de no caer en especulaciones, se tuvo en cuenta al analizar la producción de las representaciones semióticas y sus transformaciones durante la actividad matemática la realización de diferentes actividades que provocaran semiosis expresivas e interpretativas, teniendo en cuenta esta variedad al analizar las producciones de los niños y seleccionar los datos. Se analizó la consistencia y coherencia de los datos seleccionados teniendo en cuenta la totalidad de la información recolectada, de tal manera que se pudieran obtener nuevos detalles en la producción de representaciones que permitieran inferir la manera como construyen los niños las representaciones semióticas a partir del conocimiento que tienen de los registros semióticos. Pero solo la replicación de investigaciones como esta en otras poblaciones escolares y en otras partes del país podrá depurar las inferencias que, a pesar de los controles, pueden haber resultado muy subjetivas.

Otra limitación que se hace evidente en un estudio cualitativo como este es que, durante el desarrollo de la actividad matemática, o al finalizarla, se debió solicitar a los niños que “explicaran en voz alta” cómo realizaron el tratamiento de las representaciones semióticas; es decir, fue necesario pedirles que explicaran y describieran con sus propias palabras lo que iba sucediendo en su mente mientras iban produciendo o interpretando las diferentes representaciones, ya que la dinámica del modelo no era posible registrarla en el momento en que fue sucediendo. Puede considerarse una limitación, porque en las explicaciones e interpretaciones de las grabaciones ya no se trata de la cognición “en caliente”, sino de evocaciones de acciones ya realizadas en el pasado, muchas de las cuales pueden ser una reinterpretación subjetiva de la representación producida inicialmente. Pero esta limitación es inevitable en cualquier forma de utilización de protocolos de “pensar en voz alta”.

Con el fin de reducir esta limitación, se les pidió a los niños que emplearan una hoja de papel diferente a su cuaderno, en donde pudieran explicitar los tratamientos implícitos que iban sucediendo hasta llegar al producto final, que es la representación semiótica derivada de un tratamiento o de una conversión.

También se considera una limitación del estudio que las instrucciones dadas por la investigadora durante la actividad matemática propuesta a los estudiantes, así como la selección de las tareas a resolver, pueden haber estado ya sesgadas a lo que se esperaba observar, ya que en estas acciones se refleja la organización del modelo mental de quien propone la actividad, lo que puede influir en el desarrollo de la actividad matemática de los niños o sesgar la interpretación posterior.

Dada la naturaleza y estructura de los registros de representación semiótica que circulan durante la actividad matemática, se requiere de un análisis más profundo de la evolución histórica de cada uno de los registros semióticos utilizados, así como también de los implícitos lingüísticos y psicológicos de su uso; el carácter todavía incipiente de este análisis puede ser también una limitación en la realización de investigaciones desde una perspectiva semiótica.

La realización de investigaciones didácticas en un ambiente natural de aula en donde, por implicaciones éticas se requiere la participación de todos los estudiantes del curso, puede convertirse en una limitación al momento de recoger información, debido a la multiplicidad de variables de que dispone la clase, como el espacio, la organización del espacio del aula, el docente, el comportamiento de los estudiantes, entre otros aspectos que pueden afectar la actividad matemática y por consiguiente la recolección de información.

Los criterios de exclusión de la unidad de trabajo también puede verse como una limitación del estudio, ya que en la selección de los estudiantes participantes en el estudio, se requiere la revisión de la actividad realizada, la claridad en la escritura y el uso de recursos semióticos que entran en juego al momento de realizar la investigación, que para este caso particular, en donde es necesaria la variedad en la producción de representaciones semióticas no es posible incluir aquellos estudiantes que hacen poco uso de los recursos semióticos.

8.3 Implicaciones teóricas, investigativas y educativas

Un primer aspecto —que puede aparecer como una recomendación muy general, pero que ha permeado todo el proceso— fue comprender la pertinencia e impacto que tienen en la investigación educativa y didáctica los modelos mentales individuales vistos como sistemas que todos y cada uno de nosotros, profesores, alumnos e investigadores construimos para representar procesos y subprocesos que vivimos colectiva y púbicamente. Estos modelos mentales son los que nos permiten permanentemente hacer descomposiciones y desagregaciones, inferencias y conjeturas, y establecer relaciones o nexos entre los diferentes componentes de esa porción de la realidad que para cada uno de nosotros es ‘mi realidad’, y que es la se mantiene activa en la memoria y la imaginación de cada participante. A pesar de la aparente seguridad que sentimos de que todos compartimos la misma realidad por estar participando conscientemente en una actividad conjunta, los investigadores tenemos que aprender de los antropólogos a hablar con cautela solo de “la realidad que damos por compartida”.

Recomiendo, pues, para futuras investigaciones retomar la Teoría General de Modelos y Teorías –TGMT– propuesta por Vasco y su distinción precisa entre *modelo* mental como sistema imaginativo y *teoría* como formulación lingüística en un registro semiótico de lenguaje oral al que se subordinan otros registros de representación. Esta combinación de modelos y teorías con el enfoque semiótico de Duval enriquece los métodos y las técnicas de investigación y posibilita miradas más comprensivas, holísticas e integrales de los fenómenos educativos y didácticos.

Lo anterior se afirma debido a la experiencia vivida en el desarrollo de la tesis que recoge las posibilidades epistemológicas, metodológicas y didácticas que ofrece la TGMT a la investigación educativa para “ver” los fenómenos, para descomponerlos y comprenderlos, comparando esta experiencia con la de las investigaciones anteriores en las que esta investigadora había participado.

Teniendo en cuenta que la presente investigación se suscribe en la didáctica B, que va más allá de la atención a la enseñanza (didáctica A) y se convierte en un ejercicio de la epistemología del aprendizaje de la matemática, como lo proponen D’Amore y Fandiño (2015), se pudo reconocer y confirmar la pertinencia de los planteamientos de Duval en cuanto al aprendizaje del objeto matemático número racional a partir de las representaciones y transformaciones semióticas, porque ofrece nuevas herramientas para hacer el tránsito hacia futuras didácticas (como la didáctica C, o D, u otras que las sigan), en donde el objeto de estudio además de ser la actividad matemática misma, permita el reconocimiento de la semiótica como exigencia emergente de toda investigación(D'Amore, 2006).

De acuerdo con D'Amore, Fandiño & Iori (2013), se sugiere involucrar en todos los procesos de formación en didáctica de la matemática el estudio de los sistemas de representación semiótica y su relación con los sistemas conceptuales propuestos desde los modelos y las teorías existentes por la pertinencia para la organización de las situaciones matemáticas que se proponen en el aula.

Lo anterior se confirma por Vasco (2017), en su prólogo a la segunda edición de la traducción corregida en 2017 del libro "Semiosis y Pensamiento Humano" (escrito por Duval en francés en 1995 y traducido por Myriam Vega Restrepo en 1999). En dicho prólogo, Vasco dice que esta teoría ha ganado un lugar que hoy se considera necesario en las investigaciones en didáctica de la matemática, especialmente en el análisis de datos, en donde la distinción entre sistemas semióticos productores de representaciones semióticas y las representaciones semióticas como sistemas simbólicos producidos por quienes participan en cualquier actividad matemática a través de la semiosis interpretativa y expresiva, con la correspondiente distinción entre tratamientos y conversiones, que son las que permiten el acceso a los objetos matemáticos como invariantes de múltiples representaciones semióticas, se constituye en un punto "de no retorno" en la metodología de investigación de la didáctica.

Según los hallazgos del presente estudio, este tipo de análisis noético-semiótico permitió reconocer las posibilidades que los registros semióticos ofrecen a la producción de las representaciones y sus transformaciones semióticas, así como en las posibilidades de inferir los componentes del modelo mental que no se hacen directamente “visibles” en sus representaciones, sino que requieren una interacción del docente y estudiante en torno a diversas y variadas representaciones y transformaciones semióticas con el fin de lograr el aprendizaje en el estudiante y el acceso de los docentes e investigadores a esos ricos procesos mentales de aprendizaje profundo de las matemáticas; por consiguiente, es necesario que los docentes y los investigadores en didáctica de la matemática realicen permanentemente vigilancia epistemológica y semiótica y que afinen las herramientas para analizar a profundidad las características de los diferentes sistemas conceptuales, sus modelos y sus teorías.

En cuanto a los sistemas conceptuales de los racionales en particular, se sugiere de acuerdo con los resultados del presente estudio tener en cuenta los siguientes aspectos al momento de pensar la actividad matemática:

- Reconocer que además de afirmar lo que proponen Cortina, Zuñiga &Visnovska (2013) acerca del obstáculo didáctico que genera la equipartición como acercamiento inicial al desarrollo de las primeras nociones en torno a los racionales, existe también un obstáculo semiótico debido a la ausencia de unidades elementales y constitutivas de los registros semióticos que den cuenta de la equipartición, ya que esta sólo se hace visible en el registro en lengua natural y depende de la construcción que realiza el docente o se expresa en los libros de texto.
- Los operadores considerados como tratamientos mentales implícitos, de acuerdo con los resultados que arroja el presente estudio, deben trabajarse de manera explícita en las actividades de clase de tal manera que se evidencie la comprensión que están alcanzando los estudiantes al poner en movimiento, o “echar a andar y a correr” sus modelos mentales y de esa manera permitan explicitar sus teorías.

- La razón en cuanto relación multiplicativa entre sistemas de cantidades de la misma magnitud (razones homogéneas), especialmente entre dos longitudes, dos áreas o dos volúmenes, o entre dos magnitudes diferentes (razones heterogéneas), como concepto subyacente a esta isla particular de los racionales, debe formularse y establecerse de manera explícita en la semiosis expresiva del maestro y de los materiales escritos, textos y guías, de tal manera que se posibilite al estudiante el reconocimiento de este tipo de relaciones multiplicativas cuanto se encuentra en el sistema operador y pueda, de manera consciente, distinguirlas de las relaciones aditivas presentes en el sistema partidor y hacerlas evidentes cuando resuelve situaciones matemáticas.
- Es llamativo que este concepto de razón entre parejas de cantidades de la misma o de dos magnitudes geométricas o físicas distintas —que podríamos llamar “razón talesiana” o “eudoxiana” o “euclidiana”— no aparece explícitamente en ninguno de los textos escolares ni en las actividades de clase propuestas por los maestros y maestras, ni en las producciones semióticas de los estudiantes observados en la Educación Básica Primaria. Si solo contáramos con las investigaciones hechas en Manizales en este nivel de la educación pública y privada, esta isla conceptual tan venerable y antigua parecería estar desierta o haber desaparecido bajo las aguas.

Referencias

Balachef, N. (2004). Marco, Registro y Concepción. *Revista EMA 2004*, Vol. 9, (3). pp. 181-204.

Behr, M., R. Lesh, T. Post & E. Silver (1983). “Rational number concepts”, en R. Lesh y M. Landau (eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 91-125). Nueva York, Academic Press

Brousseau, G. (1986) Fundamentos y métodos de la Didáctica de las Matemáticas. En: *Recherches en didactique des mathematiques*.2 (3), 37 – 127.

Coffey, A. & Atkinson, P. (2003). *Encontrar el sentido a los datos cualitativos: estrategias complementarias de investigación*. Editorial de la Universidad de Antioquia.

Confrey, J. & Carrejo, D. (2005). Ratio and fraction: The difference between epistemological complementarity and conflict. In D. Carraher & R. Nemirovsky (Eds.), *Journal for Research in Mathematics Education*. Monograph, (13). Reston, VA: NCTM.

Confrey, J. & Maloney, A. (2008). *From fraction to rational number: Diagnostic e-learning trajectories approach (DELTA) to rational number reasoning*.

Cortina, J., Zuñiga, C. & Visnovska, J. (2013) La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones. *Educación Matemática,* vol. 25, núm. 2, agosto-, 2013, pp. 7-29.

Cortina, J.L. (2014) Investigar las fracciones: experiencias inspiradas en la metodología de los experimentos de diseño. *Educación Matemática*, , 270-287.

Dey, I. (1994). Grounded theory. En C. Seale, G. Gobo, J. F. Gubrium & D. Silverman (Eds.), *Qualitative research practice* (pp. 80-93). Londres:Sage.

D´Amore, B. (1999) *Didáctica de la Matemática* (A. Balderas, Trad.). Bogotá: Magisterio

D´Amore, B. (2001). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. *Uno*, 27, 51-76.

D’Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2002). Un acercamiento analítico al triángulo de la didáctica. *Educación Matemática*, 14(1). 48-62.

D’Amore, B. (2002) *La complejidad en la noética en matemáticas como causa de la falta de devolución*. (11, 63-71). TED. Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional.

D´Amore, B. (2004) Conceptualización, registros de representación semiótica y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis y algunos factores que inhiben la evolución. *Uno*. 35, 90 – 106

D'Amore B. (2006). Didattica della matematica "C". In: Sbaragli S. (Ed.) (2006). *La matematica e la sua didattica, vent'anni di impegno.* Atti del Convegno Internazionale omonimo, Castel San Pietro Terme, 23 settembre (pp. 93-96). Bologna: Pitagora.

D´Amore, Bruno (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, (Esp). pp.177-195

D'Amore, B. (2009) Conceptualización, registros de representación semiótica y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis y algunos factores que inhiben la evolución. *Revista Científica Enseñanza de las matemáticas.* pp. 150 – 164

D'Amore, B. (2012) El debate sobre conceptos y objetos matemáticos: la posición "ingenua" en una teoría "realista" vs. El modelo "antropológico" en una teoría "pragmática" en Calderon D.I. (comp.) *Perspectivas en la Didáctica de las Matemáticas*. pp.17 – 47. Doctorado Interinstitucional en Educación.

D'Amore, B., Fandiño M.I. & Iori, M. (2013) *La Semiótica en la Didáctica de la matemática*. Colección Didáctica de las matemáticas. Editorial Magisterio.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "paradoja cognitiva de Duval". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(2), 177-212. https://doi.org: 10.12802/relime.13.1822.

D'Amore, B. & Fandiño, M. (2016). Reflexión sobre algunos conceptos clave de la investigación en Educación Matemática: didáctica, concepto, competencia, esquema y situación. *Encuentro Internacional en Educación Matemática.* La educación matemática como herramienta en el desempeño profesional docente. Cúcuta, Colombia. pp. 61 - 67

Duval, R. (1993). Registros de Representación Semiótica y Funcionamiento Cognitivo del Pensamiento. Traducciones para fines educativos (Hitt, F.; Ojeda A.M.). *Annales de Didactique et de Sciencies Cognitives*. (5pp. 37-65). Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN.

Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Editorial Universidad del Valle.

Duval, R. (2004) *Los problemas Fundamentales en el Aprendizaje de la Matemáticas y las Formas Superiores del Desarrollo Cognitivo* (M. Vega, Trad.). Editorial Universidad del Valle.

Duval, R. (2006a). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Special Issue Semiotic Perspectives in Mathematics Education.* 61. 103 – 131. https: //doi.org: 10.1007/s10649-006-0400-z

Duval, R. (2006b). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*, Vol. 9. pp. 143–168.

Duval, R. (2017) *Semiosis y Pensamiento Humano*.(2ª. Ed.). Editorial Universidad del Valle.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. Berlin, New York, etc.: Springer-Verlag.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. Foreword by Bruno D'Amore. Cham, Switzerland: Springer International Publishing AG.

Ernest, P. (2006) A Semiótic Perspective of Mathematical Activity. *Educational Studies in Mathematics 61(1)*,67-101.

Fandiño, M.I. (2009) *Las Fracciones: Aspectos conceptuales y didácticos*. Editorial Magisterio.

Fernández, C. & Llinares, S. (2010) Relaciones entre el pensamiento aditivo y multiplicativo en estudiantes de educación primaria. El caso de la construcción de la idea de razón. *Horizontes Educacionales*, Vol. 15, N° 1. 11-22.

Freudenthal, H. (1983) *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*. (L. Puig. TRad). Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV – IPN

Gagatsis, A. (2003). The effects of different modes of representation on mathematical problem solving. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 2, 447–454

Godino, J. D. (2000). *Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina Científica*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática. http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_tfs.htm.

Godino, J. D., Batanero, C. (1994). Significado Institucional y personal de los objetos matemáticos. en *Reserches en Didactiques des Mathematiques*. Vol 14. 325 – 355

Godino, J., Batanero, C. & Font, V. (2007). The Ontosemiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.

Godino, J., Font, V. & Castro, E. (2009). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2). 127-135.

Gonzalez, G. & García, L.I (2012). *Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto funcional lineal* [tesis de maestría]. Repositorio Institucional Universidad Autónoma de Manizales. http://hdl.handle.net/11182/165

Hart K. (1980). From whole numbers to fractions and decimals. *Recherches en didactique des mathématiques.* 1, 1, 61-75. Hart, K. (1981). "Fractions" En: Hart, K. (ed.) (1981) *Children's Understanding of Mathematics*. (pp.68-81). Londres: Murray.

Hart, K. (1989), "Fractions: Equivalence and addition", en K. Hart, D. C. Johnson, M. Brown, L. Dickson y R. Clarkson (eds.), *Childrens' Mathematical Frameworks* (pp. 46-75). Windsor, NFER-Nelson

Janvier, C. (Ed.). (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J., & West, M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems: factors affecting informal reasoning patterns. En G. Harel & J. Confrey (Eds.), The *Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 235-290). Albany, NY: State University of New York Press.

Kaput, J. (1998). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 265-281. https://doi.org: 10.1016/S03640213(99)80062-7

Kieren, T. E. (1980), "The rational number construct: Its elements and mechanisms", en T. E. Kieren (ed.), *Recent Research on Number Learning*(pp. 125-149). Columbus, ERIC/SMEAC

Kieren, T.E. (1983). "Partitioning. Equivalence and the construction of Rational Number ideas". En: Zweng, M., Green, M.T., Kilpatrick, J. (eds)(pp. 506-508). *Proceedings of IV ICM.* Boston.

Kieren, T.E., Nelson, D., & Smith, G. (1985). Graphical Algorithms in Partitioning Tasks. *The Journal in Mathematic Behavior*, 4. pp. 25 - 36

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162-181). Reston, Virginia: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieren, T.E. (1993) Rational and fractional numbers: from quotient fields to recursive understanding. En: Carpenter, T.P., Fennema, E., Romberg, T.A. (eds.) *Rational Numbers: and Integration of the Research.* (pp. 49 – 84) Hillsdale (N.J.): Lawrence Erlbaum Ass.

Lamon, S. J. (2007), "Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research", en F. K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Charlotte, Information Age Pub, pp. 629-667.

Llinares, S. (2003) *fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte todo al razonamiento proporcional*. En Chamorro, M. (comp.) Didáctica de las Matemáticas. (pp. 187 – 220). Prentice Hall

Maher, C. A., & Martino, A. M. (1996). The Development of the Idea of Mathematical Proof: A 5-Year Case Study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 194. https://doi.org/10.2307/749600

MEN (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Documentos del Ministerio de Educación Nacional.

MEN (2006). *Estándares básicos de competencia matemáticas en Lenguaje Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Documentos del Ministerio de Educación Nacional.

Miles, M., & Huberman, M. (1994). *Qualitative data analysis*.(2a ed.). Thousand Oaks, California: Sage.

Nesher, P. (1988). Multiplicative school word problems: theoretical approaches and empirical findings. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 19-40). Reston, Virginia: Lawrence Erlbaum Associates.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept part I - differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, 11(2), 217-253. https://doi.org: 10.1007/BF00304357

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista EMA*, 8(2), 157-182.

Obando, G., Vasco, C. E., & Arboleda, L. C. (2013). Razón, proporción y proporcionalidad: configuraciones epistémicas para la Educación Básica. En R. Flórez (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 26, pp. 977-986). Mexico, DF.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ohlsson, S. (1988). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. En J. Hierbert y M. Behr (Eds.) *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 53-92). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Osorio, L.H., García, L.I. (2011). *Representaciones semióticas en el aprendizaje del teorema de Pitágoras*. [Tesis de maestría, Universidad Autónoma de Manizales]. Repositorio Institucional. http://hdl.handle.net/11182/160

Ospina, D., García, L.I. (2016) *Las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de las representaciones semióticas en la resolución de problemas contextuales relacionados con el concepto de función cuadrática*. [Tesis de Maestría, Universidad Autónoma de Manizales]. Repositorio Institucional. http://hdl.handle.net/11182/249

Otte, M. (2003). Does Mathematics have objects? In what sense? *Synthese*, 134. 181-216

Otte, M. (2006). Mathematical epistemology from a Peircean semiotic point of view. *Educational Studies in Mathematics*, *61(1-2). 11-38.*

Pitkethly, A. & Hunting, R. (1996), "A review of recent research in the area of initial fraction concepts",

Pontón, T. (2008). *Una propuesta multirregistro para la conceptualización inicial de las fracciones*. [Tesis de Maestría no publicada]. Universidad del Valle.

Pontón, T. (2012). *La comprensión de problemas en la enseñanza y aprendizaje inicial de los Números Racionales*. [Tesis Doctoral no publicada]. Universidad del Valle

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1-19. https://doi.org: 10.1080/14794800903569741

Radford, Luis (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, 9 (Extraordinario 1), pp. 103-129

Radford, Luis (2006). Introducción. Semiótica y Educación Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, (Esp), 7-21.

Rojas, P. (2014). *Articulación de saberes matemáticos: representaciones semióticas y sentidos.* [Tesis doctoral no publicada]Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Rojas, P. (2015). Objetos matemáticos, representaciones semióticas y sentidos. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(1), 151-165

Sáenz-Ludlow, A. (1995) Ann's Fraction schemes. *Educational Studies in Mathematics*. 28. pp. 101 – 132. https://doi.org/10.1007/BF01295789

Sáenz-Ludlow, A., & Presmeg, N. (2006). Semiotic perspectives in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*. Special Issue, 61(1-2).

Sáenz-Ludlow, A. (2016). Juegos de Interpretación en el aula: construcción evolutiva de significados matemáticos en: *Perspectivas semióticas seleccionadas*. (Cap.5. pp. 157 – 191). Doctorado Interinstitucional en Educación.

Santi, G. (2011). Objectification and semiotic function. *Educational Studies Mathematics*, 77, 285-311.

Steffe, L. P. y J. Olive (2010), *Children's fractional knowledge*. Nueva York, Springer.

Streefland, L. (1990). *Fractions in Realistic Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education. A Paradigm of Developmental Research*. Dordrecht, Kluwer.

Streefland, L. (1993). Fractions: a realistic approach. En: Carpenter, T.P., Fennema, E., Romberg, T.A. (eds.) (1993) *Rational Numbers: and Integration of the Research*. (pp. 289 – 325) Hillsdale (N.J.): Lawrence Erlbaum Ass.

Tamayo, O.E., Vasco, C.E., Suárez, M., Quiceno, H., & García L.I (2010). *La clase multimodal: Formación y evolución de conceptos científicos a través del uso de tecnologías de la información y la comunicación.* Colección Ciencias Sociales y Humanas. Editorial Universidad Autónoma de Manizales.

Vasco, C.E. (1984). *Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas* (Vol.1). Ministerio de Educación Nacional.

Vasco, C.E. (1991) El Archipiélago Fraccionario. *Notas de Matemáticas.* No.31, pp.1 - 33

Vasco, C.E (1994) *Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas.* (2ª. Ed.) Documentos de trabajo del Ministerio de Educación Nacional.

Vasco, C. (1994a). El archipiélago fraccionario. En A. C. Castiblanco (Ed.), *Un nuevo enfoque para la Didáctica de las Matemáticas* (Vol. 2, pp. 23-45). Ministerio de Educación Nacional.

Vasco, C. E (1995). *Misión Ciencia, Educación y Desarrollo: Colección Documentos de la Misión.* (7 vols.). Presidencia de la República-Consejería Presidencial para el Desarrollo Institucional-COLCIENCIAS.

Vasco, C. E. (2014). Procesos, sistemas, modelos y teorías en la investigación educativa. En C. J. Mosquera (Comp.), *Perspectivas educativas. Lecciones inaugurales*, n.1. 25-79. Universidad Distrital-Doctorado Interinstitucional DIE.

Vasco, C.E. (2017) Prólogo. En Duval R. *Semiosis y Pensamiento Humano*. (2ª. Ed.pp. 7-14) Editorial Universidad del Valle.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structures. En R. Lesh & M. Landau (Eds.) *Acquisition of mathematics concepts and processes..* pp. 127-174. New York: Academic Press

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques,* 10(2-3), 133-170

Vygotsky, L. (1962). *Thought and language*. Cambridge, MA: MIT Press.

Wolcott, H. (1994). *Transforming qualitative data: Description, analysis, and interpretation.* Thousand Oaks, California: Sage.