

**ADDITIVELY WEIGHTED HARARY INDEX PADA GRAF
PEMBAGI NOL DARI RING BILANGAN BULAT MODULO
 p^3**

SKRIPSI

**OLEH
SULARASWATI
NIM. 18610097**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2023**

**ADDITIVELY WEIGHTED HARARY INDEX PADA GRAF
PEMBAGI NOL DARI RING BILANGAN BULAT MODULO
 p^3**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat.)**

**Oleh:
Sularaswati
NIM. 18610097**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2023**

**ADDITIVELY WEIGHTED HARARY INDEX PADA GRAF
PEMBAGI NOL DARI RING BILANGAN BULAT MODULO
 p^3**


SKRIPSI

**Oleh
Sularaswati
NIM.18610097**

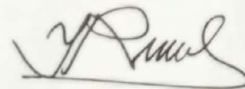
Telah Disetujui Untuk Diuji
Malang, 22 November 2023

Dosen Pembimbing I

Dosen Pembimbing II





Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.
NIP. 198702182023211018



Erna Herawati, M.Pd.
NIP.197607232023212006

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP.197411292000122005

**ADDITIVELY WEIGHTED HARARY INDEX PADA GRAF
PEMBAGI NOL DARI RING BILANGAN BULAT MODULO
 p^3**

SKRIPSI

**Oleh
Sularaswati
NIM.18610097**

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal, 27 Desember 2023

Ketua Penguji Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D

Anggota Penguji 1 Muhammad Khudzaifah, M.Si

Anggota Penguji 3 Mohammad Nafie Jauhari, M.Si

Anggota Penguji 3 Erna Herawati, M.Pd.

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika
Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP.197411292000122005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya bertanda tangan di bawah ini

Nama : Sularaswati

NIM : 18610097

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : *Additively Weighted Harary Index* Pada Graf Pembagi Nol dari Ring Bilangan Bulat Modulo p^3

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini merupakan hasil karya sendiri, bukan pengambilan tulisan atau pemikiran orang lain yang saya akui sebagai pemikiran saya, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan di halaman terakhir. Apabila dikemudian hari terbukti skripsi ini adalah hasil jiplakan atau tiruan, maka saya bersedia menerima sanksi yang berlaku atas perbuatan tersebut.

Malang, 30 Desember 2023



Sularaswati

NIM. 18610022

MOTTO

“SEMUANYA AKAN BERLALU”

“HIDUP INDAH DENGAN Mencari BERKAH”

PERSEMBAHAN

Dengan nama Allah, skripsi ini penulis persembahkan untuk Aba (Ibrahim Hidayat), Mama' (Rakiba Aminoto) dan Ade pertama Srikandi Wulandari, Ade kedua Muhammad Izwan Saputra, Ade ketiga Muhammad Azwan Saputra serta keluarga besar Lawe Hobe. Yang selalu senantiasa mendukung dan mendoakan penulis untuk menyelesaikan pendidikan S1 nya.

KATA PENGANTAR

Bismillaahirrohmaanirrohiim. Assalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatu.

Segala puji bagi Allah, penulis haturkan ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan nikmat keimanan dan keislaman, sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini sebagai persyaratan memperoleh gelar Sarjana Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam menyelesaikan tugas akhir ini, penulis mendapatkan banyak dukungan dan bantuan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapakan terimakasih dan penghargaan yang tak terhingga penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainudiddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Dr. Hj. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc., selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Muhammad Nafie Jauhari, M.Pd., selaku dosen pembimbing I.
5. Erna Herawati, M.Pd., selaku dosen pembimbing II.
6. Seluruh dosen terutama dosen Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
7. Aba, Mama', Adikku: Srikandi Wulandari, Muhammad Izwan Saputra, Muhammad Azwan Saputra.
8. Seluruh keluarga besar Dato' Lawe Hobe dan keluarga besar Leu Auq Leuwohung.
9. Seluruh guru MIS Al-Hidayah Leuwohung, MTs N 1 Lembata, MAN 1 Lembata, dan Pondok Pesantren Tafidz Qur'an Oemah Qur'an Abu Hanifah Malang.
10. Sahabatku Mba Titi, Mba Maziah, Puspita dan seluruh teman-teman Pondok Pesantren Tafidz Qur'an Oemah Qur'an Abu Hanifah Malang.
11. Seluruh mahasiswa matematika angkatan 2018.
12. Diriku sendiri, karena diri sendiri tak pernah pergi walau apapun yang terjadi.

Semoga Allah SWT memberi cahaya di hati kita semua untuk senantiasa menjadi lebih baik dari sebelumnya. Dan semoga penulisan ini bermanfaat kepada pembaca dan penulis sendiri.

Wassalamualaimualaikum Warahmatulahi Wabarakatu.

Malang, 27 Desember 2023

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGAJUAN	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTTO	vi
PERSEMBAHAN	vii
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR.....	xiii
ABSTRAK	xiv
ABSTRACT	xv
مستخلص البحث	xvi
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian	3
1.4 Manfaat Penelitian	3
1.5 Batasan Penelitian.....	4
BAB II KAJIAN TEORI	5
2.1 Ring.....	5
2.1.1 Definisi Ring	5
2.1.2 Ring Komutatif dan Pembagi Nol	6
2.1.3 Graf Pembagi Nol.....	6
2.2 Graf	6
2.2.1 Definisi Graf	6
2.2.2 Graf Terhubung.....	8
2.2.3 Derajat dan Jarak.....	8
2.3 Kongruen Modulo n	9
2.4 Indeks Harary	9
2.5 Konsep Nilai Ilmu dan Peradapan Manusia.....	10
2.6 Kajian Topik dan Teori Pendukung.....	15
BAB III METODE PENELITIAN	16
3.1 Jenis Penelitian.....	16
3.2 Pra Penelitian	16
3.3 Tahap Penelitian.....	16
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	18
4.1 <i>Additively Weighted Harary Index</i> pada Graf Pembagi Nol dari \mathbb{Z}_p^3	18
4.1.1 <i>Additively Weighted Harary Index</i> pada Graf Pembagi Nol dari \mathbb{Z}_2^3	18
4.1.2 <i>Additively Weighted Harary Index</i> pada Graf Pembagi Nol dari \mathbb{Z}_3^3	19

4.1.3	<i>Additively Weighted Harary Index</i> pada Graf Pembagi Nol dari \mathbb{Z}_5^3	20
4.1.4	<i>Additively Weighted Harary Index</i> pada Graf Pembagi Nol dari \mathbb{Z}_7^3	21
4.2	Dugaan Terkait $\Gamma(\mathbb{Z}_p^3)$	22
4.3	Menentukan Rumus Umum <i>Additively Weighted Harary Index</i> ...	25
4.4	<i>Additively Weighted Harary Index</i> pada Graf Pembagi Nol dalam Pandangan Islam	29
BAB V PENUTUP		30
5.1	Kesimpulan	30
5.2	Saran	30
DAFTAR PUSTAKA		31
RIWAYAT HIDUP		32

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1 Himpunan Pembagi Nol Tak Nol dan Order dari Z_p^3	22
Tabel 4.2 Titik Umum dan Titik Khusus dari Graf Z_p^3	23
Tabel 4.3 Derajat dari Graf Z_p^3	23
Tabel 4.4 Jarak dari Graf Z_p^3	23
Tabel 4.5 <i>Additively Weighted Harary Index</i> dari Graf Z_p^3	24

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Graf G	7
Gambar 2.2 Graf F dan Graf H	8
Gambar 2.3 Graf H_3	8
Gambar 4.1 Graf Pembagi Nol $\Gamma(Z_8)$	18
Gambar 4.2 Graf Pembagi Nol $\Gamma(Z_{27})$	19
Gambar 4.3 Graf Pembagi Nol $\Gamma(Z_{125})$	20
Gambar 4.4 Graf Pembagi Nol $\Gamma(Z_{343})$	21

ABSTRAK

Sularaswati, 2023. *Additively Weighted Harary Index Pada Graf Pembagi Nol dari Ring Bilangan Bulat Modulo p^3* . Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Muhammad Nafie Jauhari, M.Si. (II) Erna Herawati, M.Pd.

Kata Kunci: *Additively Weighted Harary Index*, Graf pembagi nol, ring bilangan bulat modulo p^3 .

Skripsi ini meneliti Indeks *Additively Weighted Harary* pada Graf Pembagi Nol dari Ring Bilangan Bulat Modulo p^3 , di mana p adalah bilangan prima. Penelitian ini menggunakan analisis matematika yang mencakup identifikasi himpunan pembagi nol tak-nol, perhitungan derajat titik dalam graf, dan perhitungan jarak antar titik. Proses ini penting dalam mengembangkan formula umum yang akurat untuk Indeks *additively weighted Harary*. Hasil signifikan dari penelitian ini adalah formula indeks *additively weighted Harary* khususnya pada graf pembagi nol dari ring bilangan bulat modulo p^3 . Hasil penelitian ini tidak hanya menjabarkan teori graf dan aritmetika modular, tetapi juga memberikan pendekatan baru dalam menganalisis sifat-sifat struktur dari graf pembagi nol dari ring bilangan bulat modulo p^3 .

ABSTRACT

Sularaswati, 2023. **Additively Weighted Harary Index on the Zero Divisor Graph of the Integer Ring Modulo p^3** . Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University Malang. Supervisor: (I) Muhammad Nafiejauhari, M.Si. (II) Erna Herawati, M.Pd.

Keywords: *Additively Weighted Harary Index*, Zero divisor graph, ring of integers modulo p^3 .

This research explores the Additively Weighted Harary Index on Zero-Divisor Graphs of the Ring of Integers Modulo p^3 , where p is a prime number. The study employs an advanced mathematical analysis including identifying the non-zero zero-divisor set, calculating vertex degrees within the graph, and measuring inter-vertex distances. This process is instrumental in developing an accurate general formula for the Additively Weighted Harary Index. The significant outcome of this research is the derivation of the formula for this index specifically for zero-divisor graphs in the integer ring modulo p^3 . This work not only augments the understanding of graph theory and modular arithmetic but also provides a novel approach to analyzing properties of these mathematical structures.

مستخلص البحث

سولرسواتي، ٢٠٢٣. *Additively Weighted Harary* في الرسم البياني للمقسم عليه الصفر حلقة الأعداد الصحيحة مودولو p^3 . البحث العلمي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية بمالانج. المشرف: (ا) محمد نافع جوهرى، الماجستير. (ب) إيرنا هيراوتي، الماجستير

الكلمات الرئيسية: *Additively Weighted Harary*، في الرسم البياني للمقسم عليه الصفر، حلقة الأعداد الصحيحة مودولو p^3 .

هذا البحث تستكشف مؤشر *additively weighted Harary* على مخطط القسام الصفرية حلقة الأعداد الصحيحة مودولو p^3 ، حيث p عدد أولي. يتضمن الدراسة تحليلاً رياضياً متقدماً تشمل تحديد مجموعة القسام الصفرية غير الصفرية، وحساب درجة الرؤوس داخل المخطط، وقياس المسافات بين الرؤوس. هذه العملية الأساسية في تطوير الصيغة العامة الدقيقة لمؤشر *additively weighted Harary*. النتيجة البارزة لهذا البحث هي استنتاج الصيغة لهذا المؤشر خصيصاً لمخطط القسام الصفرية في حلقة الأعداد الصحيحة مودولو p^3 . هذا العمل لا يعزز فقط فهم نظرية المخطط والحساب الموديولي ولكن يوفر أيضاً منهجاً جديداً لتحليل خصائص هذه الخصائص الهياكل.

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Konsep nilai keilmuan dan peradaban pada manusia Allah SWT. berfirman di dalam Al-Qur'an surah Al- Mujadilah ayat 11 yang berbunyi sebagai berikut:

يَا أَيُّهَا الَّذِينَ آمَنُوا إِذَا قِيلَ لَكُمْ تَفَسَّحُوا فِي الْمَجَالِسِ فَافْسَحُوا يَفْسَحِ اللَّهُ لَكُمْ ۗ وَإِذَا قِيلَ انشُرُوا فَانشُرُوا يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنْكُمْ ۗ وَالَّذِينَ اتَّوَلَا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ ۗ وَاللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ (١١)

Artinya: "Wahai orang-orang yang beriman! Apabila dikatakan kepadamu, "Berilah kelapangan di dalam majelis-majelis," maka lapangkanlah, niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. Dan apabila dikatakan, "Berdirilah kamu," maka berdirilah, niscaya Allah akan mengangkat (derajat) orang-orang yang beriman di antarmu dan orang-orang yang diberi ilmu beberapa derajat. Dan Allah Maha Mengetahui terhadap apa yang kamu kerjakan"(QS. Al-Mujadilah 58: Ayat 11).

Ayat ini memberikan penjelasan tentang pentingnya ilmu yang dapat memberikan kemanfaatan bagi sekitarnya sehingga tholibul 'ilm itu mencapai kedudukan yang tinggi serta dimuliakan di sisi Allah SWT. dan Rasul-Nya.

Konsep islam dan sains tidak saling bertentangan. Bahkan menimbulkan harmonisasi di antara keduanya. Terdapat ayat-ayat Al-Qur'an yang memiliki kesesuaian dengan teori Heliosentris. Teori ini merupakan suatu teori yang menjelaskan bahwa matahari merupakan pusat dari peredaran planet-planet termasuk di dalamnya bumi. Sedangkan bulan mengelilingi bumi yang kemudian Bersama-sama mengelilingi matahari. Sedangkan matahari berputar pada porosnya.

Teori graf merupakan salah satu studi di bidang matematika yang diperkenalkan pertama kali oleh seorang ahli matematika asal Swiss, Leonhard Euler 1736. Ada beberapa ilmu pengetahuan yang menerapkan teori graf yaitu pada bidang kimia, bidang biologi, bidang komputasi dan lainnya.

Kajian tentang graf memang menjadi pembahasan yang sangat menarik akhir-akhir ini karena dengan merepresentasikan suatu masalah dalam bentuk graf akan lebih mudah. Pembahasan graf dalam ranah ring menjadi salah satu hal yang menarik perhatian para peneliti di bidang aljabar. Ring merupakan operasi biner yaitu operasi penjumlahan dan operasi perkalian. Jika operasi perkalian bersifat komutatif maka ring tersebut komutatif. Misalkan n merupakan bilangan bulat positif, $n > 1$. Untuk bilangan bulat x dan y , x kongruen dengan y modulo n jika dan hanya jika $x - y$ adalah kelipatan n . Dinotasikan sebagai $x \equiv y \pmod{n}$ (Gilbert, 2014).

Teori graf adalah salah satu di antara beberapa kajian yang dilakukan dengan perhitungan yang cermat dalam bidang matematika. Chartrand & Zhang, (2019) mengatakan bahwa suatu graf G adalah himpunan tak kosong berhingga V dari objek-objek yang disebut titik (*vertices*) bersama dengan himpunan bagian E dari 2-elemen dari V yang disebut sisi (*edges*). Untuk menunjukkan bahwa suatu graf G memiliki himpunan titik V dinotasikan sebagai $V(G)$ dan himpunan sisi E dinotasikan sebagai $E(G)$, sering juga dinotasikan sebagai $G = (V, E)$. Setiap sisi $\{u, v\}$ dari E di G biasanya dinotasikan sebagai $\{u, v\}$ atau $\{v, u\}$.

Indeks Harary dari graf terhubung sederhana G didefinisikan sebagai penjumlahan dari resiprokal $1/d_G(u, v)$, di mana penjumlahannya mencakup semua pasangan titik $\{u, v\}$ di G (Zeng, 2013). Pada tahun 2012, Hua dan Zhang memperkenalkan . graf baru bernama jarak derajat resiprokal (*reciprocal degree distance of graphs*), disebut sebagai resiprokal jumlah-derajat jarak dari graf yang sekarang disebut *Additively Weighted Harary Index*.

Additively Weighted Harary Index pada suatu graf G didefinisikan sebagai

$$H_A(G) = \sum_{\substack{\{u,v\} \subseteq V \\ u \neq v}} \frac{\deg(u) + \deg(v)}{d(u,v)}$$

di mana $\deg(u)$, $\deg(v)$ adalah derajat dari $u, v \in G$ (Alizadeh, 2013).

Penelitian ini membahas *Additively Weighted Harary Index* yang himpunan titik-titiknya adalah pembagi nol dari ring bilangan bulat modulo p^3 untuk suatu bilangan p prima. Hal ini memotivasi peneliti untuk melakukan penelitian yang berjudul *Additively Weighted Harary Index* pada graf pembagi nol dari ring bilangan bulat modulo p^3 .

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dari penelitian ini yaitu bagaimana rumus umum *Additively Weighted Harary Index* pada graf pembagi nol dari ring bilangan bulat modulo p^3 untuk suatu bilangan prima p ?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini yaitu mengetahui bagaimana rumus umum *Additively Weighted Harary Index* pada graf pembagi nol dari ring bilangan bulat modulo p^3 untuk suatu bilangan prima p .

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan bermanfaat untuk peneliti dan pembaca yaitu untuk peneliti mengetahui bagaimana proses pembuktian rumus umum *Additively Weighted Harary Index* pada graf pembagi nol dari ring bilangan bulat modulo p^3 untuk suatu bilangan p prima sedangkan untuk pembaca yaitu sebagai rujukan penelitian selanjutnya khusus pada bidang teori graf.

1.5 Batasan Penelitian

Batasan masalah dari penelitian ini yaitu peneliti menggunakan p yang dibahas dalam penelitian ini adalah bilangan prima. Adapun himpunan bilangan prima yaitu \mathbb{Z}_p^3 sehingga diperoleh $\mathbb{Z}_2^3 = \mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_3^3 = \mathbb{Z}_{27}$, $\mathbb{Z}_5^3 = \mathbb{Z}_{125}$, dan $\mathbb{Z}_7^3 = \mathbb{Z}_{343}$, sedangkan graf yang digunakan adalah graf pembagi nol

BAB II KAJIAN TEORI

2.1 Ring

Dewi, (2011) mengatakan bahwa suatu ring dinotasikan dengan R merupakan suatu himpunan dengan dua operasi biner " $+$ " dan " \cdot ", yang disebut sebagai penjumlahan dan perkalian dengan syarat memenuhi beberapa aksioma ring.

2.1.1 Definisi Ring

Gilbert, (2014) mengatakan misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah himpunan yang mempunyai dua operasi biner yaitu operasi penjumlahan dan operasi perkalian yang dinotasikan sebagai $+$ dan \cdot . Sedemikian sehingga operasi biner kedua (perkalian) harus memenuhi kondisi sebagai berikut:

1. Operasi \cdot tertutup di R yaitu jika $x, y \in R$ maka $x \cdot y \in R$
2. Operasi \cdot bersifat asosiatif di R . Untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

3. Operasi \cdot bersifat distributif untuk operasi $+$ di R . Untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

dan

$$(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z).$$

2.1.2 Ring Komutatif dan Pembagi Nol

Gilbert, (2014) mengatakan bahwa suatu ring R disebut ring komutatif jika dan hanya jika operasi biner kedua (operasi \cdot) komutatif pada R . Menurut Gilbert, (2014), misalkan R adalah suatu ring. Jika $a \neq 0$ dan jika terdapat $b \neq 0$ di R sedemikian sehingga $a \cdot b = 0$ atau $b \cdot a = 0$ maka a disebut sebagai pembagi nol.

Contoh, (\mathbb{Z}_8, \cdot) adalah ring dengan \mathbb{Z}_8 adalah himpunan bilangan bulat modulo 8. $\mathbb{Z}_8 = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ sehingga pembagi nol selain nol dari \mathbb{Z}_8 adalah $Z(\mathbb{Z}_8)^* = \{2,4,6\}$.

2.1.3 Graf Pembagi Nol

Menurut Anderson dkk, (2019) misalkan R suatu ring komutatif dan $Z(R)$ himpunan pembagi nol dari R . Graf pembagi nol $\Gamma(R)$ dari R adalah suatu graf dengan himpunan titik $Z(R)^* = Z(R) - \{0\}$, dan untuk $x, y \in Z(R)^*$, titik-titik x dan y saling bertetangga jika dan hanya jika $x \cdot y = 0$.

Contoh $\mathbb{Z}_8 = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ memiliki himpunan pembagi nol yaitu $Z(\mathbb{Z}_8)^* = \{2,4,6\}$. Pembagi nol dari \mathbb{Z}_8 diperoleh dari $2 \cdot 4 = 4 \cdot 2 = 0$, $4 \cdot 4 = 0$ dan $4 \cdot 6 = 6 \cdot 4 = 0$. Graf pembagi nol $\Gamma(\mathbb{Z}_8)$ ditunjukkan oleh Gambar 4.1.

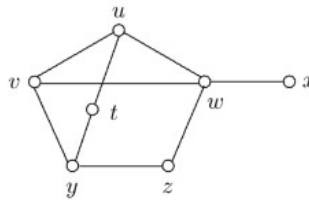
2.2 Graf

2.2.1 Definisi Graf

Chartrand & Zhang, (2019) mengatakan bahwa suatu graf G adalah himpunan tak kosong berhingga V dari objek-objek yang disebut titik (*vertices*) bersama dengan himpunan bagian E dari 2-elemen dari V yang disebut sisi (*edges*). Untuk menunjukkan bahwa suatu graf G memiliki himpunan titik V dinotasikan

sebagai $V(G)$ dan himpunan sisi E dinotasikan sebagai $E(G)$, sering juga dinotasikan sebagai $G = (V, E)$. Setiap sisi $\{u, v\}$ dari E di G biasanya dinotasikan sebagai uv atau vu . Jika uv adalah sisi di G , maka u dan v adalah titik-titik yang saling bertetangga (*adjacent vertices*). Sedangkan jika titik u dan sisi uv dikatakan terkait langsung (*incident*) demikian juga sebaliknya titik v dan sisi uv .

Contoh Gambar 2.1 suatu graf G memiliki himpunan titik $V(G) = \{t, u, v, w, x, y, z\}$ dan himpunan $E(G) = \{tu, ty, uv, uw, vw, vy, wx, wz, yz\}$. Berikut gambar graf G .



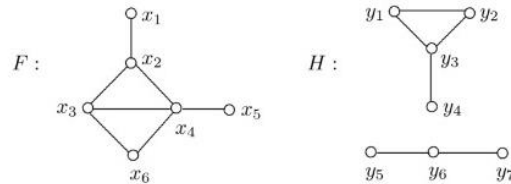
Gambar 2.1 Graf G

Jika uv adalah sebuah sisi di G , maka titik u dan titik v saling bertetangga (*adjacent vertices*). Jika sisi uv dan sisi vw saling terkait langsung (*incident*) di G , maka sisi uv dan sisi vw saling bertetangga (*adjacent edges*). Jika titik u dan sisi uv dikatakan terkait langsung (*incident*) demikian juga sebaliknya titik v dan sisi uv .

Dari Gambar 2.1 graf G , titik u dan titik w saling bertetangga sedangkan titik u dan titik x tidak saling bertetangga. Sisi uv dan sisi vw saling bertetangga di G , sedangkan sisi vy dan sisi wz tidak saling bertetangga. Titik u terkait langsung dengan sisi vw tapi tidak terkait langsung dengan sisi wz .

2.2.2 Graf Terhubung

Chartrand & Zhang, (2019) mengatakan titik u dan titik v pada suatu graf G terhubung (*connected*) jika G mempunyai lintasan (*path*) $u - v$. Suatu graf G tidak terhubung disebut (*disconnected graph*).

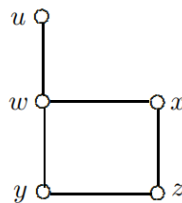


Gambar 2.2 Graf F dan Graf H

Berdasarkan Gambar 2.2 graf F adalah graf terhubung karena ada lintasan di setiap pasang titik di F , sedangkan graf H adalah graf tidak terhubung karena tidak memiliki lintasan $y_4 - y_5$.

2.2.3 Derajat dan Jarak

Chartrand & Zhang, (2019) mengatakan bahwa derajat (*degree*) suatu titik v di graf G adalah jumlah sisi-sisi di G yang terkait langsung dengan v . Derajat dari sebuah titik v dinotasikan sebagai $\deg_G v$ atau lebih sederhananya dengan $\deg(v)$.



Gambar 2.3 Graf H_3

Dari Gambar 2.3 diperoleh bahwa $\deg(u) = 1$, $\deg(w) = 3$, $\deg(x) = 2$, dan $\deg(y) = 2$, $\deg(z) = 2$.

Chartrand & Zhang, (2019) mengatakan bahwa jarak (*distance*) $d(u, v)$ dari titik u ke titik v di G merupakan panjang minimum dari lintasan $u - v$ di G .

Dari Gambar 2.3 diperoleh jarak antar titik bahwa $d(u, w) = 1$, $d(u, y) = 12$, $d(u, x) = 2$, $d(u, z) = 3$, $d(w, x) = 1$, $d(w, y) = 1$, $d(w, z) = 2$, $d(x, y) = 2$, $d(x, z) = 1$, dan $d(y, z) = 1$.

2.3 Kongruen Modulo n

Misalkan n merupakan bilangan bulat positif, $n > 1$. Untuk bilangan bulat x dan y , x kongruen dengan y modulo n jika dan hanya jika $x - y$ adalah kelipatan n , dinotasikan sebagai $x \equiv y \pmod{n}$. (Gilbert, 2014).

Teorema 2.1 Kongruensi linier $ax \equiv b \pmod{m}$ dapat diselesaikan hanya jika $d = \text{FPB}(a, m) | b$, dan pada kasus ini maka akan memiliki d penyelesaian. Jika a dan m relatif prima atau $d = 1$ maka kongruensi memiliki satu penyelesaian (Wahyu, dkk. 2014).

2.4 Indeks Harary

Indeks harary dari suatu graf G , dinotasikan sebagai $H(G)$, diperkenalkan oleh Plavšić et al. dan Ivanciuce et al. tahun 1993. Indeks harary dari graf terhubung sederhana G didefinisikan sebagai penjumlahan dari resiprokal $1/d_G(u, v)$, di mana penjumlahannya mencakup semua pasangan titik $\{u, v\}$ di G (Zeng, 2013).

Pada tahun 2012, Hua dan Zhang memperkenalkan invarian graf baru bernama jarak derajat resiprokal (*reciprocal degree distance of graphs*) disebut

sebagai resiprokal jumlah-derajat jarak dari graf yang sekarang disebut sebagai *Additively Weighted Harary Index*.

Additively Weighted Harary Index pada suatu graf G didefinisikan sebagai

$$H_A(G) = \sum_{\substack{\{u,v\} \subseteq V \\ u \neq v}} \frac{\deg(u) + \deg(v)}{d(u,v)}$$

di mana $\deg(u)$, $\deg(v)$ adalah derajat dari $u, v \in G$ (Alizadeh dkk, 2013).

Berdasarkan Gambar 4.1 diketahui derajat dan jarak sebagai berikut:

$$\text{Derajat} \quad \deg(2) = 1, \deg(4) = 2, \deg(6) = 1.$$

$$\text{Jarak} \quad d(2,4) = 1, d(4,6) = 1, d(2,6) = 1.$$

Sehingga *Additively Weighted Harary Index* pada garf pembagi nol dari ring bilangan bulat modulo 8 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} H_A(\Gamma(\mathbb{Z}_8)) &= \sum_{\substack{\{u,v\} \subseteq V \\ u \neq v}} \frac{\deg(2) + \deg(4)}{d(2,4)} + \frac{\deg(4) + \deg(6)}{d(4,6)} + \frac{\deg(2) + \deg(6)}{d(2,6)} \\ &= \frac{1+2}{1} + \frac{2+1}{1} + \frac{1+1}{2} = 3 + 3 + 1 = 7. \end{aligned}$$

2.5 Konsep Nilai Ilmu dan Peradaban Manusia

Ilmu pengetahuan dan peradaban manusia merupakan dua hal yang saling berkaitan. Ilmu pengetahuan merupakan fondasi dari peradaban manusia, sedangkan peradaban manusia merupakan tempat di mana ilmu pengetahuan dapat berkembang dan di implementasikan. Allah SWT juga menjelaskan dalam qur'an surah Yunus ayat 5 yang berbunyi sebagai berikut:

هُوَ الَّذِي جَعَلَ الشَّمْسُ ضِيَاءً وَالْقَمَرَ نُورًا وَقَدَرَهُ مَنَازِلَ لِتَعْلَمُوا عَدَدَ السِّنِينَ وَالْحِسَابَ ۗ مَا خَلَقَ اللَّهُ ذَلِكَ إِلَّا بِالْحَقِّ ۗ يُفَصِّلُ الْآيَاتِ لِقَوْمٍ يَعْلَمُونَ. (سورة يونس : ٥)

Artinya: "Dialah yang menjadikan matahari bersinar dan bulan bercahaya, dan Dialah yang menetapkan tempat-tempat orbitnya, agar kamu mengetahui bilangan tahun, dan perhitungan (waktu). Allah tidak menciptakan yang demikian itu melainkan dengan benar. Dia menjelaskan tanda-tanda (kebesaran-Nya) kepada orang-orang yang mengetahui"(QS. Yunus 10: Ayat 5).

Dalam Tafsir Ibnu Katsir Surat Yunus Ayat 5. Allah SWT menjelaskan bahwa Dialah Dzat Allah SWT yang menjadikan matahari bersinar dan bulan bercahaya dan ditetapkan-Nya manzilah-manzilah (tempat-tempat) bagi perjalanan bulan itu, supaya kalian mengetahui bilangan tahun dan perhitungan (waktu). Allah SWT tidak menciptakan yang demikian itu melainkan dengan haQ. Dia menjelaskan tanda-tanda (kebesaran-Nya) kepada orang-orang yang mengetahui. Sesungguhnya pada pertukaran malam dan siang itu dan pada yang diciptakan Allah di langit dan di bumi benar-benar terdapat tanda-tanda (kekuasaan-Nya) bagi orang-orang yang bertakwa.

Pada Al-Qur'an surah Yasin ayat 38 Allah SWT berfirman:

وَالشَّمْسُ تَجْرِي لِمُسْتَقَرٍّ هَآءَا ۗ ذَٰلِكَ تَقْدِيرُ الْعَزِيزِ الْعَلِيمِ . (سورة يس : ٣٨)

Artinya: "dan matahari berjalan di tempat peredarannya. Demikianlah ketetapan (Allah) Yang Maha Perkasa, Maha Mengetahui"(QS. Yasin 36: Ayat 38).

Dalam tafsir Al-Misbah pada Al-Qur'an surah Yasin Ayat 38 Setelah menguraikan takdir terhadap matahari, ayat di atas berbicara tentang bulan. Allah SWT berfirman: Dan bulan pun demikian. Kami Yang Maha Perkasa menakdirkannya yakni menetapkan kadar dan sistem peredarannya di manzilah-manzilah yakni posisi-posisi tertentu, sehingga karena itu kamu melihatnya pada awal kemunculannya kecil/sabit dan dari malam ke malam membesar hingga purnama sampai akhirnya berangsur-angsur pula mengecil. Ia pada mulanya bagaikan tandan segar kemudian sedikit demi sedikit membesar dan menua,

menguning lalu melengkung hingga ketika ia mencapai manzilahnya yang terakhir ia kembali menjadi bagaikan tandan yang tua dan layu.

Perjalanan bulan seperti yang dijelaskan ayat di atas menggambarkan juga perjalanan hidup banyak manusia di bumi ini. Ia beranjak sedikit demi sedikit dari bayi, remaja, hingga dewasa, kemudian menurun kekuatannya, melengkung dan membungkuk badannya hingga akhirnya menua dan mati.

Pada Al-Qur'an surah An-Naml ayat 88 Allah SWT berfirman:

وَتَرَى الْجِبَالَ تَحْسِبُهَا جَامِدَةً وَهِيَ تَمُرُّ مَرَّ السَّحَابِ ۗ صَنَعَ اللَّهُ الَّذِي اتَّقِنَ كُلَّ شَيْءٍ ۗ إِنَّهُ ۙ
خَبِيرٌ بِمَا تَفْعَلُونَ. (سورة النمل: ٨٨)

Artinya: "Dan engkau akan melihat gunung-gunung, yang engkau kira tetap di tempatnya, padahal ia berjalan (seperti) awan berjalan. (Itulah) ciptaan Allah yang mencipta dengan sempurna segala sesuatu. Sungguh, Dia Maha Mengetahui apa yang kamu kerjakan"(QS. An-Naml 27: Ayat 88).

Dalam tafsir Al-Misbah, Surah An-Naml ayat no 88 ini ditujukan kepada beliau seorang sebagai pengajaran buat beliau menyangkut sesuatu yang beliau sendiri (ketika itu) memahami hakikatnya. Adapun pemahaman hakikatnya buat umat, maka ia ditangguhkan hingga tiba masa di mana hakikat tersebut dapat mereka mengerti. Allah SWT mengungkap rahasia yang sangat menakjubkan tentang sistem peredaran bumi, kepada beliau sebagaimana Allah SWT pernah mengungkapkan kepada Nabi Ibrâhîm as. tentang cara-Nya menghidupkan yang mati. Pengungkapan ini, khusus buat beliau, pada waktu itu, dan beliau menyangkut hal ini tidak diperintahkan untuk menyampaikannya kepada manusia demi kemaslahatan mereka, sampai tiba masa terungkapnya hakikat ilmiah ini. Demikian lebih kurang Ibn 'Asyûr, yang pada akhirnya berkesimpulan bahwa firman-Nya engkau melihat gunung-gunung bergerak dalam arti yang bergerak, sedang

penyebutan "gunung" karena ia melekat pada bumi, dan dengan menyatakannya bergerak, maka otomatis bumi juga bergerak.

Surah Yunus ayat 5, surah Yasin ayat 38, surah An-naml ayat 88 dan terdapat ayat-ayat lain yang bersinggungan. Keserasian nilai-nilai keislaman dan sains dapat dibuktikan dengan banyak hal, salah satunya dengan produk berupa tokoh-tokoh ilmuwan islam yang cemerlang dan memiliki kontribusi di bidang sains. Beberapa nama terkenal islam sebut Ibnu Sina yang memiliki kontribusi dalam banyak hal di bidang kedokteran, filsafat dan lain sebagainya.

Al-Ghazali memiliki kontribusi di bidang teologi, filsafat, dan lain-lain. Al-Biruni merupakan matematikawan, astronom, fisikawan, ahli geografi, ahli farmasi dan guru, yang banyak menyumbang kepada bidang matematika, filsafat, obat-obatan. Al-Tabari juga berkontribusi pada bidang matematika, kedokteran dan lain-lain, Nasiruddin berkontribusi di bidang filsafat, astronomi, matematika, biologi, fisika dan kedokteran. Abu Al-wafa, Al-Battani memiliki kontribusi di bidang matematika dan astronom, dan Omar Khajam, Al-Kindi dan lain-lain.

Beberapa tokoh-tokoh ilmuwan islam tersebut sebagai bukti peradaban ilmu bagi manusia. selain sebagai ilmuwan para tokoh-tokoh ilmuwan tersebut adalah tokoh-tokoh yang dikenal akan ketaatannya kepada Allah SWT.

Ini adalah gambaran bahwa nilai dari ilmu pengetahuan dalam pandangan islam adalah sebagai peningkat kualitas keimanan seorang muslim, sebagai bentuk rasa syukur kepada Allah SWT bahwa segala ilmu pengetahuan adalah milik Allah-Nya. Pada Al-Qur'an surah Al-Baqarah ayat 255 Allah SWT berfirman sebagai berikut:

... يعلم ما بين أيديهم وما خلفهم ولا يحيطون بشيء من علمه إلا بما شاء وسع كرسيه السموات والأرض ولا يئوده حفظهما وهو العلي العظيم. (سورة البقر: ٢٥٥)

Artinya: "... Dia mengetahui apa yang di hadapan mereka dan apa yang di belakang mereka dan mereka tidak mengetahui sesuatu apa pun tentang ilmu-Nya melainkan apa yang Dia kehendaki. Kursi-Nya meliputi langit dan bumi. Dan Dia tidak merasa berat memelihara keduanya, dan Dia Maha Tinggi, Maha Besar"(QS. Al-Baqarah 2: Ayat 255).

Dalam tafsir Ibnu Kasir Allah SWT dalam firman-Nya "Allah mengetahui apa-apa yang di hadapan mereka dan di belakang mereka. " Yang demikian itu sebagai bukti yang menunjukkan bahwa ilmu-Nya meliputi segala yang ada, baik yang lalu, kini, dan yang akan datang. Selanjutnya penggalan ayat, “ Dan mereka tidak mengetahui apa-apa dari ilmu Allah melainkan apa yang dikehendaki Nya. ” Artinya, tidak ada seorang pun yang dapat mengetahui sedikit pun dari ilmu Allah kecuali yang telah diajarkan dan diberitahukan oleh Allah SWT kepada-Nya. Mungkin juga makna penggalan ayat tersebut adalah, manusia tidak akan dapat mengetahui ilmu Allah sedikit pun, dzat dan sifatnya melainkan apa yang telah diperlihatkan Allah kepadanya.

Perlu diketahui bahwa segala ilmu pengetahuan adalah milik Allah SWT. Dan sebagai orang yang berilmu Penting untuk diingat bahwa ilmu pengetahuan yang diperoleh haruslah digunakan untuk kebaikan, keadilan, dan ketaatan kepada Allah SWT. Ilmu pengetahuan yang benar akan membimbing manusia pada jalan kebenaran dan meningkatkan ketaatan mereka kepada Allah.

Hubungan antara inti dari ajaran islam dan sains dapat dilihat dari dua sudut pandang. Pertama konsep keislaman itu melahirkan keimanan dan sekaligus rasional atau semua gagasan ilmiah itu bertentangan dengan agama.

Agama dan sains sama-sama memberikan kekuatan. Sains memberikan manusia peralatan dan mempercepat laju kemajuan, agama menetapkan tujuan upaya manusia dan sekaligus mengarahkan upaya tersebut. Sains membawa revolusi lahiriah (material) agama membawa revolusi batiniah (spiritual). Sains memperindah akal dan fikiran. Agama memperindah jiwa dan perasaan. Sains melindungi manusia dari penyakit, banjir, badai dan bencana alam. Agama melindungi manusia dari keresahan, kegelisahan, dan rasa tidak nyaman. Sains mengharmonisasikan dunia dan manusia dan agama menyelaraskan dirinya.

2.6 Kajian Topik dan Teori Pendukung

Kajian teori pendukung pokok yang akan dibahas yaitu *Additively Weighted Harary Index* pada graf pembagi nol dari ring bilangan bulat modulo p^3 untuk suatu bilangan p prima. Batasan masalah dari penelitian ini yakni hanya menggunakan suatu bilangan p prima mulai dari 2,3,5, dan 7. Penelitian ini hanya berfokus pada ring komutatif $\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_{27}, \mathbb{Z}_{125}, \mathbb{Z}_{343}$ karena sampai \mathbb{Z}_{343} telah dapat diketahui pola bentuk umum dari *Additively Weighted Harary Index* pada graf pembagi nol dari ring bilangan bulat modulo p^3 untuk suatu bilangan p prima. Adapun rumus Rumus umum *Additively Weighted Harary Index* adalah berikut:

$$H_A(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^3})) = \sum_{\substack{\{u,v\} \subseteq V \\ u \neq v}} \frac{\deg(u) + \deg(v)}{d(u,v)}$$

yaitu jumlah hasil penjumlahan setiap titik derajat, lalu dibagi dengan jarak dari setiap titik-titik yang dijumlah pada graf pembagi nol dari ring bilangan bulat modulo p^3 untuk suatu bilangan p prima.

BAB III METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode riset kepustakaan (*library research*) yaitu kegiatan membaca, mencatat, memahami dan mengkaji melalui beberapa panduan seperti buku, jurnal, dan skripsi penelitian terdahulu yang berkaitan dengan topik.

3.2 Pra Penelitian

Adapun beberapa tahapan pra penelitian yang dilakukan peneliti dalam penelitian ini diantaranya yaitu terlebih dahulu mencari dan memahami teori pendukung dari beberapa referensi seperti buku teori graf, dan jurnal ilmiah internasional tentang topik penelitian. Selanjutnya, peneliti menentukan topik penelitian yakni tentang *Additively Weighted Harary* pada graf pembagi nol dari ring bilangan bulat modulo p^3 dengan p bilangan prima.

3.3 Tahap Penelitian

Berikut tahap-tahap penelitian yang dilakukan untuk menentukan *Additively Weighted Harary Index* pada graf pembagi nol dari ring bilangan bulat modulo p^3 untuk suatu p prima.

1. Menghitung *Additively Weighted Harary Index* dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^3})$ untuk $p \in \{2,3,5,7\}$.
2. Membuat dugaan meliputi banyaknya titik, derajat, jarak pada graf pembagi nol dari ring bilangan bulat modulo p^3 dengan p bilangan prima.

3. Menentukan rumus umum *Additively Weighted Harary Index* pada graf pembagi nol dari ring bilangan bulat modulo p^3 dengan p bilangan prima.

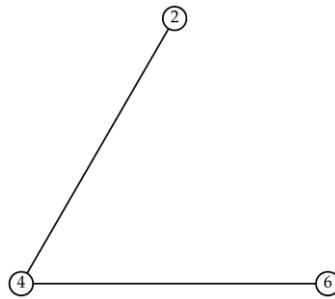
BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Additively Weighted Harary Index pada Graf Pembagi Nol dari \mathbb{Z}_{p^3}

4.1.1 Additively Weighted Harary Index pada Graf Pembagi Nol dari \mathbb{Z}_{2^3}

Himpunan dari $\mathbb{Z}_{2^3} = \mathbb{Z}_8$ yaitu $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$, sehingga himpunan pembagi nol tak-nol dari ring bilangan bulat modulo 8 yaitu $Z(\mathbb{Z}_8)^* = \{2,4,6\}$.

Graf pembagi nol tak-nol dari \mathbb{Z}_8 ditunjukkan oleh Gambar 4.1.



Gambar 4.1 Graf Pembagi Nol $\Gamma(\mathbb{Z}_8)$

Berdasarkan gambar 4.1 diperoleh derajat dan jarak titik di $\Gamma(\mathbb{Z}_8)$ sebagai berikut:

Derajat: $\deg(4) = 2, \deg(2) = 1, \deg(6) = 1$.

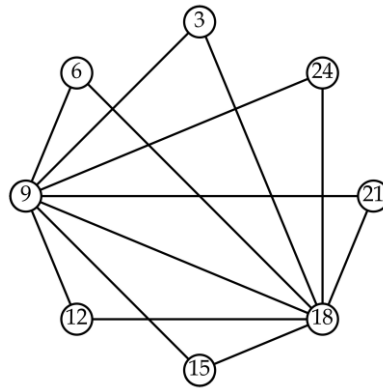
Jarak: $d(4,2) = d(4,6) = 1, d(2,6) = 2$.

Berdasarkan Gambar 4.1 maka *Additively Weighted Harary Index* dari $\Gamma(\mathbb{Z}_8)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} H_A(\Gamma(\mathbb{Z}_8)) &= \sum_{\substack{\{u,v\} \subseteq V \\ u \neq v}} \frac{\deg(u) + \deg(v)}{d(u,v)} \\ &= \frac{\deg(2) + \deg(6)}{d(2,6)} + \frac{\deg(2) + \deg(4)}{d(2,4)} + \frac{\deg(4) + \deg(6)}{d(4,6)} \\ &= \frac{3p^5 - 3p^4 - 12p^3 + 15p^2 + 5p}{2} - 4. \end{aligned}$$

4.1.2 Additively Weighted Harary Index pada Graf Pembagi Nol dari \mathbb{Z}_3^3

Himpunan dari $\mathbb{Z}_3^3 = \mathbb{Z}_{27}$ yaitu $\{0,1,2,\dots,26\}$, sehingga himpunan pembagi nol tak-nol dari ring bilangan bulat modulo 27 yaitu $Z(\mathbb{Z}_{27})^* = \{3,6,9,12,15,18,21,24\}$. Graf pembagi nol tak-nol dari \mathbb{Z}_{27} ditunjukkan oleh gambar 4.2.



Gambar 4.2 Graf Pembagi Nol $\Gamma(\mathbb{Z}_{27})$

Berdasarkan Gambar 4.2 diperoleh derajat dan jarak titik di $\Gamma(\mathbb{Z}_{27})$ sebagai berikut:

Derajat: $\deg(9) = 7, \deg(18) = 7, \deg(3) = 2, \deg(6) = 2, \deg(12) = 2, \deg(15) = 2, \deg(21) = 2, \deg(24) = 2.$

Jarak: $d(9,3) = d(9,6) = d(9,12) = d(9,15) = d(9,21) = d(9,24) = d(18,3) = d(18,6) = d(18,12) = d(18,15) = d(18,21) = d(18,24) = d(9,18) = 1.$

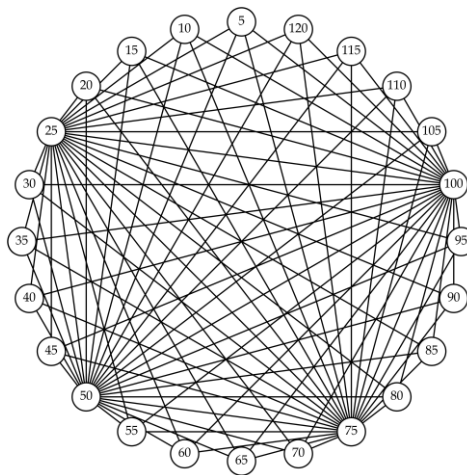
$d(3,6) = d(3,12) = d(3,15) = d(3,21) = d(3,24) = d(6,12) = d(6,15) = d(6,21) = d(6,24) = d(12,15) = d(12,21) = d(12,24) = d(15,21) = d(15,24) = d(21,24) = 2.$

Berdasarkan Gambar 4.2 maka *Additively Weighted Harary Index* dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{27})$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 H_A(\Gamma(\mathbb{Z}_{27})) &= \sum_{\substack{\{u,v\} \subseteq V \\ u \neq v}} \frac{\deg(u) + \deg(v)}{d(u,v)} \\
 &= \sum_{\substack{\{u,v\} \in EV_1 \\ u \neq v}} \frac{\deg(u) + \deg(v)}{d(u,v)} + \sum_{\substack{\{u,v\} \notin EV_2 \\ u \neq v}} \frac{\deg(u) + \deg(v)}{d(u,v)} \\
 &\quad + \sum_{\substack{u \in V_1 \\ v \in V_2}} \frac{\deg(u) + \deg(v)}{d(u,v)} \\
 &= \frac{3p^5 - 3p^4 - 12p^3 + 15p^2 + 5p}{2} - 4.
 \end{aligned}$$

4.1.3 *Additively Weighted Harary Index* pada Graf Pembagi Nol dari \mathbb{Z}_{5^3}

Himpunan dari $\mathbb{Z}_{5^3} = \mathbb{Z}_{125}$ yaitu $\{0,1,2, \dots, 124\}$, sehingga himpunan pembagi nol tak-nol dari ring bilangan bulat modulo 125 yaitu $Z(\mathbb{Z}_{125})^* = \{5,10,15, \dots, 120\}$. Graf pembagi nol tak-nol dari \mathbb{Z}_{125} ditunjukkan oleh Gambar 4.3.



Gambar 4.3 Graf Pembagi Nol $\Gamma(\mathbb{Z}_{125})$

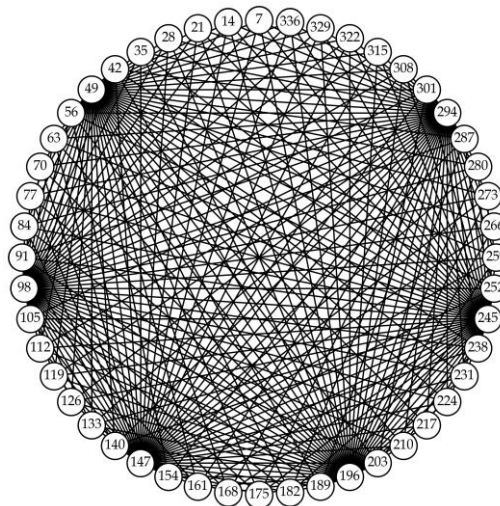
Berdasarkan Gambar 4.3 diperoleh derajat dan jarak titik di $\Gamma(\mathbb{Z}_{125})$ diperoleh $d(i,j) = 2 \forall i,j \in \mathbb{Z}_{p^3}$ dan $i,j \notin \{np^2 | n = 1,2, \dots, p-1\}$. Berdasarkan

gambar di atas maka *Additively Weighted Harary Index* dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{125})$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 H_A(\Gamma(\mathbb{Z}_{125})) &= \sum_{\substack{\{u,v\} \subseteq V \\ u \neq v}} \frac{\deg(u) + \deg(v)}{d(u,v)} \\
 &= \sum_{\substack{\{u,v\} \in EV_1 \\ u \neq v}} \frac{\deg(u) + \deg(v)}{d(u,v)} + \sum_{\substack{\{u,v\} \notin EV_2 \\ u \neq v}} \frac{\deg(u) + \deg(v)}{d(u,v)} \\
 &\quad + \sum_{\substack{u \in V_1 \\ v \in V_2}} \frac{\deg(u) + \deg(v)}{d(u,v)} \\
 &= \frac{3p^5 - 3p^4 - 12p^3 + 15p^2 + 5p}{2} - 4.
 \end{aligned}$$

4.1.4 *Additively Weighted Harary Index* pada Graf Pembagi Nol dari \mathbb{Z}_7^3

Himpunan dari $\mathbb{Z}_7^3 = \mathbb{Z}_{343}$ yaitu $\{0,1,2,3, \dots, 342\}$, sehingga himpunan pembagi nol tak-nol dari ring bilangan bulat modulo 343 yaitu $Z(\mathbb{Z}_{343})^* = \{7,14,21, \dots, 336\}$. Graf pembagi nol tak-nol dari \mathbb{Z}_{343} ditunjukkan oleh Gambar 4.4.



Gambar 4.4 Graf Pembagi Nol $\Gamma(\mathbb{Z}_{343})$

Berdasarkan Gambar 4.4 diperoleh derajat dan jarak titik di $\Gamma(\mathbb{Z}_{343})$ diperoleh $d(i, j) = 2 \forall i, j \in \mathbb{Z}_{p^3}$ dan $i, j \notin \{np^2 | n = 1, 2, \dots, p - 1\}$. Berdasarkan gambar di atas maka *Additively Weighted Harary Index* dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{343})$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 H_A(\Gamma(\mathbb{Z}_{343})) &= \sum_{\substack{\{u,v\} \subseteq V \\ u \neq v}} \frac{\deg(u) + \deg(v)}{d(u, v)} \\
 &= \sum_{\substack{\{u,v\} \in EV_1 \\ u \neq v}} \frac{\deg(u) + \deg(v)}{d(u, v)} + \sum_{\substack{\{u,v\} \notin EV_2 \\ u \neq v}} \frac{\deg(u) + \deg(v)}{d(u, v)} \\
 &\quad + \sum_{\substack{u \in V_1 \\ v \in V_2}} \frac{\deg(u) + \deg(v)}{d(u, v)} \\
 &= \frac{3p^5 - 3p^4 - 12p^3 + 15p^2 + 5p}{2} - 4.
 \end{aligned}$$

4.2 Dugaan Terkait $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^3})$

Berdasarkan perhitungan diperoleh himpunan pembagi nol tak nol, banyaknya titik, titik umum dan titik khusus, derajat titik, jarak titik dan *Additively Weighted Harary Index* dari ring bilangan bulat modulo p^3 maka dapat dinyatakan dalam tabel sebagai berikut:

1. Himpunan Pembagi Nol Tak Nol dan Order dari \mathbb{Z}_{p^3}

Tabel 4.1 Himpunan Pembagi Nol Tak Nol dan Order dari \mathbb{Z}_{p^3}

\mathbb{Z}_{p^3}	$Z(\mathbb{Z}_{p^3})$	Order
\mathbb{Z}_{2^3}	$\{2, 4, 6\}$	3
\mathbb{Z}_{3^3}	$\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$	8
\mathbb{Z}_{5^3}	$\{5, 10, 15, \dots, 110, 115, 120\}$	24

\mathbb{Z}_{7^3}	$\{7,14,21, \dots, 322,329,336\}$	48
--------------------	-----------------------------------	----

2. Titik Umum dan Titik Khusus dari Graf \mathbb{Z}_{p^3}

Tabel 4.2 Titik Umum dan Titik Khusus dari Graf \mathbb{Z}_{p^3}

$V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^3}))$	$V_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^3}))$	$V_2(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^3}))$
$V(\Gamma(\mathbb{Z}_8))$	$\{4\}$	$\{2,6\}$
$V(\Gamma(\mathbb{Z}_{27}))$	$\{9,18\}$	$\{3,6,12,15,21,24\}$
$V(\Gamma(\mathbb{Z}_{125}))$	$\{25,50,75,100\}$	$\{5,10,15, \dots, 110,115,120\}$
$V(\Gamma(\mathbb{Z}_{3434}))$	$\{49,98,147,196,245,294\}$	$\{7,14,21, \dots, 322,329,336\}$

3. Derajat dari Graf \mathbb{Z}_{p^3}

Tabel 4.3 Derajat dari Graf \mathbb{Z}_{p^3}

$\Gamma(\mathbb{Z}_{p^3})$	$u, v \in V_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^3}))$	$u, v \in V_2(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^3}))$
$\Gamma(\mathbb{Z}_{2^3})$	(2)	(1)
$\Gamma(\mathbb{Z}_{3^3})$	(7)	(2)
$\Gamma(\mathbb{Z}_{5^3})$	(23)	(34)
$\Gamma(\mathbb{Z}_{7^3})$	(47)	(76)

4. Jarak dari Graf \mathbb{Z}_{p^3}

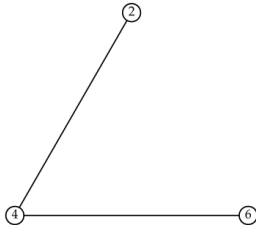
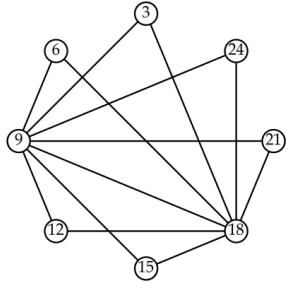
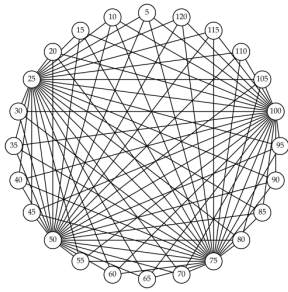
Tabel 4.4 Jarak dari Graf \mathbb{Z}_{p^3}

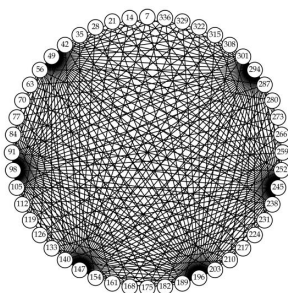
\mathbb{Z}_{p^3}	$d(u, v) \forall u \in V_1$ $v \in V_2$	$d(u, v); u, v \in V_1$ $u \neq v$	$d(u, v); u, v \in V_2$ $u \neq v$

\mathbb{Z}_{2^3}	1		2
\mathbb{Z}_{3^3}	1	1	2
\mathbb{Z}_{5^3}	1	1	2
\mathbb{Z}_{7^3}	1	1	2

5. Additively Weighted Harary Index dari Graf \mathbb{Z}_{p^3}

Tabel 4.5 Additively Weighted Harary Index dari Graf \mathbb{Z}_{p^3}

Modulo	Gambar Graf	Additively Weighted Harary Index
\mathbb{Z}_8		$= \binom{2-1}{2} \frac{(2^2-2) + (2^2-2)}{1} + \binom{2^2-2}{2} \frac{(2-1) + (2-1)}{2} + (2-1)(2^2-2) \frac{(2^2-2) + (2-1)}{1} = \frac{3p^5 - 3p^4 - 12p^3 + 15p^2 + 5p}{2} - 4.$
\mathbb{Z}_{27}		$= \binom{3-1}{2} \frac{(3^2-2) + (3^2-2)}{1} + \binom{3^2-3}{2} \frac{(3-1) + (3-1)}{2} + (3-1)(3^2-3) \frac{(3^2-2) + (3-1)}{1} = \frac{3p^5 - 3p^4 - 12p^3 + 15p^2 + 5p}{2} - 4.$
\mathbb{Z}_{125}		$= \binom{5-1}{2} \frac{(5^2-2) + (5^2-2)}{1} + \binom{5^2-5}{2} \frac{(5-1) + (5-1)}{2} + (5-1)(5^2-5) \frac{(5^2-2) + (5-1)}{1} = \frac{3p^5 - 3p^4 - 12p^3 + 15p^2 + 5p}{2} - 4.$

\mathbb{Z}_{343}		$= \binom{7-1}{2} \frac{(7^2-2) + (7^2-2)}{1} + \binom{7^2-2}{2} \frac{(7-1) + (7-1)}{2} + (7-1)(7^2 - 7) \frac{(7^2-2) + (7-1)}{1}$ $= \frac{3p^5 - 3p^4 - 12p^3 + 15p^2 + 5p}{2} - 4.$
--------------------	---	--

Berdasarkan perhitungan himpunan pembagi nol tak nol, banyaknya titik, titik umum dan titik khusus, derajat titik, dan jarak titik dari ring bilangan bulat modulo p^3 diperoleh dugaan-dugaan sebagai berikut:

1. Pembagi nol dari \mathbb{Z}_{p^3} adalah kelipatan dari p .
2. $|Z(\mathbb{Z}_{p^3})| = p^2 - 1$.
3. Semua unsur di V_1 bertetangga dengan semua $V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^3}))$
4. $d(u, v) \leq 2, \forall u, v \in V$.
5. Setiap titik di V_1 berderajat $p^2 - 2$.
6. Semua unsur di V_2 tidak bertetangga ke sesamanya.
7. $d(u, v) = 1 \forall \{u, v\} \in E(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^3}))$ dan $d(u, v) = 2 \forall \{u, v\} \notin E(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^3}))$
8. Setiap titik di V_2 berderajat $p - 1$.

4.3 Menentukan Rumus Umum *Additively Weighted Harary Index*

Dalam subbab ini akan ditentukan $H_A(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^3}))$ terlebih dahulu membuktikan dugaan-dugaan pada subbab 4.2 menjadi Lema-lema.

Lema 1. Misal p adalah suatu bilangan prima. Himpunan pembagi nol tak nol dari \mathbb{Z}_{p^3} adalah

$$Z(\mathbb{Z}_{p^3})^* = \{np \mid n = 1, 2, \dots, p^2 - 1\}.$$

Bukti.

Misal $u \in \mathbb{Z}_{p^3}, u \neq 0$. Maka $uv \equiv 0 \pmod{p^3}$ akan punya solusi tak nol jika dan hanya jika $FPB(u, p^3) > 1$, artinya u adalah kelipatan dari p . Dengan demikian

$$Z(\mathbb{Z}_{p^3})^* = \{np \mid np = 1, 2, \dots, p^2 - 1\}.$$

■

Akibat 1. Banyaknya unsur $Z(\mathbb{Z}_{p^3})^*$ adalah

$$|Z(\mathbb{Z}_{p^3})^*| = p^2 - 1.$$

■

Untuk mempermudah pembuktian lema-lema berikutnya akan didefinisi dua himpunan V_1 dan V_2 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} V &:= V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^3})) \\ V_1 &:= \{np^2 \mid n = 1, 2, \dots, p - 1\}, \\ V_2 &:= V - V_1. \end{aligned}$$

Sehingga $|V_1| = p - 1$ dan $|V_2| = p^2 - 1 - (p - 1) = p^2 - p$.

■

Lema 2. Setiap unsur V_1 bertetangga dengan semua titik di $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^3})$, artinya

$$\{u, v\} \in E(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^3})), \forall u \in V, v \in V_1, u \neq v.$$

Bukti.

Misal $v \in V_1, v = np^2$ untuk suatu $n \in \mathbb{Z}$, dan $u \in V, u \neq v$, dan misal $u = mp$ untuk suatu $m \in \mathbb{Z}$. Maka

$$uv = mp \cdot np^2 = (mn)p^3 \equiv 0 \pmod{p^3}.$$

Dengan demikian $\{u, v\} \in E(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^3})), \forall u \in V, v \in V_1, u \neq v$.

■

Akibat 2. $d(u, v) \leq 2, \forall u, v \in V$.

Bukti.

Jika $\{u, v\} \in E\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^3})\right)$, maka $d(u, v) = 1$.

Jika $\{u, v\} \notin E\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^3})\right)$, maka dari Lema 2 diperoleh lintasan $u - p^2 - v$, dengan demikian $d(u, v) = 2$.

Dengan demikian $d(u, v) \leq 2, \forall u, v \in V$.

■

Akibat 3. $\deg(v) = p^2 - 2, \forall v \in V_1$.

Bukti.

Dari Lema 1 diperoleh banyaknya titik di $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^3})$ adalah $p^2 - 1$, sedangkan dari Lema 2 kita tahu bahwa v bertetangga dengan semua titik di $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^3})$. Dengan demikian

$$\begin{aligned}\deg(v) &= p^2 - 1 - 1 \\ &= p^2 - 2\end{aligned}$$

karena v tidak bertetangga dengan dirinya sendiri.

■

Lema 3. $\{u, v\} \notin E\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^3})\right), \forall u, v \in V_2$.

Bukti.

Misal $u = mp$ dan $v = np$ untuk suatu $m, n \in \mathbb{Z}$ di mana m dan n bukan kelipatan dari p . Maka

$$uv = (mp)(np) = mnp^2.$$

Ekuivalensi $uv \equiv 0 \pmod{p^3}$ bisa ditulis sebagai

$$xp^2 \equiv 0 \pmod{p^3}. \quad (1)$$

di mana $x = mn$. Ekuivalensi (1) akan memiliki p^2 solusi, yaitu

$$S = \{ap \mid a = 0, 1, 2, \dots, p^2 - 1\},$$

artinya saat $x = mn$ merupakan kelipatan dari p . Kontradiksi dengan fakta bahwa $u, v \in V_2$. ■

Akibat 4. $d(u, v) = 2, \forall u, v \in V_2, u \neq v$ dan $d(u, v) = 1, \forall v \in V_1, v \in V, u \neq v$.

Lema 4. $\deg(v) = p - 1, \forall v \in V_2$.

Bukti.

Misal $v \in V_2$. Dari Lema 3 kita tahu bahwa v tidak bertetangga dengan sebarang $w \in V_2$, dan dari Lema 2 kita tahu bahwa sebarang $u \in V_1$ bertetangga dengan v .

Dengan demikian

$$\deg(v) = |V_1| = p - 1. \quad \blacksquare$$

Teorema 1. *Additively Weighted Harary Index* dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^3})$ adalah:

$$H_A(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^3})) = \frac{3p^5 - 3p^4 - 12p^3 + 15p^2 + 5p}{2} - 4.$$

Bukti.

$$\begin{aligned}
H_A(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^3})) &= \sum_{\substack{\{u,v\} \in V \\ u \neq v}} \frac{\deg(u) + \deg(v)}{d(u,v)} \\
&= \sum_{\substack{\{u,v\} \in V_1 \\ u \neq v}} \frac{\deg(u) + \deg(v)}{d(u,v)} + \sum_{\substack{\{u,v\} \in V_2 \\ u \neq v}} \frac{\deg(u) + \deg(v)}{d(u,v)} + \sum_{\substack{u \in V_1 \\ v \in V_2}} \frac{\deg(u) + \deg(v)}{d(u,v)} \\
&= \binom{p-1}{2} \frac{(p^2-2) + (p^2-2)}{1} + \binom{p^2-p}{2} \frac{(p-1) + (p-1)}{2} \\
&\quad + (p-1)(p^2-p) \frac{(p^2-2) + (p-1)}{1} \\
&= \frac{3p^5 - 3p^4 - 12p^3 + 15p^2 + 5p}{2} - 4
\end{aligned}$$

■

4.4 Additively Weighted Harary Index pada Graf Pembagi Nol dalam Pandangan Islam

Additively Weighted Harary Index dapat dianalogikan dalam pandangan islam. Pada surah Yunus ayat 5, surah Yasiin ayat 38, surah An-Naml ayat 88 dan surah Al-Baqarah ayat 255 menjelaskan bahwa Allah SWT lah yang menjadikan matahari bersinar dan bulan bercahaya, lalu matahari dan bulan berjalan di tempat peredarannya begitupun bumi. Ayat-ayat tersebut saling bersinggungan.

Keserasian surah Yunus ayat 5, surah Yasiin ayat 38, surah An-Naml ayat 88 merupakan ayat-ayat tersebut saling bersinggungan dapat dianalogikan dengan graf pembagi nol. Pada graf pembagi nol terdapat teori-teori yang saling bersinggungan yaitu ring (R), pembagi nol $Z(R)$ dan graf. Pada graf pembagi nol dari R terdapat himpunan titik-titik saling bertetangga jika dan hanya jika $x \cdot y = 0$. Sehingga titik-titik pada graf pembagi nol merupakan himpunan pembagi nol di R . selanjutnya akan dihitung nilai dari Additively Weighted Harary Index pada graf pembagi nol sehingga muncullah dugaan-dugaan yang dibuktikan dengan menggunakan teori-teori di atas termasuk kongruensi modulo n .

BAB V PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan maka diperoleh rumus umum *Additively Weighted Harary Index* pada graf pembagi nol dari ring bilangan bulat modulo p^3 untuk suatu bilangan p prima adalah sebagai berikut:

Rumus umum *Additively Weighted Harary Index* dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^3})$ adalah

$$H_A(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^3})) = \frac{3p^5 - 3p^4 - 12p^3 + 15p^2 + 5p}{2} - 4.$$

5.2 Saran

Karena pada penelitian ini masih *Additively Weighted Harary Index* pada graf pembagi nol dari ring bilangan bulat modulo p^3 untuk suatu bilangan p prima maka untuk penelitian selanjutnya dapat menggunakan indeks yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

- Alizadeh, Y., Iranmanesh, A., & Došlić, T. (2013). Additively weighted Harary index of some composite graphs. *Discrete Mathematics*, 313(1), 26-34.
- Al-Qur'anul Hafalan*. 2019. Departemen Kementrian Agama RI, Bandung. Cordoba.
- Anderson, D. F., Frazier, A., Lauve, A., & Livingston, P. S. (2019). The Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring, II. In *Ideal theoretic methods in commutative algebra* (pp. 61-72). CRC Press.
- Chartrand, G., & Zhang, P. (2019). *Chromatic graph theory*. Chapman and Hall/CRC.
- Dewi, N. R. (2011). Analisis Struktur Daerah Integral dari Himpunan Polinomial Berdasarkan Struktur Polinomial Gelanggang. *Jurnal Penelitian Sains*, 14(4).
- Gilbert, L. (2014). *Elements of modern algebra*. Cengage Learning.
- Hua, H., & Zhang, S. (2012). On the reciprocal degree distance of graphs. *Discrete Applied Mathematics*.
- Shihab, M. Q. (2002). Tafsir Al-Misbah: Pesan, Kesan dan Keserasian al-Quran volume 8. Jakarta: Lentera Hati.
- Tafsir Ibnu Katsir/ penerjemah, M. Abdul Ghoffar E.M., Abdurrahim Mu'thi, Abu Ihsan Al-Atsari; pengedit, M. Yusuf Harun ... [et al.]. Bogor: Pustaka Imam Asy-Syafi'i, 2004.
- Wahyu, H dkk. (2014). Pengantar Teori Bilangan. Uin Maliki Pres.
- Zeng, T. (2013). Harary index and Hamiltonian property of graphs. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem*, 70, 645-649.

RIWAYAT HIDUP



Sularaswati lahir di Baginda Laut salah satu tempat di negara Malaysia pada tanggal 03 Agustus 1999. Namun tercatat pada akte kelahiran lahir di Leuwohung. Penulis terlahir dari pasangan Ibrahim Hidayat dan Rakiba Aminoto dan merupakan anak sulung dari empat bersaudara yakni Srikandi Wulandari, Muhammad Izwan Saputra dan Muhammad Azwan Saputra. Pada tahun 2007 penulis masuk Madrasah Ibtidaiyah Swasta (MIS) Leuwohung dan lulus pada tahun 2012. Kemudian melanjutkan sekolah tingkat pertama pada tahun yang sama di Madrasah Tsanawiyah Negeri (MtSN) Kalikur dan lulus pada tahun 2015. Selanjutnya masuk pada sekolah menengah akhir di MAN 1 Lembata dan lulus pada tahun 2018. Pada tahun yang sama penulis diterima menjadi mahasiswa Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang melalui jalur mandiri.



BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Sularaswati
NIM : 18610097
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : *Additively Weighted Harary Index* Pada Graf Pembagi Nol dari Ring Bilangan Bulat Modulo p^3 .
Pembimbing I : Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.
Pembimbing II : Erna Herawati, M.Pd.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	9 Januari 2023	Konsultasi Topik Skripsi	1.
2.	7 Februari 2023	Konsultasi Perhitungan Bab IV	2.
3.	13 Maret 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	3.
4.	13 Maret 2023	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	4.
5.	14 April 2023	ACC Bab I, II, dan III	5.
6.	11 Mei 2023	Konsultasi Revisi Kajian Agama Bab I dan II	6.
7.	15 Mei 2023	ACC Kajian Agama Bab I dan II	7.
8.	21 Juni 2023	ACC Seminar Proposal	8.
9.	27 Juli 2023	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	9.
10.	27 September 2023	Konsultasi Bab IV dan V	10.
11.	27 September 2023	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	11.
12.	12 Oktober 2023	Konsultasi Revisi Kajian Agama Bab IV	12.
13.	24 Oktober 2023	ACC Bab IV dan V	13.
14.	26 Oktober 2023	ACC Kajian Agama Bab IV	14.
15.	22 November 2023	ACC Seminar Hasil	15.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

16.	7 Desember 2023	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	16.
17.	21 Desember 2023	ACC Sidang Skripsi	17.
18	27 Desember 2023	ACC Keseluruhan	18.

Malang, 27 Desember 2023

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc.

NIP 19741129 200012 2 005