

Comparação entre as técnicas de interpolação direta e dupla reciprocidade na solução do problema de autovalor

Comparison of direct interpolation and double reciprocity techniques for solving the eigenvalue problem

DOI:10.34117/bjdv8n11-198

Recebimento dos originais: 14/10/2022

Aceitação para publicação: 16/11/2022

Thiago Galdino Balista

Mestre em Engenharia Mecânica

Instituição: Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)

Endereço: Av. Fernando Ferrari, 540, Goiabeiras, CEP: 29075-910 Vitória - ES

E-mail: thiago.balista@gmail.com

Carlos Friedrich Loeffler Neto

Doutor em Engenharia Mecânica

Instituição: Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)

Endereço: Av. Fernando Ferrari, 540, Goiabeiras, CEP: 29075-910 Vitória - ES

E-mail: loefflercarlos@gmail.com

Luciano de Oliveira Castro Lara

Doutor em Engenharia Mecânica

Instituição: Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)

Endereço: Av. Fernando Ferrari, 540, Goiabeiras, CEP: 29075-910 Vitória - ES

E-mail: castrolara@hotmail.com

RESUMO

O presente trabalho apresenta os princípios matemáticos e compara duas técnicas do Método dos Elementos de Contorno que usam funções de base radial para resolver a integral relacionada ao termo reativo da Equação de Helmholtz. Assim, em um primeiro momento, apresenta-se a técnica da Dupla Reciprocidade, a qual usa procedimentos relacionados com a aplicação de princípios de reciprocidade para transformar a integração do domínio em integral de contorno. Em um segundo momento, a apresenta-se a técnica da Interpolação Direta, que se baseia em um procedimento de interpolação, no qual todo o núcleo do integral do domínio é aproximado. A comparação entre as duas técnicas é realizada por meio da análise de precisão das frequências naturais, encontradas pela solução dos problemas de autovalor. Um exemplo clássico foi escolhido para a avaliação dos resultados.

Palavras-chave: método dos elementos de contorno, dupla reciprocidade, método interpolação direta.

ABSTRACT

This paper presents the mathematical principles and compares two techniques of the Boundary Element Method (BEM) that use radial basis functions to solve the integral related to the reactive of the Helmholtz Equation. Initially, the Dual Reciprocity technique (DRBEM) is presented, which uses procedures related to the application of reciprocity

principles to transform the domain integration into a boundary integral. In a second moment, it is shown the Direct Interpolation (DIBEM) which is based on an interpolation procedure in which the entire kernel of the domain integral is approximated. The comparison between the two techniques is performed through the precision analysis of the natural frequencies, found by the solution of the eigenvalue problems. A classic example was chosen for the evaluation of the results.

Keywords: boundary elements method, dual reciprocity, direct interpolation method.

1 INTRODUÇÃO

A ausência de discretização de domínio foi inicialmente relatada como uma das principais vantagens do Método dos Elementos de Contorno (MEC) em relação a métodos de domínio bem conhecidos, tais como o Método dos Elementos Finitos (MEF) e outros. Contudo, a transformação exata de integrais de domínio é possível usando uma função auxiliar, conhecida como a solução fundamental ou função de Green, que se ajusta exatamente ao operador diferencial original do problema abordado. É possível quando os operadores que caracterizam matematicamente a equação de governo são auto adjuntos. No entanto, a utilização de uma solução fundamental rigorosamente relacionada com o problema pode não ser numericamente interessante se a equação diferencial for complicada. Além disso, muitos problemas não têm uma solução fundamental, por exemplo, problemas fisicamente não homogêneos, problemas difusivo-advectivos com campos de velocidade variável, problemas de forças corpo, casos não lineares, etc.

Assim, se não existir uma solução fundamental rigorosamente correlacionada, a primeira técnica para resolver integrais de domínio consiste na discretização utilizando células, semelhante à MEF. No entanto, encontrar uma técnica que substitua adequadamente a integração do domínio no contexto MEC resultou no surgimento de muitas formulações MEC que transformam as integrais de domínio em integrais de contorno utilizando aproximações. A classe mais importante de estratégias emprega o procedimento de interpolação com base nas funções radiais [1]. A primeira estratégia bem conhecida é a Formulação da Dupla Reciprocidade (MECDR) [2]. Esta técnica foi inicialmente proposta para lidar com problemas de autovalor para análise de vibração livre linear [3], sendo rapidamente alargada a outras classes de problemas, por exemplo, difusão em regime transiente [4, 5], problemas de forças corpo [2], problemas difusivo-advectivos [6], problemas acústicos [7] e alguns casos de análises não lineares [2]. O MECDR utiliza uma solução fundamental simplificada, mas ainda está matematicamente

fechada ao problema proposto, sendo geralmente a solução do problema estacionário correlacionado. Esta função simplificada produz uma incontestável perda de precisão, mas o domínio integral é transformado. Deve ser destacado que utilizando uma função radial específica adequada para a aproximação, o princípio da reciprocidade reproduz a estrutura matemática dos termos estacionários. As matrizes que resultam na discretização dos termos estacionários são repetidas, produzindo uma evidente economia computacional.

Mais recentemente, foi proposto um novo modelo utilizando uma aproximação de base radial, denominado Método dos Elementos de Contorno de Interpolação Direta (MECID). Apresentando melhor desempenho do que o MECDR para vários problemas de campo escalar e, como vantagem adicional, não exigindo funções particulares [8, 9], ou seja, o MECID não exige uma função primitiva que reproduza precisamente o teorema da reciprocidade. Por essa razão, pode ser aplicado a problemas mais complexos, por exemplo, os modelos de placas finas e espessas.

O MECID é semelhante ao MECDR, mas está próximo de um procedimento de interpolação; assim, é ainda mais simples, mais geral e mais robusto, uma vez que não requer a construção de duas matrizes auxiliares através da multiplicação das matrizes clássicas de elementos de contorno H e G . Podem ser utilizados tipos mais amplos de funções radiais sem problemas numéricos, incluindo casos tridimensionais [10]. A sua combinação com o procedimento de interpolação de Gao's [11] permite uma redução do tempo computacional de muitas aplicações MEC com integrais de domínio [12]. Por outro lado, é necessário um número mais significativo de pontos interpolantes internos (polos), em comparação com o MECDR; contudo, este aspecto não pode ser necessariamente assumido como um defeito, uma vez que muitos graus de liberdade são essenciais na dinâmica. O clássico MECID tem um problema de singularidade produzido por coincidência entre o ponto fonte e o ponto campo no núcleo do domínio integral, que é totalmente interpolado, ao contrário do que ocorre com o MECDR.

Assim, este trabalho compara o desempenho de duas técnicas de solução baseadas no Método dos Elementos Contorno para resolver problemas de Helmholtz, com o objetivo de destacar o desempenho da técnica MECID comparativamente à técnica MECDR. Em relação ao exemplo estudado, são utilizados elementos lineares em todas as formulações.

2 EQUACIONAMENTO BÁSICO

Considerando os procedimentos matemáticos conhecidos do MEC, a equação integral de contorno de Helmholtz é dada por [13]:

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi; X)d\Gamma - \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi; X)d\Gamma = \frac{\omega^2}{k^2} \int_{\Omega} u(X)u^*(\xi; X)d\Omega \quad (1)$$

Na Eq. (1), o escalar $u(X)$ é o potencial, $q(X)$ é a sua derivada normal, $u^*(\xi; X)$ é a solução fundamental de Laplace e $q^*(\xi; X)$ é a sua derivada normal. A frequência de vibração considerada ao sistema é ω , k é a velocidade de propagação da onda, ξ é um ponto particular denominado ponto fonte e X é o ponto de campo. O coeficiente $c(\xi)$ depende da posição do ponto fonte relativamente ao domínio físico $\Omega(X)$; contudo, se este ponto estiver localizado no contorno, o valor do $c(\xi)$ também depende da sua suavidade [14]. A solução fundamental utilizada em Eq. (1) corresponde à expressão analítica do potencial produzido num meio infinito governado pela equação de Poisson, na qual uma fonte concentrada atua no ponto de origem ξ , ou seja:

$$u_{,ii}^*(\xi; X) = -\Delta(\xi; X) \quad (1)$$

Na Eq. (2), $\Delta(\xi; X)$ é a função Delta de Dirac. Resolvendo Eq. (2), tem-se:

$$u^*(\xi; X) = -\frac{\ln[r(\xi; X)]}{2\pi} \quad (2)$$

$$q^*(\xi; X) = -\frac{1}{2\pi r(\xi; X)} r_i(\xi; X) n_i(X) \quad (3)$$

Na Eq. (3) e (4), $r(\xi, X)$ é a distância euclidiana entre a fonte e os pontos de campo e $n_i(X)$ é a normal externa no contorno $\Gamma(X)$. A diferença entre o MECDR e o MECID diz respeito à abordagem do domínio integral referente à inércia do sistema, ou seja, o lado direito do Eq. (1). Nas seções seguintes, são brevemente apresentados os principais aspectos das formulações retratadas neste trabalho. Há muitos trabalhos em que são apresentados mais detalhadamente cada um dos métodos.

3 TÉCNICA DA DUPLA RECIPROCIDADE

A abordagem com o MECDR consiste em proceder com a seguinte aproximação para o potencial $u(X)$, presente no núcleo do domínio integral do lado direito da Eq. (1):

$$u(X) \approx \alpha^i F^i(X^i; X) = \alpha^i \Psi_{,jj}^i(X^i; X) \quad (4)$$

Na Eq. (5), α^i são coeficientes a serem determinados e $F^i(X^i; X)$ representa um conjunto de funções de interpolação radial. O Laplaciano das funções $\Psi^i(X^i; X)$ corresponde a $F^i(X^i; X)$; assim sendo, a transformação de integrais de domínio para o contorno pode ser implementada utilizando da integração por partes e da aplicação do Teorema da Divergência. Isto justifica a denominação de Dupla Reciprocidade. As funções radiais utilizadas se referem a pontos de base arbitrários X^i , geralmente escolhidos em coincidência com os pontos nodais. Estes pontos também devem ser localizados internamente para melhorar a interpolação proposta dentro do domínio. Assim sendo, é então possível reescrever a integral de domínio gerada pela formulação integral da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} u(X) u^*(\xi; X) d\Omega = -\alpha^i c(\xi) \Psi^i(\xi) + \int_{\Gamma} [\eta^i(X^i; X) u^*(\xi; X) - \Psi^i(X^i; X) q^*(\xi; X)] d\Gamma \quad (6)$$

Convém mencionar que $\eta^i(X^i; X)$ e $\Psi^i(X^i; X)$ são funções conhecidas, geradas a partir das funções $F^i(X^i; X)$ que são arbitrárias. As funções radiais simples e as funções de placa fina [8] produzem os melhores resultados. Ao definir os pontos fonte ξ , geralmente escolhidos em coincidência com os pontos de base das funções radiais e avançando para a discretização de acordo com os conhecidos passos do MEC, o domínio integral é transformado numa matriz que representa a propriedade de inércia do sistema:

$$\begin{aligned} [H]\{u\} - [G]\{q\} &= [H\Psi - G\eta]\{\alpha\} = \\ [H\Psi - G\eta]F^{-1}\{u\} &= \frac{\omega^2}{k^2} [M]\{u\} \end{aligned} \quad (7)$$

4 TÉCNICA DA INTERPOLAÇÃO DIRETA

A ideia básica do MECID é interpolar todo o núcleo do domínio integral no lado direito de Eq. (1), incluindo a solução fundamental, de acordo com Eq. (8):

$$u(X)u^*(\xi; X) \cong \xi \alpha^i F^i(X^i; X) \quad (5)$$

As mesmas funções radiais são aqui utilizadas e o mesmo tipo de procedimento realizado para MECDR também são aplicados, mas agora a diferença é que os coeficientes $\xi \alpha^i$ dependem do ponto de origem. Tais coeficientes podem ser obtidos por meio da resolução do sistema após a discretização [9]:

$$[\xi \alpha] = [F]^{-1} [\xi \Lambda] [F] \alpha = [F]^{-1} [\xi \Lambda] (u) \quad (6)$$

O termo integral de domínio é transformado para o contorno utilizando uma função primitiva:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \xi \alpha^i F^i(X^i; X) d\Omega &= \int_{\Omega} \xi \alpha^i \Psi_{jj}^i(X^i; X) d\Omega = \\ &= \int_{\Gamma} \xi \alpha^i \Psi_{jj}^i(X^i; X) n_j(X) d\Gamma = \\ &= \xi \alpha^i \int_{\Gamma} \eta^i(X^i; X) d\Gamma \end{aligned} \quad (10)$$

Para domínios convexos, o procedimento mostrado na Eq. (10) pode ser feito evitando a adoção de uma função primitiva, utilizando uma técnica de integração [15].

No MECID, uma vez que a solução fundamental também compõe o núcleo a ser interpolado, para que o ponto fonte ξ tenha a mesma posição que os pontos campo X , é necessário realizar um procedimento de regularização, como o proposto por Hadamard [16]. Neste sentido, o procedimento seguinte é realizado no termo integral do lado direito da Eq. (1):

$$\begin{aligned} c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} [u(X)q^*(\xi; X) - \\ q(X)u^*(\xi; X)] d\Gamma &= \frac{\omega^2}{k^2} \left\{ \int_{\Omega} [u(X)u^*(\xi; X)] d\Gamma - \right. \\ &= \int_{\Omega} [u(\xi)u^*(\xi; X)] d\Omega \left. + \right. \\ &= \frac{\omega^2}{k^2} \int_{\Omega} [u(\xi)u^*(\xi; X)] d\Omega \end{aligned} \quad (11)$$

Devido ao procedimento de regularização, a sentença básica dada na Eq. (5) engloba as duas primeiras integrais no lado direito da Eq. (11):

$$\frac{\omega^2}{k^2} \left\{ \int_{\Omega} [u(X)u^*(\xi; X)] d\Gamma - \int_{\Omega} [u(\xi)u^*(\xi; X)] d\Omega \right\} \approx \frac{\omega^2}{k^2} \left\{ \int_{\Omega} \xi \alpha^i F^i(X^i; X) d\Omega \right\} \quad (12)$$

O tratamento matricial desta equação, considerando os procedimentos típicos da MEC é apresentado em detalhes nos trabalhos anteriores [17], resultando no seguinte sistema matricial:

$$[H]\{u\} - [G]\{q\} = \frac{\omega^2}{k^2} [M]\{u\} \quad (7)$$

5 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

O MECDR e o MECID são formulações semelhantes: ambas transformam integrais de domínio em integrais de contorno e as integrações de domínio não são realizadas. Ainda assim, é necessário introduzir pontos interpolantes no interior do domínio para melhorar a precisão dos modelos numéricos, que empregam interpolação com funções de base radial. O MECDR aproxima por uma sequência de funções radiais apenas o potencial $u(X)$, (vide Eq. (5)) garantindo a ocorrência de matrizes referentes aos termos difusivos da equação do governo por meio do princípio da reciprocidade. O procedimento é elegante, mas tem apresentado problemas de estabilidade em problemas de resposta dinâmica. Um mau condicionamento das matrizes de interpolação também tem sido relatado na literatura. Existem fortes limitações no seu desempenho para muitos tipos de funções radiais, especialmente em casos tridimensionais.

O maior problema com o MECID é a utilização de demasiados pontos internos para alcançar uma boa precisão, pois é intrinsecamente um procedimento de interpolação. Contudo, como mencionado, tem maior robustez e flexibilidade e não necessita de utilizar funções primitivas, uma vez que o princípio da reciprocidade não é necessário.

Sendo assim, são comparados os resultados do MECDR e do MECID em problemas de autovalor. Os modelos de vibração estacionários gerados por estas formulações permitem a obtenção direta de frequências naturais, uma vez que as matrizes

não dependem delas. Por outras palavras, é formado um problema de autovalor padrão. A obtenção das frequências diretamente, por sua vez, permite a comparação direta da precisão dos dois modelos.

Os sistemas de equações mostrados tanto na Eq. (7) quanto na Eq. (13) precisam ser adequadamente operacionalizados antes de resolver o problema padrão de autovalor, isso porque envolvem simultaneamente valores do potencial quanto da sua derivada normal. Para fazer isso, é estratégico explicitar os valores do potencial e a derivada normal, na seguinte forma [3]:

$$\begin{bmatrix} H_{u\bar{u}} & H_{u\bar{q}} \\ H_{q\bar{u}} & H_{q\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ q \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{u\bar{u}} & G_{u\bar{q}} \\ G_{q\bar{u}} & G_{q\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ u \end{Bmatrix} = \lambda^2 \begin{bmatrix} M_{u\bar{u}} & M_{u\bar{q}} \\ M_{q\bar{u}} & M_{q\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ q \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Considerando que os valores prescritos para \bar{u} e \bar{q} são nulos na vibração livre, tem-se:

$$\begin{aligned} H_{u\bar{q}} u - G_{u\bar{u}} q &= \lambda^2 M_{u\bar{q}} u \\ H_{q\bar{q}} u - G_{q\bar{u}} q &= \lambda^2 M_{q\bar{q}} u \end{aligned} \quad (8)$$

Eliminando-se a derivada do potencial $q(X)$, obtêm-se:

$$[\bar{H}]\{u\} = \lambda^2 [\bar{M}]\{u\} \quad (9)$$

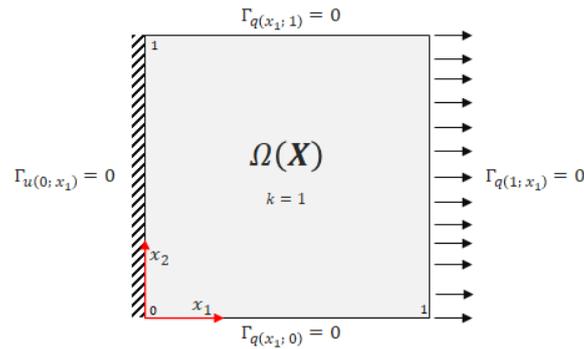
Onde:

$$\begin{aligned} [\bar{H}] &= [H_{qq}] - [G_{qu}][G_{uu}]^{-1}[H_{uq}] \\ [\bar{M}] &= [M_{qq}] - [G_{qu}][G_{uu}]^{-1}[M_{uq}] \end{aligned} \quad (10)$$

5.1 EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Este exemplo consiste em obter as frequências naturais por meio da solução do problema de autovalor em uma chapa quadrada fixa de dimensão unitária. Assim sendo, a Figura 1 apresenta as características físicas e geométricas deste problema.

Figura 1: Condições de contorno para a chapa engastada.



A propriedade k , por simplicidade, foi considerada unitária. Os valores analíticos das frequências, incluindo os valores relacionados com as vibrações transversais, são dados por:

$$\omega_{mn} = \frac{\pi}{2} \sqrt{4m^2 + 4n^2 - 4n + 1} \quad (11)$$

Os resultados são mostrados inicialmente para MECDR e posteriormente para MECID usando a mesma quantidade de pontos nodais. No que tange aos testes de convergência, recorreu-se ao critério de avaliação do erro relativo percentual $E(\%)$; este é igual à diferença entre os valores numéricos e analíticos dividida pelo módulo do maior valor analítico.

$$E(\%) = \sum_{i=1}^N |\omega_a - \omega_n|_i \frac{100}{N |M_{ant}|} \quad (12)$$

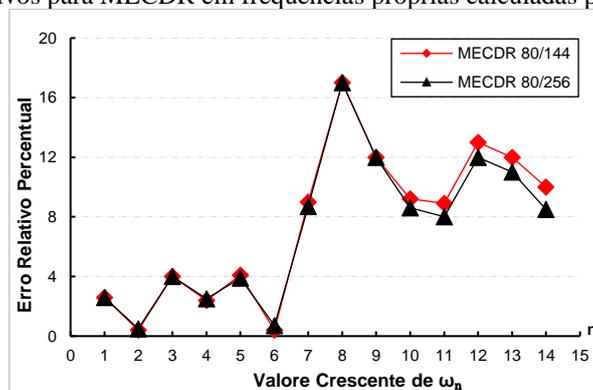
Na Eq. (19) os termos ω_a e ω_n representam os valores do potencial analítico e do potencial numérico calculado no ponto i respectivamente; M_{ant} é o maior valor analítico encontrado na varredura de cada problema; e N caracteriza o número de potenciais calculados ou graus de liberdade.

A função radial de placa fina foi utilizada em ambos os métodos, mas é de notar que a função radial simples também foi testada e mostrou resultados com precisão semelhante. Na dinâmica, tanto as propriedades de inércia devem ser bem constituídas como o modelo numérico deve ter graus de liberdade suficientes para que os altos modos vibracionais e as suas respectivas frequências sejam bem calculados. Infelizmente, as

primeiras experiências com o MECDR utilizaram apenas um ponto interno [3] e apenas se basearam num bom refinamento das malhas de elementos no contorno, o que foi insuficiente para uma boa precisão nos resultados. No entanto, o aumento destes pontos interpolantes no interior do domínio permitiu uma melhoria significativa nos resultados da análise de vibração e da resposta dinâmica. Ainda assim, é possível utilizar outras estratégias para melhorar a representação da inércia do sistema, tais como polinómios alargados [18, 19]. Contudo, este recurso, isoladamente, não pode reproduzir adequadamente o comportamento dos modos vibracionais superiores. Assim, a utilização de polos é ainda o melhor recurso auxiliar na dinâmica. Melhora a representação das propriedades e introduz os graus de liberdade necessários no sistema.

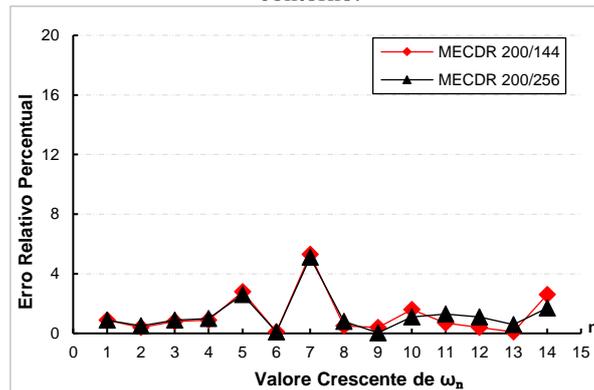
A Figura 2 mostra os resultados obtidos para a formulação do MECDR para o problema da chapa engastada utilizando malhas com 80 e 200 elementos de contorno linear. No gráfico, a notação na forma 84/144 indica, por exemplo, uma malha com 84 elementos de contorno e 144 pontos internos. Os erros relativos para as primeiras quatorze frequências são indicadas por caracteres preenchidos, que são ligados por linhas sólidas apenas para maior clareza. Como o refinamento da malha de contorno, a introdução de polos também produz uma melhoria significativa nos resultados de frequências mais altas, porque para uma boa representação destas é necessário ter informações mais precisas sobre a propriedade da inércia dentro do domínio. As frequências mais baixas são melhor calculadas, como em qualquer método numérico. No entanto, é salientado por experiências anteriores [10, 20] que a perda gradual de precisão no cálculo de autovalores não é monótona com o MECDR ou MECID. Alguns modos, mesmo correspondentes a frequências mais baixas, podem não ser bem representados pelo tipo de função radial e, principalmente, pela disposição dos pontos internos.

Figura 2: Erros relativos para MECDR em frequências próprias calculadas para a chapa engastada.



Não obstante da importância de introduzir pontos interpolantes no interior do domínio, o refinamento da malha de elementos no contorno continua a ser muito importante para reduzir erros, uma vez que os pontos de contorno refletem diretamente na construção de todas as matrizes MEC. Assim, a Figura 3 mostra os resultados para uma malha mais refinada no contorno.

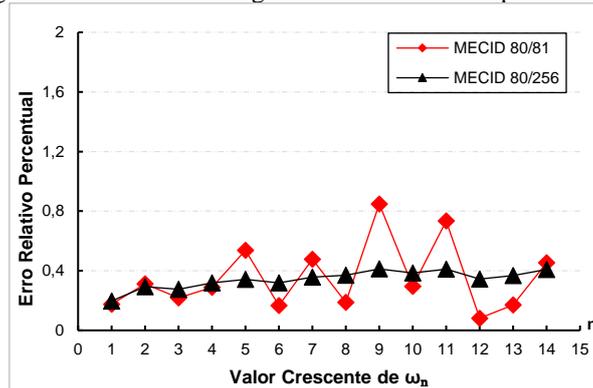
Figura 3: Curva de convergência do erro relativo para MECDR para uma malha mais refinada no contorno.



Como esperado, os erros diminuem significativamente nestas simulações em que a malha com 200 elementos no contorno foi utilizada. No entanto, pode ser observado que um grande número de pontos internos é impotente para melhorar os resultados de uma determinada malha de contorno. Em excesso, pontos interpolantes no interior do domínio podem produzir imprecisões e mesmo divergências nos resultados. Esta questão não se deve a problemas de integração numérica; resultam de um mau condicionamento da matriz.

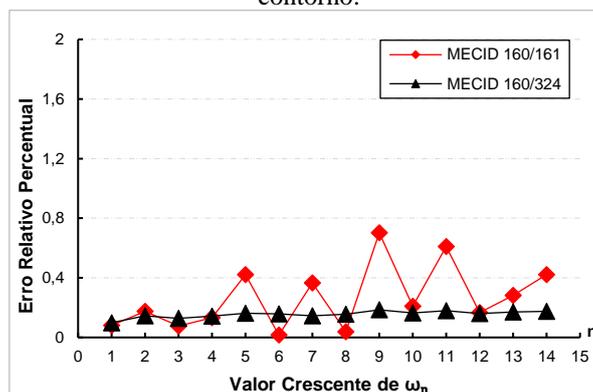
O MECID é mais sensível à introdução de polos, por isso as malhas necessitam obrigatoriamente de um maior número dos mesmos. No entanto, o mais relevante é que os resultados são superiores aos obtidos por MECDR, como se mostra na Figura 4 para malhas menos refinadas.

Figura 4: Curva de convergência do erro relativo para MECID.



Os erros do MECID são geralmente reduzidos quando são utilizadas malhas mais refinadas no contorno e com mais polos. O refinamento da malha dos elementos de contorno tem sobretudo impacto na precisão das primeiras frequências, enquanto que o efeito dos polos melhora as frequências mais altas. Não deve utilizar malhas muito refinadas no contorno sem uma quantidade relativamente próxima de polos. Como já foi mencionado, as frequências específicas, mesmo que mais baixas, podem ter menos precisão devido à distribuição dos polos. Embora menos significativa, a relação entre a distribuição dos polos localizados no limite e a sua disposição no interior também influencia os resultados.

Figura 4: Curva de convergência do erro relativo para MECID para uma malha mais refinada no contorno.



A superioridade dos resultados do MECID em relação ao MECDR é bastante significativa. Esta mesma tendência aparece na simulação de problemas regulares com outras condições de contorno, mas não mostrados aqui por questão de espaço.

6 CONCLUSÕES

No que tange aos problemas de campo escalar, tanto a técnica do MECDR quanto o MECID são muito flexíveis quanto simples de programar. Ambas transformam integrais de domínio em integrais de contorno por meio de interpolação com funções radiais. Contudo, no MECDR, as primitivas das funções radiais permitem a aplicação do princípio da reciprocidade, conduzindo as integrais para o contorno do problema em termos das matrizes H e G , já obtidas na operacionalização integral do termo difusivo. No entanto, tais funções primitivas empregadas no MECDR - chamadas soluções particulares - precisam estar relacionadas com o operador diferencial que rege a solução estacionária. Em problemas de campo escalar, o operador diferencial é simples, dado pelo Laplaciano; contudo, estes operadores podem ser complicados em outras situações. Além disso, há questões numéricas relacionadas com o condicionamento da matriz, relatadas em algumas aplicações ou associadas com a precisão dos resultados. Diante do aspecto supracitado, a solução do problema de autovalor aqui apresentado confirmou a precisão razoável do MECDR apenas para o cálculo das primeiras frequências naturais.

O MECID não requer soluções particulares para reproduzir o princípio da reciprocidade que garante a sua acessibilidade em problemas mais elaborados. Sendo aplicado no núcleo completo da integral de domínio, o MECID é mais versátil uma vez que pode ou não usar funções radiais primitivas para transformar o termo integral de domínio num termo de contorno. No entanto, requer um maior número de pontos interpolantes no interior do domínio do que o MECDR, o que tem impacto no custo computacional. A maior qualidade dos resultados das frequências naturais para os problemas de autovalor confirma a superioridade do MECID sobre o MECDR nos problemas de Helmholtz.

O MECID foi testado com sucesso em problemas de difusão-advectação, problemas tridimensionais e problemas fisicamente não homogêneos [21]. Já foram feitas comparações com MECDR e com o Método dos Elementos Finitos em outros problemas de campo escalar, apontando o desempenho superior do MECID em termos de precisão dos resultados e robustez numérica [22].

Finalmente, tendo em vista os parâmetros analisados, em trabalhos futuros, pode-se propor a extensão da formulação MECID para problemas dinâmicos, isto é, casos em que a resposta avança no tempo, além realizar a modelagem matemática para outros tipos de problemas, por exemplo: os de elasticidade.

REFERÊNCIAS

- [1] BUHMANN, M. D. Radial Basis Function: Theory and Implementations. London: Cambridge Press, 2003.
- [2] PARTRIDGE, P. W.; BREBBIA, C. A.; WROBEL, L. C. The Dual Reciprocity Boundary Element Method. London: Computational Mechanics Publications and Elsevier; 1992.
- [3] NARDINI, D.; BREBBIA, C. A. A New Approach to Free Vibration Analysis Using Boundary Elements. Applied Mathematical Modelling, v. 7, n. 3, p. 157-162, 1983.
- [4] LOEFFLER NETO, C. F.; MANSUR, W. J. Application of the Sub-Regions Technique of the Boundary Element Method in Transient Heat Transfer Using Time Independent Fundamental Solution (in Portuguese). Proceedings of the VII Congresso Latino Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia. São Carlos, v. 2, p. 1022-1048, 1986.
- [5] WROBEL, L. C.; BREBBIA, C. A.; NARDINI, D. The Dual Reciprocity Boundary Element Formulation for Transient Heat Conduction. Finite Elements in Water Resources, v. 6, p. 801-811, 1986.
- [6] WROBEL, L. C., DEFIGUEIREDO, D. B. A Dual Reciprocity Boundary Element Formulation for Convection-Diffusion Problems with Variable Velocity Fields. Engineering analysis with Boundary Elements, v. 8, n. 6, p. 312-319, 1991.
- [7] LOEFFLER NETO, C. F.; MANSUR, W. J. Analysis of Time Integration Schemes for Boundary Element Applications to Transient Wave Propagation Problems. Boundary Element Techniques: Applications in Stress Analysis and Heat Transfer. Computational Mechanics Pub, p. 105-124, 1987.
- [8] LOEFFLER, C. F.; CRUZ, A. L.; BULCÃO, A. Direct use of Radial Basis Interpolation Functions for Modelling Source Terms with the Boundary Element Method, Engineering Analysis with Boundary Elements, v. 50, p. 97-108, 2015.
- [9] LOEFFLER, C. F.; BARCELOS, H. M.; MANSUR, W. J.; BULCÃO, A. Solving Helmholtz Problems with the Boundary Element Method Using Direct Radial Basis Function Interpolation. Engineering analysis with Boundary Elements, v. 61, p. 218–25, 2015.
- [10] BARBOSA, J. P.; LOEFFLER NETO, C. F.; LARA, L. O. C. Frequencies Evaluation in Three-Dimensional Piecewise Homogeneous Helmholtz Problems. Engineering Analysis with Boundary Elements, v. 121, p. 104-115, 2020.
- [11] CAMPOS, L. S.; LOEFFLER NETO, C. F.; NETTO, F. A.; SANTOS, A. J. Testing the Accomplishment of the Radial Integration Method with the Direct Interpolation Boundary Element Technique for Solving Helmholtz Problems. Engineering Analysis with Boundary Elements, v. 110, p. 16–23, 2020.
- [12] LOEFFLER NETO, C. F.; GALIMBERTI, R.; BARCELOS, H. M. A Self-Regularized Scheme for Solving Helmholtz Problems Using the Boundary Element

Direct Integration Technique with Radial Basis Functions. *Engineering analysis with Boundary Elements*, v. 118, p. 11–19, 2020.

[13] BREBBIA, C. A.; WALKER, S. *Boundary Element Techniques in Engineering*. U.K.: Newnes-Butterworths, 1980.

[14] WROBEL, L. C.; ALIABADI, M. H. *The boundary element method*. Chichester, UK: Wiley, 2002.

[15] GAO, X. W. The Radial Integration Method for Evaluation of Domain Integrals with Boundary-Only Discretization. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 26, n. 10, p. 905–16, 2002.

[16] PESSOLANI, R. V. An hp-adaptive hierarchical formulation for the boundary element method applied to elasticity in two dimensions. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*, v. 24, n. 1, p. 23-45, 2002.

[17] LOEFFLER NETO, C. F.; PEREIRA, P. V. M.; BARCELOS, H. M. Direct Interpolation Technique using Radial Basis Functions Applied to the Helmholtz Problem. In: *15 International Conference on Boundary Element and Meshless Techniques*, p. 223-228, 2014.

[18] GOLBERG, M. A.; CHEN, C. S. The Theory of Radial Basis Function Applied to the BEM for Inhomogeneous Partial Differential Equations. *Bound Elem Commun*, v. 5, n. 2, p. 57-61, 1994.

[19] GOLBERG, M. A.; CHEN, C. S.; BOWMAN, H.; POWER, H. Some Comments on the use of Radial Basis Functions in the Dual Reciprocity Method. *Comput Mech*, v. 22, n. 1, p. 61-69, 1998.

[20] BARBOSA, J. P.; LOEFFLER, C. F., BARCELOS, H. M.; LARA, L. C. O. Application of Boundary Element Method Superposition Technique for Solving Natural Frequencies in Piecewise Homogeneous Domains, *Computers & Mathematics with applications*, v. 79, n. 4, p. 1131-1144, 2020.

[21] LOEFFLER, C. F.; BARCELOS, H. M.; BARBOSA, J. P. Performance Analysis of the Direct Integration Technique for Solving Eigenvalue Problems with Non- Regular Domains, doi: //10.20906/CPS/CILAMCE2017-0775.

[22] BARBOSA, J. P.; LOEFFLER, C. F.; BARCELOS, H. M. Performance of BEM Superposition Technique for Solving Sectorially Heterogeneous Laplace's Problems with Non-regular Geometry, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 93, p. 105–11, 2018.