DOI: 10.13137/2039-8646/35610

Sophie Germain e l'Ultimo Teorema di Fermat[*]

ELISABETTA PODDA
Trieste
elisabetta.podda99@gmail.com

ALESSANDRO LOGAR
Dipartimento di Matematica, Informatica e Geoscienze
Università di Trieste
logar@units.it

ABSTRACT

The purpose of this paper is to present the figure of Sophie Germain, setting her in the historical period in which she lived, and to try to explain some of the mathematical tools she used in her attempt to solve one of the most famous theorems in the history of mathematics: Fermat's Last Theorem. Though the French mathematician gave some important results concerning Fermat's problem, historically she has not been given credit for what she proved, until recent studies have re-evaluated her works. In the first and second section we present Sophie Germain's biography and introduce Fermat's Last Theorem from the algebraic point of view. The following sections are dedicated to the presentation of the most important results by Sophie Germain and the techniques she uses to prove them. Finally, we briefly discuss the failure of her plan, the so called "Grand Plan", to prove Fermat's conjecture.

PAROLE CHIAVE

MATEMATICA / MATHEMATICS; STORIA DELLA MATEMATICA/ HISTORY OF MATHEMATICS; SOPHIE GERMAIN; ULTIMO TEOREMA DI FERMAT / FERMAT'S LAST THEOREM; TEORIA DEI NUMERI / NUMBER THEORY; PRIMI DI GERMAIN / GERMAIN'S PRIMES.

1. INTRODUZIONE

Sophie Germain è stata una matematica vissuta in Francia a cavallo tra il diciottesimo e il diciannovesimo secolo. La sua figura è rimasta poco nota fino agli anni recenti, quando alcuni storici della matematica le hanno dedicato varie ricerche e approfondimenti. È così risultato che la Germain, per l'originalità dei temi studiati e

[*] *Title: Sophie Germain and Fermat's Last Theorem.*

delle tecniche introdotte, è meritevole di occupare un posto di rilievo tra i matematici del XIX secolo.

Nella prima parte di questo articolo viene presentata la biografia di Sophie Germain, in quanto conoscere il contesto storico in cui è vissuta e i matematici dell'epoca con cui è stata in contatto, aiuta a comprendere come questi fattori abbiano influenzato la sua carriera. Si può subito affermare che molto di quanto si conosce della sua vita è arrivato a noi grazie al suo amico e collega Guglielmo Libri che, dopo la morte della Germain nel 1831, pubblicò nel 1832 un necrologio dal titolo *Notices sur M.lle Sophie Germain*[1]. Inoltre, il lavoro *Sophie Germain: Un articolo nella storia della teoria dell'elasticità* di L. Bucciarelli e N. Dworsky, fornisce una visione completa della sua vita personale e professionale, analizzando poi in dettaglio i suoi contributi alla fisica matematica.

Successivamente, si passa ad analizzare l'intenso lavoro di ricerca svolto dalla Germain, nel corso di molti anni, nel tentativo di dimostrare uno dei teoremi più famosi della storia della matematica, il cosiddetto *Ultimo Teorema di Fermat*.[2] Sebbene i suoi sforzi si siano dimostrati vani, l'originalità dei suoi risultati parziali e le tecniche introdotte sono senz'altro di grande rilievo.

Si presentano quindi i principali teoremi trovati da Sophie Germain e si cerca di esemplificare alcuni aspetti dimostrativi per mostrare come, pur avendo a disposizione pochi strumenti matematici, con raffinati ragionamenti, la Germain sia riuscita a ottenere delle conclusioni che sono ancora del tutto degne di nota.

Il contributo persegue quindi il duplice scopo di introdurre una figura importante della storia della matematica, ancora poco conosciuta, e spiegare brevemente alcuni degli strumenti da lei usati.

Per quanto riguarda la trattazione degli aspetti più prettamente matematici, si è cercato di non addentrarsi troppo in dettagli tecnici, ma di presentare l'argomento in modo che

---

[1] Cfr. LIBRI 1832.

[2] Di questo teorema si parlerà più diffusamente nella Sezione 3; si tratta di una congettura che il matematico francese Pierre de Fermat formulò nel 1637, senza darne una dimostrazione. La dimostrazione fu ottenuta dopo tre secoli e mezzo, nel 1994, dal matematico britannico Andrew Wiles.

anche chi non è esperto del settore sia comunque in grado di afferrare i punti salienti dei ragionamenti sviluppati dalla studiosa.

2. La biografia di Sophie Germain

Figura 1. Sophie Germain.
(Fonte: Sophie Germain | Torino Scienza)

Sophie Germain nacque a Parigi il primo aprile del 1776 in una famiglia benestante. Il padre era un commerciante di seta e aveva un incarico politico come deputato dell'Assemblea Nazionale. Gli anni della sua giovinezza furono segnati dalla Rivoluzione francese e dal Regime del Terrore per cui, essendo costretta a rimanere in casa, si appassionò alla lettura come attività per trascorrere il tempo e distrarsi.

All'età di tredici anni lesse e studiò per conto proprio la monografia *Storia della matematica* del matematico francese Jean-Étienne Montucla. In particolare fu colpita dal racconto dell'episodio della morte di Archimede: secondo la leggenda, il giorno della caduta di Siracusa, attorno al 200 a. C., un soldato romano si sarebbe presentato per uccidere Archimede a colpi di spada e quest'ultimo lo avrebbe pregato invano di lasciargli terminare la dimostrazione nella quale era impegnato[3].

La lettura del volume le fece scoprire quanto la matematica fosse una disciplina affascinante e, da quel momento in poi, la giovane Germain fu completamente immersa nell'approfondimento della materia, incominciando a studiare alcuni testi di

[3] Cfr. O'Connor, Robertson in Siti web.

Bézout che aveva trovato nella biblioteca del padre. Imparò anche il latino per poter comprendere le opere di Newton e di Eulero. Essendo una giovane donna, per lei all'epoca non era prevista un'educazione di tipo matematico; perciò, si ritrovò a studiare da autodidatta, senza l'aiuto di un insegnante.

Inizialmente la famiglia tentò in tutti i modi di dissuaderla, in quanto il suo interesse per la matematica era considerato inusuale e poco consono a una ragazzina della sua età: per impedirle di leggere i libri durante la notte, le toglievano perfino le candele e il fuoco dalla biblioteca. Successivamente però, vedendo la sua grande passione e dedizione, i genitori saggiamente non la ostacolarono più e la lasciarono libera di seguire la sua vocazione.

All'età di diciotto anni, la Germain voleva ardentemente ricevere un'adeguata istruzione matematica, senza dover più studiare da sola. Il suo desiderio era quello di iscriversi all'*École Polytechnique* di Parigi, inaugurata proprio in quell'anno, che però permetteva soltanto agli studenti maschi di partecipare alle lezioni.

Per ovviare a questo problema Sophie Germain si fece venire in mente uno stratagemma: assunse l'identità di uno studente del Politecnico di nome Antoine-August LeBlanc che aveva da poco abbandonato gli studi e così riuscì a procurarsi le lezioni dei vari corsi, non potendo però mai parteciparvi di persona.

Uno dei corsi che seguiva con più interesse era il corso di analisi matematica tenuto dal ben noto Joseph-Louis Lagrange, il quale di tanto in tanto chiedeva ai suoi studenti di consegnare le loro osservazioni e commenti sugli argomenti del corso e anche alcuni esercizi lasciati per casa, per poi discuterne insieme[4]. Quando gli capitò di leggere il foglio consegnato dalla Germain sotto il nome di LeBlanc, fu positivamente sorpreso dal fatto che questo studente, che non era fino ad allora sembrato particolarmente incline alla matematica, scrivesse delle osservazioni così acute e interessanti, mostrando un grande talento.

Lagrange fu quindi spinto dalla curiosità di conoscerlo e chiese di poterlo incontrare: appena scoprì la vera identità di LeBlanc, mostrò grande stupore e le fece molti

[4] Cfr. PETROSINO in Siti web.

commenti lusinghieri per le sue doti. Per Lagrange l'aspetto più sorprendente fu il venire a conoscenza del fatto che la Germain si fosse auto-istruita nel corso degli anni, fino a raggiungere un livello di conoscenze matematiche pari a quello degli insegnamenti dei primi anni di università.

Col passare degli anni, la Germain divenne sempre più interessata alla *teoria dei numeri*, studiò la monografia *Teoria dei numeri* di Adrien-Marie Legendre del 1798 nonché le *Disquisitiones Arithmeticae*[5] che Carl Friedrich Gauss aveva scritto all'età di ventun anni e che erano state pubblicate nel 1801.

Lagrange e Legendre divennero i suoi due mentori principali, la guidarono e incoraggiarono durante gli anni di studio all'Università, percorso non facile e non privo di ostacoli per una giovane ragazza dell'epoca. La comparsa di una giovane donna nei circoli intellettuali parigini destò molta curiosità: da una parte alcuni, come Lagrange e Legendre, erano ammirati delle sue capacità e della sua bravura, altri invece, come Poisson, la sminuivano e la facevano sentire intellettualmente inferiore.

La Germain, per un paio di anni, si dedicò allo studio dettagliato del volume *Disquisitiones Arithmeticae*, cercando di risolvere gli esercizi che erano proposti e dando dimostrazioni personali ai teoremi contenuti al suo interno.

Nel 1804 prese l'audace decisione di scrivere una lettera a Gauss, firmandosi con lo pseudonimo maschile di LeBlanc, ancora una volta per timore di essere rifiutata e non considerata. Nella lettera la Germain condivise con Gauss alcuni risultati di *teoria dei numeri* che aveva trovato e alcune idee e considerazioni sull'*Ultimo Teorema di Fermat*. Incominciò così una lunga corrispondenza tra la Germain e Gauss, basata sulla stima e sul supporto reciproco: si contano in tutto 14 lettere, 10 lettere inviate dalla Germain a Gauss tra il 1804 e il 1808, a cui seguiranno altre due datate 1819 e 1829. Gauss rispose con interesse ed entusiasmo alla prima lettera, tant'è che scrivendo al suo amico H. W. Olbers (un medico tedesco) disse:

---

[5] Cfr. GAUSS 1801.

> *Ho ricevuto con piacere una lettera da un giovane geometra di Parigi, LeBlanc, che ha studiato l'algebra superiore con grande entusiasmo e mi ha fornito prova di esser penetrato nei meandri più profondi delle mie Disquisitiones Arithmeticae.*[6]

Questa parte significativa della lettera che Gauss mandò a Olbers è riportata anche nel volume *Wilhelm Olbers, sein Leben und seine Werke* di Schilling[7].

Dopo tre anni di corrispondenza sotto falso nome, Gauss scoprì la vera identità di LeBlanc a seguito di alcuni eventi della guerra franco-prussiana allora in corso. Nell'ottobre del 1806 la vittoria dell'esercito di Napoleone a Jena aprì la strada all'invasione di gran parte dei territori prussiani. Appena la Germain venne a sapere che le truppe di Napoleone erano in procinto di invadere Brunswick, la città natale di Gauss, ricordandosi della vicenda dalla morte di Archimede, fu presa dalla preoccupazione per l'incolumità del suo mentore.

A tal proposito allora Sophie Germain chiamò il generale J. M. Pernety[8], che era un amico di famiglia e comandante dell'artiglieria francese, e gli chiese di andare a trovare Gauss e garantirgli la dovuta sicurezza. Per svolgere la missione che la Germain gli aveva affidato, il generale Pernety incaricò uno dei suoi comandanti di battaglione. L'incontro tra Gauss e il comandante è raccontato nella lettera che quest'ultimo scrisse a Pernety una volta conclusa la sua missione. In una parte della lettera, riportata nella biografia di Sophie Germain di Bucciarelli e Dworsky, è scritto:

> *[...] Monsieur Gauss disse di non aver l'onore di conoscere né voi né Mademoiselle Germain... Dopo aver parlato dei diversi punti contenuti nel vostro ordine, è sembrato un po' confuso e mi ha chiesto di trasmettergli i suoi ringraziamenti per la vostra considerazione a suo nome.*[9]

In questa circostanza la Germain si sentì quindi in obbligo di rivelare a Gauss la sua vera identità.

> *Non sono così completamente sconosciuto a voi come potreste credere, ma temendo il ridicolo collegamento a una scienziata, ho precedentemente preso il nome di M. LeBlanc nel comunicare con voi. [...] Spero che le informazioni che vi ho confidato oggi non mi privino dell'onore che mi avete accordato sotto un nome preso in prestito.*[10]

---

[6] Cfr. LAUBENBACHER. PEGELLEY 2010.
[7] Cfr. SCHILLING 1900.
[8] J. M. Pernety fu un generale di artiglieria che prese parte a molte campagne militari importanti come le guerre rivoluzionarie francesi e le successive guerre napoleoniche, oltre a prestare servizio per alcuni periodi come membro dell'Armata d'Italia e dell'esercito inglese. Si distinse per il suo coraggio e talento, tant'è che il suo nome compare tra quelli scritti in uno dei pilastri sotto l'Arco di Trionfo a Parigi.
[9] Cfr. BUCCIARELLI, DWORSKY 1998.
[10] Vedi GIORDANO in Siti Web.

Scrivendo queste parole, Germain temeva l'ira di Gauss per averlo ingannato, ma sorprendentemente, a seguito di questa rivelazione, Gauss rimase positivamente meravigliato e al contempo la elogiò per la sua determinazione e il suo talento, e la incoraggiò a continuare l'attività di ricerca matematica. In proposito, nel 1807, sempre in una lettera a Olbers, Gauss scrisse:

> *Di recente il mio testo Disquisitiones Arithmeticae mi ha recato molte sorprese. Come già sapete, la corrispondenza con LeBlanc da Parigi ha evidenziato quanto LeBlanc padroneggi completamente tutti gli argomenti trattati nell'opera. LeBlanc si è da poco rivelato essere un nome fittizio di una giovane donna, Sophie Germain: sicuramente questo fatto vi meraviglierà tanto quanto ha meravigliato me.*[11]

Inoltre, H. M. Edwards nel suo libro *Fermat's Last Theorem: A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory*, riporta quello che è un vero e proprio elogio di Gauss a Sophie Germain, scritto subito dopo aver scoperto la sua vera identità. In questa lettera Gauss si dice ammirato dalla facilità e semplicità con cui la Germain comprendeva e analizzava i vari aspetti dell'aritmetica, dalla saggezza con la quale generalizzava e perfezionava i risultati ottenuti e dal coraggio e dalla perseveranza dimostrati nell'occuparsi di matematica. Gauss esprime la sua ammirazione con queste parole:

> *Ma come posso descrivere il mio stupore e la mia meraviglia nel vedere il mio apprezzato corrispondente M. LeBlanc trasformarsi in questo illustre personaggio Sophie Germain che dà un brillante esempio di quello che difficilmente riuscirei a credere? Avere una passione per le scienze astratte in generale e soprattutto per i numeri è estremamente raro: non è una materia che colpisce tutti; l'incantevole fascino di questa scienza sublime rivela se stessa solo a coloro che hanno il coraggio di penetrarla. Una donna, a causa del suo sesso e dei nostri pregiudizi, incontra molti più ostacoli di un uomo nel familiarizzarsi con problemi complessi. Tuttavia, quando supera queste barriere e penetra nelle profondità più recondite, rivela di possedere il coraggio più nobile, un talento straordinario e un genio superiore. [...] Gli appunti di cui le vostre lettere sono piene mi hanno dato moltissime gioie. Li ho studiati con attenzione e ammiro la facilità con cui penetrate tutti i rami dell'aritmetica e la saggezza con cui generalizzate e perfezionate i risultati.*[12]

Questo atteggiamento lodevole, era alquanto insolito per l'epoca, vista la poca considerazione che gli uomini avevano nei confronti delle capacità femminili in matematica e nella scienza in generale. Va detto però che, nonostante queste buone conoscenze e le referenze di cui disponeva, la Germain lavorò in quasi totale isolamento, non potendo partecipare agli incontri all'Accademia e non avendo accesso

---

[11] Cfr. LAUBENBACHER, PEGELLEY 2010.
[12] Cfr. EDWARDS 1977.

al materiale scientifico che veniva pubblicato in quegli anni. Questo fece sì che la sua figura di matematica rimanesse per molto tempo nascosta e poco considerata.

Nella stessa lettera, Gauss ringrazia la Germain per il pensiero e l'aiuto datogli durante l'invasione di Brunswick, rassicurandola del fatto che fino a quel momento la guerra non lo aveva coinvolto direttamente.

Dal 1808 fino al 1819 il carteggio tra Germain e Gauss si interruppe a seguito della nomina di Gauss a direttore dell'Osservatorio astronomico di Gottinga. Questo nuovo incarico lo costrinse a mettere da parte tutti i suoi impegni legati alla matematica ed egli non riuscì più a trovare il tempo per rispondere alle lettere della Germain. Nel corso del 1808 Sophie Germain gli scrisse altre tre lettere, ma, non ricevendo risposte, smise di scrivergli nel 1809.

A questo punto, priva del supporto di Gauss, Germain mise temporaneamente da parte il suo interesse per la *teoria dei numeri* e decise di dedicarsi ad altri campi della matematica. Proprio nel 1808 il fisico tedesco E. F. Chladni aveva organizzato a Parigi delle esibizioni di esperimenti riguardo al complesso fenomeno delle *vibrazioni* di sottili lastre. L'Accademia delle Scienze di Parigi ne fu incuriosita e mise in palio un premio per chi fosse riuscito a dare delle spiegazioni di tipo matematico al fenomeno.

La Germain, nel corso degli anni successivi, si mise a studiare questo problema con molta dedizione ed elaborò tutta una sua *teoria sulla vibrazione* di membrane elastiche, grazie anche all'aiuto e al supporto di Legendre. Nel 1811 consegnò all'Accademia delle Scienze di Parigi, come unica partecipante, il lavoro da lei svolto. Sfortunatamente il lavoro consegnato, basato su una generalizzazione della *teoria di Eulero* sulla vibrazione di travi, era contrassegnato da un errore. L'Accademia decise quindi di prolungare la competizione per altri due anni.

Approfittando di questa opportunità, nel 1813 Sophie Germain presentò una versione modificata e migliorata del suo primo lavoro. Anche questa volta la strada seguita dalla Germain per ottenere l'equazione fondamentale fu giudicata parzialmente scorretta. La competizione fu ulteriormente prolungata per due anni, alla fine dei

quali Germain consegnò, di nuovo come unica partecipante, il suo terzo lavoro in cui studiava anche le *vibrazioni di superfici curve*. La commissione composta da Legendre, Poisson e Laplace, valutando il lavoro della Germain come interessante ma allo stesso tempo incompleto e lacunoso, decise di conferirle il premio con riserva nel 1816.
L'Accademia prese la decisione di non pubblicare il suo elaborato, perciò, alcuni anni dopo, la Germain lo pubblicò a sue spese. Ad oggi questo testo è considerato il suo contributo più importante alla fisica matematica, un lavoro ricco di brillanti intuizioni che getta le fondamenta della moderna *teoria dell'elasticità*. Il premio conferitole dimostra che Sophie Germain non è soltanto un personaggio importante nella storia della matematica per i contributi dati alla *teoria dei numeri*, ma che i suoi studi sono stati di ben più ampio spettro, fino ad occuparsi di fisica matematica e di scienza in generale. Bucciarelli e Dworsky[13] riferiscono che nel 1826 la Germain presentò all'Accademia un nuovo studio sull'elasticità, che essa considerava una versione più chiara rispetto all'ultimo lavoro consegnato. Cauchy, che aveva l'incarico di leggere e valutare il lavoro, dopo averlo analizzato, incoraggiò fortemente la Germain a pubblicarlo: lo studio quindi apparve nel 1828 sulla rivista *Annales de Chimie*.
Nel 1816, l'Accademia delle Scienze mise in palio un altro premio, questa volta per chi fosse riuscito a dimostrare quello che è noto come *Ultimo Teorema di Fermat*, anche se all'epoca l'affermazione di Fermat era solo una congettura tutta ancora da verificare.
La competizione fu estesa al 1818 e poi ritirata nel 1820. Sophie Germain, da parte sua, non presentò mai una soluzione all'Accademia per concorrere al premio, ma grazie all'autobiografia di Legendre[14] pubblicata nel 1823 e alla documentazione trovata dopo la sua morte, sappiamo che la Germain lavorò a lungo a questo problema. Di certo il fatto che i suoi lavori e manoscritti non fossero stati all'epoca pubblicati è uno dei motivi principali per cui tutti i suoi contributi all'*Ultimo Teorema di Fermat* sono rimasti a lungo sconosciuti e solo di recente sono stati riscoperti e rivalutati.

[13] Cfr. BUCCIARELLI, DWORSKY 1998.
[14] Cfr. LEGENDRE 1832.

Probabilmente la Germain riprese a studiare l'*Ultimo Teorema di Fermat* solo nel 1818, molto tempo dopo aver scritto di questo argomento nel 1804 nella sua prima lettera a Gauss, in cui si diceva convinta del fatto che la *teoria delle congruenze modulari e dei residui* era lo strumento giusto per affrontare il problema. Sappiamo inoltre che mise a punto un piano completo, da lei denominato "*Grand Plan*", con il fine di dimostrare l'*Ultimo Teorema di Fermat* nella sua totalità.

Legendre, nella sua autobiografia attribuisce, in maniera riduttiva, alla Germain soltanto il teorema principale per cui è maggiormente ricordata, che oggi prende il nome di *Teorema di Sophie Germain*, ma dall'analisi dei suoi lavori si viene a conoscenza di molti altri risultati a lei dovuti. Da quando la Germain riprese le ricerche nell'ambito della *teoria dei numeri*, mise a punto vari risultati riguardanti la dimostrazione dell'*Ultimo Teorema di Fermat* in alcuni casi particolari.

Dopo undici anni di pausa, nel 1819, la visita di un amico di Gauss, un certo H. C. Schumacher, diede alla Germain l'occasione di mandare a Gauss una nuova lettera, mettendolo al corrente in particolare dei suoi studi circa l'*Ultimo Teorema di Fermat*[15].

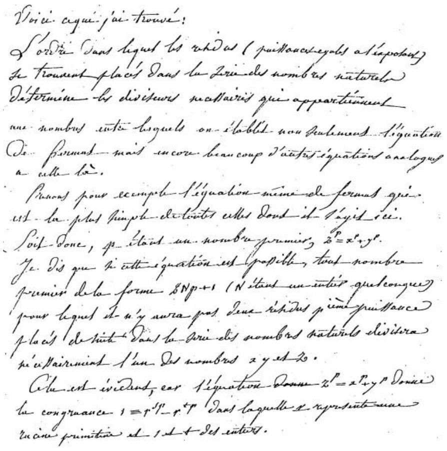
Voici ce que j'ai trouvé:
L'ordre dans lequel les résidus (puissances égales à l'exposant)
se trouvent placés dans la série des nombres naturels
détermine les diviseurs nécessaires qui appartiennent
aux nombres entre lesquels on établit non seulement l'équation
de Fermat mais encore beaucoup d'autres équations analogues
à celle là.
Prenons pour exemple l'équation même de Fermat qui
est la plus simple de toutes celles dont il s'agit ici.
Soit donc, p étant un nombre premier, $z^p = x^p + y^p$.
Je dis que si cette équation est possible, tout nombre
premier de la forme $2Np+1$ (N étant un entier quelconque)
pour lequel il n'y aura pas deux résidus $p^{ième}$ puissance
placés de suite dans la série des nombres naturels divisera
nécessairement l'un des nombres x y et z.
Cela est évident, car l'équation donne $z^p = x^p + y^p$ donne
la congruence $1 \equiv r^{sp} - r^{tp}$ dans laquelle r représente une
racine primitive et s et t des entiers.

Figura 2. Lettera del 12 maggio 1819 a Gauss.
(Fonte: <https://amslaurea.unibo.it>)

Nella lettera datata 12 maggio 1819, dove esordisce dicendo «Ecco cosa ho trovato», la Germain espone a Gauss tutte le ricerche che aveva condotto negli ultimi anni sia

[15] Cfr. DEL CENTINA 2007.

in ambito matematico sia fisico e spiega dettagliatamente il suo programma per arrivare alla dimostrazione completa dell'*Ultimo Teorema di Fermat*.

Nella lettera scrive:

> *Sebbene abbia lavorato per qualche tempo alla teoria dell'elasticità, non ho mai cessato di pensare alla teoria dei numeri. Vi darò un'idea del mio coinvolgimento nelle ricerche in questo campo della matematica ammettendo che, anche senza speranze di successo, la preferisco ad altri lavori che potrebbero comunque interessarmi e darmi dei risultati certi. Molto prima che la nostra Accademia proponesse un premio per la dimostrazione dell'impossibilità dell'equazione di Fermat, questo tipo di sfida, che fu portata alle moderne teorie da un geometra che non possedeva le risorse di cui disponiamo noi oggi, mi ha spesso tormentato. Ho intravisto vagamente una connessione tra la teoria dei residui e la famosa equazione. Penso di aver già parlato con voi di questa mia idea molto tempo fa, perché mi ha colpito appena ho letto il vostro libro.*[16]

Nel 1829 Gauss ricevette quella che sarebbe stata l'ultima lettera da parte della Germain, la quale a causa della malattia che la colpì riuscì a lavorare sempre meno. Le parole con cui la Germain chiuse questa lettera esprimono tutto il suo rimpianto per non aver collaborato a sufficienza con Gauss: per sviluppare tutto il suo potenziale nella teoria dei numeri avrebbe avuto sicuramente bisogno nel corso degli anni di molto più supporto e interazione da parte sua. Del Centina nel suo articolo *The correspondence between Sophie Germain and Carl Friedrich Gauss* riporta il seguente frammento della lettera:

> *Rimpiango di essere stata privata del vantaggio che avrei trovato nel partecipare a delle conversazioni con voi, come fa Mr Bader. Quello che mi racconta non è sorprendente per me, ma è oggetto di invidia. Oltre a quello che potrei imparare da voi, mi rammarico di non aver potuto sottoporre al vostro giudizio molte idee che non ho pubblicato e che sarebbero troppo lunghe da spiegare in una lettera.*[17]

Nel giugno del 1831, proprio quando l'Università di Gottinga aveva deciso di conferirle il titolo di dottore onorario per il lavoro svolto nel corso di molti anni, Sophie Germain morì a causa di un tumore al seno.

Per evidenziare ancora una volta il poco riconoscimento ottenuto per i suoi studi, è interessante vedere che sul suo certificato di morte figurò come "redditiera" e non come "matematica". Quello che possiamo dire complessivamente della sua vita è che, nonostante le difficoltà incontrate nel suo percorso formativo e lavorativo in quanto

[16] Cfr. Laubenbacher, Pengelley 2010.
[17] Cfr. Del Centina, Fiocca 2012.

donna, il suo contributo ha permesso di sistemare un tassello importante nella storia della dimostrazione della congettura di Fermat.

Inoltre, dall'analisi dei suoi scritti concludiamo che il suo nome dovrebbe essere incluso tra quelli dei più importanti studiosi di *teoria dei numeri* della sua epoca, come Gauss stesso affermò nel 1837, quando disse che Sophie Germain avrebbe meritato una laurea onoraria se fosse stata ancora viva, in quanto aveva realizzato qualcosa di utile nella più rigorosa e astratta delle scienze.

3. L'Ultimo Teorema di Fermat

Quello che è passato alla storia come *Ultimo Teorema di Fermat* è in realtà una congettura che Fermat aveva enunciato a seguito dei suoi studi ma di cui non fornì mai una dimostrazione scritta. L'enunciato del teorema è apparentemente molto semplice, ma dimostrarlo è stato una sfida, durata secoli, per moltissimi matematici di altissimo livello.

Pierre de Fermat è stato un magistrato francese del Diciassettesimo secolo che si occupava anche di matematica. Il campo della matematica in cui fu più attivo è indubbiamente la *teoria dei numeri*, sebbene abbia dato importanti contributi al *calcolo differenziale*, alla *geometria analitica* e al *calcolo delle probabilità*. Quando morì, nel 1665, era considerato uno dei più famosi matematici del suo tempo a livello europeo.

Nel 1637, leggendo l'*Arithmetica* del matematico greco Diofanto del terzo secolo d. C., che tratta di *equazioni diofantee*, scrisse la famosa (o addirittura famosissima) annotazione nel margine della pagina in cui era riportato il teorema di Pitagora:

> *È impossibile dividere un cubo in altri due cubi, una quarta potenza o in generale una potenza qualsiasi in due potenze dello stesso valore maggiore del secondo. Dispongo di una meravigliosa dimostrazione di questo teorema che non può essere contenuta nel margine troppo stretto della pagina.*[18]

Fermat quindi, non avendo abbastanza spazio nella pagina, non rese mai nota la dimostrazione che diceva di aver trovato. Com'è ben noto, in termini algebrici il teorema si può esprimere in questa forma:

---

[18] Cfr. Howard 1964.

> **Teorema.** *Dato n numero naturale non nullo, l'equazione $x^n + y^n = z^n$ non ammette soluzioni intere positive se $n > 2$.*

Seguendo il testo di Diofanto, l'obiettivo di Fermat era quello di trovare soluzioni razionali dell'equazione $x^n + y^n = z^n$. Infatti, se abbiamo una soluzione (x, y, z) razionale dell'equazione, da essa si ricava facilmente una soluzione intera moltiplicando x, y e z per il minimo comune multiplo d dei denominatori.

Si escludono le soluzioni irrazionali in quanto si osserva che l'equazione ne ammette infinite, infatti, scegliendo x, y positivi, basta calcolare $z = \sqrt[n]{x^n + y^n}$.

Inoltre, si cercavano soluzioni positive in quanto, nel Diciassettesimo secolo, i numeri negativi e lo zero venivano ancora visti con sospetto e non erano considerati come possibili soluzioni. Perciò le terne del tipo $(0, y, y)$, $(z, 0, z)$ e la terna nulla $(0,0,0)$, pur soddisfacendo l'equazione, erano escluse dall'insieme delle soluzioni.

Da queste osservazioni segue che, come riportato nell'enunciato del teorema, il problema si riconduce alla ricerca di soluzioni intere (e positive).

Notiamo che, quando $n = 1$ o $n = 2$, l'equazione $x^n + y^n = z^n$ ammette invece soluzioni intere positive. Se $n = 1$, l'equazione diventa $x + y = z$ e ha infinite soluzioni intere positive che sono rappresentate nello spazio dai punti a coordinate intere positive del piano $\pi: x + y - z = 0$. Se invece $n = 2$, si ottiene l'equazione $x^2 + y^2 = z^2$, che è proprio l'equazione che nasce dalla relazione tra i cateti e l'ipotenusa espressa dal *Teorema di Pitagora*. Per questo motivo le soluzioni intere dell'equazione sono dette *terne pitagoriche*.

La *terna pitagorica* più conosciuta è senz'altro (3,4,5), sicuramente nota agli Egizi attorno al 2000 a. C., ma alcune tavolette Babilonesi la riportano già in una lista assieme ad altre *terne pitagoriche* anche complesse come (4961, 6480, 8161). È facile da vedere che se (a, b, c) è una *terna pitagorica*, allora lo è anche $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ con λ numero naturale non nullo. In particolare, le *terne pitagoriche* sono infinite.

I primi risultati relativi alla prova del *Teorema di Fermat* risalgono a Fermat stesso, che fornì una dimostrazione del caso $n = 4$. Eulero, nel 1760, dimostrò (anche se con un errore risultato poi correggibile) il caso $n = 3$ (dimostrazione poi pubblicata nel 1770 nel suo testo *Algebra)* e Legendre e Dirichlet, entrambi nel 1825, provarono il caso $n = 5$. Dal punto di vista storico, ci sono opinioni contrastanti circa la validità della dimostrazione di Eulero: sebbene ad oggi la maggior parte degli studiosi sostenga che egli ha effettivamente provato il teorema nel caso $n = 3$, è necessario mettere in evidenza l'incompletezza della dimostrazione a causa di un errore che apparentemente non era stato notato.

Per dimostrare il caso $n = 4$, Fermat introdusse una tecnica che si è dimostrata efficace nel provare molti altri problemi in teoria dei numeri: il *metodo della discesa infinita*. La tecnica consiste nell'assumere (per assurdo) di avere una soluzione, data da una terna di numeri positivi, e da essa costruire una nuova terna ancora soluzione dell'equazione, ma composta da numeri positivi più piccoli. Ripetendo il procedimento, si costruirebbe una nuova terna di numeri positivi ancora più piccoli dei precedenti e così via, ma questo non è possibile, perché non si possono avere successioni di numeri interi positivi che decrescono indefinitamente. La conclusione è quindi che non può esistere una terna soluzione dell'equazione per $n = 4$.

Si noti che anche la dimostrazione del teorema nel caso $n = 3$ fornita da Eulero e in parte anche le dimostrazioni di Dirichlet e Legendre, nel caso $n = 5$, utilizzano il metodo della discesa infinita.

È importante osservare che, se per un certo n si è dimostrato che $x^n + y^n = z^n$ non ha soluzioni, allora, per ogni m positivo, anche l'equazione $x^{mn} + y^{mn} = z^{mn}$ non può avere soluzioni (come segue facilmente dall'osservazione che l'ultima equazione può essere scritta $(x^m)^n + (y^m)^n = (z^m)^n$ e quindi (x^m, y^m, z^m) sarebbe soluzione della prima equazione).

Questa osservazione, e il fatto che $x^4 + y^4 = z^4$ non ha soluzioni, permette di dire che per dimostrare l'*Ultimo Teorema di Fermat* è sufficiente dimostrarlo per le equazioni del tipo $x^p + y^p = z^p$, con p primo maggiore di due.

D'ora in avanti ci concentreremo quindi esclusivamente sul problema della risoluzione dell'equazione $x^p + y^p = z^p$ con p primo dispari, che costituisce il punto di partenza del lavoro della Germain.

Quando, agli inizi dell'Ottocento, Sophie Germain incominciò ad avvicinarsi al problema di Fermat, erano note solo le dimostrazioni nei due casi $n = 3$ e $n = 4$. C'era quindi ancora da fare moltissimo lavoro (e si dovrà aspettare quasi due secoli per giungere alla dimostrazione definitiva).

4. La matematica di Sophie Germain

Nel corso del tempo, moltissimi matematici di rilievo hanno lavorato alla dimostrazione dell'*Ultimo Teorema di Fermat*, ma Sophie Germain fu probabilmente la prima a immaginare e a mettere a punto un piano completo, il *Grand Plan* come lei lo denominava, con l'intento di ottenere, in un'unica dimostrazione, la correttezza della congettura per tutti i numeri primi. Il suo tratto distintivo fu quindi, come vedremo, quello di voler dimostrare il teorema nel caso generale piuttosto che affrontare di volta in volta i casi particolari, come era stato fatto fino a quel momento.

Per molti decenni si è pensato che il lavoro della Germain sull'*Ultimo Teorema di Fermat* fosse interamente descritto da una nota a piè di pagina, molto limitata, inserita da Legendre nel 1823 nel suo lavoro *Theories des nombres*[19].

Dall'analisi più approfondita delle sue lettere e manoscritti emerge invece che, oltre al teorema principale per cui è maggiormente conosciuta, la Germain aveva ideato un programma ben più completo e vasto per dimostrare il teorema. L'ambizione e l'originalità dei suoi lavori suggeriscono una maggior rivalutazione e un accrescimento della sua reputazione di matematica, avvenuto soltanto recentemente grazie ad alcuni studiosi di storia della matematica.

Ad oggi, quelli che si sanno essere i manoscritti originali della Germain sono conservati a Parigi, nella Biblioteca Nazionale e a Firenze, nella Biblioteca Moreniana. È molto probabile che sia stato Guglielmo Libri, suo collega e amico, a raccogliere gli scritti

[19] Cfr. Legendre 1832.

dopo la sua morte, visto che la Germain, in quanto donna, non era affiliata a nessuna istituzione o circolo e quindi, in particolare, i manoscritti di *teoria dei numeri* non ricevettero molta considerazione nei quasi due secoli successivi alla loro stesura. Questi manoscritti sono per la maggior parte non datati, disorganizzati e variano dall'essere dei semplici fogli di appunti vari a dei lavori perfettamente finiti e ordinati, come se fossero stati preparati per la pubblicazione.

Come già anticipato, la Germain espose dettagliatamente tutti i suoi risultati più importanti circa l'«equazione di Fermat» nella lettera che scrisse a Gauss nel maggio del 1819. Nella lettera esordisce dicendo: «*Voici ce qua j'ai trouvè*», ovvero «Ecco cosa ho trovato».

Incominciamo quindi ad analizzare, dal punto di vista matematico, i risultati ottenuti da Sophie Germain. Il primo riguarda le forti limitazioni che eventuali soluzioni dell'equazione $x^p + y^p = z^p$ devono avere, nel caso in cui p sia un numero primo con un'ulteriore proprietà: quella che anche il numero $2p + 1$ debba essere primo. I numeri primi p con questa proprietà si chiamano ora *primi di Germain*.

Esempi di *primi di Germain* sono 2, 3, 5, 11, mentre il numero primo $p = 7$ non è *primo di Germain*, in quanto $2p + 1 = 15$, che non è primo. Ad oggi, non è noto se i numeri primi di Germain siano finiti o infiniti: si congettura che siano infiniti, in quanto ne vengono scoperti sempre di nuovi. Il numero primo di Germain più grande finora conosciuto è:

$$p = 2618163402417 \cdot 2^{1290000} - 1$$

È stato trovato nel 2016 da J. S. Brown ed è formato da 388342 cifre[20].

Sophie Germain dimostrò il seguente *Teorema dei primi di Germain*:

> *Se p è un primo di Germain dispari e x, y, z sono interi tali che nessuno di questi sia divisibile per p, allora $x^p + y^p \neq z^p$.*

In altre parole:

> *Se p è un primo di Germain dispari e la terna (x, y, z) soddisfa all'equazione $x^p + y^p = z^p$, allora x o y o z è divisibile per p.*

[20] Cfr. WIKIPEDIA in Siti web.

Con questo risultato la Germain non riesce a dire se l'equazione di Fermat è o no risolvibile, però dà una forte limitazione alle sue eventuali soluzioni perché prova che per esponenti *primi di Germain*, uno dei tre numeri x, y, z deve essere multiplo di p. Va osservato che se facciamo l'ipotesi non restrittiva che la terna (x, y, z) sia *primitiva*, cioè sia tale che non ci siano fattori propri comuni a x, y e z, al più uno tra x, y e z è divisibile per p. Infatti, se p dividesse due di essi, dal fatto che $x^p + y^p = z^p$, si otterrebbe che p dividerebbe anche il terzo e la terna non sarebbe primitiva. Pertanto la conclusione del teorema è che necessariamente uno soltanto tra x, y e z è divisibile per p.

Storicamente, proprio a seguito di questo teorema, dato un numero primo dispari p, i tentativi di dimostrazione del Teorema di Fermat relativa a p sono spesso stati spezzati in due casi[21]:

- Caso I: dimostrare il teorema nel caso in cui si suppone che né x, né y, né z siano divisibili per l'esponente p,
- Caso II: dimostrare il teorema nel caso in cui si suppone che uno e uno solo dei tre numeri x, y e z è divisibile per p.

Detto questo, quindi, il *Teorema dei primi di Germain* permette di concludere che per ogni esponente p numero primo di Germain, il Caso I dell'*Ultimo Teorema di Fermat* è verificato. Possiamo già anticipare che tutti gli studi della Germain si concentrano solamente sul Caso I, quindi i suoi contributi alla dimostrazione dell'*Ultimo Teorema di Fermat*, seppur significativi, risultano essere parziali, in quanto non prendono in considerazione tutti e due i casi.

5. Le tecniche dimostrative di Sophie Germain

Senza addentrarci nei dettagli della dimostrazione del *Teorema dei primi di Germain*, è però forse possibile dare almeno un'idea di quale strada avesse seguito Sophie Germain per arrivare alla sua tesi. A questo proposito è però necessario fare un passo

[21] Cfr. Riddle in Siti web.

indietro e parlare brevemente del libro *Disquisitiones Aritmeticae* che Carl Friedrich Gauss aveva pubblicato nel 1801. Il testo, di oltre settecento pagine, scritto in latino, raccoglie vari risultati di *teoria dei numeri* ottenuti da Fermat, Eulero, Lagrange e Legendre e aggiunge molti e importanti nuovi contributi. La Germain aveva intensamente studiato questo libro[22].

In particolare, un argomento che era stato introdotto e sviluppato da Gauss riguardava lo studio delle *congruenze,* in cui, al posto delle usuali uguaglianze tra numeri interi, si studia un'altra relazione, detta appunto *congruenza.* In questa teoria, due numeri interi (quindi, positivi o negativi o nulli) a e b si definiscono *congruenti modulo* m (dove m è un numero naturale, quindi anche non nullo) se il resto della divisione di a per m coincide con il resto della divisione di b per m (ad esempio, 9 e 14 sono congruenti modulo 5, in quanto entrambi, divisi per 5, danno per resto 4). Il resto della divisione di un numero a per m si dice anche il *residuo di* a *modulo* m.

Proprio la *teoria delle congruenze* fu ritenuta dalla Germain lo strumento giusto per affrontare il problema di Fermat (come lei stessa scrisse a Gauss già nel 1804). Il vantaggio di usare le *congruenze* (modulo un numero naturale m) consiste nel fatto che, mentre i numeri interi sono infiniti, i possibili resti delle divisioni per m di un qualunque numero intero sono in numero di m e sono $0,1,2,\dots,m-1$, cioè, detto in altre parole, ogni numero intero è *congruente* o a 0, o a 1, ..., o a $m-1$ *modulo* m.

Per cercare di capire almeno alcuni passi della dimostrazione di Sophie Germain, consideriamo un caso particolare del teorema, quando p è il *primo di Germain* 5 e pertanto $2p+1$ vale 11. Si tratta quindi di vedere che, se vale $x^5+y^5=z^5$, allora uno tra i numeri x o y o z è divisibile per 5.

Supponiamo non sia così (quindi facciamo una dimostrazione per assurdo). La prima osservazione è che l'equazione può essere riscritta come segue: $x^5+y^5+(-z)^5=0$ e, rinominando $-z$ con z, l'equazione diventa $x^5+y^5+z^5=0$ che è migliore, in

[22] Ricordiamo che Gauss stesso, riferendosi alla Germain, aveva scritto al suo amico Olbers «[LeBlanc] mi ha fornito prova di esser penetrato nei meandri più profondi delle mie *Disquisitiones Arithmeticae*» (Cfr. SCHILLING 1900).

quanto simmetrica in x, y e z. Otteniamo ora: $(-x)^5 = y^5 + z^5$ da cui si ricava:

$$-x^5 = (y+z)(y^4 - y^3z + y^2z^2 - yz^3 + z^4)$$

Se q è un numero primo che divide i due fattori $(y+z)$ e $(y^4 - y^3z + y^2z^2 - yz^3 + z^4)$. Allora q divide anche il primo membro e quindi divide x. In particolare, dalle ipotesi che abbiamo fatto, q non può essere 5.

Inoltre, dal fatto che q divide $(y+z)$ e dalle proprietà delle congruenze, si ottiene che y è congruo a – z modulo q e quindi y^4 è congruo a z^4, y^3z è congruo a – $z^3z = -z^4$ e così via, quindi il fattore $y^4 - y^3z + y^2z^2 - yz^3 + z^4$ è congruo a $5z^4$. Se allora q divide anche il secondo fattore, vuol dire che $5z^4$ è congruo a zero modulo q e questo, in altre parole, significa che q divide $5z^4$. Poiché q non è 5, q divide z^4, da cui segue che q divide z. Ma questo non può succedere, perché, come abbiamo già avuto modo di osservare, i tre numeri x, y e z possono essere supposti senza fattori comuni.

La conclusione di questo ragionamento è che i due fattori sono primi tra loro, ma, visto che l'uguaglianza ci dice che il loro prodotto è – x^5, che è una quinta potenza, entrambi i fattori devono essere quinte potenze di numeri interi.

Pertanto:

$y + z = a^5$ e $y^4 - y^3z + y^2z^2 - yz^3 + z^4 = u^5$ e allora $x = -au$

Per simmetria, si ottiene che:

$z + y = b^5$ e $z^4 - z^3y + z^2y^2 - zy^3 + y^4 = v^5$ e allora $y = -bv$,

$x + y = c^5$ e $x^4 - x^3y + x^2y - xy^3 + y^4 = w^5$ e allora $z = -cw$.

Usiamo ora le *congruenze modulo* 11. Si può vedere che, se α è un qualunque intero, la quinta potenza di α può essere *congruente* solo a 0, oppure a 1 oppure a -1 *modulo* 11. In particolare, se convertiamo l'equazione $x^5 + y^5 + z^5 = 0$ *modulo* 11, otteniamo che x^5 *modulo* 11 (che può essere solo – 1, o 0, o 1), sommato a y^5 *modulo* 11 (che può essere solo – 1, o 0, o 1), sommato a z^5 *modulo* 11 (che deve ancora essere – 1, o 0, o 1), deve essere *congruente* a 0. Affinché ciò avvenga, una delle tre congruenze deve essere 0. Ad esempio, possiamo supporre che x sia *congruo a* 0 *modulo* 11. Ma dire che x è congruo a zero significa dire che x è divisibile per 11.

Poiché, come abbiamo detto, $x + y$, $x + z$ e $y + z$ sono quinte potenze, si deduce che $2x = (x + y) + (x + z) - (y + z) = a^5 + b^5 + (-c)^5$ è la somma di tre quinte potenze, ma $2x$ è anche divisibile per 11. Procedendo come prima, cioè usando sempre le congruenze modulo 11, da ciò si ottiene che uno dei valori a, b, c è, a sua volta, divisibile per 11.

Se per esempio è b a essere divisibile per 11, dal fatto che $y = -bv$ è multiplo di b, si ha che anche y è multiplo di 11 e questo è da escludere, perché x e y non devono avere fattori comuni. Con simili considerazioni si vede che nemmeno c o a possono essere multipli di 11 e quindi si ottiene una contraddizione che nasce dall'aver assunto che né x, né y, né z siano multipli di 5. Questo dimostra il *Teorema di Germain* nel caso particolare considerato. La dimostrazione del *Teorema dei primi di Germain* nel caso generale non si discosta di molto dalla traccia qui descritta, anche se, naturalmente, i vari passaggi richiedono maggiore attenzione[23].

6. Il Teorema di Germain

Come si è detto, non tutti i primi p sono *primi di Germain* (cioè, ricordiamo, sono tali che anche $2p + 1$ è un numero primo). Questo dà ovviamente delle limitazioni alla portata del *Teorema dei primi di Germain*.

La Germain però studiò nei dettagli il ragionamento che faceva scattare la dimostrazione e vide che il punto essenziale non era tanto il fatto che $2p + 1$ fosse un numero primo, quanto piuttosto il fatto che ci fosse un numero primo θ con una certa proprietà aggiuntiva che Germain identificò nella seguente:

> *l'insieme (necessariamente finito) di tutti i residui non nulli modulo θ delle potenze p-esime dei numeri naturali non deve contenere due numeri consecutivi.*

Questa condizione prende il nome di *condizione di non consequenzialità*. Ad esempio, come abbiamo visto, se $p = 5$ e $\theta = 11$, l'insieme di tutti i *residui* non nulli delle

[23] Cfr. Edwards, 1977.

potenze quinte *modulo* 11 sono 1 e -1, che non sono due numeri consecutivi. Se invece prendiamo $p = 7$ e $\theta = 13$, l'insieme dei *residui* delle potenze settime *modulo* 13 contiene 7 (che è il resto della divisione di 7^1 per 13) e contiene 8 (che è il resto della divisione di 7^9 per 13), quindi in questo caso ci sono due residui non nulli consecutivi.

Sophie Germain provò che se p è un numero primo e θ è un altro numero primo che soddisfa alla condizione di non consequenzialità, allora, se (x, y, z) è una soluzione dell'«equazione di Fermat», necessariamente o x, o y, o z deve essere divisibile per θ. Nella già citata lettera a Gauss del 12 maggio 1819, la Germain allora espone il suo *Grand Plan* per la dimostrazione del teorema. Il suo ragionamento è il seguente: se, dato un numero primo p siamo in grado di trovare infiniti numeri θ che soddisfino la condizione di non consequenzialità, allora almeno uno tra x, y, z dovrebbe essere divisibile per infiniti numeri, condizione ovviamente impossibile, e quindi l'«equazione di Fermat» non può avere soluzioni. Il problema quindi si sposta in quello di trovare, dato p, infiniti numeri θ che soddisfino alla condizione detta.

Purtroppo però il *Grand Plan* era destinato al fallimento. Nel 1819 Sophie Germain ricevette da Legendre, matematico con cui era in contatto, una lettera nella quale si diceva che nel caso $p = 3$ esistono solo un numero finito di primi ausiliari θ che soddisfano alla condizione di non consequenzialità.

La Germain rispose a Legendre con una lettera di tre pagine (purtroppo non datata) in cui all'inizio lo ringraziava per averle mandato questo importante risultato e di seguito ne riportava una possibile dimostrazione da lei trovata. Il ragionamento seguito dalla Germain, esposto con appunti molto concisi e stringati, fa risaltare la sofisticatezza dei suoi ragionamenti e l'alto livello delle sue conoscenze matematiche. È davvero sorprendente, inoltre, che la Germain ringraziasse Legendre per la lettera «del giorno precedente», da cui sembra di capire che tutta la lunga dimostrazione sia stata elaborata in un solo giorno. Forse però lo scritto riassumeva idee che Sophie Germain aveva già elaborato in precedenza[24].

La Germain, quindi, dovette rivedere il suo programma per dimostrare l'*Ultimo Teorema di Fermat* e placare il suo iniziale entusiasmo nel voler portare a compimento il suo *Grand Plan*. Per di più, come riportato da Laubenbacher[25], ad oggi non si sa se per ogni primo p esista almeno un primo ausiliario θ che soddisfi la condizione di non consequenzialità.

Una volta abbondonato il progetto del *Grand Plan*, la Germain si concentrò solamente sul *Caso I* dell'*Ultimo Teorema di Fermat* e arrivò a enunciare il suo teorema più importante e famoso che oggi porta il suo nome: il *Teorema di Germain*, che estende il *Teorema dei primi di Germain*, visto precedentemente. L'enunciato del *Teorema di Germain* è il seguente:

> *Sia p un primo dispari. Se esiste un primo ausiliario θ tale che è verificata la condizione di non consequenzialità e se inoltre p non è una potenza p-esima modulo θ, allora il Caso I dell'Ultimo Teorema di Fermat è vero per l'esponente p.*

Questo teorema garantisce che, se per un certo p (numero primo dispari) si trova un numero primo ausiliario θ che soddisfi le due suddette condizioni, allora ogni eventuale soluzione (x, y, z) dell'«equazione di Fermat» sarà tale che o x , o y , o z è divisibile per p. Ma la Germain dimostrò anche un risultato più forte, perché mostrò che nelle stesse ipotesi, uno tra x , y , z non è solo divisibile per p, ma anche per p^2.

La ricerca di primi che soddisfacessero la condizione di non consequenzialità impegnò molto la Germain, che svolse lunghi e laboriosi calcoli (ovviamente a mano) per compilare una tabella, in cui per ogni primo p minore di cento riportava il più piccolo primo ausiliario θ che soddisfacesse le ipotesi del suo teorema. Pertanto possiamo concludere che la Germain dimostrò il *Caso I* dell'*Ultimo Teorema di Fermat* per ogni primo dispari minore di cento. La dimostrazione del teorema ricalca ancora una volta le tecniche usate in precedenza e unisce manipolazioni algebriche con proprietà delle *congruenze*.

[24] La dimostrazione completa contenuta nella lettera inviata a Legendre può essere trovata nel contributo di Laubenbacher (cfr. LAUBENBACHER, PENGELLEY 2010).

[25] Cfr. LAUBENBACHER, PENGELLEY 2010.

Infine, facciamo vedere che l'uso di un computer permette di trovare facilmente, dato un numero primo p, numeri primi θ che soddisfano alle ipotesi del *Teorema di Germain* e quindi che dividono o x, o y, o z. Se, ad esempio, prendiamo il numero primo $p = 43$, una ricerca fatta con un programma di calcolo simbolico mostra che numeri primi θ che soddisfano alla condizione di non consequenzialità e tali che p non sia una potenza p-esima *modulo* θ sono (per lo meno) i seguenti:

173, 431, 947, 1721, 1979, 2237, 2753, 4817, 5333, 8429, 9203, 9461, 12041, 14621, 15137.

In base a quanto dimostrato dalla Germain, segue che, se (x, y, z) è una soluzione dell'equazione $x^{43} + y^{43} = z^{43}$, ognuno dei numeri primi della succitata lista divide o x , o y , o z. Pertanto il prodotto di tali primi, che vale:

$$N = 74411901941880932072973130265217873148237854167624021,$$

deve dividere il prodotto xyz di ogni eventuale soluzione dell'equazione.
Questo ci dice che, se ci fossero soluzioni, dovrebbero essere formate da numeri enormi. In particolare, almeno uno dei tre valori x, y, z dovrebbe essere maggiore di $\sqrt[3]{N}$, cioè almeno uno dei valori x, y, z dovrebbe superare il numero 420611169817882148.
Insomma, si può osservare che dopo più di duecento anni, grazie all'utilizzo di un computer, i teoremi di Sophie Germain sono ancora in grado di dare sorprendenti informazioni sull'«equazione di Fermat».

7. Conclusioni

Dopo aver esaminato il contributo di Sophie Germain all'*Ultimo Teorema di Fermat*, possiamo dire che solamente studi recenti hanno permesso di rivalutare i suoi lavori e di comprenderne l'importanza e l'originalità, valorizzandone l'innovazione e il progresso che portò nella lunga strada verso la dimostrazione definitiva. Il suo lavoro risulta essere molto significativo e interessante, in quanto, distaccandosi dalle tecniche precedentemente utilizzate, introdusse un nuovo approccio al problema basato sull'aritmetica modulare. Purtroppo nel corso del tempo non le era stato attribuito il giusto merito per i contributi che aveva dato sia alla *teoria dei numeri* sia alla *fisica matematica*. Ciò era dovuto presumibilmente, in gran parte, alla limitata istruzione formale ricevuta in gioventù e al successivo isolamento in cui aveva dovuto lavorare, non potendo, in quanto donna, stare a contatto con gli altri matematici che frequentavano l'Accademia delle Scienze e i circoli parigini.

BIBLIOGRAFIA

BUCCIARELLI L., DWORSKY N.
1998, *Sophie Germain: an essay in the History of the Theory of Elasticity*, Boston, D. Reidel.

DEL CENTINA A.
2008, «Unpublished manuscripts of Sophie Germain and a revaluation of her work on Fermat's last theorem», *Arch. Hist. Exact Sci.,* 62, pp. 349-392.

DEL CENTINA A., FIOCCA A.
2012, «The correspondence between Sophie Germain and Carl Friedrich Gauss», *Arch. Hist. Exact Sci.,* n. 66, pp. 585-700.

EDWARDS H. M.
1977, *Fermat's Last Theorem: A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory*, New York, Springer Verlag.

GAUSS C. F.
1801, *Disquisitiones Arithmeticae,* Edizione 1966, New Haven (CT), Yale University Press.

HOWARD E.
1964, *An introduction to the history of mathematics*, New York, Holt, Rinehart and Winston.

LAUBENBACHER R., PENGELLEY D.
2010, «"Voici ce que j'ai trouvé:" Sophie Germain's grand plan to prove Fermat's Last Theorem», *Historia Mathematica*, 37, Issue 4, November 2010, pp. 641-692, scaricabile dall'indirizzo web: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086009001347>.

LEGENDRE A. M.
1832, *Thèorie des nombres*, Parigi, Hachette Livre.

LIBRI G.
1832, «Notices sur M.lle Sophie Germain», *Journal des Débats* 18 mai 1832.

SCHILLING C.
1900, *Wilhelm Olbers sein Leben und seine Werke*, vol. 2, Springer Verlag, Berlino.

SITI WEB

RIDDLE L.
«Sophie Germain and Fermat's last teorem», *Biographies of Women Mathematicians*, <https://mathwomen.agnesscott.org/women/germain-FLT/SGandFLT.htm>, sito consultato il 10.2.2023.

O'Connor J. J., Robertson E. F.
Marie-Sophie Germain,
<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Germain/>, sito consultato il 10.2.2023.

Petrosino P.
Sophie Germain e Monsieur LeBlanc,
<https://inchiostrovirtuale.it/sophie-germain-e-monsieur-le-blanc/>, sito consultato il 20.2.2023.

Giordano V.
La matematica sotto falso nome,
<https://sciencecue.it/sophie-germain-matematica-sotto-falso-nome/41194/>, sito consultato il 26.10.2023.

Wikipedia
Numero primo di Sophie Germain,
<https://it.wikipedia.org/wiki/Numero_primo_di_Sophie_Germain>, sito consultato il 25.10.2023.