Brazilian Journals of Business

Problema real de roteirização: estudo realizado por aluno do ensino médio

Real routing problem: a study by a high school student

Recebimento dos originais: 29/09/2019
Aceitação para publicação: 26/10/2019

Danielle Durski Figueiredo
Doutora em Métodos Numéricos e Programação Matemática pela Universidade Federal do Paraná - UFPR
Instituição: Universidade Tecnológica Federal do Paraná-UTFPR
Endereço: Avenida Sete de Setembro, 3165 - Rebouças CEP 80230-901 - Curitiba - PR - Brasil
E-mail: durski@utfpr.edu.br

Paula Francis Benevides
Mestre em Métodos Numéricos e Programação Matemática pela Universidade Federal do Paraná - UFPR
Instituição: Universidade Tecnológica Federal do Paraná-UTFPR
Endereço: Avenida Sete de Setembro, 3165 - Rebouças CEP 80230-901 - Curitiba - PR - Brasil
E-mail: paulabenevides@utfpr.edu.br

RESUMO
Neste trabalho é apresentado um relato de experiência de um projeto desenvolvido em sala de aula de uma turma de primeiro ano do ensino médio. O objetivo geral é mostrar a possibilidade de abordar no ensino médio a aplicação da matemática através da resolução de problemas reais e do cotidiano usando a Programação Linear. O assunto foi conduzido de forma adequada para o nível de escolaridade em questão, pois o mesmo é abordado em cursos de nível superior. A aproximação da realidade aos conteúdos de matemática vem a valorizar e trazer sentido a aprendizagem, pois o processo de ensino-aprendizagem em matemática é complexo e constituído por muitas e diferentes variáveis, as quais se relacionam e se interligam de maneira muito dinâmica. Os resultados mostram a viabilidade do projeto, onde alunos mostraram interesse e motivação na participação desta experiência, além de rever e aplicar conteúdos de matemática inerentes ao ano em que estão cursando.

Palavras-chave: Contextualização, Programação Linear, Ensino Médio.

ABSTRACT
This paper presents an experience report of a project developed in the classroom of a first year high school class. The general objective is to show the possibility of approaching the application of mathematics in high school by solving real and daily problems using Linear Programming. The subject was conducted appropriately for the level of education in question, as it is addressed in higher education courses. The approximation of reality to mathematical content comes to value and make sense of learning, because the process of teaching-learning in mathematics is complex and made up of many different variables, which relate and interconnect in a very dynamic way. The results show the viability of the project, where students showed interest and motivation in participating in this experience, as well as review and apply math content inherent to the year they are attending.

Keywords: Contextualization, Linear Programming, High School.

1 INTRODUÇÃO

Na área da educação é constante a busca por um ensino mais fundamentado e significativo. O processo ensino-aprendizagem é foco de muitas pesquisas e projetos que buscam sua melhoria a fim de atender as ansiedades por uma educação de excelência.

O processo de ensino-aprendizagem em matemática é complexo e constituído por muitas e diferentes variáveis, as quais se relacionam e se interligam de maneira muito dinâmica. Esse sistema ativo e intenso de busca de metodologias e práticas de como ensinar e como aprender em matemática é formado por vários obstáculos, que são do conhecimento, principalmente, dos que participam. Assim, percebe-se uma clara orientação para a necessidade de se trabalhar matemática em sala de aula, utilizando problemas como forma de apresentar e desenvolver os assuntos.

A Matemática é de grande importância para o conhecimento humano e a compreensão do seu meio. O seu ensino, através da Modelagem e de ideias e práticas inovadoras, criam um novo e interessante ambiente de aprendizagem para os alunos, eliminando o estigma de que a Matemática é considerada difícil por muitos, desinteressante para outros e inacessível para a maioria [Silva, 2013].

A Programação Linear é uma técnica de otimização muito utilizada na resolução de problemas, onde seus modelos são representados por expressões lineares, que ocorrem na Pesquisa Operacional [Melo; 2012]. Tais problemas estão relacionados com a melhor distribuição de recursos limitados para atividades que se relacionam competitivamente, e tem a finalidade de atender a um determinado objetivo.

Acredita-se que a Programação Linear, com alguma adaptação de linguagem e exploração direcionada para o Ensino Médio, possa tornar-se valiosa ferramenta na nossa tarefa de orientadores do processo de ensino e aprendizagem em matemática.

A Educação Matemática aponta para grandes mudanças no processo de ensino aprendizagem, de forma a estabelecer relações com as demais disciplinas, com a futura atuação profissional do aluno e também com o exercício da cidadania. Algumas novas tendências e propostas surgem da necessidade de o professor se adequar a esta nova prática, com atividades envolvendo circunstâncias do dia-a-dia do aluno ou a Matemática de situações reais, promovendo a resolução de situações problemas, tarefas de investigação e atividades de Modelagem.

Alguns docentes apostam que desenvolver a matemática através da resolução de problemas pode torná-la mais real e próxima do aluno uma vez que essa metodologia propicia desafios, cujas tentativas de superação resultarão naturalmente na formação de cidadão melhores preparados para viver em sociedade. Assim, de acordo com Smole (2001, p. 92):

> A perspectiva da resolução de problemas caracteriza-se por uma postura de inconformismo diante dos obstáculos e do que foi estabelecido por outros, sendo um exercício contínuo do desenvolvimento do senso crítico e da criatividade, que são características primordiais daqueles que fazem ciência e objetivos do ensino de matemática.

Acredita-se que a elaboração de uma sequência didática utilizando problemas atrativos, despertem o interesse e curiosidade dos alunos pela matemática e que a proposta seja bem recebida de maneira que os mesmos se sintam incentivados a elaborarem conjecturas e conclusões sobre os conteúdos estudados, respeitando seus ritmos e ideias.

2 PROGRAMAÇÃO LINEAR: UMA INTRODUÇÃO

Programação Linear teve seu início em 1826 com os estudos de Fourier sobre inequações lineares e é uma área da matemática que busca a otimização de problemas práticos através de modelos matemáticos lineares. Seus problemas são compostos de variáveis de decisão (que podem ser binárias, inteiras, reais, etc.), que representam as decisões a serem tomadas. Seu modelo matemático é composto de uma função objetivo, que deve ter seu valor maximizado ou minimizado de acordo com a necessidade do problema, e depende das variáveis de decisão. Essas variáveis também são limitadas por um conjunto de equações e/ou inequações, chamadas restrições. A Programação Linear pode se aplicar em diferentes áreas como na roteirização onde o objetivo é otimizar a distância percorrida em determinado trajeto com múltiplos pontos, ou também na produção de determinados produtos onde se pretende otimizar o lucro. Sua aplicabilidade é diversificada o a torna relevante para a organização de nossa sociedade. Nogami (2004) afirma que:

> “A programação linear é uma ferramenta matemática para a tomada de decisões para a otimização de problemas com funções lineares, denominadas funções objetivo, levando-se em conta equações restritivas, também lineares”.

Entre muitos estudos da Programação Linear, abordamos o problema de otimização de roteiros com múltiplos pontos. Ainda temos dentro da roteirização vários tipos de problemas, como por exemplo, o Problema do Caixeiro Viajante que é problema estudado e apresentado neste trabalho por um aluno do ensino médio.

3 PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE

O Problema do Caixeiro Viajante (PCV) é um problema de roteirização que consiste em estabelecer uma única rota que passe em cada nó de um grafo (vértices), uma e apenas uma vez, retornando ao nó inicial no final do percurso.

Este roteiro Hamiltoniano deve ser feito de modo que a distância total percorrida seja mínima (rota), de acordo com as restrições específicas do problema. A Figura 2 mostra com setas de cor vermelha um roteiro Hamiltoniano.

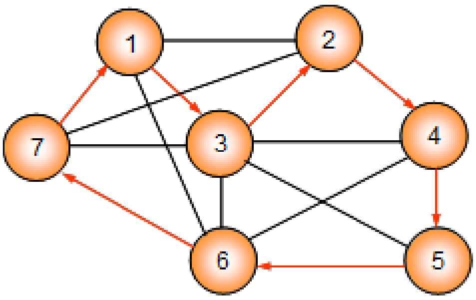

Figura 2 – Exemplo de PCV

De acordo com GOLDBARG & LUNA (2000) o PCV é um dos problemas mais tradicionais da Programação Linear, pois os problemas com rotas não é algo recente, mas ainda são presentes e o uso de uma técnica de otimização para este tipo de problema traz diminuição dos gastos e/ou distâncias percorridas. Taufer e Pereira (2011) citam o seguinte exemplo de PCV para melhor compreensão: "Suponha que o caixeiro viajante tenha de visitar n cidades diferentes, iniciando e encerrando sua viagem na primeira cidade. Considere, também, que a ordem com que as cidades serão visitadas não importa e que de cada uma delas pode-se ir diretamente a qualquer outra. Exemplificando o caso, onde n é considerado o número de cidades seja igual a 4: se tivermos quatro cidades denominadas cidade A, cidade B, cidade C e cidade D, uma possível rota que o caixeiro poderia considerar seria: sair da cidade A e então ir para a cidade B, após ir para a cidade C, estando na cidade C ir para a cidade D e então volte para a cidade A. Outras alternativas possíveis seriam: ABDCA, ACBDA, ACDBA, ADBCA, ADCBA. O conjunto de rotas possíveis é o resultado de todas as combinações possíveis e pode ser calculado por $(n-1)!$, sendo n o número de nós".

O Problema do Caixeiro Viajante possui muitas variações sendo que algumas possuem algoritmos de aproximação que fornecem resultados próximos do ótimo. Essas variações do PCV podem ser classificadas em relação a:

- Simetria: É dito simétrico se a distância do ponto "a" ao ponto "b" é igual a distancia do ponto "b" ao ponto "a". Do contrário é dito assimétrico.
- Completude: É dito completo se existe um caminho direto entre todos os pontos, do contrário é dito não completo.

Dantzig, Fulkerson e Johnson citada por Goldbarg e Luna (2000) presentaram uma formulação matemática para o PCV. A mesma é frequentemente utilizada na literatura.

$$\text{Minimizar } z = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \qquad (1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall_j \in N \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall_i \in N \qquad (3)$$

$$\sum_{i,j \in S}^{n} x_{ij} \leq |S| - 1 \qquad \forall S \subset N \qquad (4)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall_i, j \in N \qquad (5)$$

Onde: c_{ij} representa o custo de ir da cidade i a cidade j (distância); $x_{ij} = 1$, se arco $(i,j) \in$ A, ou seja, for escolhido o caminho da cidade i até a cidade j para integrar a solução; $x_{ij} = 0$, caso contrário; S : é um sub grafo de G. |S| : números de vértices do sub grafo S.

4 METODOLOGIA E RESULTADOS

Segue relato de como foi conduzida a atividade de introdução de conceitos matemáticos e aplicações da Programação Linear no desenvolvimento da disciplina de Matemática no 1º ano do Ensino Médio. O tempo total de desenvolvimento do trabalho com Programação Linear foi de 12 horas aulas, sendo as primeiras 6 horas aulas desenvolvidas em sala de aula e 6 horas aulas destinadas a orientações dos grupos em contra turno. A professora da turma, responsável pela atividade em estudo, é autora deste trabalho.

No segundo bimestre letivo, após o estudo analítico dos gráficos de funções lineares e funções afim, foi apresentado para uma turma de 38 alunos do 1º ano do Ensino Médio um problema não real de contextualização que serviria de suporte para a apresentação de alguns aspectos relacionados com os modelos de Programação Linear. O problema apresentado é um problema clássico conhecido como Problema da Produção e segue seu enunciado:

"A Indústria Alfa dispõe de capacidade extra para produzir dois novos produtos. A demanda é muito maior que a capacidade disponível, ou seja, toda produção poderá ser vendida. Os dados deste problema estão na tabela abaixo."

Setor	**Produto**		**Capacidade**
	Janelas	Portas	
Tempo de Montagem	1 horas/unidade	0	4.000 horas/mês
Tempo de Laminação	0	2 horas/unidade	12.000 horas/mês
Tempo de Corte	3 horas/unidade	2 horas/unidade	18.000 horas/mês
Lucro por unidade	$ 3,00	$ 5,00	****

Os questionamentos realizados pelo docente sobre o problema foram: (a) o que produzir? (b) quanto produzir? (c) qual será o maior lucro que a indústria poderá obter?

Os alunos se organizaram em grupos (com até três alunos) discutiram e buscaram estratégias para responder os questionamentos acima, sem a interferência da professora. Neste momento, a qualidade as soluções apresentadas pelos grupos não são relevantes, pois o objetivo maior desta introdução é o interesse de compreender a situação problema e a curiosidade de saber qual é a melhor decisão para a empresa e como alcançá-la. Poderíamos dizer que é uma introdução motivadora para o estudo em questão.

A seguir, os dados do problema foram analisados e organizados, com orientações da professora, de forma a construir o seu modelo matemático. As seguintes etapas foram seguidas:

- Primeiramente definir as **variáveis de decisão** do problema, pois o mesmo questiona quantas janelas e portas serão fabricadas para que a indústria obtenha um rendimento máximo.

x_1 = quantidade de janelas que deverá ser fabricada.

x_2 = quantidade de portas que deverá ser fabricada.

- Definir a função matemática a ser maximizada. Esta função é denominada **Função Objetivo:** Máx Z = $3x_1 + 5x_2$.

O problema apresenta limitações de recursos. Na tabela de dados do problema tem-se que o tempo/mês disponível para se executar a tarefa montagem limita-se em 4.000 horas/mês. Então, nesta etapa, trabalhamos com as inequações e foi possível concluir que podemos representar através de uma inequação a situação apresentada acima, que se refere ao recurso tempo/mês de montagem. Da mesma forma, podemos representar através de inequações as situações apresentadas na tabela do problema que se refere ao recurso horas/mês disponíveis para laminação e corte de trabalho. A natureza das variáveis de decisão foi discutida e adicionamos as inequações $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$. Nesta etapa foi possível então definir o conjunto de inequações que formam as **restrições** do problema.

- As restrições do problema foram representadas graficamente no plano cartesiano e a região interna do polígono obtido é denominou-se **Região Factível.** Neste momento discutimos o que a Região Factível representava e o entendimento de que a região continha todos os pontos (x_1, x_2), com x_1 e x_2 inteiros, candidatos à solução para o problema. Mas dentre todas as soluções, tínhamos que encontrar a melhor, ou seja, a solução que forneça o maior lucro possível para a empresa.

- A família da função objetivo, definida anteriormente, foi representada graficamente no mesmo plano cartesiano que continha as restrições e foi possível identificar graficamente a melhor reta que representava a maximização do lucro (MELO, 2012).

Após a realização das etapas acima, obteve-se o modelo matemático e a resolução gráfica do Problema da Produção proposto. A Figura 3 mostra a conclusão desta resolução.

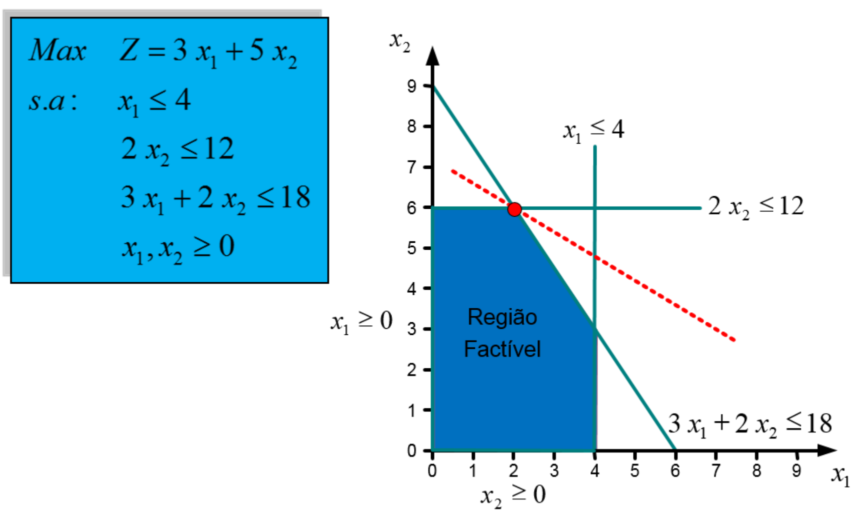

Figura 3 – Resultados do Problema da Produção proposto para os alunos
Fonte: Autores

Os conteúdos de matemática inerentes ao ano do curso, tais como: estudo da reta, inequações e sistema de inequações lineares, assim como a apresentação, desenvolvimento e resolução do Problema da Produção, foram abordados em sala de aula.

Outros problemas clássicos da Programação Linear, com duas variáveis de decisão, foram apresentados e discutidos da mesma forma que o Problema da Produção. Os problemas clássicos abordados foram: Problema da Dieta, Problema da Capacidade de Transporte, Problema do Transporte, Problema da Mochila, Problema de Designação, Problema do Caixeiro Viajante e o Problema das P-Medianas (PUCCINI; PIZZOLATO, 1990). Estes problemas foram discutidos em sala de aula e o modelo matemático e a resolução gráfica foram tarefas desenvolvidas pelo grupo como atividade de casa.

Como o objetivo final desta atividade era que os alunos abordassem um problema real com a Programação Linear e os problemas reais muitas vezes possuem mais que duas variáveis de decisão, realizamos uma atividade no laboratório de informática para a apresentação da ferramenta Solver do software Excel que, entre outras aplicações, resolve modelos matemáticos da Programação Linear. A utilização deste software para a resolução de problemas de Programação Linear pode ser consultado, passo a passo, em Dias (2011, p. 51).

Após os estudos teóricos, os grupos de alunos procuraram um problema real de Programação Linear. Os problemas escolhidos e investigados pelos alunos foram: investigar a otimização da produção de doces de uma confeiteira, maximizar o lucro das vendas de salgados da cantina, investigar a localização de banheiros públicos em uma região e minimizar a rota de uma van escolar. Alguns grupos não conseguiram identificar um problema real para o estudo e então receberam problemas fictícios de roteirização, localização e designação. O problema de otimizar a rota de uma van escolar, classificado como um Problema de Caixeiro Viajante, foi desenvolvido e apresentado no final do ano letivo por um aluno do 1º ano do Ensino Médio e selecionado para ser apresentado neste trabalho por ter sido um dos melhores trabalhos da turma.

Os grupos tinham orientações quinzenais em horários de contra turno, onde se percebeu que as particularidades de cada problema podem trazer a necessidade de outros conhecimentos ou ferramentas como, por exemplo, software Excel e uso de recursos do Google Maps. Na próxima seção, segue texto do relatório apresentado pelo aluno na apresentação do problema.

5 PROBLEMA ABORDADO PELO ALUNO

O problema abordado pelo aluno é um tipo de PCV em que um transporte escolar busca crianças em suas casas e as leva para a escola. Neste caso as casas das crianças serão os pontos de coleta e através do método de resolução matemático encontraremos a rota mais curta para buscar as crianças. Apesar de muito eficaz esse tipo de otimização de rotas o dono da empresa que forneceu os dados para o estudo em questão não tinha conhecimento deste método matemático que, se aplicado, poderia maximizar o seu lucro e minimizar o desgaste em seus veículos.

Para a obtenção dos dados foi necessário um acompanhamento no trajeto do transporte escolar, onde através de um programa vinculado a um G.P.S. cada ponto de embarque da criança foi registrado e posteriormente organizado em uma matriz que indica as distâncias reais entre todos os pontos. Neste caso o transporte escolar buscava 25 crianças e as levava para a escola, portanto teremos 25 pontos (vértices) mais dois vértices que se referem ao ponto de partida da condução escolar e o ponto de chegada (escola), totalizando um problema com 27 vértices. A figura 4 seguir indica o atual trajeto realizado pelo transporte escolar que é de 22,819 Km.

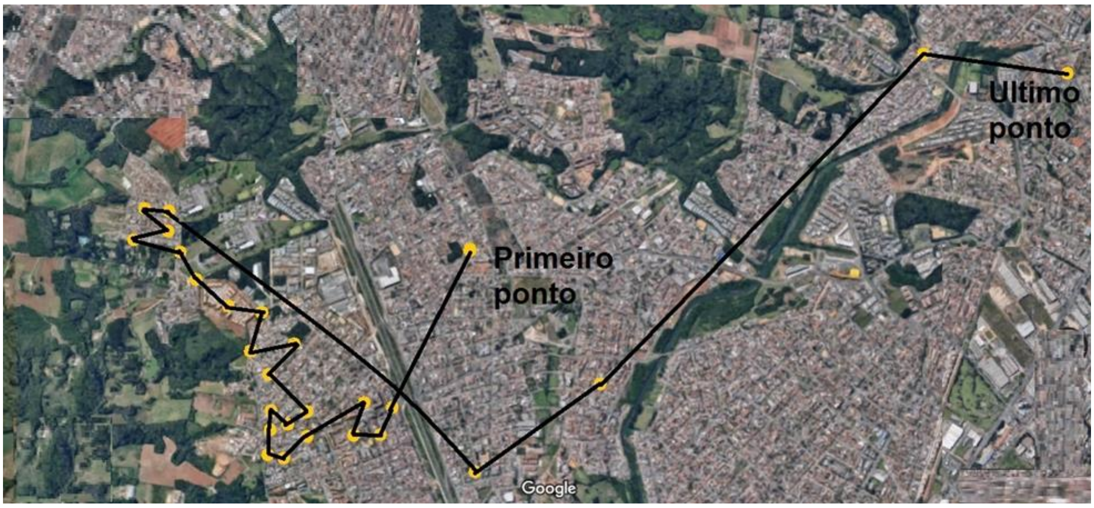

Figura 4 – Trajeto real percorrido.

6 RELATÓRIO SOBRE OS RESULTADOS DO PROBLEMA APRESENTADOS PELO ALUNO

Para a obtenção da solução ótima utilizou-se *os softwares* Lingo e Excel (Solver).

A distância otimizada a ser percorrida pelo transporte escolar é de 15,327 Km. A Figura 5 a seguir indica o percurso otimizado.

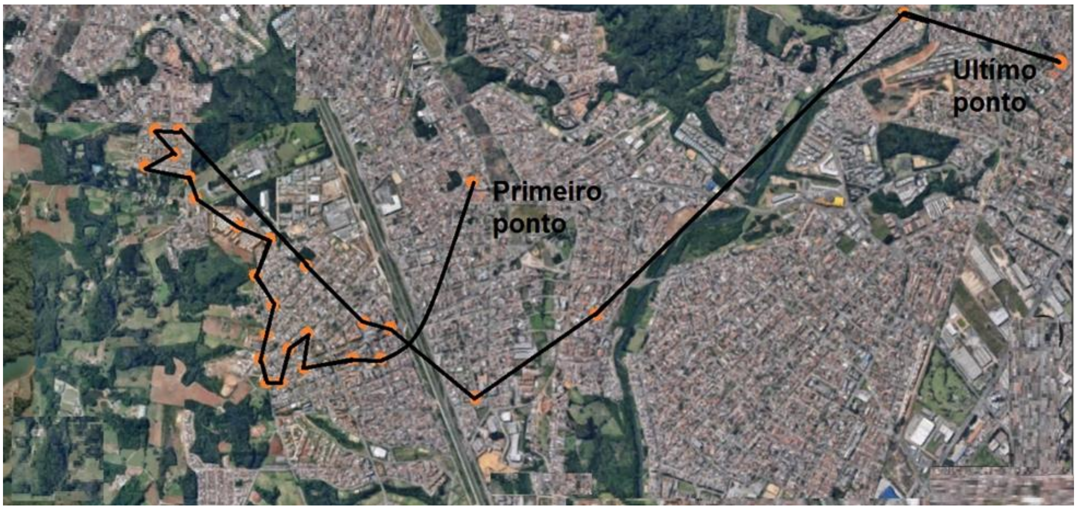

Figura 5: Trajeto teórico otimizado

7 RELATO DO ALUNO SOBRE A CONCLUSÃO DO ESTUDO DE ROTEIRIZAÇÃO

Observa-se que a diferença entre a distância percorrida atualmente pelo transporte escolar, que é 22,819 Km, e a distância otimizada de 15,327 Km, obtida através do modelo matemático, é igual a 7,492 Km. Esta diferença indica que a empresa poderá economizar, em um ano de trabalho que corresponde a 200 dias de acordo com a Lei nº 9.394/96, 1498,4 Km se adotar a rota otimizada.

Com os resultados obtidos vemos a importância do estudo do PCV, pois sem esse estudo este transporte escolar estaria fazendo um gasto anual perceptivelmente maior que se fizesse o caminho ideal.

8 CONCLUSÃO

O interesse de compreender a situação problema e a curiosidade de saber qual é a melhor decisão para a empresa e como alcançá-la foi motivadora para o estudo em questão.

Dos problemas de otimização, em que inúmeras soluções são possíveis, despertaram o interesse e contribuíram para uma participação mais ativa nas aulas de matemática. A partir da discussão desses problemas e das soluções apresentadas pelos alunos, com a utilização do software Excel (Solver), foram sistematizadas abordagens da Programação Linear. Essa experiência mostrou que houve maior dedicação às atividades da Programação Linear. Utilizando o método gráfico verificou-se a aplicação do Teorema Fundamental da Programação Linear e melhor aprendizagem dos discentes do ensino médio.

Os alunos elaboraram conclusões sobre o assunto estudado respeitando seus ritmos e ideias. Os recursos computacionais foram utilizados de forma consciente, pois o mesmo foi utilizado para que o aluno entendesse os resultados gerados.

O envolvimento e comprometimento dos alunos foram satisfatórios, pois percebeu-se que quando motivados de forma dinâmica o aluno tende a participar e responder, melhorando seu desempenho e aprendizado nas atividades propostas e dos conteúdos.

REFERÊNCIA

DIAS, M. A. F. A.. **Progamação Linear no ensino secundário**. 2011. 89 f. Dissertação Mestrado em Ensino da Matemática – Universidade de Aveiro, Portugal, 2011.

GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. L. **Otimização Combinatória e Programação Linear: Modelos e Algoritmos**. Rio de Janeiro. Campus, 2000.

MELO, J. N. B. **Uma Proposta de Ensino e Aprendizagem de Programação Linear no Ensino Médio.** Dissertação. Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, 2012.

NOGAMI, O.. **O Uso da Programação Linear na Otimização da Produçã**o. Pensamento & Realidade, São Paulo, v. 15, p.29-47. 2004.

PUCCINI, A.L., Pizzolato, N.D., **Programação Linear**, LTC, 1990

SILVA, K. **Modelagem Matemática com Programação Linear: Uma Proposta de Trabalho para o Ensino Médio.** Dissertação. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, 2013.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Ler, Escrever e Resolver Problemas**: habilidades básicas para aprender matemática. Artmed Editora, Porto Alegre, 2001.

TAUFER, F. S. G.; PEREIRA, E. C.. **Aplicação do Problema do Caixeiro Viajante na Otimização de Roteiros.** XXXI Encontro Nacional De Engenharia De Produção, 2011.