

Costos del agua no contabilizada (ANC) en las diez ciudades con mayor población urbana de Colombia.

Inteligencia artificial en la educación superior.

Machine Learning en la detección de enfermedades en cultivos.

Una aproximación al costo horario en proyectos estructurales de vivienda.

La comunicación matemática en una clase de cálculo diferencial: factores, retos y evaluación.

REVISTA DE LA ESCUELA COLOMBIANA DE

INGENIERÍA

133

Enero-marzo de 2024

ISSN 0121-5132

P.V.P. Colombia \$12.000.00



## CONSEJO DIRECTIVO DE LA ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERÍA

**PRESIDENTE** RICARDO RINCÓN HERNÁNDEZ

**VOCALES** GERMÁN EDUARDO ACERO RIVEROS  
SANDRA XIMENA CAMPAGNOLI MARTÍNEZ  
GONZALO JIMÉNEZ ESCOBAR  
MARÍA DEL ROSARIO MONTEJO PERRY  
ARMANDO PALOMINO INFANTE  
JAIRO ALBERTO ROMERO ROJAS  
GERMÁN RICARDO SANTOS GRANADOS  
MARIANA SANDINO ULLOA  
JOSÉ CAMILO VÁSQUEZ CARO  
(representante de los profesores)  
JAVIER STEVEN AROCA TOVAR  
(representante de los estudiantes)

**RECTOR** HÉCTOR ALFONSO RODRÍGUEZ DÍAZ

**SECRETARIA GENERAL** CLAUDIA JEANNETH RÍOS REYES

## REVISTA DE LA ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERÍA

**DIRECTOR** JAIRO ALBERTO ROMERO ROJAS

**COMITÉ EDITORIAL** GERMÁN ACERO RIVEROS  
CLAUDIA JEANNETH RÍOS REYES  
PAULA XIMENA RÍOS REYES  
GERMÁN RICARDO SANTOS GRANADOS  
EDUARDO SARMIENTO PALACIO

**DIRECCIÓN EDITORIAL** CRISTINA SALAZAR PERDOMO

**EDICIÓN** **DISEÑO Y DIAGRAMACIÓN**  
JORGE CAÑAS SEPÚLVEDA  
**CORRECCIÓN DE ESTILO**  
ELKIN RIVERA GÓMEZ  
**TRADUCCIÓN Y CORRECCIÓN DE ESTILO EN INGLÉS**  
DAVID PEÑA CITA

**DIRECCIÓN COMERCIAL** EDITORIAL ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERÍA

Versión digital disponible en <http://www.escuelaing.edu.co/revista.htm>

AUTOPISTA NORTE AK 45 # 205-59  
TEL.: (60-1) 668 3600, EXT. 533  
[revista@escuelaing.edu.co](mailto:revista@escuelaing.edu.co)  
BOGOTÁ, D.C., COLOMBIA

LA ESCUELA Y LA REVISTA NO SON RESPONSABLES DE LAS IDEAS Y CONCEPTOS EMITIDOS POR LOS AUTORES DE LOS TRABAJOS PUBLICADOS. SE AUTORIZA LA REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL DE LOS ARTÍCULOS DE LA REVISTA SI SE CITAN LA FUENTE Y EL AUTOR.

## 5 / EDITORIAL

### Soluciones vs. restricciones

*Jairo Alberto Romero Rojas*

## 7-15

### Costos del agua no contabilizada (ANC) en las diez ciudades con mayor población urbana de Colombia

*Camilo Andrés Hurtado González - Jairo Alberto Romero Rojas*

A partir de la información reportada por los operadores del servicio de acueducto de diez ciudades del país (Bogotá, Medellín, Cali, Barranquilla, Cartagena, Cúcuta, Ibagué, Bucaramanga, Villavicencio y Valledupar) a la Superintendencia de Servicios Públicos Domiciliarios (SSPD), durante el periodo 2007-2016, se presentan los valores de las pérdidas por agua no contabilizada.

## 17-22

### Inteligencia artificial en la educación superior

*María-Irma Díaz-Rozo - Raúl-Alfredo Chaparro-Aguilar - Patricia Salazar-Perdomo -*

*Gerardo Ospina-Hernández*

Este estudio es una revisión sistemática, diseñada para responder las dos preguntas anteriores, como fase inicial de un proyecto de investigación. Los resultados indican que los problemas actuales se pueden mitigar con el empleo apropiado de tecnologías de IA y que las iniciativas exitosas de incorporación de IA son específicas y están concentradas en pocos países.

## 23-31

### Machine Learning en la detección de enfermedades en cultivos

*Diego Fernando Rodríguez Torres - Wilmer Garzón Alfonso - Claudia P. Santiago Cely*

Smart Farming es un nuevo paradigma que busca integrar diferentes tecnologías de la información, tales como “Inteligencia Artificial (AI)”, “Big Data” e “Internet de las cosas (IoT)” en todas sus etapas. A través de estas, se busca generar cultivos más sostenibles, eficientes y rentables en toda su cadena de valor. Uno de los principales desafíos es contar con herramientas que permitan identificar enfermedades que atacan a los cultivos y que ayuden a clasificar y contar los frutos o animales presentes en el terreno.

## 33-48

### Una aproximación al costo horario en proyectos estructurales de vivienda

*Gerardo Ramírez-Uribe - Arturo Ojeda de la Cruz - Jesús Quintana Pacheco - Marco Ramos Corella*

El objetivo de este proyecto es determinar los factores que influyen en el cálculo del costo horario en el desarrollo de un proyecto estructural para una vivienda, y encontrar un método que se pueda aplicar.

## 49-71

### La comunicación matemática en una clase de cálculo diferencial: factores, retos y evaluación

*Nora Yamile Rojas Cataño*

En este artículo se presentarán y analizarán algunos factores que influyen en el fortalecimiento de la competencia de la comunicación matemática en el aula de clase y los retos de su evaluación.

## 73 / ALCANCE Y POLÍTICAS





# Editorial

## Soluciones vs. restricciones

**JAIRO ALBERTO ROMERO ROJAS**

Profesor titular de la Escuela Colombiana de Ingeniería

jairo.romero@escuelaing.edu.co

La congestión vehicular es una de las principales causas de la pérdida de la calidad de vida en las ciudades. Entre las consecuencias que trae este flagelo moderno están los retrasos en las obligaciones, incertidumbre en la duración de los viajes, desperdicio de combustible, desgaste vehicular, pérdida de tiempo, aumento de las emisiones de gases de efecto invernadero —y, por consiguiente, mayor contaminación ambiental—, desgaste de las obras viales, frustración e irascibilidad personal. En pocas palabras, la congestión del tránsito afecta la salud física y mental de los ciudadanos e incrementa sus momentos de estrés.

Para responder a este fenómeno se requiere, ante todo, identificar claramente el problema y concretar la dotación de la infraestructura necesaria para hallar la mejor solución. Imponer restricciones al uso del carro particular mediante el pico y placa ha demostrado ser una medida insuficiente para descongestionar las vías, además de que atenta contra el derecho de todo ciudadano de moverse libremente con el medio de transporte de su preferencia.

En Colombia parece haberse impuesto la política de ignorar el conocimiento para resolver un problema. La congestión vehicular nace simplemente de la inca-

pacidad para proveer la infraestructura de transporte requerida por una población creciente, que necesita cada vez más un mayor número de vehículos para moverse.

Así las cosas, resulta increíble que los ingenieros de transporte planteen, como solución a los trancones, reducir el número de carriles existentes en una vía para convertirlos en ciclorrutas, o volverlos vías de uso exclusivo privilegiado, pues con esta propuesta están desconociendo que el número de vehículos, de bicicletas y de motos siempre irá en aumento, debido a que el crecimiento de la población es inevitable.

Desconocer que una medida tan antitécnica como el pico y placa —que, entre otras cosas, se implementó en 1998— no resuelve el problema es ignorar que los ingenieros de transporte tienen el conocimiento para identificar el problema y formular las alternativas de solución requeridas.

Corresponde a los gobernantes municipales contratar la ingeniería necesaria para proveer la solución técnica del problema y conseguir los recursos para ponerla en práctica, dejando así de lado la aplicación de medidas restrictivas, que han atentado contra el derecho ciudadano de moverse libre y adecuadamente.



# Costos del agua no contabilizada (ANC) en las diez ciudades con mayor población urbana de Colombia

## Costs of unaccounted-for water (UFW) in the ten cities with the highest urban population in Colombia

CAMILO ANDRÉS HURTADO GONZÁLEZ<sup>1</sup> - JAIRO ALBERTO ROMERO ROJAS<sup>2</sup>

1. Magíster en Ingeniería Civil de la Universidad Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito.

2. Profesor titular de la Universidad Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito.

camilo.hurtado-g@mail.escuelaing.edu.co – jairo.romero@escuelaing.edu.co

Recibido: 15/08/2023 Aceptado: 22/10/2023

Disponible en [http://www.escuelaing.edu.co/es/publicaciones\\_revista](http://www.escuelaing.edu.co/es/publicaciones_revista)  
<http://revistas.escuelaing.edu.co/index.php/reci>

### Resumen

A partir de la información reportada por los operadores del servicio de acueducto de diez ciudades del país (Bogotá, Medellín, Cali, Barranquilla, Cartagena, Cúcuta, Ibagué, Bucaramanga, Villavicencio y Valledupar) a la Superintendencia de Servicios Públicos Domiciliarios (SSPD), durante el periodo 2007-2016, se presentan los valores de las pérdidas por agua no contabilizada.

Se incluyen dos escenarios de reducción de agua no contabilizada, a un 5 y 25 %, para evaluar sus beneficios en términos de población equivalente y de ingreso económico.

**Palabras claves:** agua no contabilizada (ANC), servicios públicos.

### Abstract

Based on the information reported by the main operators of the aqueduct service in ten cities of the country (Bogota, Medellin, Cali, Barranquilla, Cartagena, Cúcuta, Ibagué, Bucaramanga, Villavicencio, and Valledupar), to the Superintendent Office of Domiciliary Public Utilities, during the 2007-2016 period, the values of the losses for unaccounted water are calculated.

Two scenarios of reducing losses of water to 5% and 25 % are evaluated, in terms of equivalent population and economic income.

**Keywords:** unaccounted-for water, public utilities.

## INTRODUCCIÓN

En este trabajo se presenta el valor de las pérdidas en los sistemas de acueducto en los diez principales operadores de servicios públicos del país, durante los últimos diez años. Así mismo, se determinan el escenario y las ventajas que podrían obtenerse con una reducción de pérdidas al 5 o 25 %.

## METODOLOGÍA

1. Se determinaron los volúmenes de ANC con base en los índices de agua no contabilizada (IANC), disponibles en la Superintendencia de Servicios Públicos Domiciliarios.
2. Conocidos los volúmenes de ANC en cada una de las diez ciudades, se evaluaron sus costos y la población equivalente al ANC.
3. Se establecieron los beneficios, en términos de costo y de población equivalente, para dos escenarios de control de ANC: disminución de las pérdidas al 5 y al 25 %.
4. A partir de la información recolectada se analizó la información existente para los diez principales operadores de servicios públicos en los últimos diez años, construcción de modelos y primeros resultados.
5. Se determinaron los costos de las pérdidas y escenarios de ahorro para cada grupo de ciudades o ciudad en particular, con base en los datos entregados por

la Superintendencia de Servicios Públicos Domiciliarios y el valor calculado para las pérdidas, el cual se obtiene al multiplicar el valor de metro cúbico para estrato 4 por los metros cúbicos no facturados. Se tomó el valor de la tarifa de estrato 4 debido a que este no recibe subsidios ni se ve afectado por sobretasas, aparte de que refleja el valor que los operadores deben cobrar para cubrir sus costos y generar excedentes para inversión.

## RESULTADOS DE OPERACIÓN DEL SERVICIO DE ACUEDUCTO

Tomando en cuenta la información entregada por la Superintendencia de Servicios Públicos Domiciliarios, se eligió el periodo 2007-2016.

Para tener un valor representativo de los efectos económicos de las pérdidas por agua no contabilizada (ANC), se calculó su valor en salarios mínimos mensuales legales vigentes (SMMLV).

Finalmente, para tener la misma base de comparación, se calcularon los valores de las pérdidas por ANC en pesos de 2018 para cada operador en el periodo de tiempo establecido, con base en el siguiente procedimiento:

- Se toman los valores de las pérdidas ( $m^3/año$ ) = volumen total de agua producida – caudal total facturado.

**Tabla 1**  
Listado de ciudades

Nº	Departamento	Ciudad	Población (2018)		Operador principal
			Total	Cabecera	
1	Cundinamarca	Bogotá, D.C.	8.181.047	8.164.178	Empresa de Acueducto y Alcantarillado de Bogotá (EAAB)
2	Antioquia	Medellín	2.529.403	2.501.470	Empresas Públicas de Medellín (EPM)
3	Valle del Cauca	Cali	2.445.405	2.408.773	Empresas Municipales de Cali (Emcali)
4	Atlántico	Barranquilla	1.232.462	1.228.207	Triple A S.A. ESP
5	Bolívar	Cartagena	1.036.134	994.894	Aguas de Cartagena (Acucar)
6	Norte de Santander	Cúcuta	668.838	646.345	Aguas Kpital Cúcuta S.A. ESP
7	Tolima	Ibagué	569.336	538.467	Empresa Ibaguereña de Acueducto y Alcantarillado (IBAL)
8	Santander	Bucaramanga	528.610	522.304	Acueducto Municipal de Bucaramanga (AMB)
9	Meta	Villavicencio	516.831	492.724	Empresa de Acueducto y Alcantarillado de Villavicencio (EAAV)
10	Cesar	Valledupar	483.286	414.316	Empresa de Servicios Públicos, Acueducto y Alcantarillado de Valledupar (Emdupar)

Fuente: Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE).



**Tabla 2**  
Valor de pérdidas en millones de pesos de 2018

Año	Valor de pérdidas (millones de pesos de 2018)										
	EAAB	EPM	Emcali	Triple A	Acuacar	Aguas Kapital	IBAL	AMB	EAAV	Emdupar	Total
2007	661.101	271.132	181.329	291.870	61.133	65.883	22.513	66.309	64.850	23.154	1.709.276
2008	725.665	251.180	199.382	297.162	64.330	59.463	16.884	72.246	70.703	18.800	1.775.813
2009	799.010	282.295	216.598	309.624	72.149	66.980	25.014	77.162	78.307	21.018	1.948.157
2010	701.693	248.818	224.804	288.856	65.489	57.584	15.172	74.031	73.652	20.764	1.770.863
2011	693.629	252.657	250.064	301.998	59.568	65.142	24.744	75.598	74.829	21.737	1.819.966
2012	642.413	247.516	271.433	327.282	59.527	88.423	19.950	73.946	73.151	29.998	1.833.639
2013	652.084	233.019	299.648	335.922	57.005	83.861	20.713	72.014	68.471	33.857	1.856.594
2014	690.790	222.640	314.430	347.112	60.781	81.088	18.900	68.854	71.910	22.547	1.899.052
2015	703.996	235.100	323.568	355.757	70.329	84.091	23.312	73.583	86.768	22.172	1.978.674
2016	561.954	287.016	423.491	347.840	73.078	80.757	30.583	70.995	74.682	16.619	1.967.017
											<b>18.559.051</b>

- Se obtiene un valor en pérdidas (pesos) = valores de pérdidas (punto 1)  $\times$  valor m<sup>3</sup> en estrato 4.
- Este valor se convierte a SMMLV = valor pérdidas (pesos) / SMMLV de cada año.
- Estos salarios mínimos se multiplican por el valor del salario mínimo del año 2018 y así se obtienen los valores al año actual.

Los valores de pérdidas para los diez operadores, en millones de pesos del 2018 para los años 2007-2016, se consignaron en la tabla siguiente (tabla 2).

#### VALOR DE PÉRDIDAS EN MILLONES DE PESOS DE 2018

Los valores presentados a continuación se calculan de acuerdo con el procedimiento indicado.

#### RESUMEN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS DE OPERACIÓN

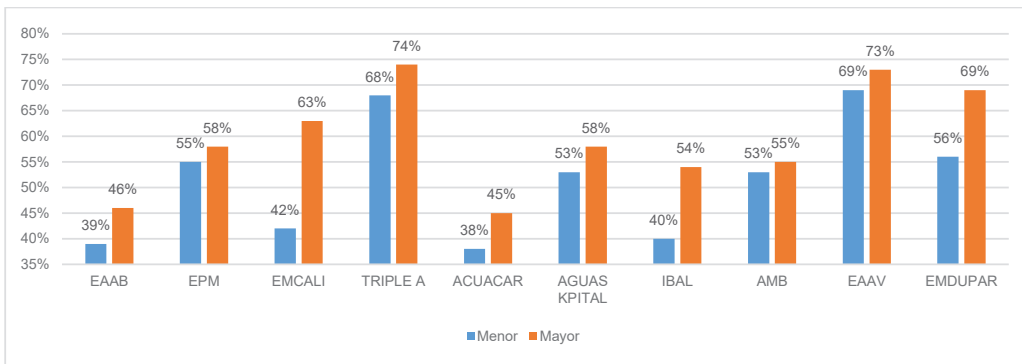
A continuación, se presenta y se ilustra el resumen de resultados de operación del servicio de acueducto en las diez ciudades analizadas, durante el periodo 2007-2016 (tabla 3 y figuras 1 a 4).

**Tabla 3**  
Resumen de la operación

Operador	Pérdidas (%)		MM <sup>3</sup> /Año		Millones de pesos de 2018/año	
	Menor	Mayor	Menor	Mayor	Menor	Mayor
EAAB	39	46	182	230	561.954	799.010
EPM	55	58	155	180	222.640	287.016
EMCALI	42	63	94	194	181.329	423.491
TRIPLE A	68	74	125	166	288.856	355.757
ACUACAR	38	45	28	37	57.005	73.078
AGUAS KPITAL	53	58	35	44	57.584	88.423
IBAL	40	54	16	30	15.172	30.583
AMB	53	55	38	41	66.309	77.162
EAAV	69	74	31	41	64.850	86.768
EMDUPAR	56	69	24	45	16.619	33.857

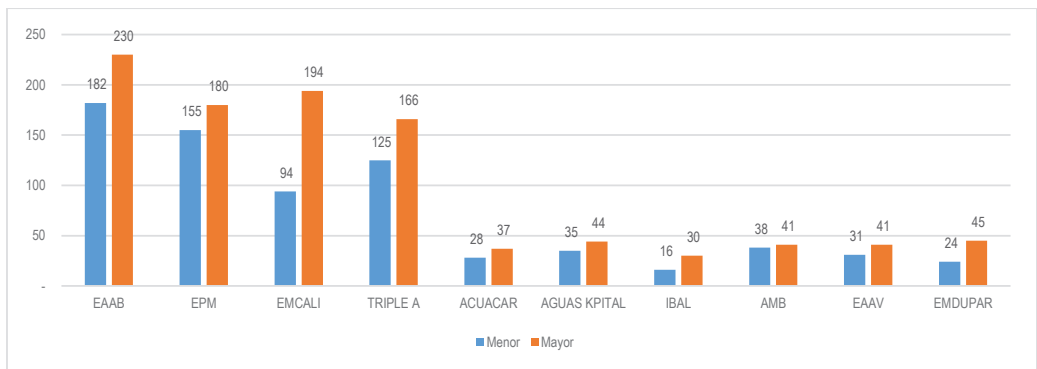
La tabla anterior permite destacar los siguientes resultados:

- Los porcentajes de pérdidas, en los diez operadores, oscilan entre 38 y 74 %.
- El valor mínimo porcentual de pérdidas (38 %) corresponde a la empresa Acuarcar de Cartagena.
- El valor máximo porcentual (74 %) corresponde a la empresa Triple A de Barranquilla y a la Empresa de Acueducto y Alcantarillado de Villavicencio (EAAV).
- En volumen, la mayor pérdida de ANC es de 230 Mm<sup>3</sup>/año y corresponde a la EAAB de Bogotá.
- En volumen, la menor pérdida de ANC es de 16 Mm<sup>3</sup>/año y corresponde a la IBAL de Ibagué.
- En pesos de 2018, los operadores pierden por ANC entre \$15.172 y \$799.010 millones por año.
- El operador con mayores pérdidas económicas es la EAAB (entre \$561.954 y \$799.010 millones por año) (pesos del 2018).
- El operador con menores pérdidas económicas es IBAL de Ibagué (entre \$15.172 y \$30.583 millones por año) (pesos del 2018).

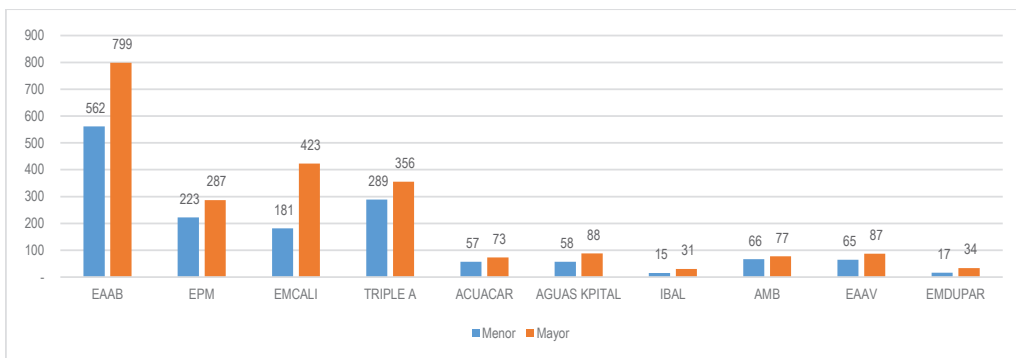


**Figura 1.** Porcentaje de pérdidas por operador.

**Figura 2.** Pérdidas en millones de metros cúbicos por año por operador.



**Figura 3.** Pérdidas en miles de millones de pesos por año por operador (pesos del 2018).



### PÉRDIDAS COMO POBLACIÓN EQUIVALENTE

En la Resolución 0330 de 2017, expedida por el Ministerio de Vivienda, Ciudad y Territorio (MVCT), se define como caudal de diseño de la planta de tratamiento de agua potable (PTAP) el caudal máximo diario con base en una dotación neta máxima de 120-140 L/hab.día, incrementada con un porcentaje de pérdidas técnicas no superiores a un 25 % y aumentada en un factor de mayoración menor de 1,2 para poblaciones con más de 12.500 habitantes.

Asumiendo esta dotación neta de 140 L/hab.día, se obtiene como caudal máximo de diseño este valor:

$$\text{Caudal máximo diario} = \frac{140 \times 1,2}{1 - 0,25} = 224 \frac{\text{L}}{\text{Hab.día}}$$

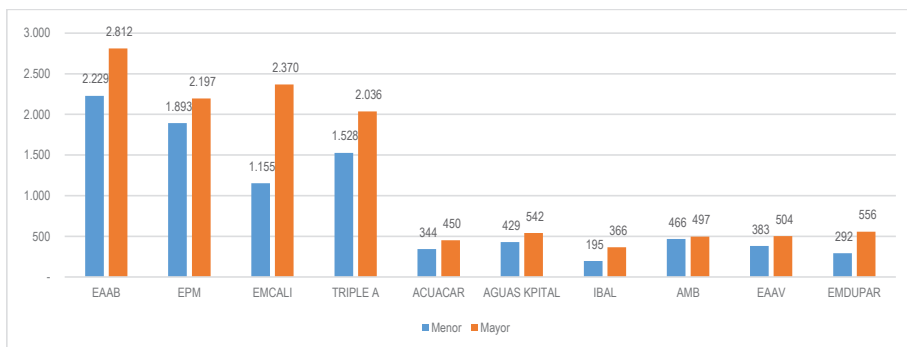
Con base en el caudal de diseño de 224 L/hab.día, se calculan las pérdidas de operación en términos de la población equivalente (incluida en la tabla 4 e ilustrada en la figura 4).

De la tabla anterior se pueden evidenciar los siguientes resultados:

- La población equivalente por pérdidas se encuentra entre 366.000 y 2.800.000 habitantes, para los diez operadores.
- La población equivalente al total de las pérdidas en las diez ciudades es de 12.329.533 habitantes, que representa un 25,3 % de la población total del país.
- Generar disminuciones en estas pérdidas representa, tanto para las grandes ciudades como para sus operadores, no hacer inversiones a corto y mediano plazo para aumentar su oferta hídrica y atender a una mayor población futura.
- Las pérdidas en la EAAB equivalen a un 23 % del total de las pérdidas en población equivalente.
- Las pérdidas en Emcali equivalen a un 19 % del total de las pérdidas en población equivalente.
- Las pérdidas en las EPM, de la ciudad de Medellín, equivalen a un 18 % del total de las pérdidas en población equivalente.

**Tabla 4**  
Pérdidas en población equivalente (2017)

Operador	Pérdidas m³/año		Población equivalente (miles de habitantes)	
	Menor	Mayor	Menor	Mayor
EAAB	182.256.742	229.947.989	2.229	2.812
EPM	154.805.286	179.618.607	1.893	2.197
EMCALI	94.426.567	193.746.082	1.155	2.370
TRIPLE A	124.918.296	166.480.282	1.528	2.036
ACUACAR	28.106.136	36.831.798	344	450
AGUAS KPITAL	35.055.305	44.295.849	429	542
IBAL	15.950.868	29.889.235	195	366
AMB	38.133.739	40.594.746	466	497
EAAV	31.318.340	41.199.785	383	504
EMDUPAR	23.846.476	45.458.241	292	556
<b>TOTAL</b>	<b>728.817.755</b>	<b>1.008.062.614</b>	<b>8.914</b>	<b>12.330</b>



**Figura 4.** Pérdidas como población equivalente en miles de habitantes.

- Las pérdidas registradas en la empresa Triple A, de la ciudad de Barranquilla, equivalen a un 17 % del total de las pérdidas en población equivalente.
- Las pérdidas registradas en Bogotá, Cali, Medellín y Barranquilla representan, en población equivalente, un 77 % del total de las pérdidas en las diez grandes ciudades.

## CONTROL DE PÉRDIDAS

La disminución en el porcentaje de pérdidas de los sistemas de acueducto incrementa los ingresos por abastecimiento de agua, lo que reduce los requerimientos de ampliación de los sistemas de acueducto y permite aumentar la cobertura del servicio a una mayor cantidad de población.

Como se observa en la tabla 18, el porcentaje de pérdidas para los operadores del servicio de acueducto oscila entre un 45 % (Acuacar) y un 74 % (EAAV), lo que indica la necesidad de establecer, por cada operador, un programa permanente de reducción de pérdidas.

Como objetivo inicial, se debe plantear la reducción de pérdidas a un 25 %, que es el porcentaje de pérdidas técnicas máximas para diseño de sistemas de acueducto (MVCT, 2017), y como meta de reducción de pérdidas, disminuirlas a un 5 %.

A renglón seguido se incluye el análisis de estos dos escenarios de pérdidas, tomando como base de cálculo el año 2016.

### Escenario con pérdidas del 25 %

En la tabla siguiente (tabla 5) se incluyen los resultados del cálculo de las pérdidas, en materia de volumen anual de abastecimiento y de pérdidas, así como el ingreso adicional que se obtendría al reducir las pérdidas a un 25 % (el cual se obtiene de restar el valor total de las pérdidas en 2016 por operador en millones de pesos, restando el 25 % de pérdidas), en términos económicos y de población equivalente, para el año 2016 y para cada operador.

### Escenario con pérdidas del 5 %

A continuación se presentan los resultados del cálculo de las pérdidas, en cuanto a volumen anual de abastecimiento y de pérdidas, así como el ingreso adicional que se obtendría al reducir las pérdidas a un 5 % en términos económicos y de población equivalente, para el año 2016 y para cada operador (tabla 6).

**Tabla 5**  
Condiciones para reducción de pérdidas al 25 %

Operador	Caudal tratado m <sup>3</sup> /año (2016)	Pérdidas m <sup>3</sup> /año (2016)	Proyección con pérdidas del 25 %			
			Pérdidas m <sup>3</sup> /año	Pérdidas Millones de pesos/año	Ingreso adicional	
					Millones de pesos /año	Población equivalente, hab.
EAAB	487.329.115	224.403.212	121.832.279	269.249	226.682	1.254.537
EPM	280.795.196	157.423.974	70.198.799	112.950	140.345	1.066.844
EMCALI	306.117.301	193.746.082	76.529.325	147.625	226.111	1.433.669
TRIPLE A	217.448.535	151.292.826	54.362.134	110.301	196.672	1.185.552
ACUACAR	85.226.685	36.831.798	21.306.671	37.308	27.184	189.887
AGUAS KPITAL	74.144.258	41.677.644	18.536.065	31.697	39.572	283.043
IBAL	55.881.981	29.889.235	13.970.495	12.615	14.375	194.701
AMB	71.497.628	38.133.739	17.874.407	29.368	33.286	247.790
EAAV	52.637.270	37.299.412	13.159.318	23.253	42.655	295.256
EMDUPAR	52.275.595	30.876.890	13.068.899	6.208	8.459	217.808
<b>TOTAL</b>	<b>1.683.353.564</b>	<b>941.574.812</b>	<b>420.838.391</b>	<b>780.573</b>	<b>955.342</b>	<b>6.369.085</b>

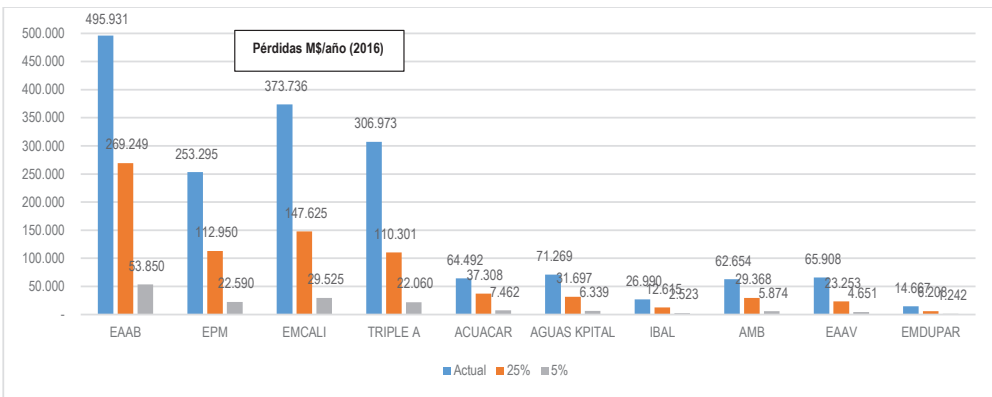
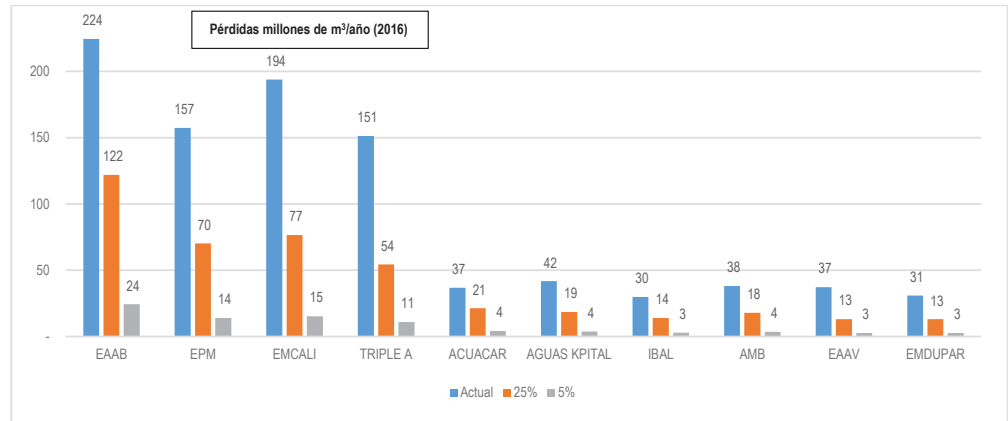


**Tabla 6**  
Condiciones para reducción de pérdidas al 5 %

OPERADOR	Caudal tratado m <sup>3</sup> /año (2016)	Pérdidas m <sup>3</sup> /año (2016)	Proyección con pérdidas del 5 %			
			Pérdidas m <sup>3</sup> /año	Pérdidas Millones de pesos/año	INGRESO ADICIONAL	
					Millones de pesos/año	Población equivalente, hab.
EAAB	487.329.115	224.403.212	24.366.456	53.850	442.081	2.446.634
EPM	280.795.196	157.423.974	14.039.760	22.590	230.705	1.753.721
EMCALI	306.117.301	193.746.082	15.305.865	29.525	344.211	2.182.488
TRIPLE A	217.448.535	151.292.826	10.872.427	22.060	284.913	1.717.471
ACUACAR	85.226.685	36.831.798	4.261.334	7.462	57.030	398.367
AGUAS KPITAL	74.144.258	41.677.644	3.707.213	6.339	64.930	464.413
IBAL	55.881.981	29.889.235	2.794.099	2.523	24.467	331.398
AMB	71.497.628	38.133.739	3.574.881	5.874	56.780	422.687
EAAV	52.637.270	37.299.412	2.631.864	4.651	61.257	424.016
EMDUPAR	52.275.595	30.876.890	2.613.780	1.242	13.425	345.684
<b>TOTAL</b>	<b>1.683.353.564</b>	<b>941.574.812</b>	<b>84.167.678</b>	<b>156.115</b>	<b>1.579.800</b>	<b>10.486.878</b>

En las figuras siguientes (figuras 5 y 6) se ilustra comparativamente la magnitud de las pérdidas de caudal y de ingresos, para cada operador, en el año 2016, y en condiciones de reducción de pérdidas a un 5 % y a un 25 %, en ese orden.

**Figura 5. Pérdidas de caudal por operador.**



**Figura 6. Pérdidas de ingresos por operador.**

Así mismo, se muestran comparativamente los ingresos económicos y de población equivalente adicionales, que se lograrían con la reducción de las pérdidas a un 5 % y a un 25 %, respectivamente (figuras 7 y 8).

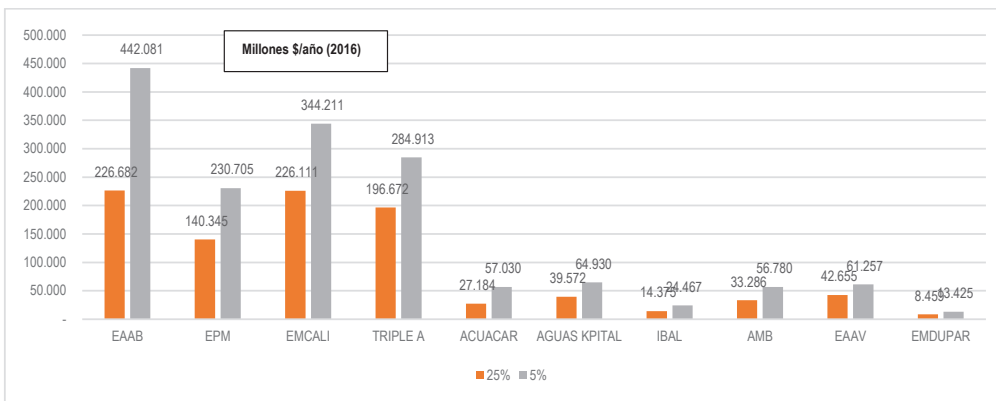
Como se evidencia en el análisis anterior, un programa eficiente de control de pérdidas, realizado por cada operador, permitiría:

- Obtener recursos adicionales en los sistemas por el orden de \$955.000 millones al año, si se reducen a un 25 % las pérdidas de los diez principales operadores en el país.
- Obtener una capacidad adicional de abastecimiento para 6.369.085 habitantes, si se reducen en un 25 % las pérdidas de los diez principales operadores en el país.
- Obtener recursos adicionales en los sistemas por el orden de \$1,58 billones al año, si se reducen a un 5 % las pérdidas de los diez principales operadores en el país.

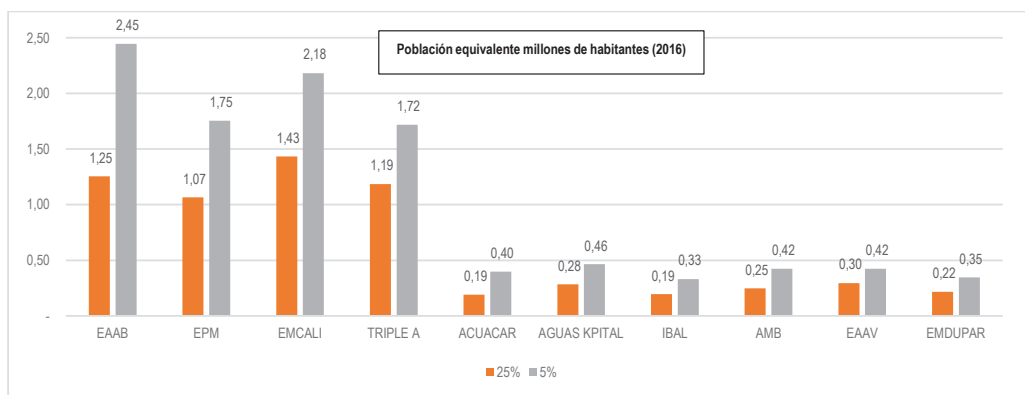
- Obtener una capacidad adicional de abastecimiento para 10.486.878 habitantes, si se reducen a un 5 % las pérdidas de los diez principales operadores en el país.
- Obtener recursos adicionales a la EAAB por \$226.682 millones/año y una capacidad adicional de abastecimiento para 1.254.537 habitantes, si se reducen las pérdidas a un 25 %.
- Obtener recursos adicionales a los cuatro grandes operadores (EAAB, EPM, Emcali y Triple A) para que cada uno abastezca una población adicional superior al millón de habitantes, siempre y cuando reduzcan las pérdidas a un 25 %.

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

- Los porcentajes de pérdidas en los sistemas de acueducto evaluado oscilan entre el 38 y el 74 %.
- La pérdida en caudal en los diez principales operadores oscila entre 30 y 230 Mm<sup>3</sup>/año.



**Figura 7.** Ingreso económico adicional.



**Figura 8.** Ingreso adicional en población equivalente.

- Las menores pérdidas en caudal corresponden a Emdupar (Valledupar), con 24 Mm<sup>3</sup>/año.
- Las mayores pérdidas en caudal corresponden a la EAAB (Bogotá), con 230 Mm<sup>3</sup>/año.
- Las pérdidas en Mm<sup>3</sup>/año de Emcali (Cali) son mayores que las de EPM en Medellín, a pesar de tener menor población.
- Las pérdidas en Mm<sup>3</sup>/año de la AMB (Bucaramanga), EAAV (Villavicencio) y Emdupar (Valledupar) son mayores que las de la IBAL (Ibagué), pese a que esta ciudad tiene mayor población que cada una de las tres ciudades indicadas.
- Acucar (Cartagena) presenta menores pérdidas que Aguas Kpital (Cúcuta), a pesar de tener aproximadamente un 30 % más de usuarios.
- Las pérdidas en millones de pesos/año y en Mm<sup>3</sup>/año de la EAAB (Bogotá) son superiores a la sumatoria de los seis operadores más pequeños escogidos en la muestra: Acucar (Cartagena), Aguas Kpital (Cúcuta), IBAL (Ibagué), AMB (Bucaramanga), EAAV (Villavicencio) y Emdupar (Valledupar).
- Las pérdidas en Mm<sup>3</sup>/año de EPM (Medellín) son inferiores a las de Emcali (Cali) y Triple A (Barranquilla), pese a tener una población mayor que estas dos ciudades.
- La reducción de pérdidas a un 25 %, por lo menos, debe ser un objetivo inaplazable de operación de todos los sistemas de agua potable del país.
- Al reducir a un 25 % las pérdidas de los diez principales operadores en el país se podrían obtener recursos adicionales en los sistemas por el orden de \$955.000 millones al año.
- Al reducir a un 25 % las pérdidas de los diez principales operadores en el país se obtendría una capacidad adicional de abastecimiento para 6.369.085 habitantes.
- Al reducir a un 5 % las pérdidas de los diez principales operadores en el país se podrían obtener recursos adicionales en los sistemas por el orden de \$1,58 billones al año.
- Al reducir a un 5 % las pérdidas de los diez principales operadores en el país se obtendría una capacidad adicional de abastecimiento para 10.486.878 habitantes.
- La reducción de pérdidas a un 25 % le permitiría a la EAAB obtener recursos adicionales por \$226.682 millones/año y una capacidad adicional de abastecimiento para 1.254.537 habitantes.
- Los cuatro grandes operadores (EAAB, EPM, Emcali y Triple A), al reducir sus pérdidas a un 25 %, podrían abastecer, cada uno, una población adicional superior al millón de habitantes.

## REFERENCIAS

- Hurtado G., C. A. (2018). *Costos del agua no contabilizada (ANC) en las diez ciudades con mayor población urbana de Colombia*. Trabajo de grado para optar al título de magíster en Ingeniería Civil con énfasis en Ingeniería Ambiental. Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito.
- Ministerio de Vivienda, Ciudad y Territorio (2017, 8 de junio). Resolución 0330, "Por la cual se adopta el Reglamento Técnico del Sector de Agua Potable y Saneamiento Básico - RAS y se derogan las resoluciones 1096 de 2000, 0424 de 2001, 0668 de 2003, 1459 de 2005, 1447 de 2005 y 2320 de 2009.
- Superintendencia de Servicios Públicos Domiciliarios (abril de 2018). APS: Información de las áreas de prestación y actividades con base en lo reportado por los prestadores en el Registro Único de Prestadores (RUPS), de conformidad con la Resolución SSPD\_RUPS\_20151300047005.
- Fuente: [http://bi.superservicios.gov.co/o3web/viewdesktop.jsp?cmd=open&source=SUI\\_RUPS\\_OFICIAL](http://bi.superservicios.gov.co/o3web/viewdesktop.jsp?cmd=open&source=SUI_RUPS_OFICIAL).





# Inteligencia artificial en la educación superior

## Artificial Intelligence in Higher Education

MARÍA-IRMA DÍAZ-ROZO - RAÚL-ALFREDO CHAPARRO-AGUILAR -  
PATRICIA SALAZAR-PERDOMO - GERARDO OSPINA-HERNÁNDEZ

Profesores del Programa de Ingeniería de Sistemas de la Universidad Escuela Colombiana de Ingeniería.

maria.diaz@escuelaing.edu.co - raul.chaparro@escuelaing.edu.co - patricia.salazar@escuelaing.edu.co -  
gerardo.ospina@escuelaing.edu.co

Recibido: 22/08/2023 Aceptado: 24/10/2023

Disponible en [http://www.escuelaing.edu.co/es/publicaciones\\_revista](http://www.escuelaing.edu.co/es/publicaciones_revista)  
<http://revistas.escuelaing.edu.co/index.php/reci>

### Resumen

Los propósitos de este estudio son, básicamente, dos: en primer lugar, conocer cuáles son los principales problemas de enseñanza y aprendizaje en educación superior, y en segundo término, saber cuáles tecnologías de inteligencia artificial (IA) se están usando o se pueden usar para afrontarlos, sobre todo si se toma en cuenta que los avances actuales en el área de inteligencia artificial están abriendo un horizonte de posibilidades y desafíos, con el potencial de transformar a las instituciones de educación superior (IES).

Este estudio es una revisión sistemática, diseñada para responder las dos preguntas anteriores, como fase inicial de un proyecto de investigación. Los resultados indican que los problemas actuales se pueden mitigar con el empleo apropiado de tecnologías de IA y que las iniciativas exitosas de incorporación de IA son específicas y están concentradas en pocos países.

Las experiencias estudiadas permiten afirmar que, para aprovechar las posibilidades y afrontar los desafíos, es necesario que las IES lideren dicha transformación por medio de la definición de un modelo de madurez de IA que responda a su naturaleza, empodere a profesores y estudiantes, ayude a evolucionar los modelos pedagógicos propios y considere la inversión necesaria.

**Palabras claves:** inteligencia artificial, instituciones de educación superior, enseñanza, aprendizaje, tecnologías de IA y transformación digital.

### Abstract

The aims of this study are essentially twofold: first, to understand what the main teaching and learning problems in higher education are, and secondly, to determine which artificial intelligence (AI) technologies are being used or could be used to address them, especially considering that current advancements in the field of artificial intelligence are opening up a horizon of possibilities and challenges, with the potential to transform higher education institutions (HEIs).

This study is a systematic review, designed to answer the two questions, as an initial phase of a research project. The results indicate that current problems can be mitigated with the appropriate use of AI technologies and that successful AI incorporation initiatives are specific and concentrated in a few countries.

The experiences studied allow us to affirm that, to leverage the possibilities and tackle the challenges, it is necessary for HEIs to lead such transformation by defining an AI maturity model that responds to their nature, empowers teachers and students, helps evolve their own pedagogical models, and considers the necessary investment.

**Keywords:** artificial intelligence, higher education institutions, teaching, learning, AI technologies, digital transformation.

## INTRODUCCIÓN

Los avances actuales en el área de inteligencia artificial (IA) están abriendo un horizonte de posibilidades y desafíos, con el potencial de transformar a las instituciones de educación superior (IES). Posibilidades, porque la IA ha crecido de manera notable y ha impactado prácticamente en todas las áreas. Desafíos, porque exige una nueva forma de pensar sobre el uso de la tecnología en la educación y sobre las competencias necesarias para desempeñarse con éxito en la era de la IA. Es indudable que la IA estará ligada al futuro de la educación, como a las otras áreas de desarrollo (gobierno, salud e industria) (Zawacki-Richter et al., 2019; Popenici & Kerr, 2017; Pedró, 2020; Kann, 1983).

Aunque el uso de la IA en la educación lleva más de treinta años, para la comunidad académica todavía no es claro cómo lograr que las tecnologías de IA disponibles impacten en forma realmente significativa y positiva en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Los líderes académicos hasta ahora están empezando a explorar el potencial pedagógico de dichas tecnologías para dinamizar las etapas del ciclo de vida de enseñanza y aprendizaje, las competencias y herramientas necesarias para que los estudiantes y profesores las aprovechen efectivamente, y la manera de incluirlas en el proceso de formación para contribuir a una práctica profesional potenciada por esta tecnología (Zawacki-Richter et al., 2019; Hinojo-Lucena et al., 2019; Pillay et al., 2019).

En educación superior, los mayores avances de utilización de IA se han presentado en programas de facultades STEM (*Science, Technology, Engineering and Mathematics*); sin embargo, casi todas estas experiencias son específicas y aisladas (Zawacki-Richter et al., 2019). El problema de fondo de las aplicaciones de IA en educación es que carecen de una estrategia institucional y un modelo pedagógico maduro que las contemple (Zawacki-Richter et al., 2019).

En este artículo se presentan los avances de la primera fase del proyecto “Innovación educativa con inteligencia artificial en informática”, que se está realizando en la Universidad Escuela Colombiana de Ingeniería, con el propósito de definir una estrategia para la incorporación de las tecnologías de IA en los modelos pedagógicos de los programas de pregrado en informática que le permita maximizar los beneficios y disminuir los riesgos, considerando tanto las impli-

caciones éticas y de privacidad, como el tiempo y el costo de una implementación de calidad. El objetivo de esta primera fase es conocer cuáles problemas de enseñanza y aprendizaje en educación superior y cuáles tecnologías de IA se están usando o se pueden usar para afrontarlos.

El artículo está organizado en cuatro secciones: educación superior, tecnologías IA, IA en educación y conclusiones.

## EDUCACIÓN SUPERIOR

La educación superior tiene por objeto el pleno desarrollo de los estudiantes y su formación académica y profesional. Por su parte, los programas de pregrado preparan para el desarrollo integral personal, el ejercicio de una profesión o disciplina determinada y el desarrollo social, económico y cultural del país (Ley 30, 1992, p. 26).

Los principales problemas de enseñanza y aprendizaje que afectan tanto a los estudiantes como a los profesores en educación superior son los siguientes:

- **El currículo (macro, meso y micro) es el mismo para todos los estudiantes.** Al principio, no se toman en cuenta el contexto ni los conocimientos previos de cada uno de los estudiantes, y durante la formación, todos tienen que ir al mismo ritmo, independientemente de los resultados conseguidos en el proceso de aprendizaje.
- **Microcurrículos saturados de temas y con propuestas metodológicas caducas.** El número excesivo de temas, además de agobiar a estudiantes y profesores, dificulta la adquisición profunda de conocimiento, al igual que la aplicación y la participación activa de los estudiantes.
- **Falta de adaptación de los modelos pedagógicos a la diversidad de estudiantes.** El modelo seleccionado, que se diseñó considerando un perfil general de estudiantes, puede servir para algunos de ellos, pero dificulta el aprendizaje de otros con intereses y estilos de aprendizaje diferentes.
- **El método de evaluación no apoya el aprendizaje efectivo.** La evaluación sumativa es limitada y no siempre oportuna, y las calificaciones se han desvirtuado: se busca aprobar con 3.0, se haya aprendido o no.

- **Alta deserción estudiantil.** Los estudiantes enfrentan dificultades económicas, académicas y sociales, por lo que se requiere un apoyo oportuno para superarlas, el cual muchas veces no encuentran por desconocimiento de las instituciones del Estado acerca de cada uno de ellos.
- **Falta de actualización tecnológica.** Las instituciones de educación superior enfrentan desafíos para mantenerse actualizadas en lo que a infraestructura tecnológica y recursos digitales se refiere. La adopción de tecnologías de IA en las IES ha sido muy lenta, comparada con otros sectores de desarrollo, y se han quedado rezagadas (S. Jain & R. Jain, 2019).

Como se verá más adelante, dos de los principales aportes probados de las tecnologías de IA en la educación son la personalización, adaptación y realimentación de las experiencias de aprendizaje, y la visión integral de la evolución y el estado del proceso formativo de cada uno de los estudiantes pueden ser fundamentales para mitigar los problemas de la educación superior. El primero contribuye a la solución de los problemas 1 al 4, y el segundo, al problema 5 (Pedró, 2020; Kann, 1983).

La IA puede ofrecer enormes oportunidades para apoyar los procesos de enseñanza y aprendizaje; sin embargo, el desarrollo de aplicaciones para la educación superior tiene implicaciones y riesgos, especialmente por no contar con un marco regulatorio. Algunas de las implicaciones son la necesidad de incluir las tecnologías de IA en las políticas educativas, la exigencia de repensar los proyectos de formación y la inclusión de innovaciones educativas con IA en los planes de desarrollo institucionales.

Los principales riesgos son la tentación de reemplazar a los profesores con soluciones de IA rentables, la ausencia de protección a los datos confidenciales de estudiantes y profesores que consumen las soluciones IA, al igual que la falta de recursos para poder hacer las inversiones necesarias (Pérez et al., 2013; Pedró, 2020; Kann, 1983).

## TECNOLOGÍAS IA

La inteligencia artificial en educación (AIEd, por su sigla en inglés) es un nuevo campo de conocimiento en el área de educación con tecnología. Pero no es solo sobre tecnología, pues considera también las dimensio-

nes pedagógica, ética, social, cultural y económica de la educación.

Las tecnologías de IA en educación cubren varios aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje, al tiempo que buscan beneficiar a los tres actores principales:

- Los estudiantes, a los que les ofrecen experiencias personalizadas y adaptables para que logren sus objetivos de aprendizaje.
- Los profesores, a los que les brindan información sobre el progreso del aprendizaje de los estudiantes y les automatizan actividades rutinarias para que puedan ofrecerles la guía y el soporte humano que necesitan.
- Los directivos, a los que les entregan información de carácter institucional para guiar los procesos de toma de decisiones con base en evidencias del comportamiento de los estudiantes y los programas de formación.

Las herramientas de este último apartado no son objeto de la presente investigación, ya que está enfocada en la enseñanza y el aprendizaje (Pedró, 2020; Zawacki-Richter et al., 2019).

Las tecnologías de IA de enseñanza y aprendizaje más relevantes son las siguientes (Zawacki-Richter et al., 2019; Hinojo-Lucena et al., 2019; Pedró, 2020):

- **Modelado del aprendiz.** Ofrecen una visión integradora (cognitiva, afectiva y social) de cada uno de los estudiantes o de grupos de estudiantes para diferentes propósitos. Los modelos del aprendiz son componentes indispensables en todas las tecnologías de enseñanza y aprendizaje (Chrysaftadi & Virvou, 2013).
- **Predicción de logros y dificultades de los estudiantes.** Generan alertas tempranas para la intervención oportuna e informada por parte tanto del estudiante como de los profesores (Rastrollo-Guerrero et al., 2020).
- **Recomendación de actividades académicas.** Diseñan caminos de aprendizaje personalizados y adaptables para cumplir con objetivos de aprendizaje específicos, definidos por el profesor o los estudiantes (Nabizadeh et al., 2020).
- **Generación de objetos de aprendizaje.** Adaptan o crean objetos de aprendizaje, con el pro-

pósito de satisfacer las necesidades cognitivas, afectivas y sociales de los estudiantes.

- **Aprendizaje conversacional.** Interactúan con los estudiantes por medio de conversaciones en lenguaje natural, respondiendo preguntas y ofreciendo guías para el aprendizaje.
- **Facilitación de la colaboración.** Recomiendan compañeros, pero teniendo en cuenta las características necesarias para conformar un equipo de alto desempeño.
- **Evaluación, retroalimentación y calificación asistida.** Hacen diagnósticos sobre los logros de los estudiantes para dar realimentación sobre el proceso de aprendizaje, actualizar los modelos del aprendiz y certificar los resultados de aprendizaje (Douce, 2005).
- **Tutores inteligentes (ITS).** Personalizan la experiencia de aprendizaje en áreas específicas del conocimiento, considerando las características y el desempeño de cada estudiante. Estos sistemas brindan una experiencia de enseñanza y aprendizaje personalizada para cada uno de los estudiantes: organizan y presentan los contenidos, proponen actividades de aprendizaje, ofrecen andamiajes y ayudas personalizadas, dan realimentación oportuna y facilitan la comunicación entre estudiantes (Crow et al., 2018).

## IA EN EDUCACIÓN

Para revisar el uso de IA en educación superior, a renglón seguido se presentan dos visiones: la descriptiva, para conocer el estado actual, y la prospectiva, que busca predecir su efecto.

### Estado actual

El último análisis sobre resultados de IA en educación, publicado en 2019, esquematiza el estado de la inteligencia artificial en educación superior, considerando las tecnologías más utilizadas en IA en experiencias exitosas (tabla 1). En este análisis se incluyen 146 artículos seleccionados –por cumplir criterios de calidad– entre los publicados en el periodo 2007 y 2018 en las tres bases de datos más importantes en el área: EBSCO, Web of Science y Scopus. El 50 % de los trabajos se llevó a cabo en cuatro países: Estados Unidos (29 %), China (8 %), Taiwán (7 %) y Turquía (6 %) (Zawacki-Richter et al., 2019).

En este estudio se evidencian tres hechos: existen aplicaciones exitosas de IA en las áreas de enseñanza y aprendizaje, las iniciativas de incorporación de inteligencia artificial en educación están concentradas en muy pocos países, y las IES que están incorporando la IA en sus programas han sido líderes en su campo y ya están cosechando los beneficios asociados con esto.

Algunas causas que explican estos hechos son que la mayoría de los profesores desconoce en qué consisten estas tecnologías y, por tanto, cuáles son sus alcances y sus riesgos; las IES no tienen claro cuáles productos y servicios inteligentes son apropiados para sus proyectos de formación, y las tecnologías desarrolladas están pensadas para satisfacer las necesidades y los valores de unas pocas empresas o países que están liderando el área (Zawacki-Richter et al., 2019).

Esto tiene varias implicaciones, como por ejemplo que muchas tecnologías de IA, en lugar de abordar las circunstancias y problemas que los profesores enfrentan a diario, promueven nuevas formas de

**Tabla 1**  
Aplicaciones de IA

Aplicación de IA	Artículos	Resultados
Elaboración de perfiles y predicción	58	Muy buenos
Sistemas de tutoría inteligente	29	No equiparables con tutoría humana
Supervisión y evaluación	36	Útiles en actividades cerradas
Sistemas adaptativos y personalización	27	Uno de los principales logros
<b>Total</b>	<b>150</b>	

organizar la enseñanza que chocan con las prácticas de los modelos pedagógicos de las instituciones, a menudo sin evaluaciones rigurosas que respalden los supuestos beneficios de las nuevas soluciones. Por eso, las IES pueden terminar adoptando tecnologías de IA que no se desarrollaron pensando en sus procesos educativos (Zawacki-Richter et al., 2019).

### Predicciones

En un estudio realizado para evaluar el efecto de la IA en los objetivos de desarrollo sostenible 2015-2030 (ODS), de los cuales el número 4 es “Educación con calidad”, se encontró que la IA puede habilitar el logro de las diez metas propuestas para este ODS, y al mismo tiempo, puede tener efectos inhibidores en siete de ellos (tabla 1).

Con este objetivo se busca garantizar una educación inclusiva, equitativa y de calidad, así como promover oportunidades de aprendizaje a lo largo de la vida para todos.

En este estudio se concluye que los riesgos de las tecnologías de IA se pueden mitigar con programas de formación, marcos de regulación y tecnologías certificadas de alta calidad, todos ellos adaptados al trasfondo cultural y que satisfagan las necesidades particulares de los países.

Para responder al objetivo “Educación de calidad”, algunos países han implementado políticas de apoyo a la investigación y desarrollo en el área para explorar cómo la IA puede contribuir a entornos de aprendizaje de educación propios, más vibrantes y más basados en evidencia.

### CONCLUSIONES

Las perspectivas de la IA en las IES son muy prometedoras; no obstante, para lograr sus beneficios, es necesario asegurar que en la adopción se involucre a los estudiantes y profesores, no solo como beneficiarios, sino como actores activos del proceso; que se respete y enriquezca el modelo pedagógico propio de cada institución, integrando apropiadamente dichas tecnologías a las prácticas diarias de enseñanza y aprendizaje; que se consideren las implicaciones éticas, sociales, culturales y económicas de las soluciones, y que se cuente con la inversión necesaria para la formación de profesores y estudiantes, así como para el desarrollo o adquisición de tecnologías de IA.

Los procesos de enseñanza y aprendizaje son actividades centradas, eminentemente, en seres humanos: profesores y estudiantes. Por tal razón, los artefactos tecnológicos inteligentes apoyan a los profesores, pero no los pueden reemplazar. Hay que orientar la innova-

**Tabla 2**  
Educación con calidad IA

ODS 4	Metas
<p>4 QUALITY EDUCATION</p> <p>1 2 3 4 5 6 7 A B C</p> <p>1 2 3 4 5 6 7 A B C</p> <p>■ Enabler ■ Inhibitor</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Acceso gratuito a la educación primaria y secundaria.</li> <li>2. Acceso equitativo a la educación preescolar.</li> <li>3. Acceso equitativo y económicamente asequible a la educación técnica, vocacional y a la educación superior.</li> <li>4. Aumentar el número de personas con competencias pertinentes para el éxito financiero.</li> <li>5. Eliminar toda la discriminación en el sector educativo.</li> <li>6. Educación para el desarrollo sostenible y la ciudadanía global.             <ol style="list-style-type: none"> <li>A. Construcción y modernización de escuelas seguras e inclusivas.</li> <li>B. Ampliar las becas de educación superior para los países en desarrollo.</li> <li>C. Incrementar el suministro de docentes capacitados en los países en desarrollo.</li> </ol> </li> </ol> <p>En estas metas, sólo las dos primeras no comprometen a la educación superior.</p>

<sup>1</sup> Algunos artículos se clasifican en más de un área.



ción educativa con IA, con el propósito de permitirles a profesores y estudiantes tener más espacios para construir relaciones personales y empáticas que propicien la enseñanza y el aprendizaje, eliminando bloqueos y abriendo caminos. En este orden de ideas, los profesores se deben preparar para liderarla.

En la innovación con IA, la meta no debe ser lo técnicamente posible, sino lo que tiene sentido pedagógico, además de que ha de dar respuestas a las iniciativas de evolución de modelos pedagógicos. Por tal motivo, hay que orientar estas tecnologías no solo a aumentar y extender las capacidades de profesores y estudiantes, sino también a desarrollarlas, de modo que sean transparentes y controlables por ellos y así poder empoderarlos en su experiencia de enseñanza y aprendizaje.

Finalmente, por el estado actual de la mayoría de las instituciones de educación superior (IES), su apropiación exige la definición de un modelo de madurez de inteligencia artificial que integre tecnologías básicas digitales usando marcos de referencia existentes.

## REFERENCIAS

- Chrysafiadi, K. & Virvou, M. (2013). Student modeling approaches: a literature review for the last decade. *Expert Syst. Appl.*
- Crow, T., Luxton-Reilly, A., & Wuensche, B. (2018). Intelligent tutoring systems for programming education: a systematic review. In *Proceedings of the 20th Australasian Computing Education Conference*, pp. 5362.
- Douce, C., Livingstone, D., & Orwell, J. (2005). Automatic test-based assessment of programming: a review. *Journal on Educational Resources in Computing (Jeric)*, 5(3): 4-es.
- Hinojo-Lucena, F. J., Aznar-Díaz, I., Cáceres-Reche, M. P., & Romero-Rodríguez, J. M. (2019). Artificial intelligence in higher education: a bibliometric study on its impact in the scientific literature. *Educ. Sci.*, 9(1).
- Jain, S. & Jain, R. (2019). Role of artificial intelligence in higher education: an empirical investigation. *IJRAR-International J. Res. Anal. Rev.*, 6(2): 144-150.
- Kann, L. (1983). Artificial intelligence and its implications for education. *Can. J. Learn. Technol. // Rev. Can. l'apprentissage Technol.*, 12(3).
- Ley 30 del 28 de diciembre de 1992, p. 26.
- Nabizadeh, A. H., Leal, J. P., Rafsanjani, H. N., & Shah, R. R. (2020). Learning path personalization and recommendation methods: a survey of the state-of-the-art. *Expert Systems with Applications*, 159: 113596.
- Pedró, F. (2020). Applications of artificial intelligence to higher education: possibilities, evidence, and challenges. *IUL Res.*, 1(1): 61-76.
- Pedró, F. (2022). Applications of artificial intelligence to higher education: possibilities, evidence, and challenges. *IUL Res.*, 1(1): 61-76.
- Pérez, M. V., Valenzuela Castellanos, M., Díaz, A. M., González-Pineda, J. A., & Núñez, J. C. (2013). Learning difficulties in first year university students. *Atenea*, (508): 135-150.
- Pillay, N., Maharaj, B. T., & Van Eeden, G. (2019). AI in engineering and computer science education in preparation for the 4th industrial revolution: a South African perspective. *2018 World Eng. Educ. Forum - Glob. Eng. Deans Council. WEEF-GEDC 2018*.
- Popenici, S. A. D., & Kerr, S. (2017). Exploring the impact of artificial intelligence on teaching and learning in higher education. *Res. Pract. Technol. Enhanc. Learn.*, 12(1).
- Rastrollo-Guerrero, J. L., Gómez-Pulido, J. A., & Durán-Domínguez, A. (2020). Analyzing and predicting students' performance by means of machine learning: a review. *Applied sciences*, 10(3): 1042.
- Zawacki-Richter, O., Marín, V. I., Bond, M., & Gouverneur, F. (2019). Systematic review of research on artificial intelligence applications in higher education: where are the educators? *Int. J. Educ. Technol. High. Educ.*, 16(1).

# Machine Learning en la detección de enfermedades en cultivos

## Machine Learning to detect crop diseases

DIEGO FERNANDO RODRÍGUEZ TORRES<sup>1</sup> - WILMER GARZÓN ALFONSO<sup>2</sup> -  
CLAUDIA PATRICIA SANTIAGO CELY<sup>3</sup>

1. Ingeniero Electrónico. Magíster en Informática de la Universidad Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito.
2. Profesor del Programa de Ingeniería de Sistemas y director de la Maestría en Ciencia de Datos.
3. Decana del Programa de Ingeniería de Sistemas.

diego.rodriguez-t@mail.escuelaing.edu.co - wilmer.garzon@escuelaing.edu.co -  
claudia.santiago@escuelaing.edu.co

Recibido: 02/09/2023 Aceptado: 04/11/2023

Disponible en [http://www.escuelaing.edu.co/es/publicaciones\\_revista](http://www.escuelaing.edu.co/es/publicaciones_revista)  
<http://revistas.escuelaing.edu.co/index.php/reci>

### Resumen

Smart Farming es un nuevo paradigma que busca integrar diferentes tecnologías de la información, tales como “Inteligencia Artificial (AI)”, “Big Data” e “Internet de las cosas (IoT)” en todas sus etapas. A través de estas, se busca generar cultivos más sostenibles, eficientes y rentables en toda su cadena de valor. Uno de los principales desafíos es contar con herramientas que permitan identificar enfermedades que atacan a los cultivos y que ayuden a clasificar y contar los frutos o animales presentes en el terreno. Es allí, donde el uso de la inteligencia artificial, y especialmente los algoritmos de machine learning, pueden contribuir a mejorar esos procesos. En este artículo se revisa los métodos de machine learning usados en la actualidad en los diferentes problemas de identificación de enfermedades en los cultivos.

**Palabras claves:** Agricultura Inteligente (*Smart farming*), machine learning, deep learning, redes neuronales artificiales, enfermedades en cultivos

### Abstract

Smart farming is a new paradigm which seeks to integrate different information technologies, such as “Artificial Intelligence (AI)”, “Big Data” and “Internet of Things (IoT)” in all its stages. Through these, it seeks to generate more sustainable, efficient, and profitable crops throughout its value chain. One of the main challenges is to have tools that allow the identification of diseases in the crops and that help to classify and count the fruits or animals present in the farms. In this point is where the use of artificial intelligence, and especially machine learning algorithms, can help to improve these processes. This article aims to review the machine learning methods currently used in identifying diseases in crops.

**Keywords:** Smart farming, machine learning, deep learning, artificial neural networks, crop diseases.

## I. INTRODUCCIÓN

Uno de los desafíos de la humanidad a través de la historia ha sido la producción eficiente de comida. Según [1] para el año 2050 se estima una población mundial cercana a los 9 billones de habitantes, generando un reto para el sector agropecuario internacional (agricultura y ganadería). Debido a esto y considerando la necesidad de garantizar la seguridad alimentaria, se hace necesario encontrar métodos y herramientas que permitan cultivar y cosechar de una forma más efectiva y eficiente, creando tanto cultivos como modelos sostenibles en agricultura y ganadería.

En las últimas décadas, el sector agropecuario ha ido ganando en eficiencia y sostenibilidad gracias al *Smart Farming* (agricultura inteligente), mediante el cual, el uso de nuevas tecnologías de la información ha sido aplicado a todas las etapas del proceso. Tecnologías como el *big data*, Internet de las cosas y la inteligencia Artificial han incursionado en procesos de monitoreo e identificación de enfermedades y de plagas, en actividades de siembra, de rastreo, de clasificación de frutos, entre otros que han ayudado a los granjeros en la administración de sus cultivos y terrenos. Un ejemplo de ello es la agricultura de precisión (PA), la cual utiliza sensores y software específico para garantizar que los cultivos reciban exactamente lo que necesitan, optimizando el cultivo al tiempo de hacerlo sostenible [2].

Entre las tecnologías utilizadas en la agricultura y la ganadería se encuentra la inteligencia artificial (IA), un amplio campo del cual este artículo, sólo abordará el área del *Machine Learning* (Aprendizaje Automático). La IA es en la actualidad uno de los campos de investigación en informática que más auge y difusión ha empezado a tener por su vasta área de aplicación [3]. Dentro de la IA se ubica el *machine learning*, el cual es aplicado en distintos procesos de la agricultura y la ganadería. Algunos de sus usos se dan en la detección de enfermedades y de malas hierbas que pueden afectar los cultivos, así mismo se emplea en la clasificación de plantas, procesos de riego, y en la ganadería, puede ser de gran ayuda en la ganadería de precisión, clasificación de los animales, entre otras aplicaciones.

La detección de enfermedades es un proceso fundamental en el mantenimiento de los cultivos, ya que, si no se realiza una detección temprana, toda la cosecha se puede ver afectada y generaría pérdidas económicas al agricultor. Debido a esto, es importante hacer una

revisión del desarrollo actual de los modelos de *machine learning* empleados en la detección de enfermedades causadas por diferentes agentes como los virus, bacterias y hongos. De igual forma, se debe conocer cuáles algoritmos son aplicados y cuáles son sus resultados obtenidos, esto con el fin de encontrar los métodos que mejor solución brinden a este problema. En este escrito se presenta una revisión de los métodos de *machine learning* aplicados predominantemente en agricultura. Es la intención de este artículo, hacer un seguimiento de los trabajos que esta área de la IA ha desarrollado en la agricultura en la detección de enfermedades en varios tipos de cultivos y plantas.

En la primera parte, se indica la metodología utilizada seguida del marco teórico y una revisión de los métodos de *machine learning* utilizados actualmente. Por último, se exponen las conclusiones y posibilidades para trabajos futuros.

## II. METODOLOGÍA

En la elaboración de este escrito se realizó una búsqueda de artículos basada en las siguientes palabras claves: “*machine learning in smart farming or agriculture*” “*artificial intelligent in agriculture*” “*agriculture 4.0*” “*smart farming*”, “*precision agriculture*”, “*machine learning in crop disease*” y “*artificial neural network in agriculture*”. Para el marco teórico, se buscaron artículos y libros de donde se obtuvieron la definición de los conceptos más relevantes. En el caso del estado del arte, se contemplan artículos desde el año 2018. Estos escritos se tomaron de los portales de la IEEE, Scencedirect, Springer, MDPI y Google Scholar.

Durante la búsqueda por las frases mencionadas anteriormente, se obtuvo una gran cantidad de artículos, por lo cual se decidió seleccionar solo los documentos que en su título se mencionara un modelo de *machine learning* aplicado a enfermedades en cultivos. En la realización del estado del arte se contemplaron 16 artículos.

## III. MARCO TEÓRICO

En la última década, el concepto de ciudades inteligentes (*Smart cities*) ha tomado relevancia debido al incremento poblacional que están experimentando las ciudades [4]. Este crecimiento conlleva a una demanda alta de comida, generando desafíos en la forma actual en que esta se cultiva. A partir de esto, como se indica

en [5] se empieza a relacionar el concepto de ciudades inteligentes con el de *Smart farming* ya que estas ciudades necesitan de una agricultura inteligente.

Con el objetivo de facilitar la lectura y el entendimiento de la revisión objeto de este artículo, a continuación, se presentan algunos conceptos claves sobre el significado de *Smart Farming* y las tecnologías a través de las cuales se está implementado. Por otro lado, se exponen algunas problemáticas relacionadas con la agricultura, sus características, y su aplicación dentro de *smart farming*.

### 3.1 *Smart Farming*

*Smart Farming*, también conocida como Agricultura 4.0, busca mejorar la eficiencia, adaptabilidad, resiliencia y sostenibilidad de los sistemas en la agricultura, a su vez impulsa a que este campo sea más competitivo y genere más ganancias [6]. En consecuencia, en este concepto se integran diferentes tecnologías de la información y comunicación que permiten una gestión eficiente y sostenible de las fincas. Con tecnologías como el internet de las cosas, la computación en la nube, *Big data* e inteligencia artificial se prevé que se puedan incluir más robots y automatización en la agricultura y ganadería [7]. A continuación, se describen las principales tecnologías usadas en la agricultura inteligente.

#### 3.1.1 *Big Data*

En la actualidad, se han implementado diferentes tipos de sensores en las fincas que permiten obtener datos sobre los cultivos, el suelo, el clima, entre otros [8]. Esto ha generado que exista un volumen importante de datos, lo cual requiere de una infraestructura que permita el almacenamiento y procesamiento de los mismos. Es allí donde el *Big Data* tiene un rol importante en la agricultura inteligente. Según [9] *Big data* consiste en extensos conjuntos de datos, que principalmente tienen las características de volumen, variedad, velocidad y/o variabilidad. Para lo cual, es necesario contar con una arquitectura escalable que permita el almacenamiento, manipulación y análisis eficiente de los datos.

Esta tecnología se ha utilizado en diversas fases de la agricultura, un ejemplo de ello es el estudio realizado en [8], el cual busca prevenir daños por heladas o granizadas en cultivos hortícolas como el cultivo cítrico.

En este caso utilizaron datos de temperatura, presión, temperatura de rocío, entre otros para crear un sistema de alarmas.

#### 3.1.2 Internet de las Cosas (IoT)

Una de las tecnologías claves usadas en *Smart Farming* es IoT. Esta se ha definido como un sistema de dispositivos computacionales interrelacionados, que tienen la capacidad de transferir datos a través de una red sin necesidad de interacción humana [10].

La agricultura inteligente basada en IoT consta de cuatro componentes: la estructura física, la adquisición de datos, procesamiento de datos y análisis de datos [11]. Una de sus aplicaciones es el monitoreo de plagas y enfermedades en los cultivos, esto ha ayudado a los agricultores a intervenir las siembras cuando se detecta algún tipo de plaga o enfermedad y de esta forma logran evitar pérdidas económicas [11].

#### 3.1.3 Inteligencia Artificial

La inteligencia artificial es considerada como uno de los factores claves en la revolución de la agricultura moderna [12]. Los agricultores han empezado a utilizar la IA en aplicaciones como la agricultura de precisión, el monitoreo de los cultivos, conocer la composición de los suelos, entre otros. Esto ha servido para gestionar de forma eficiente los fertilizantes y otros componentes necesarios del cultivo [13].

##### 3.1.3.1 *Machine Learning*

*Machine learning* (ML) es un campo de la inteligencia artificial que busca que las máquinas tengan la capacidad de aprender sin necesidad de haber sido estrictamente programada [14]. Los métodos de ML se pueden clasificar en tres categorías:

1. Aprendizaje supervisado: estos algoritmos usan un conjunto de datos etiquetados de entrada y pretende converger con el mejor clasificador posible [15]. Algunos de los modelos contemplados en esta categoría son: regresión lineal, árboles de regresión, regresión no lineal, regresión lineal bayesiana, regresión polinomial y regresión de vectores de soporte [16].

2. Aprendizaje no supervisado: El aprendizaje no supervisado está asociado al proceso de construcción de modelos después de analizar las similitudes entre los datos de entrada [15]. k-meansclustering, agrupamiento jerárquico, detección de anomalías, análisis de componentes principales, análisis de componentes independientes y descomposición en valores singulares (SVD) son ejemplos de algoritmos de este tipo de modelo [16].
3. Aprendizaje por refuerzo: es el aprendizaje de un mapeo de situaciones a acciones para maximizar una recompensa escalar o una señal de refuerzo [17]. Algunos ejemplos son: el proceso de decisión de Markov (MDP) y aprendizaje Q [16].

Estas técnicas y algoritmos de ML se implementan en el sector agrícola para la predicción del rendimiento de los cultivos, la detección de enfermedades y malezas, la predicción del clima, la estimación de las propiedades del suelo (ejemplo, contenido de humedad, pH, temperatura), la gestión del agua, la determinación de la cantidad óptima de fertilizante, y producción y manejo de ganado [16].

### 3.1.3.2 Deep Learning

*Deep Learning* es un tipo de aprendizaje automático que utiliza principios de las redes neuronales artificiales, específicamente se basa en lo que se conoce como redes neuronales profundas (*Deep networks*) [18]. Una red neuronal está inspirada en la funcionalidad del cerebro humano, esta una colección de unidades de procesadores que están interconectados. [19]

La mayoría de las técnicas de aprendizaje automático han utilizado el tipo de arquitectura poco profunda (*shallow*). Estas arquitecturas generalmente constan de hasta una o dos capas que contienen transformaciones no lineales. Las arquitecturas superficiales son efectivas para resolver problemas bien estructurados, pero son inadecuados para aplicaciones más complejas tales como tratamiento de imágenes, de leguaje, entre otros. Las arquitecturas más profundas brindan mejor desempeño para ese tipo de aplicaciones [18].

Basándose en [14] las redes neuronales profundas (DNN) permiten modelos computacionales que se componen de múltiples capas de procesamiento para aprender representaciones de datos complejos usando

múltiples niveles de abstracción. Los modelos DL han mejorado drásticamente el estado del arte en muchos sectores e industrias diferentes, incluida la agricultura. Los DNN son simplemente una ANN (*Artificial neural network*) con múltiples capas ocultas entre las capas de entrada y salida y pueden ser supervisadas, parcialmente supervisado o no supervisado. Un modelo DL común es la red neuronal convolucional (CNN), donde los mapas de características se extraen realizando convoluciones en el dominio de la imagen. Actualmente, tanto en la identificación de objetos como en la clasificación de imágenes, los métodos basados en *region of interest* (ROIs) conocidos como R-CNN (Region-based Convolutional Neural Networks) [20] son muy aplicados. En esta revisión se encontraron artículos donde se usan modelos de esta familia como lo es el algoritmo Faster R-CNN. En la siguiente imagen, se muestra la relación entre los conceptos de IA, ML y DL.

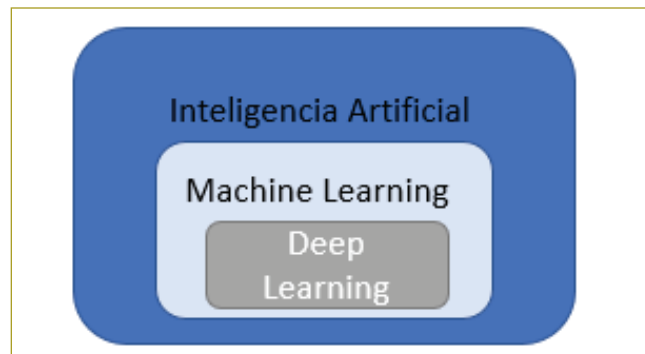


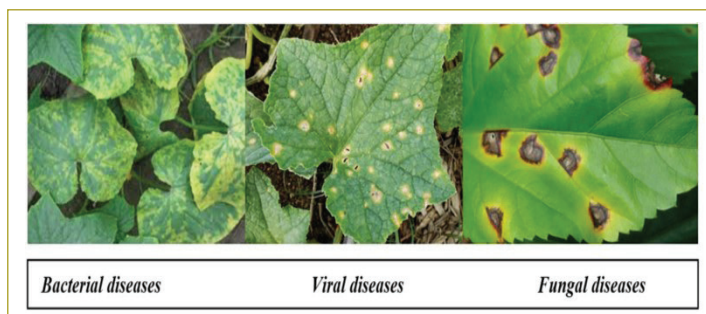
Figura 1. Conceptos IA, ML, DL.

### 3.2 Enfermedades en cultivos

Los cultivos son afectados por diferentes tipos de patógenos, tales como hongos, bacterias y otros microorganismos. Dependiendo del tipo de patógeno los síntomas se pueden observar tanto en la decoloración de las hojas, como en su forma y textura [21]. Insectos como las moscas blancas o pulgones y hongos como la antracnosis causan enfermedades en las plantas [21]. En la figura 3, se muestran un ejemplo de enfermedades causadas por virus, hongos y bacterias.

En la actualidad existen varias formas para identificar las enfermedades. La primera es por medio de expertos que se dirigen a los cultivos a realizar una inspección, la segunda mediante un análisis en un laboratorio y la tercera es a través de mecanismos de inteligencia artificial [22] [23]





**Figura 2.** Ejemplos de enfermedades en hojas. Tomada de “On Using Artificial Intelligence and the Internet of Things for Crop Disease Detection: A Contemporary Survey” por Orchi, H.; Sadik, M.; Khaldoun, M. *Agriculture* 2022, 12, 9. <https://doi.org/10.3390/agriculture12010009>.

#### IV. APLICACIONES DE MACHINE LEARNING EN LA AGRICULTURA

En esta sección se presenta un estado del arte de los distintos usos de *machine learning* aplicados al sector de la agricultura, específicamente se muestran estudios realizados en la detección de enfermedades en los cultivos.

##### 4.1 Detección de enfermedades en los cultivos

Uno de los principales problemas que enfrentan los agricultores son las enfermedades que atacan a los cultivos. Bacterias, hongos y/o microorganismos afectan a las plantas y a su vez afecta la producción del cultivo generando pérdidas económicas para el agricultor. Debido a esto, es importante detectar de forma oportuna las enfermedades o plagas que estén atacando a la cosecha y así se pueda aplicar los pesticidas necesarios para recuperar el mismo. Es allí donde los métodos de *machine learning* puede ayudar a identificar estas afecciones en el momento adecuado y así se puede tratar el cultivo antes de perder la cosecha [24]. A continuación, se presentan los artículos de investigación que se enfocaron en un tipo de cultivo y seguidamente se describen los escritos, en los cuales intentan encontrar modelos que apliquen a varias clases de cultivos.

##### 4.1.1 Detección de enfermedades en cultivos específicos

Actualmente uno de los métodos usados en este tipo de detección son las redes neuronales convolucionales. En [25] los investigadores realizaron un estudio sobre la

detección de enfermedades en cultivos de fresas, para ello desarrollaron una técnica de reconocimiento de imágenes usando CNN. Ellos se basaron en un conjunto de imágenes de cinco tipos de enfermedades comunes que atacan a esta fruta y su vez crearon un nuevo conjunto de datos realizando un proceso de manual de recorte (se enfocaron en las áreas donde se focalizaba la enfermedad en la hoja). El algoritmo CNN con el modelo Resnet50 propuesto en su trabajo, obtuvo un resultado de 98.06% de precisión en la identificación de estas enfermedades para el conjunto de datos original y uno de 99.60% para los datos creados manualmente.

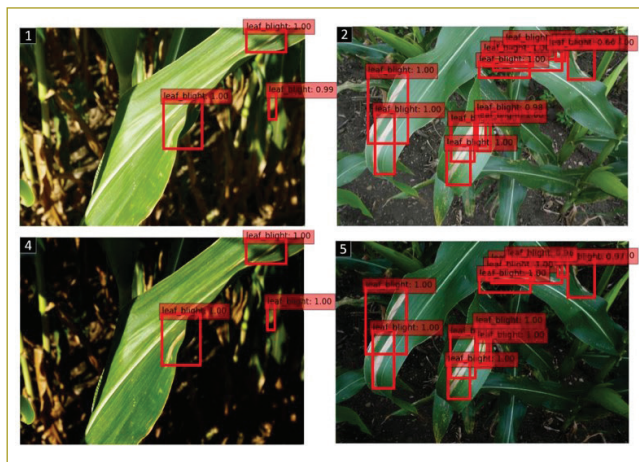
Una de las enfermedades más comunes que atacan a la fresa es “marchitez de verticillium” [26], debido a esto, en [26] se propone un modelo basado en Faster R-CNN (*Faster Region-based Convolutional Neural Network*) que obtiene una precisión del 99.95% en su detección.

En el estudio [27] también se propone un modelo basado en una red neuronal convolucional profunda (DCNN) para la detección de enfermedades de un cultivo de fruta, en este caso la manzana. Allí se busca detectar 5 enfermedades, tales como el “virus del mosaico en el manzano”, “la mancha gris” y “la mancha foliar por *Alternaria*”, para ello utilizan un conjunto de datos conformado por 2970 imágenes a las cuales aplican un procedimiento de pre-procesamiento, el cual consiste en aplicar técnicas de *data augmentation* y de normalización.

De igual forma, revisando el escrito [28] se utiliza una red neuronal convolucional utilizando el modelo “*Keras Sequential*” con el fin de detectar enfermedades en el cultivo de trigo. En este caso se utilizó un conjunto de 9340 imágenes que se etiquetaron con ayuda de varios expertos. A su vez, realizaron un desarrollo usando el método de árbol de decisión para analizar síntomas característicos de estas enfermedades que estaban en formato de texto, esta información la obtuvieron por medio de encuestas a expertos en estos cultivos.

Continuando con el cultivo de trigo, en [29] se enfocaron en analizar una de las principales enfermedades que lo atacan, esta es la “la roya amarilla”, para ello usaron un conjunto de 268 imágenes, en el cual incluyen imágenes de plantas sanas y enfermas. En esta investigación emplearon 5 métodos de *machine learning* y compararon los resultados entre sí, los algoritmos usados fueron: árbol de decisión, *random forest*, *XGBoost*, *light gradient boosting machine* y *catBoost*. El mejor resultado fue obtenido con la técnica *catBoost*.

Otro cereal de gran importancia en la agricultura es el maíz. La producción de maíz es la tercera más grande del mundo, solo es superada por el arroz y el trigo [23]. Este cultivo es atacado por “El tizón del maíz” [23]. Es allí donde los investigadores de [23] propusieron una red neuronal convolucional con una RPN (*region proposal network*) para la detección de esta enfermedad en las hojas de la planta. A continuación, se muestra un ejemplo de una imagen de una hoja analizada con este modelo.



**Figura 3.** Ejemplo de hoja de Maíz. Tomada de “Northern Maize Leaf Blight Detection Under Complex Field Environment Based on Deep Learning”, por J. Sun, Y. Yang, X. He and X. Wu. *IEEE Access*, vol. 8, pp. 33679-33688, 2020, doi: 10.1109/ACCESS.2020.2973658.

El “Tizón” también afecta a otras clases de cultivos, entre ellos está el de la papa. En el trabajo [30] se realiza una predicción de la enfermedad conocida como “tizón tardío” en el cultivo de la papa, allí se exploran diversos métodos de *machine learning* pero los de mejor resultado son: CNN y *Random forest*, siendo el mejor, la red convolucional. Las imágenes utilizadas como conjunto de datos fueron tomadas a través de un UAV (vehículo aéreo no tripulado).

Según [31] el cultivo de tomate también es afectado por el “tizón” y otras enfermedades provenientes de hongos como “mildiú polvoroso” y “hongo del moho de la hoja”. En ese estudio se realiza un sistema de detección de esas enfermedades y del “virus del mosaico del tomate” basado en Faster RCNN. Para ese análisis utilizaron 4178 imágenes de hojas de la planta de tomate, en ellas había hojas de cada tipo de enfermedad y sanas. Igualmente, la planta de cardamomo es afectada

por “tizón” originado por el hongo “*Colletotrichum*”, en [32] exponen un modelo basado en CNN para la detección de esta enfermedad y de la mancha foliar por *Phyllosticta*, su resultado es de una precisión del 98.26%. De forma similar, la planta de té puede ser atacada por un tipo de tizón, es por lo que en [33] desarrollan un modelo para predecir esa enfermedad en el cultivo de té. Este sistema está basado en sensores que permiten capturar datos del clima de la región, como temperatura, humedad, entre otros y a partir de ello utilizan un modelo de regresión lineal múltiple para realizar su predicción.

Los virus también son causantes de enfermedades en diferentes clases de cultivos, por ejemplo, la planta de algodón es afectada por “el virus de la hoja rizada” [34]. Con el fin de detectar esta enfermedad y otras enfermedades comunes a esta planta, en [34] se propone un modelo usando redes neuronales convolucionales, este obtuvo un 91% de precisión.

Por último, en la referencia [35], se realiza un estudio basado en datos tipo texto, allí se toman los síntomas de enfermedades asociadas al cultivo de la palma de aceite, los cuales fueron reportados mediante un formulario. A partir de esto, usan el algoritmo clasificador Naïve-Bayes para detectar la enfermedad y el estado de la misma.

#### 4.1.2 Modelos de ML aplicados a detección de enfermedades que aplican a diversos cultivos

Los trabajos [36] [37] presentan modelos que ayudan a la identificación de enfermedades en cultivos cítricos. En el primero se basan en una DCNN y obtienen un resultado de 95.04% de precisión, esto a partir de 609 imágenes repartidas entre 4 enfermedades comunes al cultivo y otras sanas. En el segundo, utilizan una red neuronal convolucional y un conjunto de datos que está dividido en 5 categorías: 4 que corresponde a 4 enfermedades y el último a las sanas. De igual forma, para el proceso de pre-entrenamiento utilizaron un *data set* externo que contenía imágenes de enfermedades en otros cultivos. El resultado obtenido fue de 92% precisión.

En la referencia [38] exponen un modelo de reconocimiento de enfermedades en cultivos utilizando CNN, usan 47363 imágenes de 27 enfermedades relacionadas con 10 clases de cultivos, algunos de estos son: el toma-



te, la papa y maíz. Antes de la normalización, emplean técnicas de recorte (fase de pre-procesamiento).

Finalizando, en el trabajo [39] se plantean modelos de identificación de enfermedades, pero se enfocan en procesos que ayuden a mejorar los datos, es decir utilizan Generative Adversarial Network (GAN) con el fin de mejorar los conjuntos de datos iniciales que poseen y después realizan el proceso de clasificación.

#### 4.2 Análisis comparativo

En los artículos expuestos anteriormente se observa el uso predominante de las redes neuronales convolucionales en la detección de enfermedades en los cultivos. En la figura 4, se muestra una imagen con el porcentaje de precisión obtenido por cada modelo propuesto en los artículos revisados.

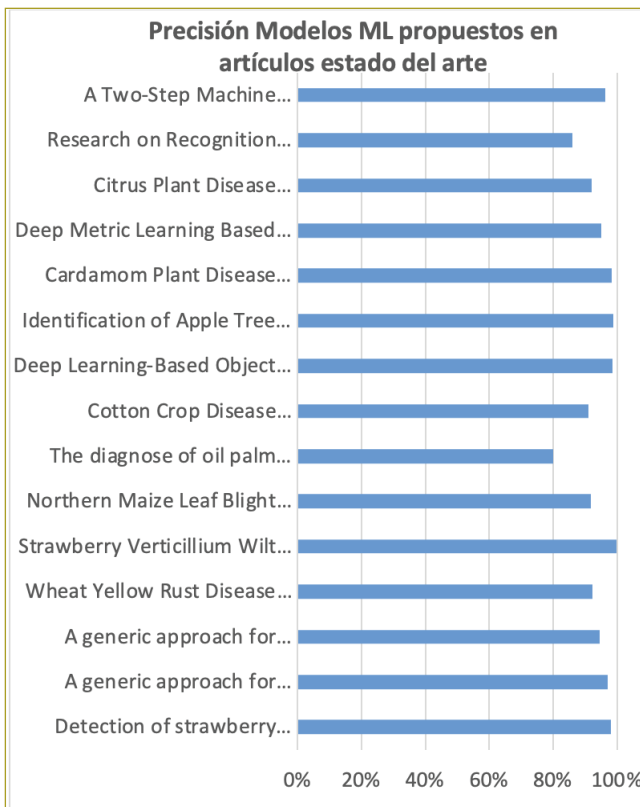


Figura 4. Precisión Modelos ML propuestos en artículos estado del arte.

En la siguiente gráfica se muestran los modelos usados en esos textos.

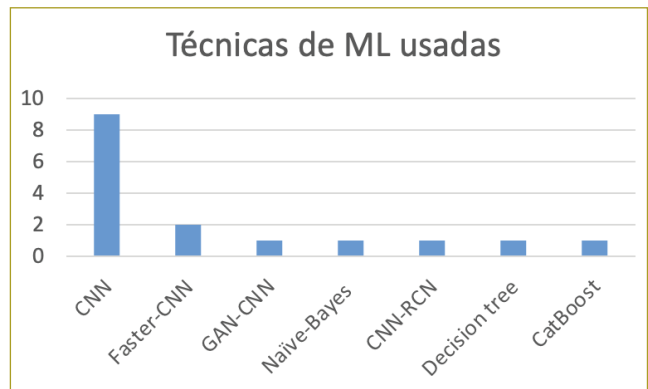


Figura 5. Técnicas de ML usadas.

Los modelos con mejor precisión son los que analizan cultivos o enfermedades específicas, esto en parte se debe a la extrema variabilidad de las imágenes que se pueden obtener de los cultivos y a la dificultad de tener conjuntos de datos bien etiquetados [39], es por ello la importancia de utilizar técnicas de *data augmentation* que por medio de distintas transformaciones permiten aumentar el conjunto de datos [37]. En [39] [37] [36] [27] realizan técnicas de este tipo para mejorar sus datos, en general usan métodos de rotación y/o de volteo horizontal o verticalmente en las imágenes, el único que se diferencia es [39] que implementa GAN para llevar a cabo este objetivo.

Considerando los métodos de *Machine learning* usados, se encuentra que los mejores resultados en términos de precisión se obtienen en los trabajos [31] y [26]. Estos tienen en común que usan Faster R-CNN como modelo ML, esto indicaría que los algoritmos de detección usados para detección de objetos a partir de regiones propuestas (RPN) pueden brindar buenos resultados para este problema de la agricultura.

Por otro lado, aunque en los artículos indican los agentes que pueden producir las enfermedades que afectan a las plantas (virus, bacterias, hongos) en ningún trabajo se enfocan en realizar un estudio específico sobre la detección de enfermedades generadas a partir de un solo agente.

#### V. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

Los modelos de *machine learning*, específicamente los de *Deep learning*, usados en la detección de enfermedades en los cultivos son primordiales para mantener la cosecha y no tener pérdidas económicas. Se observa que en la

mayoría de los casos, el uso de redes neuronales convolucionales podrían ayudar a detectar estas afecciones en etapas tempranas. Estos métodos permiten analizar las imágenes de plantas u hojas enfermas y sanas, y a partir de ello, realizar una correcta clasificación. A su vez, los algoritmos de ML también se pueden involucrar en etapas de pre-procesamiento de datos como lo es el *data augmentation* y de esta forma ayudar a mejorar el conjunto de datos de entrenamiento. En [31] también usan un método de ML (k-means) para la delimitación de cuadros (BoundingBox) en la imagen, esto muestra otro uso de ML en esta problemática de la agricultura.

Otro aspecto importante a tener en cuenta, son los datos con los que se trabajan. Generalmente hay una gran variedad de imágenes relacionadas con las enfermedades en las plantas, por lo cual las tareas de pre-procesamiento se vuelven vitales en los modelos.

Por otro parte, no hay un modelo específico el cual se pueda ajustar a todos los cultivos o enfermedades y la mayoría de los estudios se enfocan en analizar un cultivo específico o una enfermedad. A partir de ello, se podría plantear la idea de investigar modelos basados en los agentes que causan las enfermedades, es decir revisar si hay patrones comunes en afecciones generadas por hongos o por virus, o bacterias en diferentes cultivos y realizar el respectivo análisis de estas imágenes. También se debe considerar el uso más frecuente de GAN en este tipo de desarrollos, este tipo de tecnología podría mejorar los resultados obtenidos a partir de conjuntos de datos más limitados.

Aunque la implantación de estos sistemas no es fácil debido a las diversas condiciones tanto climáticas como geográficas en las regiones que se encuentran ciertos cultivos, es importante que a futuro se instalen más sensores IoT o se integren UAV en las fincas con el objetivo de tener mejores conjuntos de datos y dar usos más prácticos de estos modelos.

## REFERENCIAS

- [1]. FAO, «The future of food and agriculture – Trends and challenges,» *Food and Agriculture Organization of the United Nations*, 2017.
- [2] R. M. ., J. G.-N. S. A. H. A. R. Z. N. I. Uferah Shafi, «Precision Agriculture Techniques and Practices: From Considerations to Applications,» *Sensors*, vol. 19, 2019.
- [3] U. S. S. D. I. G. Gouravmoy Bannerjee, «Artificial Intelligence in Agriculture: A Literature Survey,» *International Journal of Scientific Research in Computer Science Applications and Management Studies*, vol. 7, 2018.
- [4] S. Z. Rida Khatoun, «Smart Cities: Concepts, Architectures, Research Opportunities,» *Communications of the ACM*, vol. 59, nº 8, p. 46–57, 2016.
- [5] Stephen Hallett, «Smart cities need smart farms,» *Environmental Scientist*, vol. 26, nº 1, pp. 10-17, 2017.
- [6] S. M. P. M. F. L. Olivier Debauche, «Cloud and distributed architectures for data management in agriculture 4.0 : Review and future trends,» *Journal of King Saud University – Computer and Information Sciences*, 2021.
- [7] L. G. C. V. M.-J. B. Sjaak Wolfert, «Big Data in Smart Farming – A review,» *Agricultural Systems*, vol. 153, pp. 69-80, 2017.
- [8] D. P. S. A. M. I. N. A. Sjoukje A. Osinga, «Big data in agriculture: Between opportunity and solution,» *Agricultural Systems*, vol. 195, 2021.
- [9] N. G. N.-P. N. B. D. P. W. G. Wo L. Chang, «NIST Big Data Interoperability Framework: Volume 1, Definitions,» *National Institute of Standards and Technology*, 2015.
- [10] T. A. R. I. O. C. Y. L. M. N. H. Olakunle Elijah, «An Overview of Internet of Things (IoT) and Data Analytics in Agriculture: Benefits and Challenges,» *IEEE INTERNET OF THINGS JOURNAL*, vol. 5, 2018.
- [11] S. R. A. A. K. A. M. A. N. Muhammad Shoaib Farooq, «A Survey on the Role of IoT in Agriculture for the Implementation of Smart Farming,» *IEEE Access, special section on new technologies for smart farming 4.0*, vol. 7, 2019.
- [12] C. M. A. Subeesh, «Automation and digitization of agriculture using artificial intelligence and internet of things,» *Artificial Intelligence in Agriculture*, vol. 5, pp. 278-291, 2021.
- [13] S. Young, «The future of Farming Artificial intelligence and agriculture.,» *Harvard International Review*, vol. 41, p. 45'47, 2009.
- [14] P. B. D. M. P. D. B. Konstantinos G. Liakos, «Machine Learning in Agriculture: A Review,» *Sensors*, vol. 18, 2018.
- [15] E. J. C. Ingry-Nathaly Salamanca R, «Técnicas de aprendizaje automático aplicadas en los sistemas de predicción,» *Revista Tecnología, Investigación y Academia -Red Avanzada – RITA*, vol. 8, pp. 39-53, 2021.
- [16] P. M. R. A. Rabiya Abbasi, «The digitization of agricultural industry – a systematic literature review on agriculture 4.0,» *Smart Agricultural Technology*, vol. 2, 2022.
- [17] R. S. Sutton, «Introduction: The Challenge of Reinforcement Learning,» de *The Springer International Series in Engineering and Computer Science*, 1992.
- [18] Z. ünal, «Smart farming becomes even smarter with deep learning—a bibliographical analysis,» *IEEE Access*, vol. 8, 2020.
- [19] D. M. Skapura, *Building Neural Networks*, New York: ACM press books, 1995.
- [20] S. R. B. C. S. O. L. S. M. N. S. Elisa Ricci, *Image Analysis and Processing – ICIAP 2019:20th International Conference*, Trento: Springer, 2019.
- [21] M. S. M. K. Houda Orchi, «On Using Artificial Intelligence and the Internet of Things for Crop Disease Detection: A Contemporary Survey,» *Agriculture*, vol. 12, 2022.
- [22] Y. X. T. P. L. Y. B. C. T. K. W. L. Clarence Augustine Th Tee, «Discovering the Ganoderma Boninense Detection Methods Using Machine Learning: A Review of Manual, Laboratory, and Remote Approaches,» *IEEE Access*, vol. 9, 2021.
- [23] Y. Y. X. H. X. W. Jun Sun, «Northern Maize Leaf Blight Detection Under Complex Field Environment Based on Deep Learning,» *IEEE Access*, vol. 8, 2020.

- [24] A. J. P. G. V. C. Abhinav Sharma, «Machine Learning Applications for Precision Agriculture: A Comprehensive Review,» *IEEE Access*, vol. 9, 2021.
- [25] P.-C. C. H.-Y. W. Q.-H. P. J.-L. A. Y. M. T.-K. H. Jia-Rong Xiao, «Detection of Strawberry Diseases Using a Convolutional Neural Network,» *Plants*, vol. 10, 2021.
- [26] L. W. H. D. M. X. Xuan Nie, «Strawberry Verticillium Wilt Detection Network Based on Multi-Task Learning and Attention,» *IEEE Access*, vol. 7, 2019.
- [27] G. S. H. Z. M. L. D. H. Xiaofei Chao, «Identification of Apple Tree Leaf Diseases Based on Deep Learning Models,» *Symmetry*, vol. 12, 2020.
- [28] A.-U. R. N. M. D. S. U. R. Waleej Haider, «A Generic Approach for Wheat Disease Classification and Verification Using Expert Opinion for Knowledge-Based Decisions,» *IEEE Access*, vol. 9, 2021.
- [29] R. M. I. U. H. M. H. N. I. A. S. S. M. H. Z. Z. M. Uferah Shafi, «Wheat Yellow Rust Disease Infection Type Classification Using Texture Features,» *Sensors*, vol. 22, 2022.
- [30] D. F. A. A. A. R. J. D. S.-S. A. E. F.-R. M. S.-S. Julio M. Duarte-Carvajalino, «Evaluating Late Blight Severity in Potato Crops Using Unmanned Aerial Vehicles and Machine Learning Algorithms,» *Remote sensing*, vol. 10, 2018.
- [31] C. S. D. Z. Yang Zhang, «Deep Learning-Based Object Detection Improvement for Tomato Disease,» *IEEE Access*, vol. 8, 2020.
- [32] J. C. D. N. P. Sunil C. K., «Cardamom Plant Disease Detection Approach Using EfficientNetV2,» *IEEE Access*, vol. 10, 2022.
- [33] R. N. B. S. I. M. M. A. S. M. T. Q. U. Zhiyan Liu, «Internet of Things (IoT) and Machine Learning Model of Plant Disease Prediction—Blister Blight for Tea Plant,» *IEEE Access*, vol. 10, 2022.
- [34] Q. K. S. K. Nimra Pechuho, «Cotton Crop Disease Detection using Machine Learning via Tensorflow,» *Pakistan Journal of Engineering and Technology, PakJET*, Vols. %1 de %2126-130, 2020.
- [35] Y. L. D. S. O. S. E. I. S. S. W. P. R. M. Marlince Nababan, «The diagnose of oil palm disease using Naive Bayes Method based on Expert System Technology,» *Journal of Physics: Conference Series*, n° 1007 012015, 2018.
- [36] S. T. S. R. Q. L. Y. Z. J. Y. Sivasubramaniam Janarthan, «Deep Metric Learning Based Citrus Disease Classification With Sparse Data,» *IEEE Access*, vol. 8, 2020.
- [37] H. A. Talha Anwar, «Citrus Plant Disease Identification using Deep Learning with Multiple Transfer Learning Approaches,» *Pakistan Journal of Engineering and Technology, PakJET*, vol. 1, pp. 34-38, 2020.
- [38] C. S. J. T. ,. X. C. Yong Ai, «Research on Recognition Model of Crop Diseases and Insect Pests Based on Deep Learning in Harsh Environments,» *IEEE Access*, vol. 8, 2020.
- [39] N. M. M. H. W. D. B. Aaditya Prasad, «A Two-Step Machine Learning Approach For Crop Disease Detection: An Application Of Gan And Uav Technology,» *Arxiv*, n° arXiv:2109.11066, 2021.



# Una aproximación al costo horario en proyectos estructurales de vivienda

## An approach to the hourly cost in structural housing projects

GERARDO RAMÍREZ-URIBE<sup>1</sup> - ARTURO OJEDA DE LA CRUZ<sup>2</sup> -  
JESÚS QUINTANA PACHECO<sup>3</sup> - MARCO RAMOS CORELLA<sup>4</sup>

Profesores del Departamento de Ingeniería Civil y Minas de la Universidad de Sonora (México).

gerardo.ramirez@unison.mx - arturo.ojeda@unison.mx- jesus.quintana@unison.mx -  
marco.ramos@unison.mx

Recibido: 06/09/2023 Aceptado: 08/11/2023

Disponible en [http://www.escuelaing.edu.co/es/publicaciones\\_revista](http://www.escuelaing.edu.co/es/publicaciones_revista)  
<http://revistas.escuelaing.edu.co/index.php/reci>

### Resumen

El objetivo de este proyecto es determinar los factores que influyen en el cálculo del costo horario en el desarrollo de un proyecto estructural para una vivienda, y encontrar un método que se pueda aplicar. Para esto, hay que identificar los principales métodos y factores utilizados a la hora de establecer los honorarios en el proyecto estructural en viviendas a partir de las características del proyecto, describir el procedimiento seguido por los ingenieros estructurales a escala regional para fijar los honorarios del proyecto estructural, analizar las metodologías que aborden el proceso de honorarios en la ejecución de proyectos en varias áreas de la ingeniería civil, para lograr orientación y definición del método más idóneo, conocer las ventajas y desventajas al hacer una comparación de diversos criterios al momento de implementar honorarios para la realización de un proyecto en el ámbito de la ingeniería civil local.

A partir de la información obtenida y desarrollada a lo largo de este artículo, se demuestra que, al estudiar las metodologías para la obtención de los honorarios profesionales de todas las áreas de la ingeniería, es posible tomar un punto de partida en el cual se puedan proponer diferentes tipos de factores que hay que implementar para la aproximación del costo horario de proyectos estructurales en vivienda, a partir de las características particulares que definen cada proyecto.

**Palabras claves:** estructuras, costo horario, planeación de proyectos, honorarios.

### Abstract

The objective of this project is to determine the factors that influence the hourly cost calculation in the development of a structural project for a house, and to identify a method that may be applicable. This involves identifying the main methods and factors used in the determination of fees in structural projects for homes based on project characteristics. Additionally, it entails describing the procedure for determining fees for structural projects by regional structural engineers, analyzing different methodologies addressing fee processes in project execution across various areas of civil engineering, and achieving guidance and definition of the most suitable method. The aim is to understand the advantages and disadvantages through a comparison of various criteria when implementing fees for carrying out projects in the local civil engineering field. Based on the information obtained and developed throughout this document, it is evident that studying methodologies for obtaining professional fees from different engineering areas provides a starting point for proposing various factors to implement for approximating the hourly cost of structural housing projects, based on the characteristics defining each project.

**Keywords:** structures, hourly cost, project planning, fee.

## INTRODUCCIÓN

La ingeniería civil cuenta con una amplia gama de especialidades para la ejecución de proyectos de cualquier índole. Cuando un profesional comienza a trabajar de manera independiente, una de las inquietudes más grandes suele ser cuánto cobrar por los servicios que va a prestar o cómo debe calcular los honorarios. Anteriormente, algunos profesionales, al momento de presentar sus honorarios por la realización de un proyecto en forma independiente, se basaban sobre todo en sus años de experiencia, la magnitud del proyecto, el tiempo invertido en él, o bien aplicaban un porcentaje correspondiente a la construcción.

No existe una cantidad exacta sobre el costo horario en la ejecución de un proyecto. Eso tiene como consecuencia que en ciertas ocasiones se presenta un monto estimado, pero en el transcurso del proyecto el profesional se puede percatar de que se proporcionó una aproximación que no corresponde al proyecto que se va a realizar, por un análisis o un cálculo apresurados, o por un rápido estudio del anteproyecto, así como también problemas durante la planificación de este.

Según la definición dada por el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (Inegi), entidad autónoma mexicana, por intermedio del glosario de la Encuesta Nacional de Ocupación y Empleo (ENOE), los trabajadores independientes, o *freelancers*, son profesionales que se emplean por su cuenta, como informales, contratistas independientes o personas que trabajan desde su hogar, sin que los hayan dado de alta en la nómina de alguna empresa.

Los trabajadores independientes disponen de sus propias herramientas o medios de producción y buscan su materia prima o sus clientes, son dueños del bien o producto que elaboran o que venden, deciden cómo y dónde promover sus productos o servicios, y enfrentan el riesgo económico de perder o ganar.

Por desgracia, estos trabajadores están completamente desprotegidos por la ley. De hecho, es una práctica común que las empresas aprovechen esta figura para enganchar empleados temporales pero sin contrato, así como también para tener empleados fijos sin pagarles las prestaciones de ley (Ochoa, 2018).

Los ingresos por honorarios son todos los percibidos por la prestación de servicios profesionales independientes, en desarrollo de una relación laboral autónoma y voluntaria tanto del individuo que realiza

el trabajo como de la unidad económica receptora (García, 2020).

El diseño estructural se define como las actividades que desarrolla el proyectista para determinar la forma, dimensiones y características detalladas de una estructura. Dicho diseño se encuentra inserto en el proceso más general del proyecto de una obra civil, en el cual se establecen las características que debe tener la construcción para cumplir de manera adecuada las funciones que esté destinada a desempeñar (Meli, 2008).

Un proyecto es un desafío temporal que se enfrenta para crear un solo producto o servicio. Todo proyecto tiene un resultado deseado, una fecha límite y un presupuesto limitado (Lledó y Rivarola, 2007). Es una planificación, que consiste en un conjunto de actividades que hay que hacer en forma articulada entre sí, con el objeto de producir determinados bienes o servicios, capaces de satisfacer necesidades o resolver problemas, dentro de los límites de un presupuesto y un periodo de tiempo dado (*Guía Padid*, 2014).

La ejecución del proyecto es la parte en la cual se llevan a cabo las actividades necesarias para generar el alcance acordado. Se trata de las labores de análisis de requisitos, planificación (en cuanto a diseño, por ejemplo, una estructura o un producto), cálculo, diseño en detalle, subcontratación, aclaraciones, etc. (Vela, 2016).

El objetivo de este proyecto es determinar los factores que influyen en el cálculo del costo horario en el desarrollo de un proyecto estructural para una vivienda, y encontrar un método que se pueda aplicar. Para esto hay que identificar los principales métodos y factores utilizados a la hora de establecer los honorarios en el proyecto estructural en viviendas a partir de las características de este, describir el procedimiento a la hora de fijar los honorarios del proyecto estructural por parte de los ingenieros estructurales a escala regional, analizar las metodologías que aborden el proceso de honorarios en la ejecución de proyectos en diversas áreas de la ingeniería civil, para lograr orientación y definición del método más idóneo, así como conocer las ventajas y desventajas al hacer una comparación de diferentes criterios al momento de fijar honorarios para la realización de un proyecto en el ámbito de la ingeniería civil local.



## CICLO DE VIDA DEL PROYECTO

El proceso del proyecto se considera cíclico, ya que, por un lado, de los resultados finales pueden surgir ideas de nuevos proyectos que continúan y complementan el ciclo, y por otro lado, cada una de las fases precede a otra. Este proceso dinámico incorpora la nueva información a los planteamientos previos y reorienta así el proceso de elaboración del proyecto (Project Management Institute, 2002).

En general, los proyectos se dividen en varias fases con el objeto de hacer más eficientes la administración y el control. Cada fase del proyecto se considera completa cuando finaliza la producción de entregables (bienes o servicios claramente definidos y verificables que se producen durante el proyecto o que son el resultado de este). Las fases de cada proyecto en particular tienen nombres y requerimientos de entregables similares, pero casi todos los proyectos son distintos (Lledó y Rivarola, 2007).

El costo representa la medición financiera de los esfuerzos asociados a la adquisición o producción de un bien o servicio, y está constituido generalmente por el resultado de las cantidades multiplicadas por los precios (Heredia, 2008).

Por otra parte, sobre la base de esta definición, se dice que el costo es el insumo de determinados elementos valorizables económicamente, aplicado a lograr un objetivo también económico. Es posible afirmar que todos los contenidos que forman parte del precio de venta de una operación o producto, más allá de la ganancia, son costos, puesto que se trata de la adquisición y el consumo de “esfuerzos” que se pueden valorar en dinero y que son imprescindibles para llevar a cabo la operación que nos permita recibir ese precio de venta (Faga y Mejía, 2006).

En la administración del costo se deben incluir los procesos necesarios para asegurar que el proyecto se cumpla dentro del presupuesto preestablecido. Así, se distinguen tres procesos para la administración del costo del proyecto (Lledó y Rivarola, 2007).

**1. Estimación de costos.** Proceso que consiste en desarrollar una estimación aproximada de los recursos monetarios necesarios para completar las actividades del proyecto. El beneficio clave de este proceso es determinar la cantidad de costos requeridos para llevar a cabo las tareas del proyecto. Una de las sa-

lidas de este proceso es la estimación de costos de las actividades (García, 2015).

- 2. Presupuesto de costos.** En este proceso se asignan los costos estimados a cada actividad del proyecto (Faga y Mejía, 2006). Consiste en sumar los costos estimados de las actividades individuales o paquetes de trabajo, con miras a establecer una línea base de costos autorizada. El beneficio clave de este proceso es que determina la línea base de costos con respecto a la cual se puede monitorear y controlar el desempeño del proyecto (García, 2015).
- 3. Control de costos.** Proceso en el cual se controlan los cambios que puedan ocurrir en los costos estimados (Faga y Mejía, 2006). El beneficio clave de este proceso es que proporciona los medios para detectar desviaciones en relación con el plan y, de este modo, tomar acciones correctivas y minimizar el riesgo (García, 2015).

La estimación de costos consiste en realizar aproximaciones de cuánto valdrán los recursos necesarios para completar las actividades del proyecto. Entre estos costos se pueden mencionar la mano de obra, los materiales, el equipamiento, viáticos, reservas para contingencias, intereses financieros, etc. Al asignar los costos de cada recurso de las diferentes actividades del proyecto, se obtendrá el costo total presupuestado para cada uno de ellos. La sumatoria del costo de todas las actividades de trabajo será el costo total estimado del proyecto (Lledó y Rivarola, 2007).

Olavarrieta (1999) afirma que los costos se pueden estimar de muchas maneras:

- **Estimación realizada burdamente.** Es aquella simplemente estimada, que carece de detalle y se basa solo en la experiencia y el juicio del estimador.
- **Estimación presupuestal.** Obtenida al elaborar un presupuesto para la fabricación de un producto o servicio, etc.
- **Estimación detallada.** Es aquella hecha en función del riesgo y del monto involucrado.
- **Estimación paramétrica.** Se basa en costos unitarios que se usan como parámetros de referencia. Es muy común en la industria de la construcción.
- **Estimación de proyectos.** Estimar el costo de un proyecto es una tarea que representa mayor com-



plejidad. Se toma como base el tiempo de ejecución del proyecto.

Según el Project Management Body of Knowledge (PMBOK, 2017), la exactitud de la estimación del costo de un proyecto aumenta a medida que avanza el proyecto, de manera que es un proceso iterativo.

En ese orden de ideas, es posible definir la estimación de costos como una evaluación cuantitativa de los costos probables de los recursos necesarios para completar las actividades del proyecto.

Sáez (2021) asegura que los costos se pueden clasificar de acuerdo con sus relaciones con la producción.

La clasificación está relacionada directamente con los elementos del costo de un producto y es el principal objetivo del control. Las dos categorías basadas en las relaciones con la producción son los costos primos y los costos de conversión, definidos a renglón seguido:

- **Costos primos.** Son los materiales directos y la mano de obra directa, es decir, los costos relacionados directamente con la producción del artículo.
- **Costos de conversión.** Son los relacionados con el procedimiento de materiales dentro de los productos terminados. Los costos de conversión son la mano de obra directa y los costos indirectos de fabricación.

Los costos que se pueden reconocer directamente en un objeto de costo mediante un claro mecanismo cuantitativo de seguimiento son los así llamados costos directos, mientras que los que solo se pueden identificar en él por medio de una fórmula de asignación específica son los indirectos (Toro, 2010). Estos costos son de gran utilidad, ya que proporcionan información para la toma de decisiones económicas (Cáceres, 2005).

Por otra parte, el costeo es la acción metodológica empleada para determinar, medir o valorar el costo de una actividad, de un departamento, de un producto o servicio. El sistema de costeo normal extendido, conocido también como el sistema de costeo presupuestado, calcula los costos directos de un objeto de costo (producto, servicio o cliente) mediante tarifas de costos presupuestadas, multiplicándolos por la cantidad real de elementos de costos directos, y luego asigna los costos indirectos sobre la base de tarifas de costos indirectos presupuestadas, multiplicadas por la cantidad real de la base de asignación de costos (Heredia, 2008).

A continuación, se muestra la fórmula para la obtención del costo por la estimación de horas laboradas directa e indirecta:

$$\begin{aligned} & \text{Tasa presupuestada horaria de costos laborables} \\ & \text{directos} = \\ & \frac{(\text{Total de costos laborables directos presupuestados})}{(\text{Total de horas laborables directas presupuestadas}).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Tasa presupuestada horaria de costos indirectos} = \\ & \frac{(\text{Total de costos indirectos presupuestados})}{(\text{Total presupuestado unidad base de asignación de} \\ & \text{costos})} \text{ (Toro, 2010).} \end{aligned}$$

El Colegio de Valuadores Profesionales del Estado de Sonora, A.C. (Covaproes, 2021), presenta un arancel para el cobro de honorarios de avalúos de bienes inmuebles en pesos mexicanos: bancarios, profesionales, judiciales, maquinaria y equipo, agropecuarios e industriales, costo por hora efectiva en investigaciones, tiempos en traslados a localidades que se ubiquen a más de 200 kilómetros de la ciudad base, medios de apremio en avalúos judiciales, gastos de viáticos, costo por kilómetro recorrido en la utilización de vehículo, alimentación, hospedaje y casetas de cuota, en avalúos foráneos, como se puede observar a continuación (tabla 1).

Para conocer el arancel de un proyecto estructural, se ubica el proyecto en alguno de los tipos de edificación presentados en la tabla siguiente (tabla 2) y se obtiene el costo directo unitario (costo/m<sup>2</sup>) en pesos mexicanos. Así mismo, se estima el área total del proyecto que se va a realizar, la cual se obtiene de acuerdo con el tipo de edificación; esta área deberá comprender los espacios cubiertos por losas de concreto, cubiertas ligeras, pérgolas, etc., de todos los niveles. Para el caso de estructuras especiales, se deben considerar el área de la losa del fondo de albercas, el área de losas de fondo y tapa de cisternas, en tanto que para el caso de muros de contención o bardas se tomará en cuenta el área de tablero tipo y se aplicará la repetición del tablero a todo el muro. Por último, para el caso de letreros se considerará el área de pantalla.

**Tabla 1**

Modificada de resumen de los aranceles del Colegio de Valuadores Profesionales del Estado de Sonora, A.C., para el cobro de honorarios en pesos mexicanos.

<b>Avalúos bancarios</b>		<b>En pesos mexicanos</b>
De bienes inmuebles	Cobro mínimo	\$4.000,00
De terrenos baldíos	Cobro mínimo	\$3.300,00
<b>Avalúos profesionales</b>		
De bienes inmuebles	Cobro mínimo	\$3.600,00
De terrenos baldíos	Cobro mínimo	\$3.000,00
<b>Avalúos judiciales</b>		
De bienes inmuebles	Cobro mínimo	\$5.600,00
De \$1.00 hasta \$1.120.000,00		5/1.000
De \$1.120.000,00 en adelante		
De terrenos baldíos	Cobro mínimo	\$5.000,00
<b>Avalúos de maquinaria y equipo</b>		
Tarifa 5/1.000	Cobro mínimo	\$5.600,00
<b>Avalúos agropecuarios</b>		
Tarifa 5/1.000	Cobro mínimo	\$5.600,00
<b>Avalúos industriales</b>		
Tarifa 5/1.000	Cobro mínimo	\$5.600,00
<b>Costo por hora efectiva</b>		
En investigaciones		\$ 850,00
Dictámenes urgentes		\$1.700,00
<b>Costo por tiempo de traslado</b>		
Traslados mayores de 200 km		\$5.000,00
<b>Costo por km recorrido</b>		
En carretera pavimentada	\$/km	\$ 12,00
En terracería y carriles	\$/km	\$ 30,00
<b>Viáticos de acuerdo con los comprobantes correspondientes</b>		

Fuente: Covaproes, 2021.

**Tabla 2**  
Costo/m<sup>2</sup> en función del tipo de edificación en pesos mexicanos.

Tipo de edificación		Costo de m <sup>2</sup>
<b>Viviendas</b>		
Tipo 1	Casa habitación de interés social, área menor de 60,0 m <sup>2</sup>	\$1.807,56
Tipo 2	Casa habitación media, área comprendida entre 60,0 y 250,0 m <sup>2</sup>	\$2.073,88
Tipo 3	Casa habitación alta, área mayor de 250,0 m <sup>2</sup>	\$2.207,68
<b>Edificios</b>		
Tipo 4	Edificios de departamento de interés social	\$2.466,09
Tipo 5	Edificios de departamento de interés medio	\$2.637,93
Tipo 6	Edificios de departamento de interés lujo	\$2.935,70
Tipo 7	Oficinas y corporativos	\$3.229,53
Tipo 8	Escuelas	\$2.567,09
Tipo 9	Clínicas y laboratorios	\$2.426,74
Tipo 10	Hospitales	\$6.259,67
Tipo 11	Nave industrial, gasolineras, talleres, bodegas, fábricas, cubiertas metálicas y central de autobuses	\$2.867,49
Tipo 12	Bancos	\$2.658,92
Tipo 13	Hoteles	\$2.839,94
Tipo 14	Centros comerciales	\$2.750,74
Tipo 15	Locales comerciales	\$2.117,16
Tipo 16	Supermercados	\$2.216,86
Tipo 17	Auditorios, teatros, museos, bibliotecas, centros comerciales, cines e iglesias	\$3.777,84
Tipo 18	Edificio de estacionamiento	\$2.525,12
Tipo 19	Edificio de estacionamiento subterráneo	\$2.525,12
<b>Estructuras especiales</b>		
Tipo 20	Instalaciones deportivas	\$2.881,91
Tipo 21	Cárceles	\$2.557,91
Tipo 22	Gradas	\$2.776,97
Tipo 23	Piscinas (se considera el área de losas de fondo)	\$2.514,62
Tipo 24	Cisternas (se considera el área de losas de fondo y tapa)	\$4.112,34
Tipo 25	Muros de contención y bardas	\$1.049,40
Tipo 26	Puentes peatonales para claros de hasta 15 m, incluyendo área de rampas y escaleras	\$6.920,79
Tipo 27	Puentes vehiculares para claros de hasta 15 m	\$9.300,31
Tipo 28	Anuncio en general	\$14.821,46

Fuente: Sociedad Mexicana de Ingeniería Estructural (SMIE, 2020).

En otros estudios, como el de Rajeh (2018), se desarrolla un modelo conceptual para la relación entre los sistemas de contratación y los costos de transacción, modelo que se operacionalizó y desarrolló en un cuestionario. Se implementó un enfoque de muestra transversal, que involucró cuestionarios piloto y de encuesta, y de verificación de resultados por medio de casos del “mundo real”.

Se solicitaron además datos de profesionales de la construcción en gestión, diseño y operaciones (es decir, gerentes de proyecto, arquitectos, ingenieros, topógrafos y oficiales de adquisiciones). Los costos de transacción se midieron utilizando el tiempo dedicado a realizar actividades relacionadas con adquisiciones como sustituto del costo. Los profesionales evalúan el tiempo que destinan a las actividades de adquisición uti-

lizando una escala de Likert del 1 al 5, comparando los sistemas de entrega tradicional y diseño-construcción. Los datos se triangularon con casos del “mundo real” para probar y explicar el modelo desarrollado. La prueba incluyó validez y confiabilidad, análisis de rutas, análisis de regresión, análisis factorial y modelos de ecuaciones estructurales. La principal técnica analítica utilizada fueron los modelos de ecuaciones estructurales para obtener información sobre la bondad de ajuste, el desarrollo y la comparación de modelos y las estrategias de confirmación.

**Tabla 3**  
Factores por grado de dificultad en función del tipo de estructura y suelo

Factor de grado de dificultad	
Estructura regular, en suelo duro	1,0
Estructura regular, en suelo blando	1,10
Estructura irregular, en suelo duro	1,20
Estructura irregular, en suelo blando	1,30

Fuente: Sociedad Mexicana de Ingeniería Estructural (SMIE, 2020).

Castillo (2015) hizo un análisis comparativo de los costos asociados a la construcción de vivienda de baja altura, bajo costo y de interés social. En el estudio se incluyeron tres de los sistemas estructurales más empleados para la construcción de vivienda de baja altura en Latinoamérica, tales como el sistema tradicional de muros de mampostería confinada, muros de concreto reforzados convencionalmente con mallas electrosoldadas y muros de concreto reforzados con fibras de acero. La comparación de los costos se hizo por medio del análisis de presupuestos, los cuales se efectuaron con base en las cantidades de obra, los precios unitarios y los ítems particulares de cada sistema estructural. Finalmente, en el estudio se determinó que, desde el punto de vista económico, los sistemas de muros de concreto reforzados con mallas electrosoldadas o con fibras de acero resultan más favorables que los sistemas de mampostería confinada.

Adicionalmente, la comparación integral de los tres sistemas estructurales demuestra que el sistema industrializado de muros de concreto reforzado con fibras de acero permite obtener mayores beneficios de limpieza y sostenibilidad, mayor velocidad de construcción, menor

costo y un panorama más atractivo para los constructores que invierten en este tipo de proyectos.

Por otra parte, la Oficina de Equidad y Derechos Civiles de Baltimore (2020) publicó las siguientes tarifas de salario mínimo por hora, las cuales se aplicarán a todos los contratos que excedan los cien mil dólares (US\$100.000) en relación con la construcción de nuevos edificios, remodelaciones importantes y rehabilitación de edificios, al igual que para la construcción, reconstrucción, montaje, conversión, instalación, alteración, renovación, demolición, traslado o remoción en cualquier aeropuerto, embarcadero, alcantarillado, desagüe, tubería principal, conducto, maquinaria, equipo mecánico, eléctrico o de otro tipo, o cualquier otra operación o trabajo que se haga en relación con cualquier edificio, puente sobre el agua, torre-túnel, chimenea, planta de filtración, obras de tratamiento de aguas residuales, estaciones de bombeo y otras estructuras similares (tabla 4).

## METODOLOGÍA

El proceso metodológico constará de dos etapas. La primera corresponde a hacer una encuesta en la plataforma Google Forms, con el propósito de conocer las preferencias y las opiniones de los ingenieros civiles estructurales de la región al momento de generar sus honorarios profesionales para la realización de un proyecto estructural.

Por medio de dicha encuesta, que se aplicará al gremio de los ingenieros civiles estructurales, se pretende conocer:

- Años de experiencia del ingeniero civil estructural.
- Horas promedio al día dedicadas al análisis y diseño de un proyecto estructural.
- Factores que consideren más importantes para la realización de los honorarios profesionales.
- Número de cambios permitidos en el proyecto dentro de los honorarios.
- Gastos indirectos con mayor importancia al momento de realizar sus honorarios profesionales.

Igualmente, de los resultados obtenidos de cada pregunta perteneciente a la encuesta realizada se seleccionarán las respuestas más populares, según los ingenieros civiles estructurales, las cuales serán necesarias para establecer los factores que influyen en la

**Tabla 4**

Tasas de salarios prevalecientes emitidas por la Oficina de Equidad y Derechos Civiles de Baltimore en dólares.

Trabajador	Tarifa por hora	Beneficios complementarios	Total
Trabajadores de asbesto	\$36,53	\$16,00	\$52,53
Caldereros	\$17,62	\$6,96	\$24,58
Albañiles	\$33,00	\$12,34	\$45,34
Carpintero/piso flexible y blando	\$26,66	\$15,55	\$42,21
Molinero	\$33,06	\$17,65	\$50,71
Martillo	\$31,13	\$15,65	\$46,78
Albañiles de cemento/yeseros	\$28,45	\$11,47	\$39,92
Electricistas	\$39,25	\$19,03	\$58,25
Mecánico de construcción de ascensores	\$48,42	\$40,18	\$88,60
Mecánico cortafuegos	\$23,33	\$7,95	\$31,28
Vidrieros	\$30,77	\$22,96	\$53,73
Herreros			
Ornamentales	\$30,77	\$22,96	\$53,73
Estructurales	\$30,77	\$22,96	\$53,73
Varillas de refuerzo	\$30,77	\$22,96	\$53,73
Cercas	\$28,70	\$20,96	\$49,36

Fuente: Oficina de Equidad y Derechos Civiles, 2020.

determinación del costo horario en la ejecución de un proyecto estructural, los cuales contribuyen a los costos directo e indirecto del proyecto.

### Realización y aplicación de la encuesta

Se hará una encuesta en modalidad *online* por medio de la plataforma Google Forms, la cual constará de cinco preguntas dirigidas al gremio de los ingenieros estructurales de la región. Cada respuesta obtenida será necesaria a la hora de determinar los factores claves para la aproximación al costo horario en un proyecto estructural en vivienda.

### Propuesta de caso de estudio

En el siguiente apartado se pretende conocer y estudiar las características del proyecto que se va a diseñar, con base en la información proporcionada por el cliente, para poder hacer una cotización de honorarios por diseño estructural; esta información deberá contener datos como los siguientes:

- Planos arquitectónicos.
- Magnitud de proyecto.

- Estudio de mecánicas de suelos.
- Tiempos de entrega.

Gracias a la particularidad del proyecto, se podrá obtener una propuesta de lo que el cliente desea hacer y llegar a acuerdos en cuanto a criterios de diseños, tiempos de entrega y ciertas inquietudes que pudieran surgir a lo largo del proceso.

### Obtención del costo directo por proyecto

En el siguiente apartado se pretende obtener la sumatoria de los costos directos establecidos en los honorarios del proyecto estructural, los cuales corresponden a los costos asignados directamente, es decir, los costos que se pueden cuantificar con exactitud, ya sea como costo por mano de obra, materiales, equipamiento, etc.

### Estimaciones iniciales de los costos indirectos mensuales

Estas estimaciones se harán con base en la sumatoria de los costos indirectos mensuales que cada ingeniero considere que hay que tomar en cuenta en la elaboración de los honorarios profesionales.

**Propuesta de ecuaciones**

El factor de cálculo es el resultado de la división entre el valor del costo hora profesional y el índice de cálculo:

$$FC = \text{Costo por hora profesional} / \text{índice de cálculo} \quad \text{(ecuación 1)}$$

Como ya se mencionó con anterioridad, se pretende obtener el costo de los honorarios estructurales con base en la metodología del costo por hora profesional del Reglamento del Arancel Mínimo 2014. En este caso, se propone reformular la ecuación 1 con la finalidad de obtener el factor de cálculo del valor costo hora profesional, utilizando como dividiendo la sumatoria de los costos directos más los costos indirectos.

Es decir:

$$CH = (\text{costo total del proyecto (CT)}) / ((\text{días del mes}) * (\text{horas diarias})) \quad \text{(ecuación 2)}$$

$$CT = \sum CD + CI \quad \text{(ecuación 3)}$$

Donde:

CD= costos directos.

CI= costos indirectos.

Al obtener el valor del costo por hora profesional (CH) (ecuación 2) con la propuesta de la ecuación 1, se obtendrá el factor de cálculo por proyecto con fundamento en la información mencionada anteriormente (ecuación 1). Al asignar los costos de cada recurso de las actividades del proyecto, se obtendrá el costo total presupuestado para cada uno de ellos (ecuación 3).

**Elaboración de cotizador de honorarios**

Se utilizará el *software* Microsoft Excel como herramienta para elaborar el cotizador de honorarios, con el propósito de crear una tabla programada con las fórmulas propuestas y así poder indicar los datos necesarios para la obtención del costo hora profesional (tabla 5).

**RESULTADOS**

En el siguiente apartado se pretende implementar cada paso mencionado anteriormente para la obtención de los honorarios profesionales. De la encuesta hecha al gremio de los ingenieros estructurales de la región (figura 1) se obtuvieron 18 respuestas, importantes todas a la hora de determinar los factores claves para la aproximación al costo horario en un proyecto estructural.

De las respuestas obtenidas se pudo concluir que el número de años de experiencia con mayor repetición fue 3, en tanto que 35 y 1 fueron los años con mayor y menor experiencia, respectivamente (figura 2).

**Tabla 5**  
Tabla correspondiente a la propuesta de cotizador de honorarios profesionales

Aproximación al costo horario en proyectos estructurales			
Factor de cálculo	Datos	Cantidad	Unidad
$FC = \frac{CH}{IC}$	Σ Gastos Indirectos	\$	\$/días
	Σ Costos por proyectos		\$/m <sup>2</sup>
	Total metros cuadrados de proyecto		m <sup>2</sup>
	Total de días a trabajar		días
Valor costo hora	Horas Invertidas		hrs
Índice de cálculo por m <sup>2</sup>	Honorarios estructurales		
Texto principal	Total m <sup>2</sup> de proyecto		m <sup>2</sup>
	FC		
	Total de honorarios	0	\$

Fuente: Elaboración propia.





**Figura 1.** Resultados en los años de experiencia de los ingenieros estructurales.

Fuente: Elaboración propia.



**Figura 2.** Resultados en las horas promedio dedicadas al análisis y diseño de un proyecto estructural.

Fuente: Elaboración propia.

De los 18 resultados obtenidos, el número de horas promedio dedicadas al cálculo estructural es 8, aproximadamente, según las estadísticas, en tanto que los números mayor y menor de horas dedicadas al proyecto son ocho y cuatro horas, en ese orden.

En la figura siguiente se muestra la selección de los cuatro factores que se consideran más importantes para la realización de los honorarios profesionales (figura 3).

- Tipo de edificación.
- Nivel solicitado de detallado de planos (permiso de construcción, licitaciones, planos de ejecución, etc.).
- Tiempo de entrega.
- Tipo de terreno.
- Tipo de obra (civil, privado, religioso, gobierno, salud, etc.).
- Magnitud del proyecto (m<sup>2</sup>).

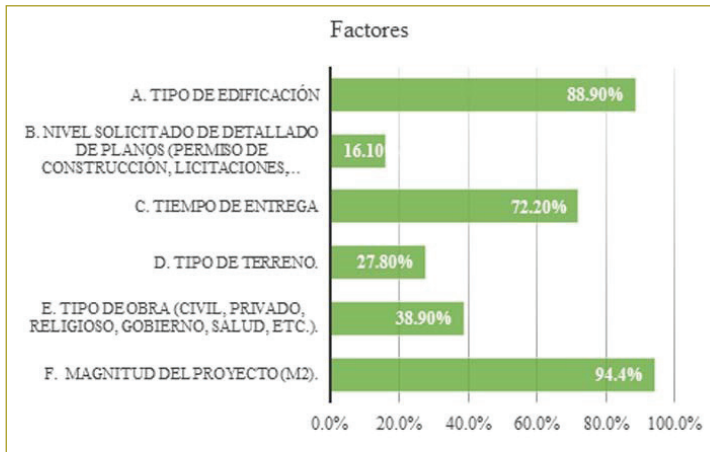
Entre las respuestas que tuvieron mayor popularidad, las cuales serán fundamentales para la realización de los honorarios profesionales, se destacan las siguientes:

- Magnitud de proyecto, con 17 resultados (94,4 %).
- Tipo de edificación, con 16 resultados (88,9 %).
- Tiempo de entrega, con 13 resultados (72,2 %).
- Nivel solicitado de detallado de planos, con 11 resultados (61,1 %).

A continuación se pueden ver los resultados obtenidos de la selección del número de cambios permitidos dentro de los honorarios profesionales. Según las estadísticas, el número de cambios permitidos en un proyecto estructural es dos (figura 4).

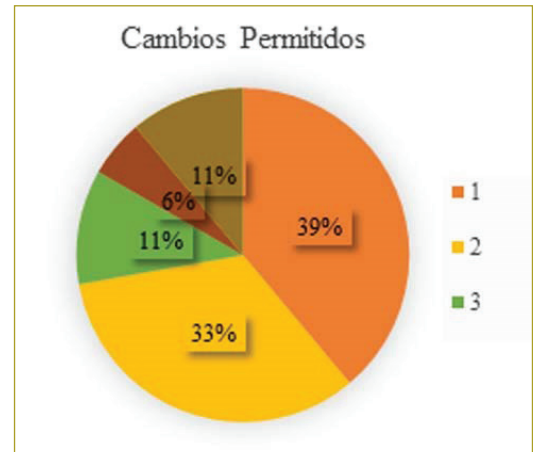
Al solicitarse algún cambio adicional, se tendrá que estimar un porcentaje extra al costo de los honorarios profesionales.





**Figura 3.** Resultados correspondientes a los factores más populares para la realización de los honorarios profesionales en un proyecto estructural.

Fuente: Elaboración propia.

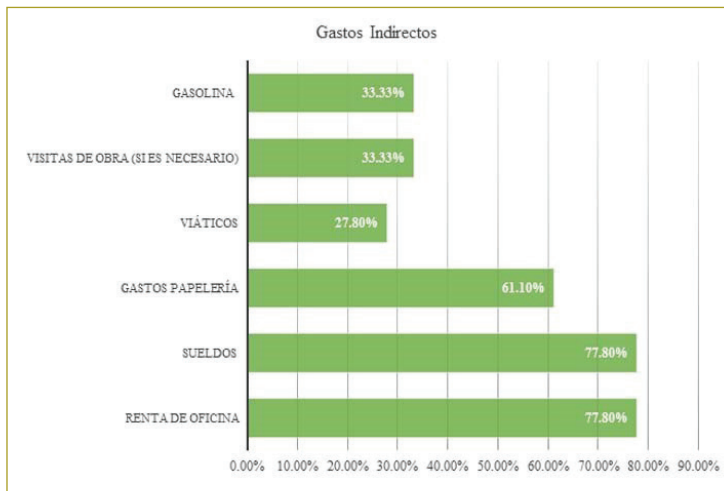


**Figura 4.** Resultados correspondientes al número de cambios de un proyecto estructural.

Fuente: Elaboración propia.

La siguiente es la selección de los gastos indirectos más importantes al momento de realizar sus honorarios profesionales (figura 5):

- Arriendo de oficina.
- Sueldos a colaboradores.
- Gastos de papelería.
- Viáticos.
- Visitas de obra (en caso de ser necesarias).
- Gasolina.
- Otros.



**Figura 5.** Resultados correspondientes a los gastos indirectos contemplados en un proyecto estructural.

Fuente: Elaboración propia.

Se seleccionarán las cuatro respuestas con mayor popularidad, las cuales serán fundamentales para la realización de los honorarios profesionales:

- Porcentaje por arriendo de oficina.
- Porcentaje por sueldo.
- Porcentaje por gastos de papelería.
- Porcentaje por gastos de gasolina/viáticos.

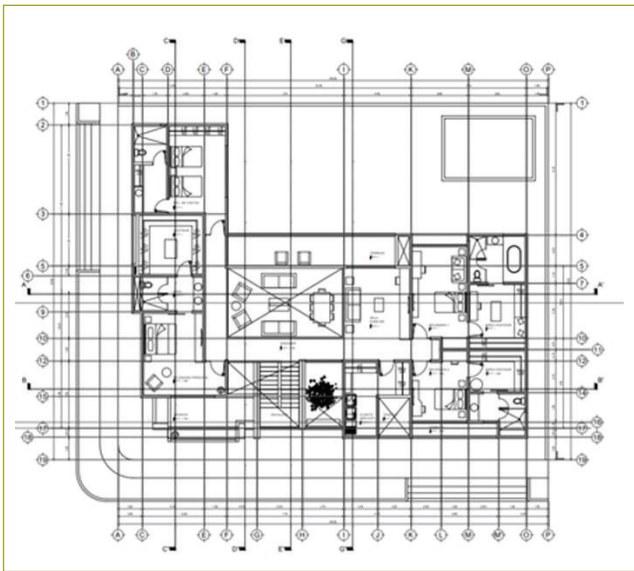
En lo que tiene que ver con gastos indirectos, ciertos ingenieros estructurales propusieron como respuesta a la pregunta abierta que habría que considerar como un gasto indirecto las licencias de *software* para la realización de los diseños estructurales y los respectivos impuestos que estos generen.

A partir de la información proporcionada por el cliente, se puede realizar el costo de honorarios profesionales con base en las características particulares del proyecto, las cuales se obtienen de los planos arquitectónicos; estas son:

- Vivienda tipo residencial.
- Magnitud del proyecto: 600 m<sup>2</sup>.
- Tiempo de entrega: de tres a cuatro semanas (tiempo acordado por el cliente).
- Detallado de planos: planos constructivos/ejecución.

Una de las maneras de obtener los metros cuadrados de un proyecto consiste en preguntarle

directamente al cliente, o bien se puede corroborar el metraje utilizando algún *software* para la lectura y modificación de planos. En este caso se usó el *software* AutoCAD, versión 2021 (figura 6), en el cual, mediante el comando Polyline, se traza una polilínea en todo el perímetro de la planta arquitectónica y después, con el comando Properties, se obtiene el área de la polilínea, que corresponde a los metros cuadrados del proyecto que se va a diseñar.



**Figura 6.** Planta arquitectónica baja del proyecto que se va a diseñar.

Fuente: Elaboración propia.

Como primer paso, se deberá determinar el costo/m<sup>2</sup> por proyecto, es decir, magnitud del proyecto; esta información se obtiene a partir de la propuesta del caso de estudio.

Dicho costo se obtendrá con base en la información de la tabla 2.2 de la Asociación de Ingenieros Civiles Estructuristas de Guanajuato, A.C. (Aiceg, 2019). En una hoja de cálculo hecha en Microsoft Excel se creó una tabla programada, ligada a las tablas mencionadas anteriormente; hay una celda para rellenar los metros cuadrados del proyecto que hay que diseñar, así como una hoja programada y una interpolación del costo/m<sup>2</sup> en función de los metros cuadrados de la tabla 6 del Aiceg 2019. De esta manera, se obtendrá el costo/m<sup>2</sup> del proyecto en pesos mexicanos (tabla 7), es decir:

**Tabla 6**

Factores correspondientes al tiempo de entrega

Factores para el costo directo por proyecto		
	Especificación	Factor
Magnitud del proyecto (área)	m <sup>2</sup>	600
Costo / m <sup>2</sup> pesos mexicanos	\$/m <sup>2</sup>	89,912

Fuente: Elaboración propia.

**Tabla 7**

Modificación correspondiente al \$/m<sup>2</sup> en pesos mexicanos de la tabla 2.2 (Aiceg, 2019)

550,00	600,00	650,00
\$92,89	\$89,91	\$87,29
2500,00	3000,00	3500,00
\$57,19	\$54,24	\$52,49

Fuente: Elaboración propia.

Se propone utilizar los datos que aparecen a continuación (Aiceg, 2019), para la determinación del factor correspondiente al tipo de edificación del proyecto; en este caso, se empleará el factor tipo 7, correspondiente a una casa habitación alta (>250 m<sup>2</sup>), el cual es 0,842.

**Tabla 8**

Factor por tipo de edificación

Factores para el costo directo por proyecto		
	Especificación	Factor
Tipo de edificación	Tipo 7	0,842

Fuente: Elaboración propia.

En la hoja de cálculo mencionada anteriormente se propone usar los siguientes factores, correspondientes al incremento del costo directo por la solicitud del tiempo de entrega del proyecto. La importancia de la utilización de este factor es que la mayoría de las veces la realización de los planos estructurales es un poco compleja en cuanto al detallado de los planos estructurales, motivo por el cual se debe tener un tiempo determinado y procurar respetarlo lo más que se pueda (tabla 9).

**Tabla 9**

Factores correspondientes al tiempo de entrega

Tiempos de entrega	
Variable de tiempo	Factor
Menos de una semana	1,15
Una semana	1,2
< una semana	1,1
2 - 3 semanas	1,08
3 - 4 semanas	1,05
< 4 semanas o más	1

Fuente: Elaboración propia.

El detallado de planos es un factor clave al momento de considerar los honorarios profesionales, ya que muchas veces el cliente solicita un análisis rápido, para lo cual no se requiere ningún plano estructural, o solo necesita algo básico, como para la solicitud de permisos, o bien requiere algo más complejo y detallado, como unos planos para alguna licitación de obra o planos constructivos.

A continuación se proponen los siguientes factores para la solicitud de detalles en planos (tabla 10).

**Tabla 10**

Factores correspondientes al detallado de planos

Solicitud de detalles en planos	
Detalles en planos	Factor
Permisos de construcción	0,1
Licitación de obra	0,2
Planos constructivos/ejecución	0,3

Fuente: Elaboración propia.

Con base en la implementación de los factores correspondientes al proyecto en la tabla programada en el *software* Microsoft Excel, se obtiene la sumatoria del total del costo directo por proyecto, datos adquiridos de las características del proyecto, utilizando como factores las respuestas con mayor popularidad, de acuerdo con la encuesta aplicada anteriormente.

A renglón seguido se observa el costo directo total del proyecto, obtenido de los factores propuestos y las características del proyecto (tabla 11).

**Tabla 11**

Correspondiente al costo directo en pesos mexicanos por proyecto

Factores para el costo directo por proyecto		
	Especificación	Factor
Magnitud del proyecto (área)	m <sup>2</sup>	600
Costo/m <sup>2</sup>	\$/m <sup>2</sup>	89,912
Tipo de edificación	Tipo 7	0,842
Tiempo de entrega	De tres a cuatro semanas	1,05
Detallado de planos	Planos constructivos/ejecución	0,3
	<b>Total</b>	<b>\$14.308,416</b>

Fuente: Elaboración propia.

Como ya se mencionó anteriormente, en este caso de estudio se propone utilizar el *software* Microsoft Excel, en el cual se creó una tabla programada con los costos indirectos contemplados para la realización de los honorarios profesionales, con la finalidad de obtener la sumatoria de estos costos mensuales, los cuales se seleccionaron por medio de la encuesta realizada con anterioridad; dichos costos serán necesarios para obtener el valor de costo por hora profesional (CH), referente a la ecuación 3.

En la tabla siguiente (tabla 12) se propone utilizar esos costos mensuales para el caso de estudio, los cuales pueden variar según las necesidades del ingeniero estructural.

**Tabla 12**

Correspondiente al costo indirecto en pesos mexicanos por proyecto

Costos indirectos mensuales		
Costo indirecto	Especificación	Pago mensual
Arriendo de oficina (me)	Diciembre	\$3.000,00
Sueldo	Dos empleados	\$16.000,00
Gastos de papelería	-	\$1.800,00
Gastos de viáticos	-	\$2.000,00
	<b>Total</b>	<b>\$22.800,00</b>

Fuente: Elaboración propia.

En el siguiente apartado se muestra la propuesta de ecuaciones para la obtención de los honorarios profesionales en pesos mexicanos, con base en la metodo-

logía del costo por hora profesional del Reglamento del Arancel Mínimo 2014, esto es, implementando las siguientes fórmulas:

- Propuesta de reformulación de la ecuación 4, para la obtención del costo por hora profesional.

$$CH = \frac{\text{Costo total del proyecto (CT)}}{(\text{días del mes}) * (\text{horas diarias})} = \frac{\$22.800,00 + \$14.308,42}{(20 \text{ días}) * (10 \text{ horas})}$$

$$= 193,27 \text{ \$/h}$$

**(ecuación 4)**

Donde:

CD= costos directos= \$22.800,00

CI= costos indirectos= \$14.308,42

- Índice de cálculo por m<sup>2</sup> proyectado (ecuación 5).

$$CH = \frac{\text{Costo total del proyecto (CT)}}{(\text{días del mes}) * (\text{horas diarias})} = \frac{\$22.800,00 + \$14.308,42}{(20 \text{ días}) * (10 \text{ horas})}$$

$$= 193,27 \text{ \$/h}$$

**(ecuación 5)**

- Índice de cálculo por m<sup>2</sup> proyectado (ecuación 6).

$$IC = \frac{M2}{(\text{días del mes}) * (\text{horas diarias})} = \frac{\$600.000 \text{ m}^2}{(20 \text{ días}) * (8 \text{ horas})}$$

$$= 3,125$$

**(ecuación 6)**

- El factor de cálculo es importante, ya que al obtenerlo es posible calcular el total de los honorarios del proyecto (ecuación 7).

$$FC = \frac{CH}{IC} = \frac{193,27}{3,125} = 61,8473$$

**(ecuación 7)**

- Determinación del honorario por proyecto estructural (ecuación 8).

$$\text{Honorario} = m^2 * FC = 600,00 \text{ m}^2 * 61,8473 = \$37.108,42$$

**(ecuación 8)**

Con base en la herramienta Microsoft Excel, se programa la Tabla 13, en la cual se obtiene el costo horario en el proyecto estructural de vivienda, al momento de introducir los datos y cantidades necesarias

que corresponden a cada factor que fue mencionado anteriormente, es decir, siguiendo estos pasos:

- Obtener el total de la sumatoria de los costos indirectos.
- Obtener el total de la sumatoria de los costos directos.
- Desarrollar la ecuación 4, en la cual se obtendrá la aproximación del costo por hora profesional en proyectos.
- Desarrollar la ecuación 5, en la cual se obtendrá el índice de cálculo en función de los metros cuadrados del proyecto, días y horas de dedicación en el análisis y diseño estructural.
- Desarrollar la ecuación 6 para obtener el factor de cálculo del costo por hora profesional entre la magnitud del proyecto.
- Desarrollar la ecuación 7 para obtener el costo total de los honorarios por proyecto.

Se hará una comparación del costo total de los honorarios por proyecto estructural con los resultados logrados en la propuesta de la metodología mencionada anteriormente, para obtener el costo total por proyecto estructural de los aranceles de la Sociedad Mexicana de Ingeniería Estructural (SMIE, 2020), utilizándolo como punto de comparación de costos totales. Esto se hace con la finalidad de validar el resultado obtenido en la metodología para poder emplearla, implementando los factores y las fórmulas que se propusieron, analizando si este costo es superior o inferior a los aranceles del proyecto estructural SMIE 2020.

- Casa habitación  $\geq 250,00 \text{ m}^2$ , edificación tipo 3; se obtiene un costo/m<sup>2</sup> de \$2.207,68 pesos mexicanos (tabla 2).
- El área total del proyecto que se va a analizar corresponde a 600,00 m<sup>2</sup> de construcción.
- Se multiplicará el costo directo unitario obtenido en el punto 1, es decir, \$2.207,68 pesos mexicanos por la magnitud del proyecto, 600,00 m<sup>2</sup>, área obtenida del punto 2, seguido de su porcentaje por proyecto estructural, 1,97 %.
- El costo anterior se multiplicará con los factores de la tabla 3, correspondiente al factor por grado de dificultad de la estructura que se va a analizar y diseñar.

Tabla 13

Correspondiente a la propuesta de cotizador de honorarios profesionales en pesos mexicanos

Aproximación al costo horario en proyectos estructurales				
Factor de cálculo		Datos	Cantidad	Unidad
$FC = \frac{CH}{IC}$	61,84735976	$\Sigma$ Gastos Indirectos	\$22.800,00	\$/días
		$\Sigma$ Costos por proyectos	\$14.380,42	\$/m <sup>2</sup>
		Total metros cuadrados de proyecto	600	m <sup>2</sup>
		Total de días a trabajar	24	días
Valor costo hora	193,27 \$/hrs	Horas Invertidas	8	hrs
Índice de cálculo por m <sup>2</sup>	3,125	<b>Honorarios estructurales</b>		
FC Total de honorarios		Total m <sup>2</sup> del proyecto	600	m <sup>2</sup>
		61,84735976		
		\$37.108,42	\$	

Fuente: Elaboración propia.

Costo del proyecto = (costo/m<sup>2</sup>) \*(m<sup>2</sup> de proyecto) \*  
 (% por proyecto estructural) = (\$2.207,68) \*  
 (600,00 m<sup>2</sup>) \*(1,97 %) = \$26.094,776 pesos mexicanos

Costo total del proyecto implementando el factor por grado de dificultad de la estructura.

Costo total del proyecto = (\$26.094,776) \*(1,20)  
 = \$31.313,7331 pesos mexicanos

Al aplicar la metodología del costo total del proyecto por los aranceles de la Sociedad Mexicana de Ingeniería Estructural, se obtiene un costo total de \$31.313,7331 pesos mexicanos, correspondiente a los honorarios estructurales.

Una vez implementada la metodología propuesta y mencionada antes, considerando detalladamente las características correspondientes al proyecto y utilizando los factores propuestos para la obtención de los costos directo e indirecto, se obtienen los siguientes resultados:

- Casa-habitación tipo residencial 600 m<sup>2</sup> > 250 m<sup>2</sup>.
- Total del costo directo: \$14.308,416 pesos mexicanos.
- Total del costo indirecto: \$22.800,00 pesos mexicanos.

Gracias a la implementación de la metodología, se obtiene la aproximación al costo horario de proyectos estructurales en vivienda, el cual corresponde a la cantidad de 193,27 \$/h pesos mexicanos.

La aproximación al costo horario será variable, según las características particulares del proyecto y las consideraciones que cada ingeniero estructural crea necesarias para la elaboración del diseño estructural dentro del tiempo determinado, ya que es el que realiza el proyecto; esto significa que la aproximación dependerá de los siguientes factores, que se han propuesto para el caso de estudio:

- Costo directo del proyecto.
- Magnitud del proyecto.
- Tiempo de ejecución.
- Detallado de planos.
- Costo indirecto del proyecto, es decir, los egresos necesarios para su ejecución.
- Arriendo de la oficina.
- Sueldos.
- Gastos de papelería.
- Viáticos.

## CONCLUSIÓN

A partir de la información obtenida y desarrollada a lo largo del presente artículo se demuestra que, al estudiar las metodologías para la obtención de los honorarios profesionales de las diferentes áreas de la ingeniería civil mencionadas con anterioridad, es posible tomar un punto de partida para proponer varios tipos de factores que se pueden implementar para la aproximación del costo horario de proyectos estructurales en vivienda a partir de las características particulares que definen cada proyecto.



Es importante tener en cuenta cuáles son las necesidades que cada ingeniero civil estructural cree que hay que contemplar en los honorarios profesionales para la elaboración o ejecución de un análisis y diseño de un proyecto estructural, ya que para realizarse conlleva considerar todas las actividades que se deben llevar a cabo y los puntos característicos que hay que tomar en cuenta para obtener la aproximación al costo horario.

Al implementar esta propuesta metodológica se podrá entregar al cliente un número más exacto de los honorarios profesionales, en el cual no solo se consideran las características del proyecto que arrojan un costo directo, sino que también en ese número van desglosados todos los gastos necesarios durante la ejecución del análisis y diseño estructural, los cuales se definen como costos indirectos del proyecto, puesto que dichos costos son los causantes de que la aproximación al costo horario sea variable, dependiendo de la cantidad de egresos necesarios durante la ejecución del proyecto.

## REFERENCIAS

- Asociación de Ingenieros Civiles Estructuristas de Guanajuato (2019). Consultado el 14 de enero del 2019. Disponible para consulta en <http://www.aicegac.com.mx/>.
- Cáceres, T. K. (2005). Estimación de costos de proyectos de infraestructura municipal. Perú: Universidad de Piura.
- Castillo, J. (2015). Evaluación de los costos de construcción de sistemas estructurales para viviendas de baja altura y de interés social. Ingeniería, Investigación y Tecnología, XVI (4), octubre-diciembre de 2015. 479-490, ISSN 2594-0732 FI-UNAM.
- Covaproes (2021). Colegio de Valuadores Profesionales del Estado de Sonora. Consultado el 3 de mayo del 2022. Disponible para consulta en <https://www.covaproes.org/>.
- Faga, H. A. & Ramos Mejía, M. E. (2006). Cómo profundizar en el análisis de sus costos para tomar mejores decisiones empresariales. Buenos Aires: Granica.
- García, A. K. (2020). El economista. Consultado el 23 de febrero del 2020. Disponible para consulta en <https://www.economista.com.mx/gestion/contrato-por-honorarios-20200222-0008.html>.
- García, O. (2015). Gestión de los costos del proyecto, Proyectum. Consultado el 29 de julio del 2015. Disponible para consulta en <https://www.proyectum.com/sistema/blog/gestion-de-los-costos-del-proyecto/#:~:text=La%20Gesti%C3%B3n%20de%20los%20Costos,Presupuesto%20y%20Controlar%20los%20Costos>.
- Guía Padid (2014). Programa de apoyo a la docencia, investigación y difusión de las artes. Consultado el 14 de enero del 2014. Disponible para consulta en <https://www.cenart.gob.mx/wp-content/uploads/2014/08/Gu%C3%ADa-PADID-2014.docx.pdf>.
- Heredia, G. D. (2008). Metodología de costeo basado en las actividades. Económicas CUC.
- Lledó, P., & Rivarola, G. (2007). Gestión de proyectos. Buenos Aires: Pearson.
- Meli, P. R. (2008). Diseño estructural. México: Limusa.
- Oficina de Equidad y Derechos Civiles de Baltimore (2020). Consultado el 3 de mayo del 2022. Disponible para consulta en [https://civilrights.baltimorecity.gov/sites/default/files/Prevailing%20Wage%20Rates-2021\\_0.PDF](https://civilrights.baltimorecity.gov/sites/default/files/Prevailing%20Wage%20Rates-2021_0.PDF).
- Ochoa, A. M. (2018). Gaceta de la Comisión Permanente. Consultado el 4 de mayo del 2018. Disponible para consulta en [https://www.senado.gob.mx/64/gaceta\\_comision\\_permanente\\_documento/81038](https://www.senado.gob.mx/64/gaceta_comision_permanente_documento/81038).
- Olavarrieta, D. I. (1999). Conceptos generales de productividad, sistemas, normalización y competitividad para la pequeña y mediana empresa. México: Universidad Iberoamericana.
- Project Management Institute (2017). La guía de los fundamentos para la dirección de proyectos. Pensilvania: Project Management Institute, Inc.
- Rajeh, M. (2015). Estimating transaction costs in the New Zealand construction procurement: a structural equation modelling methodology. Engineering, Construction and Architectural Management, 22 (2), 242-267. <https://doi.org/10.1108/ECAM-10-2014-0130>.
- Sáez, M. R. (2021). Contabilidad de costos. Chile: Instituto Profesional Diego Portales.
- Sociedad Mexicana de Ingeniería Estructural (2020). Aranceles de proyecto estructural. Mérida, Yucatán: SMIE.
- Toro, L. F. (2010). Costos ABC y presupuestos: herramientas para la productividad. Bogotá: Ecoe Ediciones.
- Vela, F. (2016). GDP Master. Consultado el 8 de noviembre del 2016. Disponible para consulta en <https://www.gestiondeproyectos-master.com/ejecucion-del-proyecto/>.



# La comunicación matemática en una clase de cálculo diferencial: factores, retos y evaluación

## Mathematical communication in a differential calculus classroom: factors, challenges and evaluation

**NORA YAMILE ROJAS CATAÑO**

Profesora del Departamento de Matemáticas de la Universidad Escuela Colombiana de Ingeniería.

nora.rojas@escuelaing.edu.co

Recibido: 10/09/2023 Aceptado: 15/11/2023

Disponible en [http://www.escuelaing.edu.co/es/publicaciones\\_revista](http://www.escuelaing.edu.co/es/publicaciones_revista)  
<http://revistas.escuelaing.edu.co/index.php/reci>

### Resumen

Una de las principales dificultades relacionadas con la falta de interés de los estudiantes en una clase de matemáticas es la poca comprensión que tienen de estas, de su lenguaje y su simbología. La comunicación matemática es un proceso fundamental para aprender matemáticas, puesto que a través de este proceso los estudiantes pueden comprenderlas.

En este artículo se presentarán y analizarán algunos factores que influyen en el fortalecimiento de la competencia de la comunicación matemática en el aula de clase y los retos de su evaluación. El presente estudio se realizó con un grupo de estudiantes universitarios de Cálculo Diferencial y se muestra como un aporte valioso para que los profesores puedan crear estrategias que promuevan el desarrollo de competencias matemáticas, especialmente la comunicación matemática en el aula de clase.

**Palabras claves:** comunicación matemática, competencia, aprendizaje, evaluación formativa, retroalimentación, estudiantes universitarios.

### Abstract

One of the main difficulties related to the lack of interest that students have in a mathematics class is the little understanding they have of mathematics, its language, and its symbology. Mathematical communication is a fundamental process for learning mathematics, since it is through this process that students can understand it.

This paper will present and analyze some factors that influence the strengthening of mathematical communication competence in the classroom and the challenges of its evaluation. This study was conducted with a group of university students of Differential Calculus and is shown as a valuable contribution for teachers to create strategies that promote the development of mathematical competencies, especially mathematical communication in the classroom.

**Keywords:** mathematical communication, competence, learning, formative assessment, feedback, university students.

## INTRODUCCIÓN

El uso del lenguaje matemático ayuda a los estudiantes a comprender mejor su propio pensamiento, al igual que a desarrollar y expresar sus ideas y estrategias matemáticas de manera precisa y coherente, para sí mismos y para los demás. Esto supone un reto para el profesor, y es generar un ambiente de discusión en el aula de clase que permita que los estudiantes expliquen y justifiquen sus ideas y estrategias, así como también que cuestionen y pidan aclaraciones a sus compañeros de clase o a su profesor (Ball, Thames & Phelps, 2009, citados en Ontario Educators, 2010).

Sin embargo, coordinar la discusión de toda la clase de manera oportuna y eficaz, con el fin de desarrollar la comprensión matemática, exige un arduo trabajo para el profesor, quien tiene que realizar varios movimientos pedagógicos, que de acuerdo con Ontario Educators (2010) son los siguientes:

- Entrenar a los estudiantes sobre cómo participar en debates matemáticos (por ejemplo, cuestionar, explicar, probar el razonamiento matemático de los demás).
- Desarrollar y expandir las soluciones matemáticas de los estudiantes para hacer explícitos los conceptos matemáticos y las estrategias relacionadas con el objetivo de la lección.
- Crear registros visuales matemáticos de la discusión en clase para que todos los estudiantes los vean.
- Utilizar notación matemática para registrar el pensamiento matemático de los estudiantes.

Lo anterior no podría hacerse en un aula de clase en la que predomine un ambiente o modelo pedagógico tradicional, centrado en la enseñanza, en el cual los estudiantes tienden a confiar en lo que los profesores les enseñen, mientras ellos asumen un rol pasivo.

Según Morales (2012), este tipo de clases pueden tener efectos muy negativos en los estudiantes, pues pueden provocar que los alumnos dejen de ir a clase, sin que esto repercuta de manera apreciable en su éxito académico.

En estos casos bastaría con poner en la web las preguntas o temas de examen y prescindir de las clases (Dolnicar, 2005, citado por Morales, 2012). Además, estas clases magistrales pueden generar en los estudiantes una confianza excesiva en los apuntes, lo que

conduce a un estudio superficial, aun cuando aprueben los exámenes.

Para apoyar la idea anterior, en el caso de la Universidad Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito y de acuerdo con el Plan Permanente de Revisión y Renovación Curricular de 2021, el modelo pedagógico del Departamento de Matemáticas está centrado en el estudiante, quien se constituye en un aprendiz activo, en tanto que el profesor es un acompañante del proceso y es quien organiza las actividades de aprendizaje, induce y aclara los conceptos, y poco a poco va dejando de actuar para permitir la independencia y la autonomía del estudiante.

En este modelo, se fomenta el aprendizaje significativo y colaborativo (proyecto educativo del Departamento de Matemáticas, PED, 2024). Adicionalmente, de acuerdo con el Plan Permanente de Revisión y Renovación Curricular, el modelo pedagógico de la Escuela está orientado por competencias. En relación con la noción de competencia matemática, el departamento adopta y comparte la planteada por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE):

“... conjunto de capacidades (puestas en juego por los estudiantes) para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando resuelven o enuncian problemas matemáticos en una variedad de situaciones y dominios, incluyendo conceptos matemáticos cuantitativos, espaciales, probabilísticos o de otro tipo” (OCDE, 2005, p. 37, citado en PED, 2024).

Con el objeto de propiciar el desarrollo de las competencias matemáticas, el departamento propone un modelo de indicadores con seis competencias, las cuales tienen diferentes niveles de complejidad; estas son:

- Razonamiento matemático.
- Comunicación matemática.
- Representación.
- Procedimientos y algoritmos matemáticos.
- Construcción de modelos.
- Planteamiento y solución de problemas.

El modelo plantea una guía para el profesor en el diseño, selección y evaluación de tareas que se proponen al estudiante. A cada una de las seis competencias le corresponde un resultado de aprendizaje, definido como “las concreciones de las competencias, y expresan

lo que el estudiante sabrá, comprenderá y será capaz de hacer durante y al finalizar su ciclo de formación en los núcleos de formación común institucional y común por campo de conocimiento, en lo relacionado con las asignaturas de Matemáticas” (PED, 2024, p. 9).

Es así como cada uno de los profesores de las asignaturas del departamento debe asumir su rol como agente organizador de las actividades en el aula de clase, fomentando el aprendizaje significativo, y quienes, de acuerdo con Ontario Educators (2010), deben hacer varios movimientos pedagógicos con este propósito.

Por tal motivo, el objetivo principal del presente estudio es revisar una de estas seis competencias, la comunicación matemática, y analizar los factores que influyen en el fortalecimiento de esta competencia con un grupo de estudiantes de la asignatura de Cálculo Diferencial, examinar su relación con las otras competencias y los retos que supone evaluarla como una situación de aprendizaje, a propósito del modelo pedagógico adoptado por el Departamento de Matemáticas de la Universidad Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito y de los resultados de aprendizaje esperados.

## ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN

- a. R. Jaafar & Y. Lin (2017). Assessment for Learning in the Calculus Classroom: A Proactive Approach to Engage Students in Active Learning. *International Electronic Journal of Mathematics Education*. ISSN 1306-3030. 2017, 12 (3), 503-520.

Este documento se centra en los beneficios para el aprendizaje conceptual de la realización de evaluaciones cortas y frecuentes, y de cómo estas ayudan al profesor a comprender los conceptos erróneos de los estudiantes. Así mismo, comparten comentarios de estudiantes, los desafíos y las implicaciones para los profesionales.

El trabajo responde a dos preguntas de investigación:

- ¿En qué medida son beneficiosas las evaluaciones para el aprendizaje de los estudiantes?
- ¿Puede la intervención mejorar el aprendizaje de los estudiantes?

De acuerdo con Iannone & Simpson (2015, citados por Jaafar & Lin, 2017), en términos de evaluación los estudios han demostrado que los estudiantes todavía

prefieren las formas tradicionales de evaluación. Sin embargo, se ha evidenciado que el aprendizaje activo puede mejorar el desempeño de los estudiantes (Yoder & Hochevar, 2005, citados por Jaafar & Lin, 2017).

En lo que respecta a la enseñanza del cálculo en el aula de clase en varios países, los profesores de matemáticas han invertido en rediseñar su enseñanza. Existe un consenso mundial de que el tema es difícil para los estudiantes (Robert & Speer, 2001, citados por Jaafar & Lin, 2017).

A manera de ejemplo, al examinar el discurso sobre el concepto de límite, Güçler (2013, citado por los autores) destacó los desafíos conceptuales del tema al examinar las discrepancias entre el discurso del profesor y el discurso de los estudiantes. Idris (2009, citado por los autores) usó la escritura para alejar a los estudiantes de la comprensión de carácter instrumental y así acercarlos más a la comprensión relacional y lógica.

La mayoría de las reglas aprendidas a partir de la comprensión instrumental son de corta duración, y los estudiantes se ven a sí mismos aplicando reglas sin saber por qué funcionan. La escritura también se utilizó en otros estudios de investigación como vehículo de evaluación (Idris, 2009; Jaafar, 2016; Pugalee, 2001, citados por Jaafar & Lin, 2017).

Los autores destacan el hecho de que los estudiantes detallan la relación entre el conocimiento conceptual y el procedimental para comprender el tema, ya que estas dos facetas se “apoyan mutuamente” en lo referente a la comprensión matemática (Scheja & Pettersson, 2009, citados por Jaafar & Lin, 2017).

De hecho, mediante entrevistas con estudiantes que acababan de terminar un curso de cálculo, Scheja y Pettersson (2009, citados por los autores) encontraron que su comprensión inicial de este curso era algorítmica. Jaafar & Lin también destacan un estudio de Dawkins y Epperson (2014), en el que indicaron que los estudiantes que carecían de competencia en el razonamiento, en los registros algebraicos y gráficos estarían poco preparados para un curso de cálculo: “En su investigación, la mayoría de los estudiantes, incluidos los de mejor desempeño, dependían en gran medida del método algebraico, y los estudiantes que sobresalieron en el curso fueron los que tenían el buen hábito de estudio de aprender tanto conceptual como procedimentalmente” (Dawkins & Epperson, 2014, citados por Jaafar & Lin, 2017, p. 506).

La muestra para el estudio de Jaafar & Lin consistió en dos secciones de clases de Cálculo I, sección A y sección B, ambas impartidas por el mismo profesor. En la sección A, 21 estudiantes completaron el curso, y en la sección B, 25 estudiantes terminaron el curso. Hubo diferencias entre los alumnos matriculados en estas dos secciones. En la sección A no hubo ningún estudiante que repitiera el curso, y solo a un estudiante se lo puso previamente en un curso de recuperación de matemáticas.

- **Prueba previa:** Al comienzo del semestre se formularon unas preguntas abiertas para evaluar el conocimiento conceptual de los estudiantes. Se les pidió que explicaran qué significaban para ellos los siguientes conceptos: función, dominio, rango, pendiente de una recta, recta tangente a una curva, velocidad, asíntota horizontal y asíntota vertical.
- **Resultados de la prueba previa:** La prueba previa mostró la falta de comprensión conceptual de los estudiantes. La mayoría de ellos no pudieron dominar los conceptos básicos, como la definición de una función, el dominio y la pendiente de una recta. Un estudiante, para dar un ejemplo, respondió que una función es “ $4x+2=6$ , resuelve  $x$  o algo así” (Jaafar & Lin, 2017, p. 508). La falta de comprensión conceptual de los estudiantes motivó entonces al profesor a incluir preguntas conceptuales a lo largo del semestre.
- **Evaluaciones e intervenciones cortas y frecuentes:** Cada semana, durante el semestre, los estudiantes tomaron una evaluación. Después de devolver cada evaluación a los estudiantes, se discuten sus respuestas con un compañero, y a esto le sigue una discusión general. Posteriormente, se les pidió que hicieran una corrección a sus respuestas. Se observó una mejora sustancial en cada sección (43 % y 36 %, respectivamente).
- **Ejemplo:** En la evaluación del concepto de límite se les pedía a los estudiantes que discutieran la existencia de límites, escribieran sobre ello usando ecuaciones y lo explicaran empleando un lenguaje “cotidiano”. La primera evaluación evidenció que los estudiantes aún no captaban la diferencia entre el límite y el valor de la función en un punto. Esto se demostró en ejemplos con una discontinuidad removible. El lenguaje utilizado por algunos estu-

diantes no fue exacto, a pesar de que su explicación mostró cierta comprensión del concepto.

Estos ejemplos demostraron las dificultades de los estudiantes al usar la notación matemática correcta y se ilustran con respuestas de muestra como “Si  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = a^-$  y  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = a^+$  son iguales”. Este fenómeno apunta a la tendencia de los estudiantes a desconocer la relevancia del lenguaje matemático (Thompson, 1994, citado por Jaafar & Lin, 2017). La intervención consistió, entonces, en recolectar una muestra de los errores de los estudiantes y hacer que todos los estudiantes en clase los criticaran y reformularan, utilizando un lenguaje matemático preciso. Las muestras consistieron en errores conceptuales y declaraciones con notaciones inexactas, como se ilustra en los ejemplos anteriores. Las siguientes evaluaciones mostraron una mejora en la comprensión del concepto.

**Resultados:** Al final del semestre, alrededor de un mes después de la finalización del curso, se entrevistó a cinco estudiantes. El objetivo era comprender la retención de información por parte de estos.

En relación con el concepto de límite, se muestran algunas respuestas a una pregunta:

En la pregunta, se pidió a los estudiantes que mostraran un ejemplo que explicara cómo encontrar “El límite de una función cuando  $x$  tiende a 2”, para una función de su elección. El primer estudiante dibujó una función discontinua y respondió con la notación correcta. El segundo ilustró diferentes casos y usó notaciones adecuadas. El tercer estudiante confundió el límite con la definición de continuidad en  $x=2$ . Cuando se presionó más al estudiante durante la discusión, se dio cuenta del error y pudo corregirlo” (Jaafar & Lin, 2017, p. 514).

A lo último, se hizo una encuesta de fin de semestre para recopilar comentarios sobre la experiencia de aprendizaje de los estudiantes en esta clase. La mayoría de los estudiantes (60 %) sintieron que las evaluaciones fueron útiles porque los ayudaron a darse cuenta de lo que no entendían y a prepararse para el examen. Explicar el razonamiento matemático empleando un lenguaje preciso también fue un desafío para la mayoría de los estudiantes.

El estudio demostró que las evaluaciones cortas y breves pueden ser útiles para resaltar los malentendidos de los estudiantes, corrigiéndoles los errores; de

esta manera, el profesor puede elegir una intervención adecuada y así promover el aprendizaje activo.

- b. E. Sobrado, D. Sarduy & A. Espíndola (2018). *Estrategia didáctica para mejorar la calidad de la comunicación en matemática. Transformación*. ISSN 2077-2955, RNPS 2098, mayo-agosto 2018, 14 (2): 272-285.

Este estudio tiene como objetivo principal evaluar una estrategia didáctica para mejorar la calidad de la comunicación en matemática de los estudiantes universitarios. Se busca que los estudiantes demuestren el desarrollo de habilidades comunicativas para exponer sus ideas y argumentos de manera coherente con un léxico adecuado y estructuras gramaticales apropiadas, utilizando la terminología y simbología matemática.

La metodología del estudio se desarrolló en dos fases:

La primera fase se enfocó en una revisión bibliográfica, con el fin de valorar algunas experiencias pedagógicas propuestas por investigadores extranjeros, entre los cuales sobresalieron como métodos teóricos el análisis-síntesis y la inducción-deducción, empleados durante el análisis crítico de la bibliografía, los programas de la disciplina Matemática Superior y el modelo del profesional de las carreras seleccionadas para la implementación práctica de la estrategia (Licenciatura en Educación, especialidad Matemática; Ingeniería Civil y Arquitectura). Se utilizó la modelación para diseñar una estrategia didáctica.

La segunda fase se desarrolló en el periodo comprendido entre los meses de enero y diciembre de 2017, en la Universidad de Camagüey. Se implementó en forma práctica la estrategia didáctica desde el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.

En el estudio participaron varios grupos de primer año, uno por cada carrera (Licenciatura en Educación, especialidad Matemática; Ingeniería Civil y Arquitectura), todos grupos de clases de los autores. El estudio se centró en la valoración de varios aspectos que favorecen la calidad de la comunicación en matemática, a través del proceso de enseñanza-aprendizaje. Se trabajó con cuatro variables cualitativas de tipo ordinal, definidas para evaluar la calidad de la expresión de ideas matemáticas, y que asumieron otros autores (Sobrado, Sarduy, Montes de Oca, 2016, citados por Sobrado, Sarduy & Espíndola), las cuales fueron:

- **Precisión:** Significa atribuir a cada término y símbolo matemático usado, el significado exacto y un sentido determinado. Esta variable se evaluó como bien, regular o mal, de acuerdo con el grado de presencia/ausencia de ambigüedad, indeterminación, confusión en cuanto al objeto matemático al que se refiere o la forma de utilizarlo.
- **Argumentación:** Significa dar razones para afirmar o refutar la veracidad de un juicio dado a partir del cumplimiento de los elementos necesarios y suficientes. Se evaluó como bien, regular o mal, de acuerdo con el grado de presencia/ausencia de elementos necesarios y suficientes en las respuestas e intervenciones del estudiante.
- **Jerarquización de ideas:** Es exponer las ideas importantes de manera ordenada. Se evaluó como bien, regular o mal, de acuerdo con el grado de presencia/ausencia de exposición de ideas importantes, siguiendo un orden lógico.
- **Concreción:** Significa declarar lo esencial de las ideas. Se evaluó bien, regular o mal de acuerdo con el grado de presencia/ausencia de lo esencial en las ideas expuestas por el sujeto.

Toda la información obtenida les permitió a los autores valorar en los estudiantes la calidad de la expresión al comunicarse en matemática antes y después de aplicadas las actividades previstas en la estrategia didáctica.

### Resultados de la primera fase

La revisión bibliográfica permitió identificar que la comunicación de ideas matemáticas se refleja el proceso de interacción entre dos o más personas utilizando el vocabulario, la terminología y la simbología de la matemática, para transmitir y hacer comprender las relaciones entre ellas en forma oral, escrita o simbólica o gráfica.

“El profesor debe insistir en todo momento en que los estudiantes dominen los conceptos, definiciones, teoremas y procedimientos de la matemática, ya que a medida que en el lenguaje se va materializando de forma lógica y coherente una idea, mejor será comprendida por el propio sujeto y por los que lo rodean” (Sobrado, Sarduy & Espíndola, 2018, p. 276).



Otro elemento importante que resaltan los autores es la realización de actividades de aprendizaje que requieran la utilización de diferentes registros de representación semiótica y la relación entre ellos, y exige un tratamiento apropiado y un control adecuado por parte del profesor.

La estrategia didáctica propuesta por los autores para mejorar la calidad de la comunicación en matemática debe contemplar las siguientes acciones:

- Definir los objetivos de la actividad docente, orientados hacia la realización de acciones comunicativas.
- Precisar el contenido matemático de cada actividad docente y sus posibles formas de expresión.
- Diseñar actividades de aprendizaje con contenido matemático que potencien la comunicación.
- Seleccionar métodos, procedimientos y medios de enseñanza-aprendizaje que faciliten las acciones bilaterales o grupales, y propicien el carácter dialógico e interactivo de la clase.
- Diseñar la evaluación en correspondencia con los objetivos de las actividades diseñadas.

### Resultados de la segunda fase

Al empezar, se comprobó que sobresalen problemas relacionados con el insuficiente dominio de los conceptos, definiciones, axiomas, teoremas y procedimientos que se empleaban. Todo esto causaba confusiones en cuanto al objeto matemático referido y a las formas de usarlo, lo que traía como consecuencia el empleo ambiguo e indeterminado de los términos y símbolos matemáticos; además, se evidenció un débil dominio de la conceptualización de los objetos matemáticos.

Al respecto, se empleó la estrategia didáctica para trabajar en función del dominio conceptual, y se insistió en que los estudiantes debían argumentar empleando las definiciones, teoremas, axiomas o procedimientos propios de la matemática, y ejerciendo un control en el nivel de calidad en la expresión de las ideas matemáticas. Esto favoreció la comunicación matemática y produjo un avance significativo. Las conclusiones de este estudio al respecto son:

- Una de las principales conclusiones de los autores está relacionada con la disponibilidad y el uso de varios sistemas de representación semiótica, sus

transformaciones y conversiones, considerados imprescindibles en la generación y desarrollo de los objetos matemáticos, además de que son el medio para que el estudiante pueda materializar y comunicar sus conocimientos.

- El profesor debe lograr que los estudiantes dominen los conceptos, las definiciones y los procedimientos de la matemática, y que utilicen el lenguaje apropiado, lo cual incide de manera positiva en la comprensión de estos.
  - La calidad de la comunicación en matemática de los estudiantes universitarios se puede mejorar progresivamente, potenciando el lenguaje verbal y diseñando un sistema de actividades y de evaluación orientado al desarrollo de la expresión de ideas matemáticas y argumentación en forma coherente y convincente.
- c. Mendivelso, Ortiz & Sánchez (2019). *La retroalimentación en el proceso de aprendizaje de estudiantes del área de matemáticas*. Trabajo de investigación. Pontificia Universidad Javeriana.

Este trabajo de investigación es una tesis de maestría en Educación que tiene como objetivo principal comprender de qué manera la retroalimentación proporcionada por los profesores incide en los procesos de aprendizaje en el área de matemáticas. Sus objetivos específicos son los siguientes:

- Identificar los tipos de retroalimentación que proporcionan los profesores del área de matemáticas como parte de la evaluación formativa en el aula de clase.
- Analizar los modos en que el estudiante recibe y emplea la retroalimentación en la clase de matemáticas, en relación con la comprensión de los criterios de evaluación.
- Proponer estrategias que faciliten el uso de la retroalimentación por parte de los estudiantes.

Se optó por darle un enfoque cualitativo a la investigación, la cual se desarrolló en cuatro fases, estructuradas en dos momentos:



- **Primer momento:** En este momento se desarrolló la fase 1, correspondiente a la delimitación del problema; se eligieron tres instituciones educativas como escenario de exploración y la población de profesores de matemáticas de bachillerato. Se desarrolló también la fase 2, correspondiente a la exploración, para la cual se empleó un cuestionario de entrevista estructurada; esta se aplicó a la población de profesores de las instituciones seleccionadas, con el fin de identificar a aquellos profesores que declararon utilizar la retroalimentación dentro de su práctica evaluativa.
- **Segundo momento:** En este se desarrolló la fase 3, correspondiente a la profundización, en la cual se profundizó en tres casos seleccionados mediante la aplicación de una entrevista semiestructurada y la aplicación de grupos focales a estudiantes que toman clase de matemáticas con los casos seleccionados. Se desarrolló además la fase 4, correspondiente a la contrastación y elaboración de inferencias entre lo expresado por los profesores y lo que dicen los estudiantes.

El estudio se realizó a profesores de matemáticas y estudiantes de tres colegios (dos privados y uno público) que ofrecen educación básica secundaria y media. La elección de estos colegios se basó en que los investigadores del presente trabajo laboraban en ellos.

Lo más importante de este trabajo está en la elaboración del marco conceptual, en el cual se analizan varias concepciones sobre la retroalimentación o *feedback*, en la cual se han identificado los tipos de retroalimentación en el aula de clase.

Entre las concepciones, se destaca esta: “El *feedback* debe entregarle al estudiante información sobre lo que está aprendiendo, cómo lo está aprendiendo, y brindarle herramientas y criterios para que pueda autoevaluarse” (Anijovich & González, 2011, p. 25, citados por Mendivelso, Ortiz & Sánchez, 2019, p. 20). Wilson (1999, citado por los autores) concibe la retroalimentación como una escalera organizada en cuatro peldaños: clarificar, valorar, expresar inquietudes y sugerir.

### Tipos de retroalimentación (*feedback*)

**Según la fuente que la provee:** Los compañeros de clase que pueden comentar desde la experiencia vivida o

desde la comprensión lograda y expresada en su propio lenguaje (Wilson, 2002, citado por Mendivelso, Ortiz & Sánchez, 2019). Esta puede darse por iniciativa de los estudiantes o motivada por el profesor.

**Según el interés en que se centre:** Se plantean cuatro posibilidades: centrada en la tarea, centrada en el proceso de la tarea, centrada en la autorregulación de la persona y centrada en la propia persona (Hattie & Timperley, 2007, citados por Mendivelso, Ortiz & Sánchez, 2019).

- **Centrada en la tarea:** Brinda información sobre logros, aciertos y errores en torno a los resultados que arroja la tarea una vez que concluye, de acuerdo con la intención del profesor.
- **Centrada en el proceso de la tarea:** Proporciona información sobre el grado de comprensión, procesos cognitivos, estrategias usadas, etc. En este caso, el docente evalúa el desempeño del estudiante y lo retroalimenta durante el ejercicio.
- **Centrada en la autorregulación de la persona:** “El estudiante se involucra en el control de su proceso y asume de manera autónoma la valoración de su trabajo desde los referentes planteados en la enseñanza (a través de la autoevaluación), y así identifica los fallos en que incurre; incluso acude a la autogestión para definir la manera como realizará las correcciones necesarias” (Mendivelso, Ortiz & Sánchez, 2019, p. 23).
- **Centrada en la propia persona:** Destaca el desarrollo personal, el esfuerzo y el compromiso con el proceso de aprendizaje.

**Según el momento en que se realice:** Puede ser formal o informal.

- **Informal:** La realiza el profesor de manera espontánea, haciendo comentarios frente a la manera como trabaja el estudiante y los resultados que obtiene.
- **Formal:** La hace el docente mediante reuniones programadas por él y con metas ya establecidas. Estas reuniones están centradas en comentarios y sugerencias en torno a una actividad específica; por lo general, se cuenta con un instrumento de evaluación, en el cual se confrontan las metas con las observaciones recibidas, lo que le servirá al estudiante para hacer los ajustes necesarios en el proceso.

Según los autores, hay que mantener en lo posible un equilibrio entre la retroalimentación formal y la informal, ya que si hay demasiada retroalimentación informal, se corre el riesgo de que el estudiante no pueda identificar muy bien su progreso, y si hay demasiada retroalimentación formal, el estudiante podría perder el interés por aprender y se concentraría solamente en mejorar la tarea para la aprobación del profesor.

**Según la forma como se haga:** Puede ser verbal, no verbal, escrita o actuada (Wilson, 2002, citado por Mendivelso, Ortiz & Sánchez, 2019).

- **Verbal:** El estudiante recibe comentarios frente a su trabajo o su desempeño por medio de diálogos verbales.
- **No verbal:** El estudiante la percibe en el momento de ser observado o presentar su trabajo a través de las expresiones y gestos del profesor.
- **Escrita:** El profesor escribe comentarios sobre el trabajo o tarea.
- **Actuada:** El profesor la realiza a través de la demostración de un proceso, simulando una situación particular, mientras el estudiante observa lo que debe tener en cuenta para mejorar su proceso.

**Según el receptor:** Puede ser colectiva o individual.

- **Colectiva:** “El propósito [...] es comentar fortalezas y debilidades comunes a todos los estudiantes de un mismo curso” (Pontificia Universidad Católica de Chile, 2016, citado por Mendivelso, Ortiz & Sánchez, 2019, p. 25). De acuerdo con los autores, esto permitirá a los estudiantes saber que no son los únicos que cometen errores y de esta manera logren identificar los aspectos en los cuales son fuertes o tienen que mejorar.
- **Individual:** El profesor expresa a cada uno de los estudiantes los aciertos y dificultades. “Si bien una de las principales ventajas de este tipo de *feedback* es que nos permite otorgar más detalles en menor cantidad de tiempo, puede llegar a ser muy difícil concertar una hora con cada uno de nuestros alumnos” (Pontificia Universidad Católica de Chile, 2016, citado por Mendivelso, Ortiz & Sánchez, 2019, p. 25).

## Resultados de este trabajo de investigación

- La manera como los estudiantes perciben la retroalimentación es un tema poco explorado en el área de matemáticas. Se logró profundizar en los tipos de retroalimentación utilizados por los profesores, el clima de aula en la retroalimentación y los usos que los estudiantes le dan a la retroalimentación.
- La retroalimentación que reciben los estudiantes en matemáticas tiene dos ingredientes: estímulos emocionales que les proporcionan seguridad y confianza, y sugerencias claras para mejorar. Solamente de esta manera la retroalimentación cumple su papel como práctica de una evaluación formativa.
- Una relación de confianza y armonía al hacer retroalimentación influirá positivamente en el aprendizaje.

## MARCO TEÓRICO

### Acerca de la comunicación matemática

De acuerdo con el modelo de indicadores de competencias matemáticas y resultados de aprendizaje del Departamento de Matemáticas de la Universidad Escuela Colombiana de Ingeniería (PED, 2024), la competencia de la comunicación matemática está definida así: “Capacidad para utilizar el lenguaje, a través de destrezas comunicativas (hablar, escribir, escuchar, leer), como instrumento de comunicación que permita interpretar, comprender, construir y comunicar el conocimiento matemático” (PED 2024, p. 9). Su resultado de aprendizaje esperado está definido así: “Al finalizar su etapa de fundamentación en matemáticas, un estudiante de la Escuela utiliza el lenguaje para comunicar el conocimiento matemático” (PED 2024, p. 9).

Así mismo, el desarrollo de la comunicación matemática de los estudiantes cambia en precisión y sofisticación a lo largo de los grados de escolaridad; sin embargo, las características subyacentes siguen siendo aplicables en todos los grados. De acuerdo con Ontario Educators (2010), durante la discusión de toda la clase los profesores pueden utilizar las siguientes características como una guía para interpretar y evaluar las presentaciones de los estudiantes sobre su pensamiento matemático, al igual que para determinar cuáles serán los puntos de discusión:

- Elección relevante del método o estrategia para resolver el problema.
- Suposiciones y generalizaciones que muestran cómo se abordan los detalles de la tarea/problema matemático en la solución.
- Claridad en términos de organización lógica para facilitar la comprensión.
- Un argumento cohesivo, que consiste en una interacción de explicaciones, diagramas, gráficos, tablas y ejemplos matemáticos.
- Elaboraciones que explican y justifican ideas y estrategias matemáticas con suficiente y significativo detalle matemático.
- Empleo apropiado y preciso de terminología matemática, notación simbólica y formas estándar para rotular gráficos y diagramas.

Las categorías de la comunicación matemática son las siguientes (Ontario Educators, Ministry of Education, 2005, citado en Ontario Educators, 2010):

- Expresión y organización de ideas y pensamiento matemático (claridad de expresión, organización lógica), utilizando formas orales, visuales y escritas (por ejemplo, pictóricas, gráficas, dinámicas, numéricas, algebraicas, entre otras).
- Comunicación para diferentes públicos (por ejemplo, compañeros, profesores) y propósitos (por ejemplo, para presentar datos, justificar una solución, expresar un argumento matemático en forma oral, visual y escrita).
- Uso de convenciones, vocabulario y terminología de la disciplina (términos y símbolos) en formas orales, visuales y escritas.

Tres enfoques para coordinar la discusión y el análisis de las soluciones por parte de los estudiantes:

- Revisar ideas y estrategias matemáticas de una lección anterior que se relaciona con el objetivo de aprendizaje de la lección.
- Resolver el problema de la lección en parejas, grupos pequeños o individualmente.
- Coordinar la discusión de toda la clase y el análisis de las soluciones de los estudiantes.

Una técnica de discusión interactiva que hace que los estudiantes se levanten de la silla es la llamada *Gallery Walk*, cuyo fin es hacer que los estudiantes entren en un modo de participación enfocada y activa con las ideas matemáticas de otros estudiantes (Fosnot & Dolk, 2002, citados en Ontario Educators, 2010).

El propósito de *Gallery Walk* es que los estudiantes y el profesor se relacionen a través del análisis y respuestas de una gama de soluciones dadas para una lección de matemáticas. Dichas soluciones pueden registrarse en computadores, pedazos de papel en mesas o publicarse en el tablero o pizarra, y la profundidad del análisis depende del propósito esperado.

*Gallery Walk* es una buena posibilidad para que los estudiantes den diversas soluciones y proporcionen respuestas orales y retroalimentación escrita para mejorar la claridad y precisión de una solución. Por otro lado, es una oportunidad para que los profesores puedan determinar el nivel de competencia matemática al escuchar las respuestas de los estudiantes. Esta evaluación ayuda al profesor a determinar los puntos en los cuales hará énfasis en la siguiente discusión de toda la clase (Fosnot & Dolk, 2002, citados en Ontario Educators, 2010).

### Variaciones de *Gallery Walk*

Existen diferentes variaciones de un *Gallery Walk*, según Ontario Educators (2010); por ejemplo:

- **Resolución de problemas en grupos pequeños:** Los integrantes de los grupos pequeños se turnan para aportar soluciones a los problemas.
- **Discusión en grupos pequeños:** Los grupos pequeños se turnan para leer y analizar las soluciones de los demás y registrar comentarios, preguntas o sugerencias para mejorar, escribiendo directamente en el papel. Después de tres a cinco minutos, los grupos rotan a la siguiente solución. La rotación continúa hasta que todos los grupos hayan analizado y encontrado las soluciones.
- **Observación del profesor:** Mientras los estudiantes discuten las soluciones de sus compañeros de clase, el maestro circula por el salón de clases para medir la comprensión de los estudiantes y observar cómo usan el vocabulario matemático y la notación simbólica.

- **Discusión de toda la clase:** Los informes orales de grupos pequeños brindan detalles específicos que el profesor puede utilizar para resaltar y resumir ideas y estrategias matemáticas claves, relacionadas con el objetivo de aprendizaje; también puede incluir discusiones sobre conceptos erróneos y errores matemáticos.

Independientemente de la variación de *Gallery Walk* empleada, el diálogo entre los estudiantes desempeña un papel bastante importante. Ya sea en la misma clase o en pequeños grupos, los estudiantes también pueden compartir el *feedback* que el profesor ha dado, y pueden revisar, ampliar y aclarar las ideas entre ellos.

### Preguntas para organizar el discurso en el aula de clase

El profesor debe plantearse las siguientes preguntas para organizar el discurso en el aula de clase (Ontario Educators, 2010):

¿Qué matemáticas (concepto, algoritmo, estrategia, modelo de representación) están empleando los estudiantes en su solución? ¿Cómo se relacionan estas matemáticas en la solución con el objetivo de aprendizaje de la lección de matemáticas tratada? ¿Qué soluciones se basan conceptualmente? ¿Qué soluciones tienen un método o un algoritmo eficiente? ¿Qué soluciones incluyen o tienen el potencial para una generalización matemática? ¿Cómo se relacionan matemáticamente las soluciones entre sí? ¿Cómo se relacionan las soluciones con el objetivo de aprendizaje de matemáticas de la lección?

En estas preguntas se puede apreciar que todas relacionan otras competencias matemáticas, como el razonamiento matemático, los procedimientos y algoritmos, la solución de problemas, la construcción de modelos y la representación. Todas ellas están articuladas, y es tarea del profesor organizar las actividades de aprendizaje y registrar los detalles significativos de los discursos y soluciones de los estudiantes en el tablero de manera eficiente y concisa, aclarando las ideas y conceptos, en concordancia con un modelo por competencias y con una evaluación formativa.

### Acerca de la evaluación formativa

De acuerdo con Morales (2012), son muchas las revisiones hechas sobre evaluación formativa en la universidad; por ejemplo:

La evaluación formativa no tiene una definición precisa, ya que una misma evaluación puede ser a la vez sumativa y formativa; sin embargo, todos coinciden en que este tipo de evaluación para el aprendizaje es rico en *feedback* informal (Bennett, 2011; McDowell, Wakelin, Montgomery & King, 2011, citados por Morales, 2012).

El *feedback* es fundamental en todas las modalidades de una evaluación formativa, cuya finalidad es ayudar en el aprendizaje, sin limitarse a verificar los resultados para calificar a los estudiantes tal como lo señalan Mendivelso, Ortiz & Sánchez (2019) en los antecedentes de la investigación.

Este tipo de evaluación ha entrado con fuerza en la nueva cultura de la evaluación en la universidad (Yorke, 2003; Dysthe, 2007; Hounsell, McCune, Hounsell & Litjens, 2008, citados por Morales, 2012). “Cuando cambia en el profesor su modo de ver la evaluación, cambian también sus métodos y se experimenta con nuevas modalidades, más adecuadas a una finalidad que ya no se limita a la mera comprobación de resultados para calificar a los alumnos” (Offerdahl & Tomanek, 2011, citados por Morales, 2012, p. 10).

### Enfoques de aprendizaje

Según Morales (2012), la evaluación formativa no tiene que ver tanto en cómo evaluamos los profesores, sino más bien en cómo estudian los estudiantes, si lo hacen usando un enfoque profundo o un enfoque superficial. Estos enfoques de aprendizaje reflejan la manera que tienen los estudiantes para abordar una tarea matemática; si bien la pueden abordar estudiando todo de memoria para reproducir información y repetirla cuando sea necesario y sin entender las cosas a fondo, enfoque superficial, o las pueden abordar estudiando en profundidad, relacionando unas cosas con otras y con lo que ya saben, y preguntando al profesor o discutiendo con los demás compañeros, utilizando un enfoque profundo.

Esto tiene un impacto directo en la autoeficacia de los estudiantes. La autoeficacia se puede enseñar y aprender, precisamente a través de la evaluación y más concretamente de la evaluación formativa, cosa que no ocurre con los exámenes finales y definitivos. Según Morales, investigaciones realizadas sobre la evaluación formativa muestran que los estudiantes:



- Se hacen más responsables de su propio aprendizaje.
- Juzgan de manera más positiva su experiencia académica.
- Utilizan la oportunidad de verificar, practicar, corregir y, en última instancia, mejorar sus propios conocimientos y habilidades.
- Se habitúan con más facilidad a utilizar un enfoque profundo del estudio (McDowell, Wakelin, Montgomery & King, 2011, citados por Morales, 2012).
- Disminuyen los fracasos y aumenta la tasa de retención sin bajar (e incluso subiendo) el nivel de exigencia.

## METODOLOGÍA: FASES Y DISEÑO DE INSTRUMENTOS

La metodología utilizada para alcanzar los objetivos se describe a continuación.

### Antecedentes de investigación y marco teórico

Se revisaron y analizaron investigaciones relacionadas con la evaluación formativa y la comunicación en matemáticas, a partir de las cuales se identificaron algunas estrategias didácticas, al igual que experiencias de evaluación formativa, como los tipos de retroalimentación o *feedback* que permiten fortalecer los procesos de la comunicación matemática en el aula de clase.

Adicionalmente, se revisó una técnica para organizar las actividades en el aula, con el propósito de potenciar la comunicación y fortalecer otras competencias.

### Diseño de actividades y trabajo de campo

Las actividades se realizaron con un grupo de estudiantes de un curso de Cálculo Diferencial de la Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito. El curso tenía 20 estudiantes. Las actividades se dividieron en tres partes, a saber:

**Actividad 1: Discusión de toda la clase.** Para esta actividad se usaron el enfoque de coordinación de la discusión de toda la clase y el análisis de las soluciones de los estudiantes, así como una de las variaciones de la técnica de discusión interactiva de la técnica *Gallery Walk*, con el propósito de hacer que todos los estudiantes del grupo entren en un modo de participación enfocada y activa con las ideas matemáticas de otros

estudiantes (Fosnot & Dolk, 2002, citados en Ontario Educators, 2010).

Primero se plantearon cinco ecuaciones en la pizarra, escritas por el profesor, y luego se les pidió a algunos estudiantes del grupo que registraran en la pizarra su procedimiento y respuesta a una de las ecuaciones. Además, se les solicitó que justificaran oralmente, paso a paso, lo que escribieron.

**Actividad 2: Discusión en pequeños grupos.** Se diseñó un taller de límites para resolverlo en pequeños grupos, para cada límite, se pidió realizar la gráfica de la función y luego determinar el valor de límite (se podía utilizar un graficador para apoyar el razonamiento).

El análisis de la discusión se enfocó únicamente en la manera en la que los estudiantes articulaban las representaciones gráfica y algebraica de la función dada, apoyándose en un graficador; no se centró en la forma en la que encontraron el valor del límite.

**Actividad 3: Feedback (retroalimentación) entre compañeros.** Para esta actividad se utilizaron varios tipos de retroalimentación, de acuerdo con Mendivelso, Ortiz & Sánchez (2019), y la estrategia de la realización de evaluaciones cortas de Jaafar & Lin (2017). Para esto, se dividió la actividad en tres momentos:

- **Momento 1:** El profesor propone y realiza una evaluación corta e individual donde tenían que encontrar el valor de un límite de dos maneras diferentes.
- **Momento 2:** Los estudiantes resuelven la evaluación y luego, por indicaciones del profesor, cada uno entrega su evaluación a un compañero de clase.
- **Momento 3:** El profesor soluciona la evaluación en la pizarra y realiza una retroalimentación colectiva, enfocándose en los posibles errores que pudieron cometer al dar respuesta al valor del límite (Pontificia Universidad Católica de Chile, 2016, citado por Mendivelso, Ortiz & Sánchez, 2019).

Posteriormente, se propone a los estudiantes que revisen la evaluación de su compañero y escriban un comentario o recomendación a manera de *feedback* (Wilson, 2002, citado por Mendivelso, Ortiz & Sánchez, 2019).

Podían incluso levantarse y hacer preguntas a su compañero cuando no entendieran algo escrito, o pedir alguna explicación adicional, para poder refinar su *feedback*.

### Técnicas utilizadas para la recolección de datos

Las discusiones de los estudiantes se grabaron en audio y luego se realizaron transcripciones naturales. En la investigación cualitativa, las transcripciones se utilizan para codificar los datos, un proceso en el que los investigadores etiquetan o categorizan partes de los datos en función de su contenido, temas o patrones. La transcripción natural es un texto en el que se corrigen errores y se mejoran la coherencia y la cohesión del discurso, para facilitar la comprensión del texto.

### Retroalimentación individual y evaluación de las actividades

Paralelamente a estas tres actividades, se realizó una retroalimentación individual de una evaluación escrita (parcial) y también se les pidió a los estudiantes que evaluaran la técnica de discusión interactiva de toda la clase *Gallery Walk*.

## ANÁLISIS DE RESULTADOS

### Análisis de la actividad 1

Para esta actividad se usaron el enfoque de coordinación de la discusión de toda la clase y el análisis de las soluciones de los estudiantes, así como una de las variaciones de la técnica de discusión interactiva de la técnica *Gallery Walk*, con el propósito de hacer que todos los estudiantes del grupo entren en un modo de participación enfocada y activa con las ideas matemáticas de otros estudiantes (Fosnot & Dolk, 2002, citados en Ontario Educators, 2010).

Primero se plantearon cinco ecuaciones en la pizarra, escritas por el profesor, a saber (figura 1):

(1)  $x + 3 = 1$   
 (2)  $\sqrt{x} = -1$   
 (3)  $\log(x-1) + \log(x+1) = 0$   
 (4)  $e^{-x} = 0$   
 (5)  $\text{Sen } x = 4$

**Figura 1.**  
Ecuaciones escritas en la pizarra.

Luego, se les pidió a dos estudiantes del grupo (Andrés y Juan) que registraran en la pizarra su procedimiento y respuesta a la ecuación 3; además, se les solicitó que justificaran oralmente paso o paso lo que escribieron, pero ninguno de los estudiantes manifestó poder justificarlo oralmente. Esta fue una buena oportunidad para que el resto del grupo analizara las dos soluciones y proporcionara una retroalimentación o *feedback*, cuyo objetivo fue mejorar la claridad y precisión de cada una de las soluciones presentadas en la pizarra.

Por otro lado, fue una oportunidad para que el profesor pudiera determinar el nivel de competencia matemática al escuchar intervenciones de los estudiantes y también incluir discusiones sobre conceptos erróneos y errores matemáticos. Como los demás estudiantes podían participar, el profe alentó la discusión con unas preguntas para interpretar y evaluar las presentaciones de los estudiantes sobre su pensamiento matemático (Ontario Educators 2010), las cuales se basaron en:

- La elección relevante de la técnica o estrategia para resolver la ecuación.
- La claridad en términos de organización lógica para facilitar la comprensión de la solución a la ecuación.
- La justificación de las ideas y estrategias matemáticas para dar solución a la ecuación con suficiente y significativo detalle matemático.
- El uso apropiado y preciso de terminología matemática, la notación simbólica y formas estándar para rotular gráficos y diagramas en el proceso y solución de la ecuación.

**Episodio 1:** Solución escrita por Juan a la ecuación 3 (figura 2).

$\log(x-1) + \log(x+1) = \log 1$   
 $10^{\log(x-1)(x+1)} = 10^{\log 1}$   
 $(x-1)(x+1) = 1$   
 $x^2 - 1 = 1$   
 $x^2 = 2 \rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{2}$   
 $x = \sqrt{2}$

**Figura 2.** Solución escrita por Juan a la ecuación 3.



- Profe: Quiero que alguno de ustedes me diga si es importante o no lo que preguntaré a continuación, ya que ninguno de los estudiantes justificó la técnica utilizada en la solución de la ecuación dada: ¿Es posible resolver un ejercicio, pero no saber justificar el proceso? ¿Qué concepto, algoritmo, estrategia o modelo de representación utilizaron los estudiantes en su solución de la ecuación?
- Ángela: Profe, yo creo que de pronto él no sabe que es una propiedad, y pues sencillamente lo hizo muy mecánico...
- Profe: ¿Crees que es una propiedad de logaritmos? ¿Se puede ver que usó una propiedad de logaritmos? De hecho, en el ejercicio original había una suma y ahora vemos una multiplicación; o sea, ¿es una propiedad de logaritmos?
- Juan: Uyyy, sí, no me había dado cuenta de eso...
- Profe: ¿Y usaste solo una propiedad o usaste varias propiedades?
- Ángela: Profe, usó varias...
- Juan: Sí, creo que usé varias, pero no me acuerdo de la primera...
- Profe: Sería genial que investigaras sobre la primera que usaste, cuándo se usa y por qué.
- Juan: Sí, es importante; nunca he razonado de esa manera, solo lo hice mecánicamente.
- Profe: OK. Elegiste ese camino. Ahora bien, ¿podrías explicar por qué pusiste más o menos la raíz cuadrada de dos?
- Juan: Por la definición de valor absoluto, creo; no estoy seguro, profe...
- Profe: Pero no lo tenías así en un principio. ¿Te acordaste de cuando los compañeros te lo sugirieron?
- Albeiro: Es una propiedad; si tienes raíz cuadrada de  $x$  elevada al cuadrado, eso da valor absoluto de  $x$ .
- Juan: Mmm... No lo hice visible, lo había olvidado, pero sí.
- Profe: Y si esa parte no la escribimos como parte del proceso, ¿estaría bien?
- Sara: No, porque no se sabría por qué da más o menos, teniendo en cuenta que el valor absoluto es una distancia.
- Profe: ¿Y así lo hacen ustedes siempre? ¿Ustedes omiten el paso del valor absoluto?
- Juan: Sí, porque a mí no me habían enseñado eso nunca.
- Brandoll: Yo lo aprendí en el colegio de manera mecánica, pero ni idea. Ahora entendí de dónde salen los signos esos.

En relación con el proceso desarrollado por Andrés (el otro estudiante, figura 3) a la misma ecuación 3, el profesor pregunta:

**Episodio 2:** Continuando con la discusión de las técnicas utilizadas en el ejercicio o ecuación 3.

- Profe: Bueno, después de analizar cuáles propiedades de los logaritmos utilizaron ambos estudiantes, ahora terminemos de chequear qué más se utilizó en el proceso de solución. Aquí se escribió que equis elevada al cuadrado es igual a dos... luego la raíz cuadrada de equis elevada al cuadrado es igual a raíz cuadrada de dos; por lo tanto, el valor absoluto de equis es igual a la raíz cuadrada de dos (aquí hay que aclarar que el estudiante no tenía escrito el valor absoluto en su proceso y de repente lo puso rápidamente, porque algunos de los participantes lo sugirieron en voz alta), y le falta el valor absoluto. Terminó escribiendo que  $x$  era igual a más o menos la raíz cuadrada de dos.
- Camilo: Profe... pero ¿por qué no igualó a cero? Se supone que es una cuadrática, ¿no?
- Juan: No... yo elegí despejar la equis.
- Profe: ¿Qué podemos analizar de este otro proceso? Traten de meterse en la mente del estudiante. ¿Cómo se relacionan matemáticamente las dos soluciones entre sí? Por ejemplo, se puede leer en esta solución que el valor absoluto de  $x$  es igual a más o menos raíz cuadrada de dos...
- Estudiantes (la gran mayoría en voz alta): Está mal escrito, un valor absoluto nunca es negativo; está confuso, ¿verdad?

$$\begin{aligned} \log((x-1) \cdot (x+1)) &= \log 1 \\ (x-1) \cdot (x+1) &= 1 \\ x^2 + x - x - 1 &= 1 \\ x^2 - 1 &= 1 \\ |x| &= \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

**Figura 3.** Solución escrita por Andrés a la ecuación 3.

- Profe: ¿Podría alguien leer el significado verbal de lo que está escrito? ¿Alguien lo puede hacer?
- Manuel: Verbalmente, es una distancia, profe.
- Profe: ¿Cómo así una distancia? ¿A qué te refieres exactamente?
- Manuel: De un número a cero.
- Profe: Entonces, con eso en mente, ¿qué podemos entender realmente de lo que está escrito?
- Nicole: Que la distancia de un número a cero es raíz de dos.
- Profe: Y también es igual a menos raíz cuadrada de dos, ¿no?
- Estudiantes: ¡Nooo! Eso está mal...
- Manuel: Sugiero que debió escribir valor absoluto de  $x$  es igual a raíz cuadrada de dos y luego  $x$  es igual a blablá, como dijo el otro compañero... Así está mal escrito y es un error.
- Profe: Es un error conceptual, estaremos revisando el concepto de valor absoluto como objeto de aprendizaje, lo tendremos en cuenta en otra discusión de clase. Sin embargo, voy a hacer la última pregunta en relación con el proceso: ¿ya terminamos el ejercicio? Es decir, ¿esas son las respuestas? ¿Cómo estamos seguros de que esas respuestas sí son soluciones a la ecuación 3?
- Manuel: Sí, esas son.
- Camilo: No, no estoy tan seguro; creo que tenemos que evaluar esas respuestas.
- Profe: Probémoslo. Si equis es igual a la raíz cuadrada de dos... reemplacemos ese valor en equis en la ecuación original dada y verifiquemos.
- Estudiantes: Sí da, ya lo hicimos nosotros.
- Profe: Y la otra respuesta, la de menos raíz cuadrada de dos, ¿esa qué?
- Sara: ¡Ay, profe! Esa me da error en la calculadora.
- David: A mí también.
- Profe: ¿A quién más le da error? ¿A todos? ¿Por qué será? ¿Y si no usan la calculadora?
- Estudiantes: Sí, si...
- Juan: Pienso que es por la definición de logaritmo, que un logaritmo en base equis de  $b$ ,  $b$  no puede ser negativo... porque creo que no existe. Pero no sé explicarlo, solo me acordé. No lo recuerdo muy bien.
- Profe: Y si uno deja el ejercicio así, sin verificar las respuestas, ¿qué pasaría?
- Estudiantes: Estaría mal, porque estamos diciendo que puede haber dos opciones de respuesta igualmente válidas, y no es verdad.
- Profe: Entonces, la pregunta para todos sería esta: ¿puede una técnica funcionar sin validar las respuestas? ¿Consideran ustedes que debería estar acompañada de algo más? ¿Qué conclusión sacan? ¿Qué aprendieron de esta discusión?
- Andrés: Debe estar acompañado de un razonamiento que justifique la técnica elegida para resolver el ejercicio y también verificar si la respuesta es válida; si no, no sirve.
- Camilo: Nos toca comprender muy bien las definiciones.
- Estudiantes en voz alta: Hay que estar seguros, muy seguros.

### Episodio 3: Ejercicio, ecuación 4.

- Profe: Ahora bien, pasemos a la ecuación número cuatro... analicemos.
- Vale: El procedimiento... Hay que explicar cómo al Euler se le pone logaritmo natural para que la  $x$  quede sola... Sin embargo, yo después pondría debajo que sería equis igual a menos logaritmo natural, pero eso no está definido porque un logaritmo no puede ser negativo.
- Profe: ¿Qué es lo que no está definido? Tendríamos que preguntar por qué no está definido, ¿cierto?
- Vale: Sí. Yo, por ejemplo, puse que logaritmo natural de cero no existe.
- Profe: ¿Cómo sabes eso? ¿Usaron una calculadora? Háganlo todos
- Estudiantes: Da error matemático.
- Profe: ¿Quién sabe por qué da error la calculadora?
- Estudiantes: Porque es un error matemático.
- Sara: Digamos que por un minuto existiera el logaritmo natural de cero, entonces  $x$  es igual, para cualquier logaritmo base diez de cero. ¿Cuál es una manera de colocar esto? Entonces cero elevado a la  $x$  es igual a diez (figura 4).

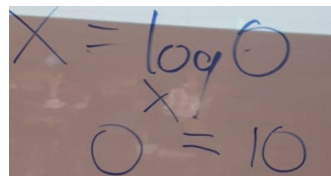


Figura 4. Lo que escribió Sara en la pizarra.

- Profe: Espera, Sara. ¿Está bien escrito? Haré una pregunta: si yo tengo que equis igual al logaritmo en base diez de cero, esto se puede escribir... ¿Cero elevado a la equis igual diez? ¿Sí? Analicemos. ¿Están de acuerdo?
- Algunos estudiantes: Mmm...
- Camilo: No sé, profe, porque no termino de entender logaritmos... No puedo decir mucho...
- Ángela: Está mal, es un error.
- Profe: ¿Qué está mal, Ángela? Es decir, ¿alguien sabe por qué es un error?
- Ángela: Lo que hizo la compañera está mal escrito, no se hace así. ¿Puedo pasar al tablero?
- Profe: Claro que sí, ven (Ángela se levanta y escribe en la pizarra).
- Ángela: Por ejemplo, logaritmo de cero es igual a equis; entonces esto lo vamos a pasar a exponentes... Acá se sabe que la base es diez, diez a la equis sería cero... Por ejemplo, si tengo dos elevado a la dos es igual a cuatro, entonces el logaritmo en base dos de cuatro es dos (todo eso lo dice Ángela, pero no lo escribe). Luego, escribe lo que se muestra a continuación (figura 5):

$$e^{-x} = 0$$

$$\ln e^{-x} = \ln 0$$

$$-x = \ln 0$$

$$x = -\ln 0$$

**Figura 5.** Lo que escribió Ángela.

- Profe: Según tu argumento, entonces crees que cero elevado a la equis es igual a diez está mal escrito, ¿sí?
- Ángela: Sí. Definitivamente, diez elevado a ningún número me da cero...
- Sara: Pero lo que dijo no tiene algo que ver con lo que escribí.
- Ángela: Esperen... Me acabo de dar cuenta de que lo que escribí no tiene sentido.
- Cristian: Creo que tenía la idea, pero revolvió todo, no se hizo entender.
- Profe: ¿Creen ustedes que la comunicación escrita es importante? ¿La forma como escribimos debe ser coherente con la forma como lo expresamos oralmente?

- Maicol: Total, profe.
- Profe: Entonces, ¿entienden qué es un logaritmo?
- Albeiro: Es la inversa de la exponencial.
- Manuel: Es un exponente.
- Profe: Pero ¿todo esto explica por qué el logaritmo natural de cero da error? Preguntamos eso y lo explicaron en base diez; qué curioso eso, ¿no? ¿Por qué no lo explicamos utilizando el logaritmo natural? Pienso que eso fue lo que intentaba hacer Ángela... ¿Cuál es la base cuando usamos logaritmo natural? ¿Es diez?
- Diego: Es Euler. Por eso la compañera escribió eso.
- Profe: ¿Podemos utilizar el mismo razonamiento en base Euler en lugar de base diez? Por ejemplo, ¿logaritmo en base dos de cero existe? ¿Logaritmo natural (en base  $e$ ) de cero existe?
- Estudiantes: No, para cualquier base no existiría.
- Profe: Volvamos a lo que escribió Ángela... Euler elevado a la menos equis es cero, luego parece que multiplicó por menos uno a ambos lados... ¿Qué hiciste, Ángela?
- Ángela: Multipliqué a ambos lados por logaritmo natural porque es la inversa.
- Manuel: Eso se hace para simplificar, no es por la inversa.
- Ángela: Traté de aplicar la inversa, pero me faltó el cero.
- Manuel: Pero ¿logaritmo natural de qué?, ¿de un fantasma? Miren al final.

Ángela se levanta en ese momento y escribe de nuevo su proceso, esta vez corregido luego de los aportes de sus compañeros (figura 6).

$$e^{-x} = 0$$

$$\ln e^{-x} = \ln 0$$

$$-x = \ln 0$$

no esta definida

**Figura 6.** Corrección de Ángela.

- Manuel: Quedaría al final equis igual a menos logaritmo natural de cero y eso no existe, pero eso desde el inicio se podía saber, porque Euler elevado a ningún número me daría cero, así sea negativo el exponente. No veo necesidad de hacer eso que hizo Ángela.
- Estudiantes: ¡Claro! Así es más fácil.
- Profe: Veo que llegamos a un punto importante de la discusión: se puede resolver la ecuación de varias maneras entonces, eso sí, siendo conscientes de cada paso en el proceso y de por qué hacemos lo que hacemos... ¿Algunos de ustedes eran conscientes de por qué el logaritmo natural de cero en la calculadora da error? Díganme...
- Estudiantes: Nooo... Qué tristeza.
- Juan: Profe, la verdad es que yo no uso la calculadora, me guío por la lógica de la gráfica de Euler... Sé que prácticamente la gráfica nunca va a tocar el cero, va a estar cercana al cero, pero nunca lo va a tocar. ¿Se puede hacer así?
- Profe: Ese es otro tipo de razonamiento. ¿Qué tipo de razonamiento utilizó nuestro compañero para dar la respuesta?
- Estudiantes: Usó una representación gráfica... ¿Sí se puede? Eso lo vimos en Precálculo.
- Profe: Pueden utilizar diferentes registros de representación para dar respuesta a una tarea, ya sea un ejercicio o un problema matemático, todo es válido, pero no olviden que nuestra meta es complementarlos y articularlos para estar seguros.

En la discusión se puede apreciar que todas las preguntas planteadas por el profesor relacionaron competencias matemáticas, como el razonamiento matemático, los procedimientos y algoritmos y la representación; sin embargo, el énfasis se hizo en la competencia de la comunicación matemática.

El profesor identificó los detalles significativos de los discursos y soluciones que escribieron los dos estudiantes en la pizarra y en esa medida se fueron aclarando ideas y conceptos; también evidenció los errores para corregirlos, en concordancia con el modelo por competencias centrado en el aprendizaje activo, adoptado por el Departamento de Matemáticas de la Escuela.

Adicionalmente, en la discusión se evidenció, de acuerdo con Morales (2012), que los estudiantes se hicieron más responsables de su propio aprendizaje, puesto que para ellos la discusión representó una oportu-

nidad para verificar, corregir y mejorar sus propios conocimientos y habilidades. Los estudiantes poco a poco se van habituando a utilizar un enfoque profundo del estudio (McDowell, Wakelin, Montgomery & King, 2011, citados por Morales, 2012).

Por otra parte, se puede evidenciar que algunos de ellos se habían aprendido de memoria que el logaritmo natural de cero no existe, o utilizaban la calculadora, pero pocos sabían argumentar por qué no existe.

Otros escribieron procedimientos, pero después se dieron cuenta de que lo que escribieron no tenía sentido matemático. Como vemos, la calidad de la comunicación en matemática (oral o escrita) de los estudiantes se puede ir mejorando de manera progresiva, potenciando el lenguaje verbal y diseñando un sistema de actividades de evaluación, tales como las decisiones de clases orientadas al desarrollo de la expresión de ideas matemáticas y argumentación en forma coherente y convincente (Sobrado, Sarduy & Espíndola, 2018).

## Análisis de la actividad 2

Se diseñó un taller de límites para resolverlo en pequeños grupos. Para cada límite se pidió realizar la gráfica de la función dada y luego determinar el valor de límite (se podía utilizar un graficador para apoyar el razonamiento).

Punto 4 tomado del taller de límites: Hacer la gráfica de la función y luego encontrar el valor del límite que se indica a continuación:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2}$$

- Sara: La verdad, hice la gráfica con GeoGebra y tuve en cuenta las restricciones, pero tengo dudas con la función del 4; lo que yo creo es que la calculadora factoriza y simplifica porque da una lineal y no es lineal, no tuvo en cuenta la restricción del dominio que no puede tomar el dos.
- Valentina: Yo también tengo esa duda, porque si se hace eso no se está teniendo en cuenta el dominio.
- Sara: Exacto.
- Valentina: Entonces equis puede ser dos y ahí ya no se podría cancelar.



- Sara: Exacto. Es como si estuviera tomando la parte de arriba y está obviando la parte de abajo.
- Valentina: ¿Tú crees que en las graficadoras no se puede meter el dominio?
- Sara: Pienso que sí...
- Profe: Ya veo lo que están discutiendo y entiendo su razonamiento matemático; entonces, ¿qué piensan hacer al respecto? ¿Están seguras de que agregando la condición de si entonces en la graficadora ayudaría? ¿Cómo?
- Sara: Profe, es que yo siento que el problema es que las graficadoras lo primero que hacen es que resuelven la ecuación y luego la grafican; entonces, sería mejor que no resolvieran la ecuación, porque si la resuelven ya queda mal.
- Profe: Espera... ¿Cuál ecuación?
- Valentina: Es que hay una equis cuadrado menos seis equis más ocho sobre equis menos dos; entonces, pues equis al cuadrado menos seis equis más ocho queda equis menos dos factor de equis menos cuatro. Entonces, como en el denominador también está la equis menos dos y arriba también lo que hicieron fue cancelar, quedaría equis más... perdón, equis menos cuatro.
- Profe: Entonces, ustedes consideran que primero simplifican y luego grafican la función, ¿verdad?
- Sara: Sí, la función, había dicho ecuación; perdón.
- Valentina: Yo considero que deben primero graficar y luego simplificar.
- Profe: ¿Confían en la graficadora? ¿Qué piensan?
- Sara: No, mejor lo simplificamos nosotras, pero sabiendo que no puede tomar el valor de dos.
- Valentina: Sí, nosotros debemos dibujar la línea, pero con un hueco en dos.
- Profe: Entonces, cuando les pidan hacer la gráfica de cualquier función en un graficador, ¿van a usar un graficador y ya está?
- Sara: ¡Noooo! Debemos acompañarlo de un buen razonamiento; si no, no sirve. Mire lo que pasó: la graficó como si fuera lineal y no lo era.
- Profe: ¿Qué concluyen entonces? Para que luego lo socialicemos con el resto de los compañeros.
- Estudiantes: Nos podemos apoyar en la graficadora, pero debemos articular todas las formas, es decir, utilizar varias representaciones para estar seguros de la gráfica. No nos podemos confiar.

En esta discusión en pequeños grupos se tomó solamente el episodio de la discusión alrededor de la parte de la representación gráfica de la función dada, es decir, no se enfocó en cómo encontraron el valor del límite.

Primero que todo, podemos notar la falta de comprensión conceptual de la estudiante Sara acerca de la definición de una función, dado que confunde función con ecuación, tal como lo describieron los estudiantes (Jaafar & Lin, 2017, p. 508) cuando un estudiante respondió que una función es " $4x+2=6$ , resuelve  $x$  o algo así". Sara: "Profe, es que yo siento que el problema es que las graficadoras lo primero que hacen es que resuelven la ecuación y luego la grafican...". Posteriormente, Sara afirma "... entonces, sería mejor que no resolvieran la ecuación, porque si la resuelven ya queda mal".

En la discusión, ambas estudiantes se dan cuenta de que el valor de equis igual a dos no pertenece al dominio de la función dada y tienen conocimiento de que no se trata de una función lineal.

Para validar su razonamiento matemático se apoyaron en la calculadora graficadora y mostraron un avance en el desarrollo de las competencias de representación en los registros algebraico y gráfico, los cuales deben estar relacionados conceptualmente, al concluir que se deben articular varias representaciones para estar seguros de la gráfica correcta.

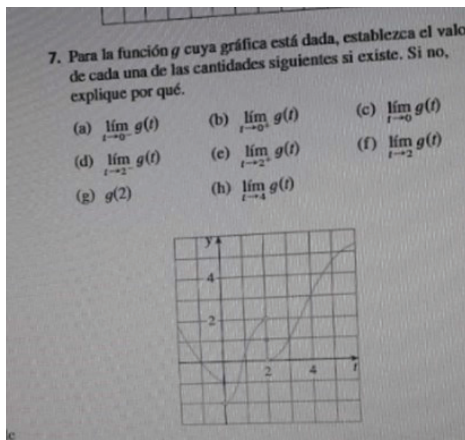
### Análisis de la actividad 3

Para esta actividad se usaron varios tipos de retroalimentación, de acuerdo con Mendivelso, Ortiz & Sánchez (2019), y la estrategia de la realización de evaluaciones cortas de Jaafar & Lin (2017). Para ello, se dividió la actividad en tres momentos:

**Momento 1:** El profesor propone y realiza una evaluación corta e individual, en la que tenían que encontrar el valor del límite de dos maneras:

- A partir de la representación gráfica de una función (figura 7):

**Figura 7.** Ejercicio tomado del texto guía, p. 92 (Stewart, 2018).



- A partir de la representación algebraica de una función por tramos (figura 8):

Sea

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 2 - x^2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(a) Evalúe cada una de los límites siguientes si es que existen.

(i)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$       (ii)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$       (iii)  $g(1)$   
 (iv)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$       (v)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$       (vi)  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$

**Figura 8.** Ejercicio tomado del texto guía (Stewart, 2018, p. 104).

**Momento 2:** Los estudiantes resuelven la evaluación y luego, por indicaciones del profesor, cada uno entrega su evaluación a un compañero de clase.

**Momento 3:** El profesor soluciona la evaluación en la pizarra y realiza una retroalimentación general para toda la clase, enfocándose en los posibles errores que pudieron cometer al dar respuesta al valor del límite. Luego, propone a los estudiantes que revisen la evaluación de su compañero y escriban un comentario o recomendación a manera de *feedback*, de acuerdo con los aciertos o errores encontrados.

Podían incluso levantarse y hacer preguntas a su compañero cuando no entendieran algo escrito, o pedir alguna explicación adicional.

Para este último momento, el objetivo del profesor era que cada estudiante, después de escribir la solución de la evaluación en la pizarra, debía revisar y retroalimentar a su compañero de clase en su propio lenguaje

y de acuerdo con la comprensión lograda. Este tipo de *feedback* pertenece a la clasificación de *feedback* según “la fuente que la provee” (Wilson, 2002, citado por Mendivelso, Ortiz & Sánchez, 2019).

El *feedback* también está “centrado en la tarea” (Hattie & Timperley, 2007, citados por Mendivelso, Ortiz & Sánchez, 2019), puesto que brinda información sobre los aciertos y errores de los estudiantes en relación con los resultados que arrojó la evaluación una vez concluida.

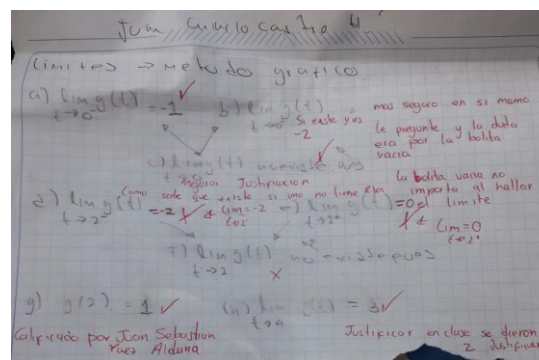
**Evidencias del feedback entre compañeros**

**Caso 1. Evaluación corta 1, estudiante uno (figura 9).**

En esta evaluación se pueden evidenciar los comentarios y recomendaciones que el estudiante Sebastián hizo a la solución de Juan Camilo. En primer lugar, le recomienda “Mejorar justificación: cómo sabe que existe si uno no tiene respuesta”. Vale la pena destacar aquí la importancia que el estudiante Sebastián le da a la justificación de la respuesta de Juan Camilo para poder validarla como correcta, puesto que para él hace falta la respuesta al valor del límite de la función cuando  $x$  tiende a 0 por la derecha y así concluir que el límite no existe.

De hecho, se puede ver cómo corrige la respuesta a ese valor del límite de la función cuando  $x$  tiende a 0, escribiendo “si existe y es  $-2$ ”, a modo de conclusión.

Esto es una muestra de la relevancia que tiene la comunicación matemática escrita para Sebastián en relación con la argumentación y la claridad en términos de una organización lógica que pueda evidenciar la comprensión del tema de la persona a la que están evaluando, en este caso, de Juan Camilo.



**Figura 9.** Ejemplo de evaluación corta 1, estudiante 1.



Como los estudiantes podían hacerle preguntas al compañero al cual estaban evaluando, Sebastián escribe: “Le pregunté y la duda era por la bolita vacía... La bolita vacía no importa al hallar el límite”.

Aquí se evidencia que el estudiante Juan Camilo aún no captaba la diferencia entre el límite de una función en un punto y el valor de la función en un punto, tal como lo describieron Jaafar & Lin (2017), y por eso quizás presentó tal duda o confusión cuando Sebastián le preguntó. Por último, se puede ver que escribe una recomendación “más seguro de sí mismo”, tal vez por las dudas y confusiones que manifestó su compañero.

### Caso 2. Evaluación corta 2 (figura 10)

En esta evaluación se pueden evidenciar los comentarios y recomendaciones que uno de los estudiantes (no escribió su nombre) hizo a la solución de Andrés Felipe. En primer lugar, le escribe “No preguntaron el tramo”, lo cual refleja que quizás para este estudiante el valor del límite de una función en un punto no debe ser un tramo de la función, sino un número, de acuerdo con lo que él comprendió de la retroalimentación que realizó el profesor.

Por otro lado, se puede ver que hace una anotación en forma de pregunta: “¿Cómo sabes que son diferentes sin tener los resultados”? Es importante destacar la importancia que le da el estudiante evaluador a la argumentación en la comunicación matemática, debido a que evidenció la ausencia de elementos necesarios y suficientes que justificaran las respuestas dadas al valor de límite.

De acuerdo con Sobrado, Sarduy & Montes de Oca (2016, citados por Sobrado, Sarduy & Espindola, 2018), escribir las razones para afirmar o refutar la veracidad de un juicio es parte de las cuatro variables cualitativas para evaluar la calidad de la expresión de ideas matemáticas y mejorar la calidad de la comunicación matemática.

Al final, escribe una nota general: “Te faltó especificar en qué tramo evaluaste. Estudiar los límites algebraicamente”. En este caso, se puede apreciar de nuevo la importancia que tiene la justificación de Andrés Felipe para que el estudiante evaluador pueda validarla como correcta; incluso el estudiante evaluador se pregunta por los resultados que llevaron a Andrés a concluir que el límite de la función no existía cuando  $x$  tiende a 1. De hecho, esto se puede evidenciar cuando corrige la respuesta escribiendo “si existe el límite en 1”.

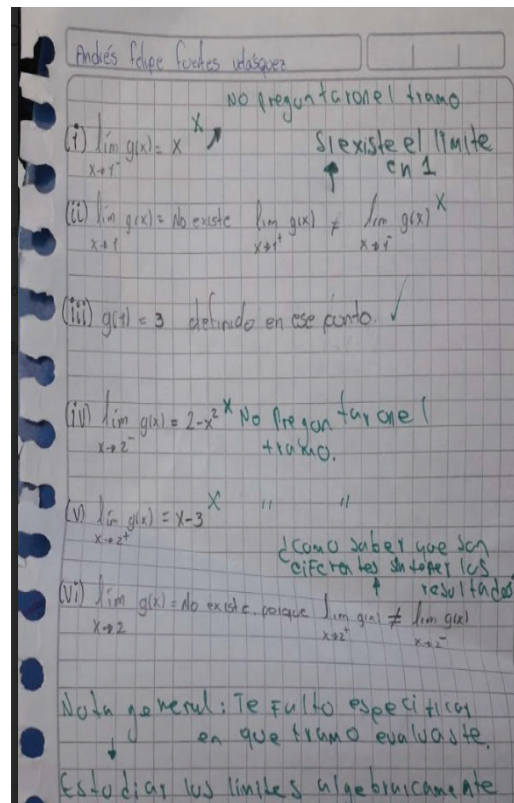


Figura 10. Evaluación corta 2.

Esto es otra muestra de la relevancia que tiene la comunicación matemática escrita para este estudiante, igual que en el caso anterior.

### Caso 3. Evaluación corta 2 (figura 11)

En esta evaluación se pueden evidenciar los comentarios y recomendaciones que el estudiante Cristian hizo a la solución de Valentina. En primer lugar, le dice que “hubiese sido mejor que colocaras el tramo que usaste para hallar el límite, escribir el límite cuando  $x$  tiende a 2 por izquierda de  $g(x) = 2 - x^2$  está mal”.

Lo que se puede analizar de los comentarios de Cristian cuando se le preguntó por qué había recomendado esto a Valentina, fue que para él se debe escribir el límite del tramo específico de la función, o sea,  $2 - x^2$  cuando  $x$  tiende a 2 por la izquierda y no poner ese  $g(x)$ , y luego, sí debe darse el resultado; para él, al igual que para el estudiante del caso anterior, la respuesta debe ser un valor numérico, no un tramo de la función.

De acuerdo con Sobrado, Sarduy & Montes de Oca (2016, citados por Sobrado, Sarduy & Espindola,

A. 2018), se evidenció la importancia que le atribuye Cristian a la forma de escribir de Valentina, puesto que en las recomendaciones hace alusión a la precisión, relacionada con el uso de la notación correcta, la simbología y su significado en el contexto, dado que podría presentar confusiones, lo cual también forma parte de las cuatro variables cualitativas para evaluar la calidad de la expresión de ideas matemáticas y mejorar la calidad de la comunicación matemática.

Por último, comenta: “Analiza un poco más tus procedimientos, el conocimiento lo tienes”. En esta última recomendación, se puede ver la relevancia que tiene para Cristian escribir correctamente el procedimiento; si bien al parecer Valentina no da una respuesta errónea, el proceso para llegar a la respuesta, según Cristian, puede mejorar.

$$g(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 2-x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) \text{ no existe porque los límites no coinciden}$$

$$g(1) = 3$$

Figura 11. Ejemplo de evaluación corta 3.

Se puede concluir que estas evaluaciones cortas fueron útiles tanto para los estudiantes como para el profesor, puesto que se evidenciaron los aciertos y los errores presentados para corregirlos; además, se hicieron recomendaciones para mejorar la calidad de la comunicación matemática, de acuerdo con Jaafar & Lin (2017).

#### 5.4 Retroalimentación o feedback individual de una evaluación escrita (parcial 1)

Como se mencionó antes, paralelamente a las tres actividades, se realizó una retroalimentación individual de una evaluación escrita (parcial) que cada uno de los estudiantes llamó “reflexión”.

Esta retroalimentación estaba centrada en la autorregulación de la persona (Mendivelso, Ortiz & Sánchez, 2019). Los referentes desde los cuales cada estudiante realizó este control del proceso fueron el desarrollo de las competencias matemáticas evaluadas, identificando

los fallos y oportunidades de mejora, asumiendo de manera autónoma la valoración de su trabajo.

La mayoría de los estudiantes identificaron oportunidades de mejora en la calidad en la comunicación matemática: mal uso del lenguaje, notación incorrecta o poco clara y no explicar mejor las ideas que querían expresar, todo esto relacionado con la precisión y la argumentación (Sobrado, Sarduy, Montes de Oca, 2016, citados por Sobrado, Sarduy & Espíndola). A continuación, se muestra un ejemplo (figura 12).

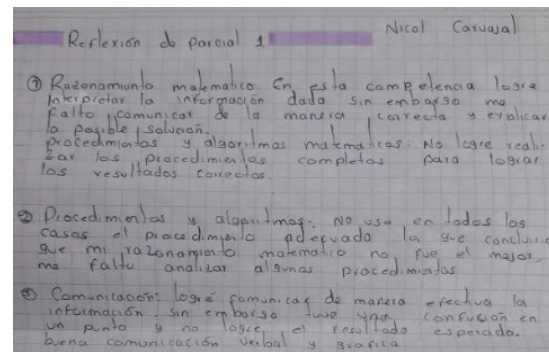


Figura 12. Ejemplo de identificación de oportunidad de mejora en la comunicación.

La estudiante identifica fallos en su razonamiento matemático y en el desarrollo de los procedimientos y algoritmos. En este último, reconoce que no usa el procedimiento adecuado.

Esto indica que, si bien conoce diferentes procedimientos vistos en clase, no usó el adecuado para resolver el ejercicio, lo que implicaba un nivel de conexión de la competencia, en el cual se debe elegir el algoritmo que se ajuste para realizar un procedimiento, que era lo que se evaluaba con esta tarea.

Otro elemento clave es la relevancia que la estudiante le da a la comunicación matemática escrita, pues considera que no explicó la posible solución de manera correcta, a pesar de haber logrado interpretar la información.

#### 5.5 Evaluación de la técnica de discusión interactiva de toda la clase *Gallery Walk*

Como se mencionó con anterioridad, paralelamente a las tres actividades se realizó una retroalimentación o *feedback* individual de una evaluación escrita (parcial); además, se les pidió a los estudiantes que evaluaran la

técnica de discusión interactiva de toda la clase *Gallery Walk*.

Se les pidió a todos los estudiantes de la clase que escribieran, de manera individual, las estrategias que les ayudaron a aprender con un **enfoque profundo**. Se destacan los siguientes (ver anexos):

- “Participar de forma que se busque explicar por qué se cree lo que se cree”.
- “Las lluvias de ideas y discusión con otros compañeros”.
- “La actitud del docente y su preocupación por mantenernos enfocados en las clases”.
- “Analizar los posibles errores comunes para fortalecer esas falencias y pasar al tablero a ‘cometer errores’ es la mejor solución”.
- “Las retroalimentaciones del parcial, porque no la hice de manera convencional que es corregir y ya, sino que escribí por qué me quedó mal”.
- “Correlacionar lo aprendido pasando al tablero es algo duro, pero uno se da cuenta de sus errores”.
- “Hacer quices (evaluaciones cortas) paulatinamente y calificar los de los compañeros retroalimentando errores, de cara al parcial, sirve mucho”.
- “Pasar al tablero a explicar ejercicios, a pesar de que estén bien o mal las preguntas que la profe hace”.

En general, a los estudiantes les gustó la técnica de discusión de *Gallery Walk*, pasar al tablero y explicar un proceso sin miedo a equivocarse, esperando con ansias qué preguntaría el profesor, para aprender con un enfoque profundo, según Morales (2012). También valoraron las retroalimentaciones o *feedback* tanto individuales como en grupo, y el uso que se les dio a las evaluaciones cortas dentro de la evaluación formativa.

## CONCLUSIONES

Los resultados de investigación mostraron que los factores que influyen en el fortalecimiento de la competencia de comunicación matemática en el aula de clase en un modelo pedagógico centrado en el estudiante fueron los siguientes:

- Uso de técnicas de discusión interactivas variadas.
- Evaluación formativa y uso de retroalimentación o *feedback*.

- Relación entre el conocimiento conceptual y el procedimental.

## En relación con el uso de técnicas de discusión interactivas

### *Uso de la técnica de discusión de clase Gallery Walk*

Los análisis de resultados mostraron que los estudiantes se hicieron más responsables de su propio aprendizaje cuando se realizaron las discusiones de toda la clase y en pequeños grupos, puesto que para ellos representó una oportunidad para verificar, corregir y mejorar sus propios conocimientos y habilidades. Los estudiantes poco a poco se van habituando a utilizar un enfoque profundo del estudio (McDowell, Wakelin, Montgomery & King, 2011, citados por Morales, 2012).

Además, los resultados mostraron que los estudiantes juzgaron de manera positiva la técnica de discusión interactiva *Gallery Walk* usada como metodología de clase, puesto que la gran mayoría de ellos participaron de manera activa y valoraron las ideas de sus compañeros, revisando errores y aciertos en sus discursos, tal como lo mencionan Fosnot & Dolk (2002, citados en Ontario Educators, 2010).

En relación con las estrategias de evaluación y uso de retroalimentación o *feedback*, se concluye lo siguiente:

- Las evaluaciones cortas fueron de utilidad para los estudiantes y para el profesor, dado que permitieron evidenciar errores y aciertos en los procedimientos y usos del lenguaje, haciendo recomendaciones a modo de *feedback* entre compañeros de clase. También fueron de gran utilidad para mejorar la calidad de la comunicación matemática escrita de los estudiantes, de acuerdo con Jaafar & Lin (2017).
- La retroalimentación individual que se realizó del parcial, centrada en la autorregulación de la persona, de acuerdo con Mendivelso, Ortiz & Sánchez (2019), mostró que los estudiantes se tomaron muy en serio la tarea, identificando los fallos y oportunidades de mejora, asumiendo en forma autónoma la valoración de su trabajo.
- Así mismo, durante las actividades de evaluación se evidenció que la calidad de la comunicación en matemática tanto oral como escrita de los estudiantes mejoró de manera progresiva, de acuerdo con Sobrado, Sarduy & Espíndola (2018).



Todos estos elementos positivos que mostraron los estudiantes contribuyeron también a fortalecer las competencias generales para todos los programas que tiene la Escuela, tales como la autonomía, la colaboración y liderazgo y la comunicación; las cuales forman parte de la autoevaluación del estudiante y la valoración del profesor como parte de la evaluación formativa.

En la relación entre el conocimiento conceptual y el procedimental, se concluye lo siguiente:

- Los resultados mostraron que los estudiantes evidenciaron la importancia entre el conocimiento conceptual y el procedimental para comprender los temas, ya que de acuerdo con Scheja & Pettersson (2009, citados por Jaafar & Lin, 2017), estas dos facetas se “apoyan mutuamente” para fortalecer la comprensión matemática. Esto se pudo evidenciar en las discusiones tanto de toda la clase como en pequeños grupos.
- Adicionalmente, en las retroalimentaciones entre compañeros, los mismos estudiantes hacían recomendaciones de tipo conceptual o procedimental, enfocándose en cuál fue el proceso o argumento, o ausencia de alguno de los dos, o de ambos, que los condujo a dar determinada respuesta, para poder validarla como correcta.

Todo esto tiene que ver también con la precisión y la argumentación, debido a la importancia que los estudiantes le atribuían a la parte de la notación simbólica empleada y a su significado (Sobrado, Sarduy & Montes de Oca, 2016, citados por Sobrado, Sarduy & Espíndola).

## RETOS Y RECOMENDACIONES

El uso de la técnica de discusiones de toda la clase, establecida como una de las variaciones de la técnica de *Gallery Walk* (Ontario Educators, 2010), es muy importante y representa un gran desafío para el profesor, puesto que debe plantear preguntas y organizar el discurso en el aula de clase, e invitar a los estudiantes a salir al tablero a registrar sus respuestas y a participar; esto no es una tarea fácil. De hecho, la mayoría de las veces hay que replantearse las preguntas según las respuestas de los estudiantes y lo que va surgiendo en la discusión, aprovechando cuestiones en las cuales se

identifique una oportunidad para mejorar la conceptualización de los temas y examinando su relación con la parte procedimental.

Hay que escuchar a todos los estudiantes e ir aclarando las ideas, las cuales forman parte de las estrategias propias de un modelo centrado en el estudiante y por competencias. Sin embargo, habrá algunos estudiantes que no participen por timidez o por miedo a equivocarse. La recomendación para los profesores es fomentar un ambiente de aprendizaje, en el cual los estudiantes se sientan libres de cometer errores como parte del proceso para poder avanzar y mejorar.

Otro de los retos que implica centrarse en los estudiantes y fomentar la discusión en clase está en cómo evaluar. Si bien el uso de las evaluaciones cortas es muy valioso como parte de una evaluación formativa, a veces no hay tiempo suficiente para abrir los espacios de discusión alrededor de cada una de ellas, además de que los ritmos de los estudiantes son todos diferentes; entonces, es tarea del profesor detectar en qué nivel se encuentra cada uno de los estudiantes en relación con las competencias desarrolladas y planear varias tareas o una misma tarea (no tienen que ser muy complejas), que impliquen diferentes procedimientos y niveles de razonamiento.

Como se pudo observar en las actividades, en la discusión de toda la clase se trabajó con ecuaciones logarítmicas y en la discusión en pequeños grupos se hicieron unos ejercicios de límites gráficamente; todas estas tareas, al parecer, eran relativamente sencillas, pero a veces con un simple ejercicio pueden salir discusiones muy interesantes que se pueden aprovechar para relacionar lo conceptual con lo procedimental, tal como sucedió en esta investigación.

Por otra parte, las retroalimentaciones individuales que proponen los investigadores (Mendivelso, Ortiz & Sánchez, 2019), que debería hacer el profesor a las evaluaciones escritas tipo parciales o evaluaciones cortas a cada uno de los estudiantes como parte de una práctica en la evaluación formativa, llevan tiempo y dedicación, por lo que se le aconseja al profesor que comience con una retroalimentación colectiva, partiendo de los aciertos y oportunidades de mejora identificados en la evaluación en la mayoría de los estudiantes y que no solo se dedique a informar cuál era la respuesta correcta.

Luego de esto, puede pedirle a cada uno de los estudiantes del grupo que realice un *feedback* individual a

modo de reflexión (retroalimentación autorregulada), que incluya los aspectos positivos y por mejorar en relación con la competencia o las competencias que se pretendían evaluar.

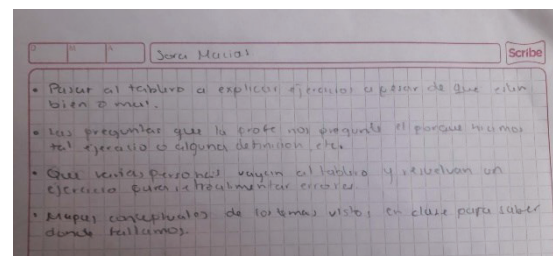
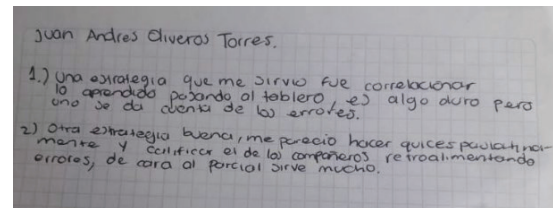
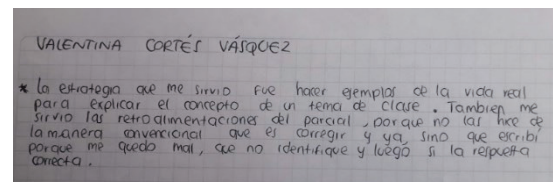
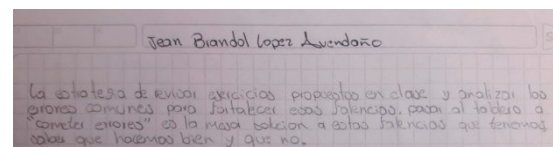
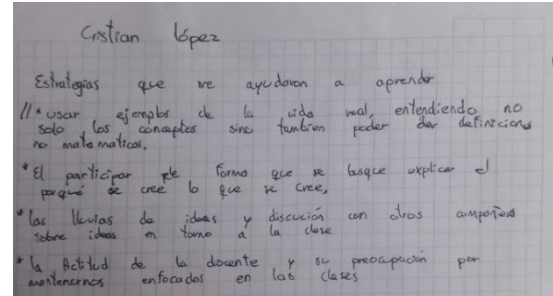
Tal como se evidenció en la presente investigación, los estudiantes valoran este tipo de actividades, y si el profesor les pide que consignent sus avances y aprendizajes y los tiene en cuenta, los hace sentir que la evaluación es un proceso y no solo que la nota sumativa es lo que vale, tal como lo señala Taras (2002, citado por Morales, 2012).

## REFERENCIAS

- Jaafar, R. & Lin, Y. (2017). Assessment for Learning in the Calculus Classroom: A Proactive Approach to Engage Students in Active Learning. *International Electronic Journal of Mathematics Education*. ISSN 1306-3030. 2017, 12 (3), 503-520.
- Mendivelso, H., Ortiz, S. & Sánchez, C. (2019). *La retroalimentación en el proceso de aprendizaje de estudiantes del área de matemáticas*. Trabajo de investigación. Pontificia Universidad Javeriana.
- Morales, P. (2012). *Evaluación de los aprendizajes en la educación universitaria*. Universidad Pontificia Comillas (Madrid). Universidad Rafael Landívar (Guatemala). Conferencia, Universidad Javeriana de Bogotá, Colombia, 25 de julio.
- Morales, P. (2012). ¿Un cambio deseable para la universidad? Algunas experiencias de innovación docente en la titulación Administración y Dirección de Empresas en ICAI-icade. Madrid: Universidad Pontificia Comillas.
- Ontario Educators Educators (2010). *Communication in the Mathematics Classroom*. ISSN 1913 8490 (online). Special edition # 13.
- PED (2024). Proyecto educativo del Departamento de Matemáticas. Bogotá: Universidad Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito.
- Sobrado, E., Sarduy, D. & Espíndola, A. (2018). Estrategia didáctica para mejorar la calidad de la comunicación en matemática. *Transformación*. ISSN Ontario Educators Educators 2077-2955, RNPS 2098, mayo-agosto 2018, 14 (2): 272-285.
- Stewart, J. (2018). *Cálculo de una variable: trascendentes tempranas* (8ª ed.). Editorial Cengage Learning.

## ANEXOS

Evidencias de la evaluación de la técnica *Gallery Walk* por parte de los estudiantes.







# REVISTA DE LA ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERÍA

## Alcance y política

El objetivo de la *Revista de la Escuela Colombiana de Ingeniería* es difundir artículos técnicos que contribuyan al desarrollo del país a través de una publicación con alta calidad editorial y rigor científico.

La revista acepta prioritariamente los siguientes tipos de trabajos, que le permiten mantener su categorización:

1. **Artículo de investigación científica y tecnológica.** Documento que presenta, de manera detallada, los resultados originales de proyectos de investigación. La estructura generalmente utilizada contiene cuatro apartes importantes: introducción, metodología, resultados y conclusiones.
2. **Artículo de reflexión.** Documento que presenta resultados de investigación desde una perspectiva analítica, interpretativa o crítica del autor, sobre un tema específico, recurriendo a fuentes originales.
3. **Artículo de revisión.** Documento producto de una investigación donde se analizan, sistematizan e integran los resultados de investigaciones publicadas o no publicadas, sobre un campo en ciencia o tecnología, con el fin de dar cuenta de los avances y las tendencias de desarrollo. Se caracteriza por presentar una cuidadosa revisión bibliográfica.

También admite artículos de las siguientes tipologías:

4. **Artículo corto.** Documento breve que presenta resultados originales preliminares o parciales de una investigación científica o tecnológica, que por lo general requieren una pronta difusión.
5. **Reporte de caso.** Documento que presenta los resultados de un estudio sobre una situación particular, con el fin de dar a conocer las experiencias técnicas y metodológicas consideradas en un caso específico.
6. **Revisión de tema.** Documento resultado de la revisión crítica de la bibliografía sobre un tema en particular.

Cabe destacar que se privilegian para la revista los tipos de artículos de los numerales 1, 2 y 3.

La revista circula trimestralmente y recibe sólo artículos inéditos. Los trabajos recibidos se someten al concepto de pares académicos y del Consejo Editorial.

## Requisitos para la publicación de artículos

Los artículos presentados a la revista deben remitirse por correo electrónico a [revista@escuelaing.edu.co](mailto:revista@escuelaing.edu.co), adjuntando los siguientes formatos debidamente diligenciados: autor.doc, clasificación.doc y tipo.doc, cuyos archivos se pueden descargar de <http://www.escuelaing.edu.co/revista.htm>. En este mismo sitio está disponible la plantilla guía que contiene la estructura determinada por la revista para los artículos.

## Scope and policy

*Revista de la Escuela Colombiana de Ingeniería* disseminates technology articles helping to our country development. It emphasises on its high quality print and its scientific rigour. Articles submitted for publication shall be classified into one of the following categories— which allow it keeps its indexation:

1. **Scientific and technological research article.** These documents offer a detailed description about the original findings of research projects. In general, the usually used structure contains four important sections: introduction, methodology, results and conclusions.
2. **Reflection article.** These documents present the results of a research project on a specific, interpretative, or critical view by the author about a particular topic by using original sources.
3. **Review.** A document resulting from a finished research, where the published and/or unpublished findings of investigation in a particular field of science or technology are analysed, systematised and integrated to report the progress and the development tendencies. These documents include a careful bibliographic review.

*Revista de la Escuela Colombiana de Ingeniería* also accepts the following types of articles:

4. **Short article.** A brief text presenting the original, preliminary and/or partial results of a scientific or technological study, which normally need to be disseminated as quickly as possible.
5. **Case report.** A document that presents the results of a study on a specific situation in order to report the technical and methodological experiences considered in a particular case.
6. **Thematic review.** These documents are the product of a critical review of literature on a particular topic.

Our revista privilege articles as the highlight ones in numbers 1, 2 and 3.

*Revista de la Escuela Colombiana de Ingeniería* is a quarterly publication that only accepts unpublished articles. The revista submits all the papers to the verdict of two academic peers, who evaluate the article.

## Ruling for publication

The article must be sent by e-mail to [revista@escuelaing.edu.co](mailto:revista@escuelaing.edu.co) with 3 files attached: Author.doc, Classification.doc and Type.doc available in <http://www.escuelaing.edu.co/revista.htm>. There is also a template guide for the structure of the article (template guide.doc).



**Confía en 4-72,**  
el servicio de envíos  
de Colombia

Línea de atención al cliente:  
**(57 - 1) 472 2000 en Bogotá**  
**01 8000 111 210 a nivel Nacional**

.....

[www.4-72.com.co](http://www.4-72.com.co)