

Verification of the secondary reinforcement influence on the strap beams design

Verificação da influência da armadura de costura no dimensionamento de vigas de equilíbrio

DOI:10.34117/bjdv8n10-315

Recebimento dos originais: 26/09/2022

Aceitação para publicação: 26/10/2022

Paula Fernanda Guedes

Mestre em Engenharia Civil pela Universidade Estadual de Maringá (PCV – UEM)
Institution: Secretaria de Obras Prefeitura Municipal de Curitiba
Address: R. Emílio de Menezes, 450, São Francisco, Curitiba - PR, CEP: 80510-320
E-mail: paulafndguedes@gmail.com

Sérgio Trajano Franco Moreiras

Doutor em Geotecnia
Institution: Universidade Estadual de Maringá (UEM) - Campus Avançado de Umuarama
Address: Av. Angelo Moreiras da Fonseca, 1800, Umuarama – PR, CEP: 87506-370
E-mail: strajano@gmail.com

José Adauto da Cruz

Pós-Doutorado em Física pela Universidade de Aveiros
Institution: Universidade Estadual de Maringá (UEM) - Campus Avançado de Umuarama
Address: Av. Angelo Moreiras da Fonseca, 1800, Umuarama – PR, CEP: 87506-370
E-mail:joseadautodacruz@gmail.com

ABSTRACT

The present work aims to expose a methodology for the design of strap beams between pile caps, and to investigate the effect of secondary reinforcement on the behavior of the pile cap located on the property line. For the study, it was selected the deep foundation geometry of a borderline pillar from the infrastructure design of a building. A design methodology was then presented for the foundations' reinforcement. In ABAQUS [1] software, based on the Finite Element Method, a non-linear analysis of four models related to the case study was performed, with the variation of the secondary reinforcement arrangement. It was found that the combined horizontal and vertical secondary reinforcements were efficient to ensure a more ductile failure for the concrete strut. However, the model with the secondary reinforcement inclined at 45° showed the highest resistance.

Keywords: strap beam, pile cap, numerical analysis, secondary reinforcement, non-linear analysis.

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo expor uma metodologia para o dimensionamento de vigas de equilíbrio entre blocos de coroamento, e investigar o efeito das armaduras de

costura no comportamento do bloco de divisa. Para o estudo foi selecionada a geometria de um pilar de divisa a partir do projeto de fundações de um edifício. Apresentou-se então uma metodologia de dimensionamento para as armaduras das fundações. No programa computacional ABAQUS [1], baseado no Método dos Elementos Finitos, realizou-se uma análise não-linear de quatro modelos relativos ao estudo de caso, com a variação do arranjo de armaduras de costura. Constatou-se que as armaduras secundárias horizontais e verticais combinadas foram eficientes para garantir uma ruptura mais dúctil para a escora de concreto. No entanto, o modelo com as armaduras de costura inclinadas em 45° apresentou a maior resistência, verificando-se a segurança da estrutura.

Palavras-chave: viga de equilíbrio, bloco de coroamento, análise numérica, armadura de costura, análise não-linear.

1 INTRODUÇÃO

A fim de se obter um melhor aproveitamento do espaço de terrenos, é comum a construção de edificações junto aos limites da propriedade. Nestas situações, os pilares localizados nas divisas ficam excêntricos em relação às suas fundações, visto que, tratando-se de fundações profundas, a estaca deve respeitar uma distância mínima da divisa que será em função de seu diâmetro e de seus métodos construtivos. Assim, o centro de gravidade do pilar não coincide com o centro de gravidade das fundações, gerando tensões de flexão elevadas tanto na estaca, quanto no bloco de coroamento, que é o elemento de transição entre esses dois componentes. Usualmente, para aliviar esses esforços, utiliza-se uma viga que liga a fundação de divisa a uma fundação centrada, a qual é denominada viga de equilíbrio ou viga alavanca.

É frequente encontrar na literatura recomendações quanto ao dimensionamento de vigas de equilíbrio entre sapatas, como o exposto por Alonso [2], Campos [3], Bowles [4], Guzman [5] e Das [6]. Contudo, Tanno [7] é um dos poucos autores a mencionar o dimensionamento de vigas de equilíbrio entre blocos de coroamento.

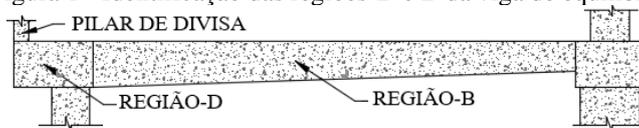
Em seu estudo, Tanno [7] abordou o comportamento desses elementos por meio de análises elásticas-lineares no programa de elementos finitos DIANA, e expôs um roteiro de dimensionamento para as vigas de equilíbrio entre blocos.

Os blocos de coroamento são zonas de transição entre a estrutura e as estacas da fundação, sendo a região em que ocorre a transferência das cargas dos pilares para as estacas. Esses elementos estruturais tratam-se de descontinuidades geométricas, nas quais o caminho percorrido pelas tensões não se dá de forma regular, o que os caracteriza como regiões- D, descritas por Schlaich, Schäfer e Jennewein [8].

Segundo Campos [3], o cálculo e detalhamento da viga de equilíbrio seguem os procedimentos usuais do dimensionamento à flexão de vigas, uma vez que essa região apresenta características de uma região-B. Já a região de transição no bloco entre o pilar de divisa e a estaca apresenta um fluxo desordenado de tensões, característico de regiões-

D. Assim, o dimensionamento da viga de equilíbrio pode ser dividido em duas partes: região-D e região-B, como mostrado na Figura 1. Para Alonso [2], o trecho da viga de equilíbrio na região do pilar de divisa é uma peça estrutural que pode ser analisada como um consolo.

Figura 1 - Identificação das regiões-D e B da viga de equilíbrio

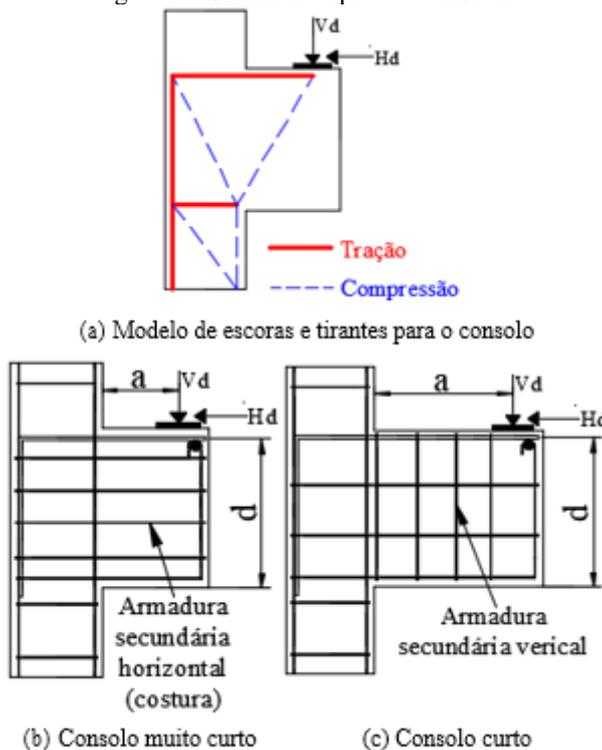


Fonte: o próprio autor

Um consolo pode ser definido como um elemento estrutural saliente em relação ao seu apoio, geralmente solicitado por aplicação de forças na face superior junto ao seu extremo livre. São típicas regiões-D, e seu dimensionamento deve levar em conta as particularidades de seu comportamento estrutural. De acordo com Canha et al. [9] dois mecanismos governam o comportamento de consolos: o “Modelo de Escoras e Tirantes” e a “Teoria do Atrito Cisalhamento”, onde um é mais predominante que o outro dependendo da relação a/d , onde “a” é a distância entre o ponto de aplicação da carga e a face do apoio, e “d” é a altura útil. Dessa forma, consolos muito curtos ($a/d < 0,5$) devem ser dimensionados segundo a “Teoria do Atrito-Cisalhamento” e consolos curtos ($0,5 \leq a/d \leq 1$) segundo o “Método das Bielas”. Consolos longos ($a/d > 1$), por outro lado, podem ser calculados como vigas em balanço, por meio dos métodos usuais de dimensionamento à flexão em vigas.

Na Figura 2(a) é apresentado um consolo com o modelo de escoras e tirantes idealizado, sendo que as tensões de tração são condensadas em tirantes e as de compressão em escoras, formando uma treliça isostática. Na Figura 2(b) e (c) são mostrados um consolo muito curto e um consolo curto, respectivamente, com a indicação das armaduras típicas desses elementos estruturais.

Figura 2 - Geometria típica de consolos



Fonte: adaptado do EUROCODE 2 [12]

Segundo El Debs [10], além da armadura do tirante principal, responsável por absorver as tensões de tração no topo do consolo, uma outra armadura de grande importância deve ser distribuída na direção horizontal ao longo da altura do elemento, a qual é denominada armadura de costura. Sua principal função é “costurar” as fissuras que possam ocorrer entre o consolo e o pilar e promover o confinamento da escora de compressão, garantindo um comportamento mais dúctil ao elemento.

Diante disso, o presente trabalho busca aprofundar os estudos a respeito do comportamento de fundações de pilares localizados nas divisas de terrenos, de modo a expor uma metodologia de dimensionamento para vigas de equilíbrio entre blocos sobre estacas, e realizar uma análise numérica para a verificação estrutural no programa computacional ABAQUS [1], baseado no Método dos Elementos Finitos. Com isso, pretende-se investigar a influência da variação do arranjo de armaduras de costura na região de divisa.

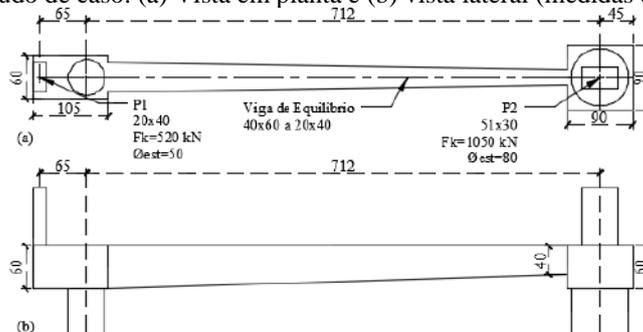
Propõem-se analisar o conjunto bloco, estacas e viga de equilíbrio, de forma a considerar a não-linearidade física do concreto e do aço, e simular a interação das estacas com o solo por meio de molas discretizadas. A distribuição das armaduras secundárias na região do bloco foi avaliada por meio da análise de quatro modelos com a variação desse tipo de armadura. A partir da verificação estrutural foram analisados parâmetros que

definem o desempenho do elemento, como a carga máxima suportada pela estrutura, o modo de ruptura e a distribuição das deformações plásticas no concreto.

2 METODOLOGIA

Foi selecionado como estudo de caso o projeto de um edifício com três pavimentos e ocupa aproximadamente 660 metros quadrados de um terreno, sendo que uma de suas laterais e o seu fundo fazem divisa com os terrenos vizinhos. No projeto, foram adotadas fundações profundas do tipo hélice contínua, com blocos de uma estaca. A partir do projeto de fundações, foi selecionado o caso de um pilar de divisa com seção de 20 x 40 cm, e uma carga característica atuante de 520 kN. A geometria das fundações do pilar selecionado é mostrada na Figura 3.

Figura 3 - Estudo de caso: (a) Vista em planta e (b) vista lateral (medidas em centímetros)



Fonte: o próprio autor

No modelo, a excentricidade formada entre o centro de gravidade do pilar de divisa e o centro de gravidade da estaca é 65 cm. A estaca de divisa possui o diâmetro de 50 cm e comprimento de 14 metros no solo. O bloco de divisa é ligado a um bloco interno de pilar centrado por meio de uma viga de equilíbrio. Como visto na Figura 3(a) o bloco de divisa possui dimensões em planta de 60 x 105 cm e altura de 60 cm. A viga de equilíbrio, por sua vez, possui seção variável de 40 x 60 cm a 20 x 40 cm.

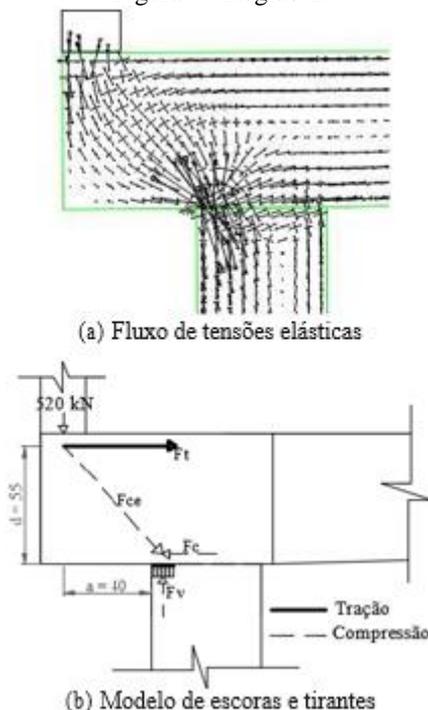
O bloco interno possui dimensões em planta de 90 x 90 cm, altura de 60 cm e uma estaca de 80 cm de diâmetro com comprimento de 14 metros no solo. Já o pilar interno P2 possui seção de 51 x 30 cm e uma carga característica atuante igual a 1050 kN.

2.1 DIMENSIONAMENTO DO MODELO

No dimensionamento proposto para a viga de equilíbrio, o elemento foi dividido em duas regiões distintas: a região-D, que compreende o bloco de divisa, entre o pilar e a estaca; e a região-B, que consiste na viga entre os blocos. Na Figura 4(a) é mostrado o

fluxo de tensões elásticas na região de divisa. Percebe-se que as tensões de compressão se encaminham do pilar até a estaca, formando uma escora com tensões transversais de tração. Essa configuração é muito semelhante à de um consolo. Assim, para a região-D é adotado o modelo de escoras e tirantes apresentado na Figura 4(b), típico de consolos.

Figura 4 - Região-D



Fonte: o próprio autor

Desse modo, para o dimensionamento da região de divisa foram utilizadas as equações desenvolvidas para consolos em função do valor da relação a/d . Para a região-D classificada como consolo curto, a compressão na escora diagonal foi verificada por meio do “Método das Bielas”, utilizando a Equação 1 [10], e a armadura do tirante principal na parte superior foi dimensionada segundo a Equação 2 [10].

$$\sigma_{cd} = \frac{V_d}{0,18 \cdot b \cdot d} \sqrt{0,9^2 + \left(\frac{a}{d}\right)^2} \leq \beta \cdot f_{cd} \quad (1)$$

$$A_{s,tir} = \frac{V_d}{f_{yd}} \cdot \frac{a}{0,9d} + 1,2 \frac{H_d}{f_{yd}} \quad (2)$$

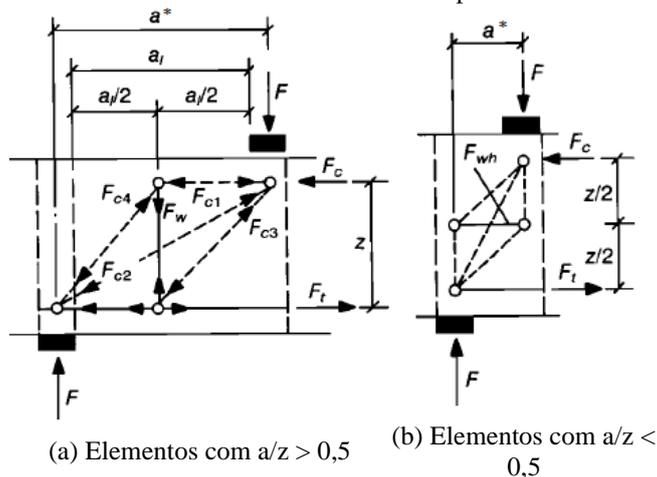
onde “ V_d ” é a carga vertical de projeto aplicada ao pilar, “ H_d ” é a carga horizontal de projeto atuante no balanço, “ b ” é a largura da viga, “ d ” é a altura útil, “ a ” é a distância

entre o ponto de aplicação da carga até a face do apoio, “ f_{cd} ” é a resistência de cálculo à compressão do concreto, “ f_{yd} ” é a resistência de cálculo ao escoamento do aço, e “ β ” é um coeficiente igual a 1 para cargas diretas e 0,85 para cargas indiretas.

Segundo os códigos europeus CEB-FIP ModelCode 1990 [11] e EUROCODE 2 [12], as armaduras secundárias são constituídas por estribos verticais e horizontais, e devem ser dispostas segundo a relação a/d do consolo. No caso de consolos curtos devem ser previstos estribos verticais e no caso de consolos muito curtos, estribos horizontais (armadura de costura), ou uma combinação das duas armaduras em ambos os casos.

O código modelo CEB-FIP ModelCode 1990 [11] especifica modelos de escoras e tirantes refinados para o dimensionamento das armaduras secundárias em função da relação a^*/z de regiões de descontinuidade, como mostrado na Figura 5.

Figura 5 - Modelos refinados de escoras e tirantes para armaduras secundárias



Fonte: CEB-FIP ModelCode 1990

O código prevê uma equação para a determinação da força vertical “ F_w ”, que atuará predominantemente em consolos curtos, com $a^*/z > 0,5$ (vide Figura 5(a)) e uma equação para o cálculo da força horizontal “ F_{wh} ”, predominante em consolos muito curtos, que possuem a relação $a^*/z < 0,5$ (vide Figura 5(b)). A partir da determinação dessas forças é possível dimensionar as armaduras secundárias verticais e horizontais em regiões de descontinuidade. No código modelo CEB-FIP ModelCode 1990 [11], a variável chamada no presente artigo de “ a^* ” a é distância entre a aplicação da carga até o centro da região nodal da escora de tensões idealizada, como mostrado nas Figuras 5(a) e (b). A Equação 3 prevê o cálculo da força vertical “ F_w ”, e a Equação 4, por sua vez, determina o cálculo da força horizontal “ F_{wh} ”.

$$F_w = \frac{\frac{2a^*}{z} - 1}{3 - N_{sd}/F_d} F_d \quad (3)$$

$$F_{wh} = \frac{\frac{2z}{a^*} - 1}{3 + F_d/F_c} F_c \quad (4)$$

onde “Fd” é a força vertical de cálculo aplicada ao balanço e “Nsd” é a força axial, que no caso dos consolos pode ser considerada igual a uma força horizontal atuante no balanço. Assim, calcula-se a armadura vertical “Asv” por meio da Equação 5, e a armadura horizontal, de costura, “Ash”, por meio da Equação 6.

$$A_{sv} = \frac{F_w}{f_{yd}} \quad (5)$$

$$A_{sh} = \frac{F_{wh}}{f_{yd}} \quad (6)$$

Os estribos verticais devem ser dispostos entre o apoio e o ponto de aplicação da carga no consolo. Assim, Santos e Stucchi [13] recomendam que essa distância seja determinada por “aw”, que é dado pela Equação 7.

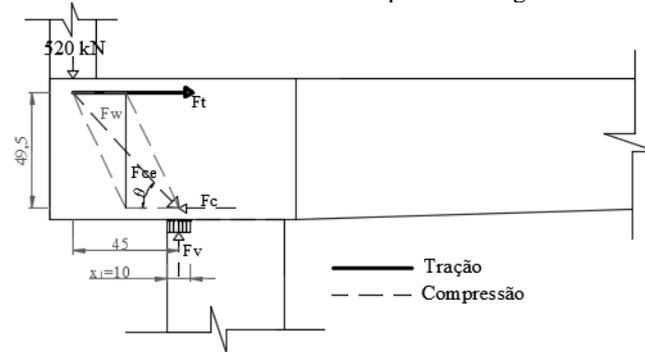
$$a_w = 0,85 \cdot a^* - \frac{z}{4} \quad (7)$$

O modelo de escoras e tirantes refinado, aplicado à região-D entre o pilar de divisa e a estaca é mostrado na Figura 6.

A região-B da viga de equilíbrio e as estacas, por sua vez, foram dimensionadas segundo as equações usuais da flexão e cortante, conforme a ABNT NBR 6118 [14]. Os esforços foram obtidos por meio de uma análise de equilíbrio no Ftool [15], considerando o conjunto blocos, viga de equilíbrio e estacas em forma de um pórtico simplificado mostrado na Figura 7.

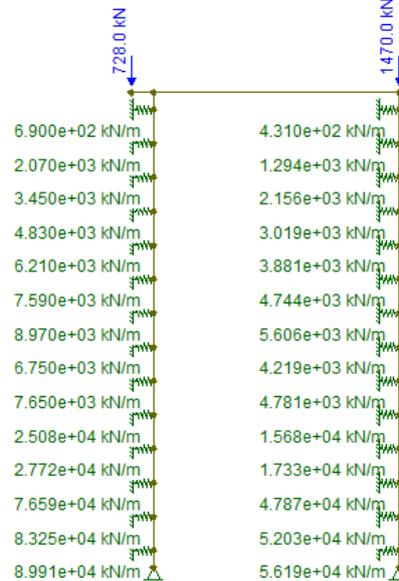
Para considerar a interação das estacas com o solo de uma maneira aproximada, foram aplicadas molas nas laterais das estacas segundo o modelo de Winkler, cujos coeficientes de rigidez foram calculados conforme o exposto por Velloso e Lopes [16], baseados em Terzaghi [17].

Figura 6 - Modelo de escoras e tirantes refinado aplicado à região-D da viga de equilíbrio



Fonte: o próprio autor

Figura 7- Pórtico simplificado considerado para a obtenção dos momentos e cortante



Fonte: o próprio autor

2.2 AVALIAÇÃO DO COMPORTAMENTO ESTRUTURAL

A fim de verificar a efetividade da metodologia de dimensionamento adotada e a influência das armaduras secundárias verticais e horizontais de costura na região do bloco de divisa, foram analisados no programa computacional ABAQUS [1] quatro modelos relativos ao estudo de caso. Para todos os modelos de concreto armado, foi considerado o comportamento não-linear do material por meio do modelo do dano plástico, chamado no programa de “Concrete DamagedPlasticity” (CDP). Um resumo dos modelos armados que foram analisados é apresentado na Tabela 1.

Tabela 1 - Modelos analisados no ABAQUS

Armaduras secundárias entre o pilar e a estaca	
Modelo A	Sem armaduras secundárias
Modelo B	Estribos verticais (5φ8 mm)
Modelo C	Estribos verticais (5φ8 mm) e ganchos horizontais (5φ8 mm)
Modelo D	Estribos inclinados em 45° (4φ8 mm)

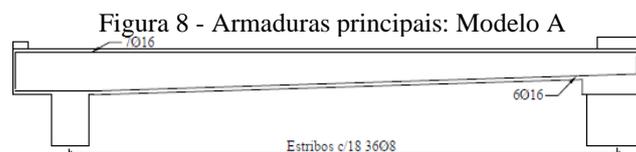
Fonte: o próprio autor

Em cada modelo, foi analisada a rigidez do elemento por meio da correlação entre a carga atuante no pilar de divisa e o deslocamento vertical máximo na parte inferior do bloco. Foram determinadas as regiões sujeitas ao dano plástico, bem como a distribuição de tensões entre o concreto e a as armaduras.

As armaduras principais dimensionadas para a viga de equilíbrio são apresentadas na Figura 8, e correspondem ao reforço do Modelo A. Na Figura 9 são detalhadas as armaduras secundárias correspondentes ao Modelo B (Figura 9(a)), Modelo C (Figura 9(b)) e Modelo D (Figura 9(c)). Em todos os modelos foram inseridas as armaduras principais, e a estaca de divisa foi armada com 10 barras longitudinais de 16 mm de diâmetro.

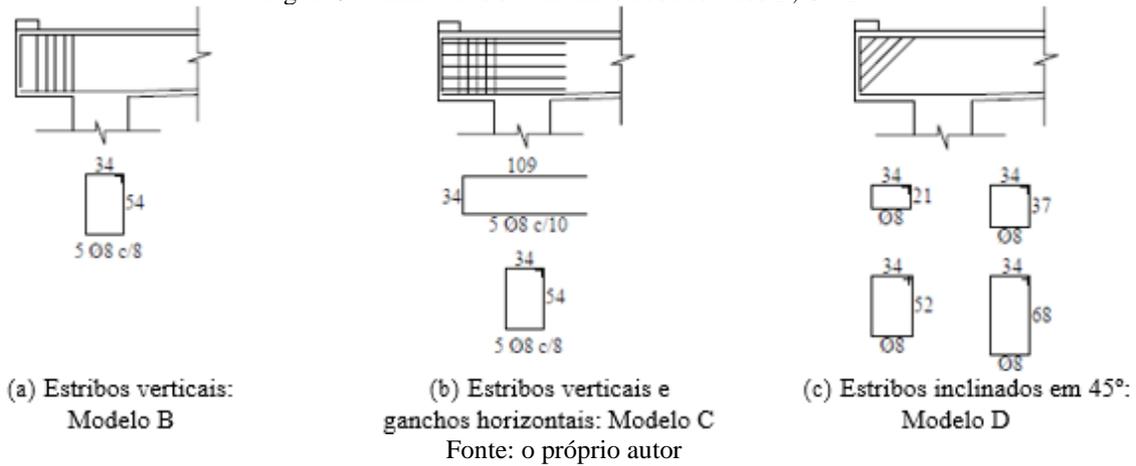
Em cada modelo, foi analisada a rigidez do elemento por meio da correlação entre a carga atuante no pilar de divisa e o deslocamento vertical máximo na parte inferior do bloco. Foram determinadas as regiões sujeitas ao dano plástico, bem como a distribuição de tensões entre o concreto e a as armaduras.

As armaduras principais dimensionadas para a viga de equilíbrio são apresentadas na Figura 8, e correspondem ao reforço do Modelo A. Na Figura 9 são detalhadas as armaduras secundárias correspondentes ao Modelo B (Figura 9(a)), Modelo C (Figura 9(b)) e Modelo D (Figura 9(c)). Em todos os modelos foram inseridas as armaduras principais, e a estaca de divisa foi armada com 10 barras longitudinais de 16 mm de diâmetro.



Fonte: o próprio autor

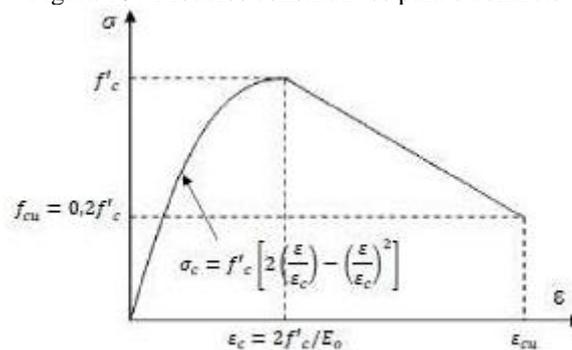
Figura 9 - Armaduras secundárias dos Modelos B, C e D



2.3 PARÂMETROS DE MODELAGEM

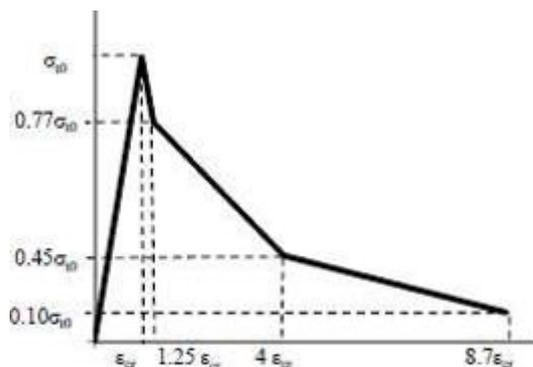
Para determinar o comportamento do concreto à compressão foi escolhido o modelo constitutivo desenvolvido por Hognestad [18], adaptado por Arduini, Tommaso e Nanni [19], apresentado na Figura 10(a). O comportamento do concreto à tração, por sua vez, se baseia no modelo exposto por Wahalathantri et al. [20], apresentado na Figura 10(b), que foi adaptado de Nayal e Rasheed [21], e modificado pelos autores especialmente para sua aplicação no ABAQUS [1], a fim de evitar a ocorrência de erros durante a análise.

Figura 10 - Modelos constitutivos para o concreto



(a) Diagrama tensão-deformação à compressão

Fonte: Arduini, Tommaso e Nanni [19]



(b) Diagrama tensão-deformação à tração
Fonte: Wahalathantri et al. [20]

O modelo de dano plástico CDP, utilizado no programa para descrever o comportamento do concreto, foi desenvolvido por Lubliner et al. [22] e permite representar o comportamento inelástico do concreto tanto na compressão quanto na tração, e ainda incluir características do dano. De acordo com as premissas fundamentais do modelo, os dois mecanismos de falha principais do concreto são as fissuras por tração e o esmagamento a compressão. Segundo o ABAQUS ANALYSIS USER'S GUIDE [23] esse modelo destina-se primordialmente à análise de estruturas de concreto armado, e permite a inserção do aço no concreto por meio da restrição “Embedregion”.

Para a definição do comportamento do aço, foi adotado o diagrama bilinear para a curva tensão-deformação, que corresponde a uma aproximação elástica com endurecimento linear, segundo o exposto por Arduini, Tommaso e Nanni [18]. Dessa forma, foi necessário inserir no ABAQUS [1] o comportamento “Elastic” e o “Plastic” para o aço. A aderência entre o concreto e o aço foi considerada perfeita, sem a ocorrência de deslocamentos relativos entre o concreto e as armaduras. As características dos materiais adotados para a análise são apresentadas na Tabela 2.

Tabela 2- Dados adotados para o concreto e o aço

	E (GPa)	ν	f_{ck} (MPa)	f' (MPa)	f_y (MPa)	f_t (MPa)	s_c (%)	s_u (%)
Concreto	30,7	0,2	30	25,5	-	2,90	0,2	0,35
Aço	210	0,3	-	-	500	655	-	1,00

Fonte: o próprio autor

A resistência do concreto à compressão utilizada para a obtenção do modelo constitutivo, apresentado na Figura 10(a), foi $f'_c = 0,85f_{ck}$, aplicando-se o coeficiente de segurança de 0,85 para considerar a fluência do concreto em cargas de longa duração.

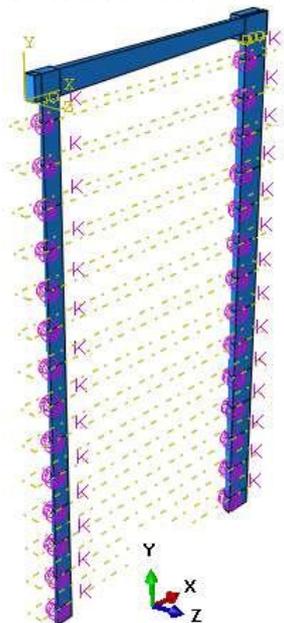
A determinação da interação solo-estaca ocorreu por meio da utilização do modelo de Winkler, representando o solo com molas horizontais, linearmente elásticas, aplicadas nas laterais das estacas e espaçadas igualmente entre si em 1 metro. Essa consideração é apenas aproximada, uma vez que o modelo não consegue representar a continuidade do meio e o aspecto tridimensional dos solos. No entanto, segundo Alonso [24], o modelo ainda oferece uma ferramenta prática para a análise e o dimensionamento de fundações, e tem sido amplamente utilizado no estudo de deslocamentos e esforços em estacas carregadas transversalmente.

Para a determinação das características do solo foi utilizada uma sondagem proveniente de um ensaio de penetração (SPT) na região da obra relativa ao estudo de caso. Os coeficientes de mola aplicados à estaca foram calculados segundo o exposto por Alonso [24], por meio da Equação 8, na qual “ K_i ” é a rigidez relativa ao nó “ i ” (coeficiente de mola), “ ηh ” é chamada “constante do coeficiente de reação horizontal”, “ z ” é a profundidade no solo e “ Δl ” é o espaçamento entre as molas. Os valores para a taxa de crescimento do coeficiente de reação horizontal com a profundidade (ηh) incorporam a dimensão transversal da estaca e foram obtidos a partir dos estudos de Terzaghi [17]. Os valores calculados para os coeficientes de mola são mostrados na Figura 7. As molas foram inseridas por meio da função “Springs” do ABAQUS [1] e distribuídas de forma discretizada ao longo da estaca, considerando-as conectadas ao solo segundo o eixo “ X ”, como apresentado na Figura 11.

$$K_i = \eta h \cdot z \cdot \Delta l \quad (8)$$

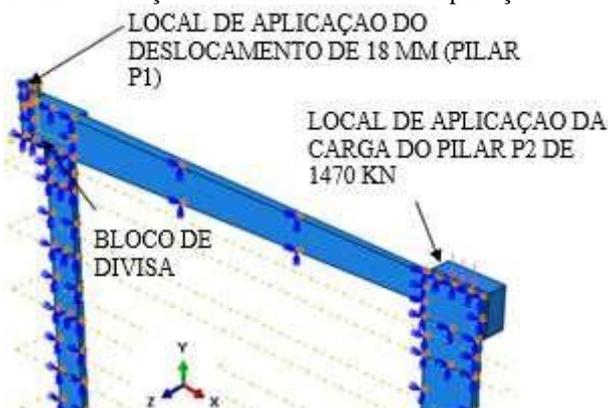
A fim de aproveitar a simetria do modelo e economizar processamento computacional, a geometria foi partida ao meio e foram inseridas condições de contorno relativas à simetria na superfície destacada na Figura 12, as quais restringiram a translação no eixo “ Z ” e a rotação nos eixos “ X ” e “ Y ”. Na parte inferior das estacas foram inseridos apoios simples, que restringiram a movimentação nos eixos “ X ”, “ Y ” e “ Z ”.

Figura 11 - Apoios elásticos nas laterais das estacas, segundo o eixo X



Fonte: o próprio autor

Figura 12 - Condições de simetria e local de aplicação das cargas



Fonte: o próprio autor

Foi efetuada uma análise estática do modelo em dois passos. No primeiro passo, foi inserida a carga de 735 kN no pilar interno centrado, a qual corresponde à metade da carga de projeto total de 1470 kN, visto que foi analisada apenas metade da estrutura. A carga de projeto foi obtida multiplicando-se a carga característica atuante no pilar interno por 1,4. No segundo passo, a carga inserida no pilar centrado foi propagada, e foi inserido no pilar de divisa um deslocamento de 18 mm. Assim, buscou-se realizar uma análise estática sob controle de deslocamento, de modo que a carga atuante no pilar de divisa relativa ao deslocamento imposto foi obtida por meio das forças de reação nos apoios, o que permitiu visualizar o comportamento pós-pico do diagrama carga-deslocamento. O deslocamento de 18 mm foi selecionado após algumas tentativas para a obtenção da melhor convergência do modelo na análise numérica. Em cada passo, o período de tempo

total para aplicação da carga e do deslocamento foi de 1 segundo, com o tamanho do incremento inicial e máximo de 0,001 segundo, sendo que o tamanho dos incrementos subsequentes foi calculado automaticamente pelo ABAQUS [1].

As armaduras foram modeladas utilizando o elemento “Wire” e inseridas no concreto por meio da restrição “EmbedRegion” do programa, que considera uma conexão perfeita entre o concreto e o aço, sem deslocamentos relativos. Isso faz com que a presença de ganchos e laços de ancoragem não influencie no comportamento do conjunto.

A interação entre as estacas e os blocos foi feita por meio da restrição “Tie”, que une duas superfícies de modo que nenhum deslocamento relativo entre elas seja permitido. Segundo Genikomsou e Polak [25] a vantagem desse tipo de restrição é que permite que duas superfícies sejam unidas mesmo que suas malhas de elementos finitos não sejam iguais.

Ainda de acordo com os autores, é de grande importância uma discretização apropriada de modelos testados no programa. Por isso, a malha foi criada somente após uma partição adequada do modelo, que permitisse a discretização em elementos hexaédricos.

A malha para os elementos de concreto foi de 50 mm, com elementos “Solid – 3D” do tipo hexaédrico C3D8R, de 8 nós lineares com integração reduzida. Já as armaduras foram discretizadas em elementos lineares “Wire – Truss” do tipo T3D2, com 2 nós e malha de 50 mm.

2.4 VALIDAÇÃO DOS PARÂMETROS DE MODELAGEM

A fim de validar os parâmetros de modelagem adotados e os modelos constitutivos dos materiais que servirão como dados de entrada no ABAQUS, foi testada no programa uma viga de concreto armado ensaiada experimentalmente por Arduini, Tommaso e Nanni (1997)

A viga possui seção quadrada e é composta por quatro barras longitudinais de aço de 14 mm de diâmetro e estribos de 6 mm espaçados em 150 mm. Os parâmetros dos materiais utilizados na modelagem são mostrados nas Tabelas 3 e 4.

Tabela 3 - Dados dos materiais aço e concreto

	E (GPa)	ν	f'_c (MPa)	f_y (MPa)	f_t (MPa)	s_u (%)	ρ (Kg/m ³)
Concreto	25	0,2	33	-	2,6	3,5	2400
Aço	200	0,3	-	540	700	10	-

Fonte: Adaptado de Arduini, Tommaso e Nanni (1997)

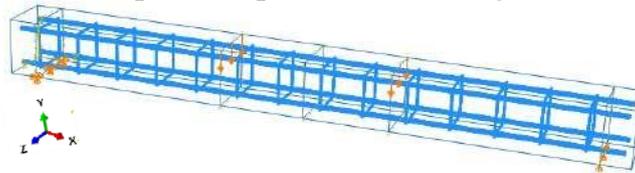
Tabela 4 - Dados adotados para o concreto no CDP

ψ	ϵ	fb_0/f_{c0}	K	μ
30°	0,1	1,16	0,667	0,00001

Fonte: o próprio autor

A viga foi modelada simulando um apoio móvel em uma das extremidades, impedindo o deslocamento no eixo “Y”, e um apoio fixo na outra extremidade, impedindo os deslocamentos em “X”, “Y” e “Z”, como mostrado na Figura 13. Foram inseridos deslocamentos nos locais referentes ao carregamento, e a medição da carga relativa foi feita por meio das reações nos apoios, caracterizando uma análise estática sob controle de deslocamento.

Figura 13–Viga analisada no ABAQUS

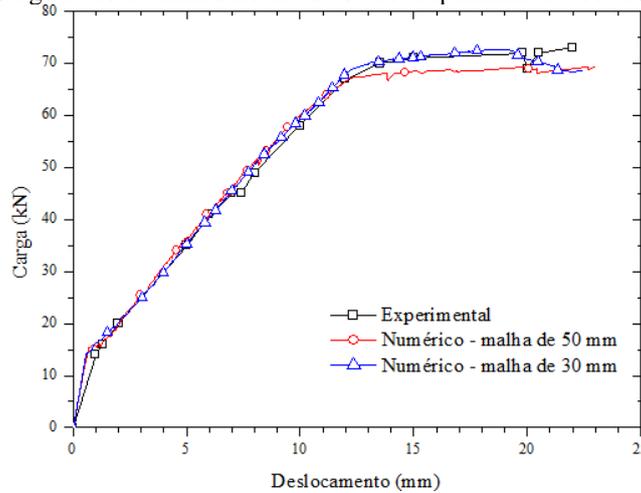


Fonte: o próprio autor

Aplicou-se a conexão “*Embedded region*” para promover a integração entre o aço e o concreto, determinando que o primeiro estaria contido no segundo por meio de uma ligação perfeita. Foram realizadas duas análises, uma com a viga de concreto discretizada em uma malha de 30 mm e outra em uma malha de 50 mm, com elementos “*Solid – 3D*” do tipo hexaédrico C3D8R, de 8 nós lineares com integração reduzida. Já as armaduras foram discretizadas em elementos lineares “*Wire – Truss*” do tipo T3D2 com 2 nós, também em uma malha de 30 mm e outra de 50 mm.

O diagrama apresentado na Figura 14 relaciona a carga aplicada à viga e o deslocamento medido na parte inferior do meio do vão, e permite uma comparação entre a curva obtida experimentalmente por Arduini, Tommaso e Nanni (1997) aos diagramas resultantes das análises da viga no ABAQUS.

Figura 14 – Carga x deslocamento no meio do vão: experimental e obtido no ABAQUS



Fonte: o próprio autor

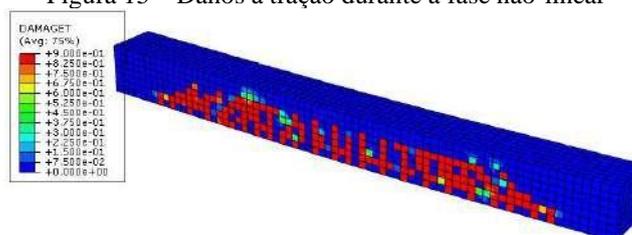
A partir da análise do gráfico, constatou-se que os resultados obtidos nas simulações numéricas foram coerentes com os resultados experimentais. Assim, estima-se que os parâmetros adotados para a modelagem e caracterização dos materiais são válidos.

Verificou-se que a malha com elementos finitos de 50 mm apresentou uma razoável aproximação do resultado real, justificando a sua utilização nos modelos que serão analisados, frente à economia de processamento em relação à malha de 30 mm.

Segundo Arduini, Tommaso e Nanni (1997), a viga testada experimentalmente apresentou inicialmente um comportamento elástico-linear, seguido por uma primeira fissuração na região do meio do vão da viga. Este fato pôde ser observado também na viga testada no ABAQUS com a ocorrência dos primeiros danos à tração no concreto após o regime linear.

Arduini, Tommaso e Nanni (1997) observaram que após o regime elástico-linear, ocorreu uma larga fase não linear, que foi marcada pelo desenvolvimento de numerosas fissurações, o que também pôde ser observado na viga testada no ABAQUS, mostrada na Figura 15.

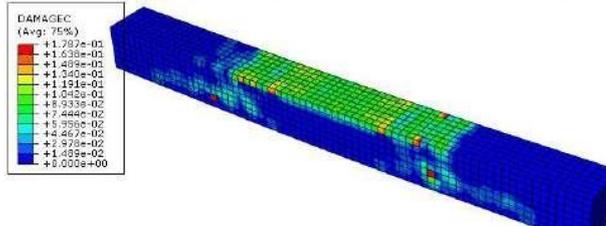
Figura 15 – Danos à tração durante a fase não-linear



Fonte: o próprio autor

Após o escoamento do aço das armaduras principais, a viga experimental alcançou a ruptura pelo esmagamento do concreto na parte superior da viga. Do mesmo modo, a viga testada no ABAQUS também apresentou o esmagamento do concreto como causa da ruptura, sendo que o dano à compressão na iminência da ruptura é apresentado na Figura 16.

Figura 16 – Danos à compressão na iminência da ruptura

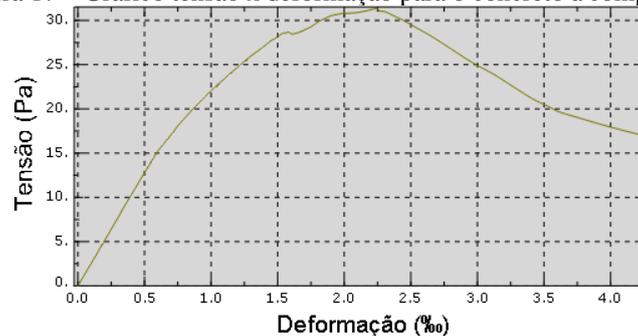


Fonte: o próprio autor

De acordo com Jankowioak e Lodigowski (2005), o dano obtido para o concreto, ao utilizar os parâmetros do CDP, pode estimar corretamente o padrão de fissuração real do material.

A fim de verificar se o comportamento do concreto à compressão está coerente com os dados do modelo constitutivo inseridos no programa, extraiu-se de um elemento da parte superior da viga as informações relativas à tensão e deformação, que são mostradas no gráfico da Figura 17.

Figura 17 – Gráfico tensão x deformação para o concreto à compressão



Fonte: o próprio autor

Dessa forma, verifica-se que o comportamento do concreto está coerente com o modelo constitutivo inserido no programa, sendo que a tensão máxima à compressão foi de aproximadamente 33 MPa, para uma deformação de 2,2 ‰.

3 RESULTADOS

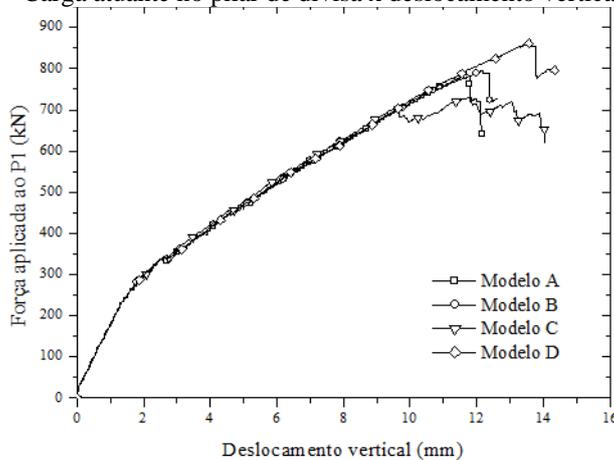
Baseado no exposto por Canha et al. [9], o modo de ruptura do bloco de divisa foi classificado pela ocorrência ou não do escoamento da armadura principal de tração. Segundo os autores, a falha à compressão (C) é caracterizada pelo esmagamento do concreto da escora de compressão ou divisão diagonal, ambos identificados pelo padrão de fissuração, somente se a armadura principal de tração ainda não apresentou escoamento. A falha à tração (T), por outro lado, corresponde a uma ruptura do consolo somente após o escoamento da armadura principal.

Um modo de ruptura intermediário chamado de compressão-tração (C-T) também é citado pelos autores. Nesse modo de falha, a armadura principal escoou instantes antes ou praticamente ao mesmo tempo da ruptura à compressão. Assim, a capacidade máxima do concreto e do aço é demandada, como na ruptura à flexão, porém é uma ruptura frágil.

No gráfico da Figura 18 são apresentadas as curvas que relacionam a carga aplicada ao pilar de divisa e o deslocamento na parte inferior do bloco.

Como explicado anteriormente, no pilar de divisa foi inserido um deslocamento, o que permitiu obter a carga atuante no pilar relativa a determinado deslocamento por meio das reações nos apoios localizados na parte inferior das estacas. Para encontrar a carga que efetivamente representasse a carga aplicada ao pilar de divisa, descontou-se do somatório de reações das duas estacas a carga do pilar centrado, e multiplicou-se por dois, para determinar a carga relativa à estrutura completa. Assim, ao invés de referir-se ao deslocamento no pilar de divisa, nos próximos parágrafos serão tratadas as cargas atuantes no pilar de divisa como resposta da estrutura ao deslocamento imposto.

Figura 18 - Carga atuante no pilar de divisa x deslocamento vertical do bloco.



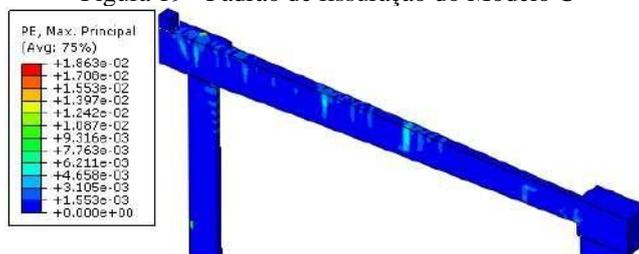
Fonte: o próprio autor

Como explicado anteriormente, no pilar de divisa foi inserido um deslocamento, o que permitiu obter a carga atuante no pilar relativa a determinado deslocamento por meio das reações nos apoios localizados na parte inferior das estacas. Para encontrar a carga que efetivamente representasse a carga aplicada ao pilar de divisa, descontou-se do somatório de reações das duas estacas a carga do pilar centrado, e multiplicou-se por dois, para determinar a carga relativa à estrutura completa. Assim, ao invés de referir-se ao deslocamento no pilar de divisa, nos próximos parágrafos serão tratadas das cargas atuantes no pilar de divisa como resposta da estrutura ao deslocamento imposto.

Verificou-se que as curvas dos quatro modelos analisados apresentaram comportamento linear até a carga de aproximadamente 250 kN atuante no pilar de divisa. A partir desse ponto, surgiram as primeiras fissuras de flexão na viga de equilíbrio, que ocorreram na parte superior, próxima à região de divisa, e na parte inferior, próxima ao bloco centrado.

À medida que se aumentou a carga no pilar de divisa, houve o desenvolvimento de diversas fissuras de flexão na viga e na estaca até se atingir a carga máxima. Como as armaduras principais de flexão são as mesmas, o padrão de fissuração em todos os modelos foi muito semelhante e é mostrado na Figura 19, por meio da indicação das deformações plásticas principais relativas à carga máxima do Modelo C. Segundo o ABAQUS ANALYSIS USER'S GUIDE [23] o modelo do dano plástico (CDP) assume que a fissuração se inicia quando a deformação plástica principal máxima é positiva, sendo que a orientação das fissuras é considerada perpendicular à direção da deformação plástica principal máxima. Assim, estima-se que a visualização desse tipo de deformação permite uma boa representação do local das fissuras.

Figura 19 - Padrão de fissuração do Modelo C



Fonte: o próprio autor

No gráfico da Figura 18, constatou-se que a principal alteração causada pela variação das armaduras secundárias verticais e horizontais de costura foi no modo de ruptura dos modelos. Nos modelos A e B, ao atingir a carga máxima atuante no pilar de

divisa, apareceram os primeiros danos à compressão no concreto da região da escora formada entre o pilar e a estaca. Nesse ponto do gráfico, houve uma queda na curva carga-deslocamento, o que indica a perda de rigidez do elemento estrutural. Em seguida, houve uma intensa plastificação da escora, caracterizando o rompimento do concreto nesse local. No momento da falha da escora de concreto, teve início o escoamento da armadura principal de tração da parte superior da viga, o que caracterizou o tipo de ruptura como compressão-tração.

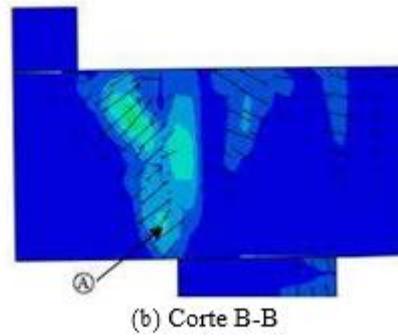
O Modelo C, por sua vez, apresentou danos à compressão na região da escora para uma carga de 710 kN, após esse ponto, houve uma queda e posterior recuperação da rigidez do elemento estrutural, que atingiu a carga máxima de 730 kN. A armadura do tirante principal não escoou, caracterizando o modo de ruptura à compressão. Porém, ao atingir a carga máxima, as armaduras secundárias verticais e horizontais apresentaram escoamento, o que evidencia que esse tipo de reforço possibilitou uma ruptura mais dúctil para a escora de concreto, como demonstrado pelo comportamento pós-pico do gráfico da Figura 18.

As armaduras do tirante principal do Modelo D apresentaram escoamento para a carga de 786 kN, já os primeiros danos à compressão na escora surgiram para a carga de 862 kN. Assim, houve o escoamento da armadura antes da ruptura do concreto por compressão da escora, o que caracteriza a falha do tipo tração para o modelo. Após a carga máxima, houve uma queda na curva carga-deslocamento, caracterizando a perda de rigidez, seguida pela intensa plastificação do concreto da escora.

Nas Figuras 20, 21, 22 e 23 são apresentadas as deformações plásticas principais máximas atuantes nas seções indicadas pelos cortes A-A e B-B. A direção das deformações é mostrada nos cortes B-B, sendo que as possíveis fissuras devem se desenvolver perpendicularmente à direção das deformações.

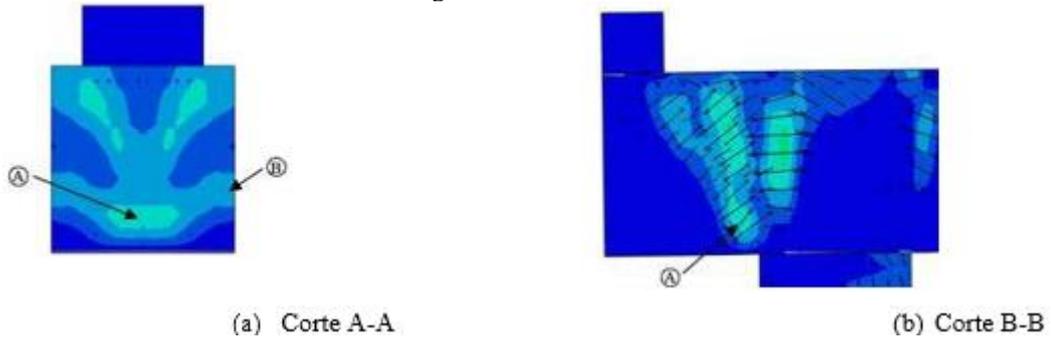
Em todos os modelos, verificou-se a formação de fissuras de flexão na parte superior do bloco, e fissuras diagonais coincidentes com a escora de compressão formada entre o pilar e a estaca, indicando a ruptura neste local.

Figura 20 - Modelo A



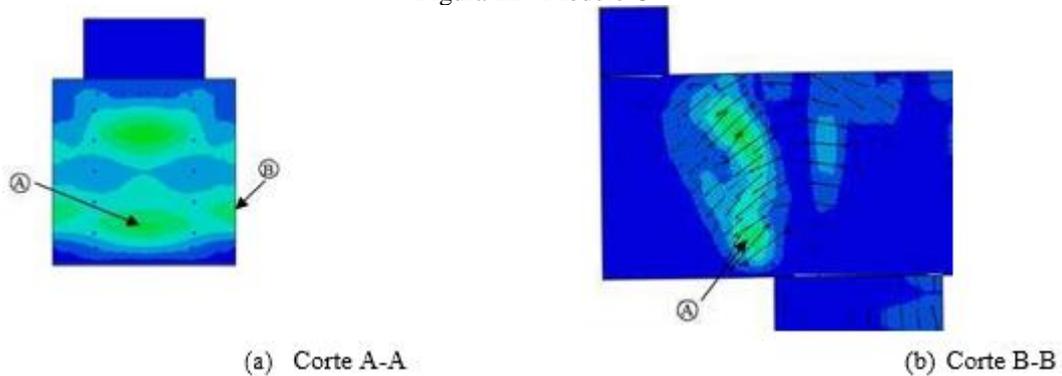
Fonte: o próprio autor

Figura 21 - Modelo B

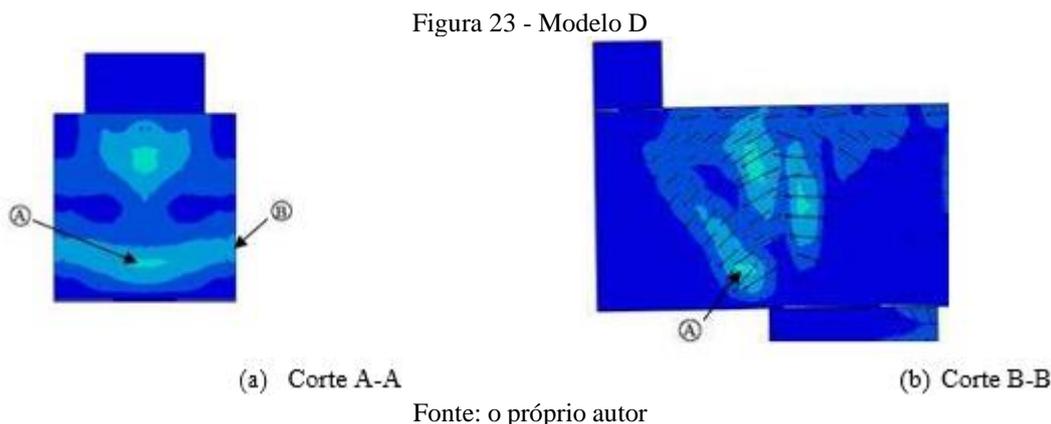


Fonte: o próprio autor

Figura 22 - Modelo C



Fonte: o próprio autor



Na Figura 19 são apresentados os gráficos que relacionam a carga atuante no pilar de divisa e a deformação plástica principal máxima nos pontos A e B indicados nas Figuras 20, 21, 22 e 23.

O ponto A foi o primeiro local da escora de concreto a apresentar deformações plásticas. Verificou-se que esse ponto começou a plastificar para cargas próximas a 400 kN em todos os modelos, já o ponto B começou a plastificar para cargas próximas à máxima. Após atingida a carga máxima, houve uma intensa deformação plástica em ambos os pontos, o que caracteriza a perda de rigidez e ruptura do concreto.

Na Tabela 5 são destacados alguns resultados apresentados pelos modelos na análise numérica, tais como a carga de início de fissuração, o deslocamento vertical na parte inferior do bloco, a carga máxima atuante no pilar de divisa que a estrutura resiste, o modo de ruptura, a carga de início de plastificação e as tensões principais de compressão e tração nos pontos A e B.

Constatou-se o predomínio da compressão no ponto A, sendo que os Modelos B e D apresentaram as maiores tensões. No ponto B, por outro lado, houve o predomínio da tração, de modo que o Modelo A apresentou as maiores tensões de tração tanto no ponto B, quanto no ponto A (indicados na Figura 15), o que pode ser explicado pela falta de armaduras secundárias. Presume-se que maiores tensões de tração atuantes no ponto são responsáveis por diminuir a resistência à compressão.

Considerando a carga característica de $F_k = 520$ kN e a carga última “ F_u ” suportada pelo modelo, tem-se que o fator de carga último “ λ_u ” é dado por . Como na análise não-linear foram utilizados os valores característicos das propriedades dos materiais, a segurança da estrutura é verificada pelos limites das Equações 9 e 10 dadas por Souza [26], sendo que a primeira é relativa à ruína devido ao colapso do concreto à compressão, e a segunda à ruptura devido ao escoamento do aço.

$$\lambda_u \geq \lambda_c = \gamma_f \cdot \gamma_c = 1,4 \cdot 1,4 = 1,96 \quad (9)$$

$$\lambda_u \geq \lambda_c = \gamma_f \cdot \gamma_s = 1,4 \cdot 1,15 = 1,61 \quad (10)$$

Ao analisar os fatores de carga últimos dos Modelos A, B e C, constatou-se que a segurança não foi verificada, visto que não atingiram o valor de 1,96, relativo à segurança em um colapso atribuído à compressão do concreto da escora. O Modelo D, por outro lado, apresentou ruptura do tipo tração, visto que a armadura principal escoou antes da ruptura do concreto, com fator de carga último igual a 1,66, maior do que o limite de 1,61 dado pela Equação 10, verificando-se, portanto, a sua segurança.

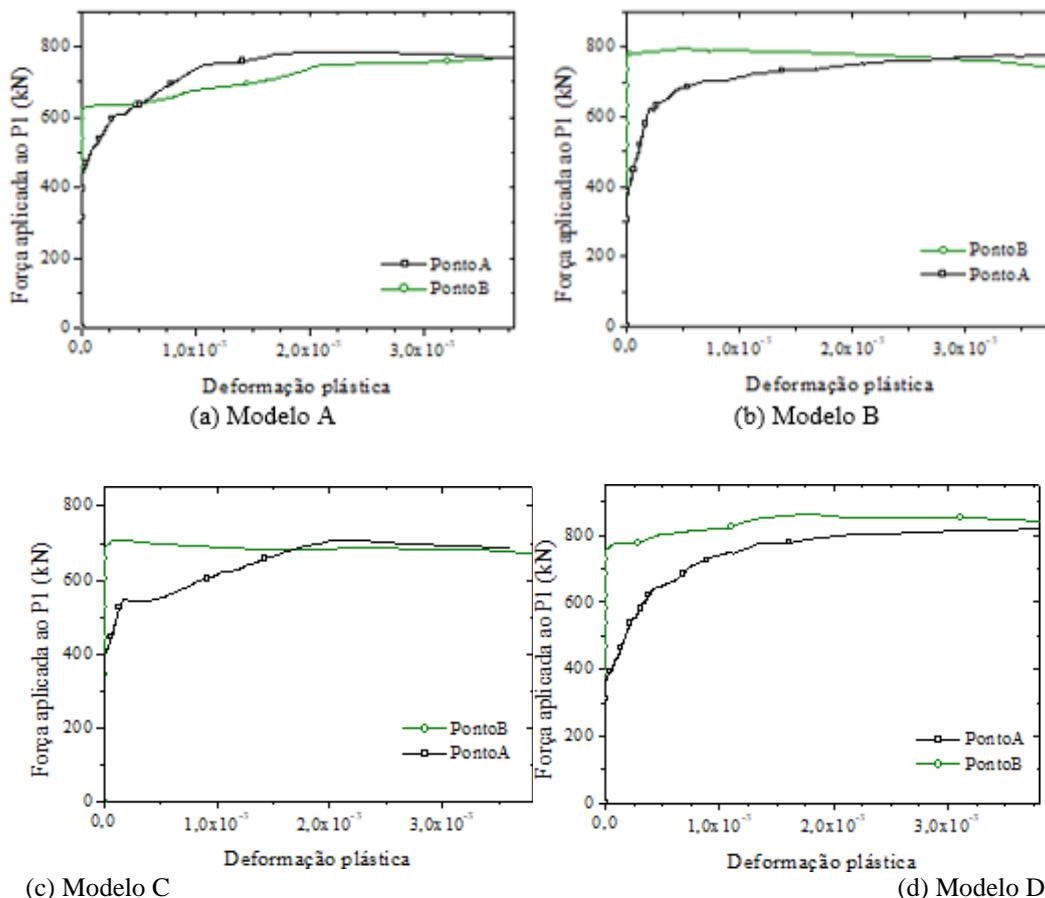
Constatou-se ainda que a viga de equilíbrio foi capaz de absorver grande parte das tensões de tração causadas pela excentricidade do pilar em relação à estaca, e aliviou esse tipo de solicitação no elemento. A estaca interna, por sua vez, por ser um elemento robusto, não apresentou tensões de tração, e foi submetida apenas à flexo-compressão, sendo que as tensões principais de compressão nesta estaca não ultrapassaram o valor de 5 MPa.

Tabela 5 – Resultados da análise numérica

	Modelo A	Modelo B	Modelo C	Modelo D
Carga de início da fissuração (kN)	250	250	250	250
Carga máxima no pilar de divisa (kN) “ F_u ”	787	794	730	862
Deslocamento vertical – carga máxima (mm)	11,7	11,2	11,8	13,7
Modo de Ruptura	C-T	C-T	C	T
Fator de carga (λ_u)	1,51	1,53	1,40	1,66
Carga de plastificação da escora – Ponto A (kN)	430	370	388	370
Tensão máxima de compressão na escora – Ponto A (MPa)	13,4	19,4	15,2	19,0
Tensão máxima de tração na escora – Ponto A (MPa)	1,6	1,4	1,5	1,2
Carga de plastificação – Ponto B (kN)	620	775	679	756
Tensão máxima de compressão – Ponto B (MPa)	2,5	3,9	4,4	4,4
Tensão máxima de tração – Ponto B (MPa)	2,7	2,3	2,4	2,2
Carga de escoamento da armadura do tirante (kN)	787	794	-	786

Fonte: o próprio autor

Figura 19 - Curva carga x deformação plástica nos pontos A e B



Fonte: o próprio autor

4 CONCLUSÕES

Este trabalho estudou uma metodologia para o dimensionamento das armaduras de vigas de equilíbrio compondo o sistema de fundações localizado nas divisas de terrenos, e investigou o efeito da variação das armaduras de costura da região de divisa por meio de análises numéricas no programa ABAQUS [1], considerando a não-linearidade do comportamento do concreto e do aço. Assim, foram testados ao todo quatro modelos de concreto armado, com a variação do arranjo das armaduras secundárias.

No geral, verificou-se que as armaduras secundárias melhoraram a resistência da escora de concreto e a sua ductilidade na ruptura. Os Modelos B e D resistiram às maiores tensões de compressão no ponto A, local em que teve início o dano plástico do concreto à compressão. Esses modelos também resistiram às maiores cargas máximas. Assim, presume-se que a resistência da escora está diretamente relacionada à resistência dos modelos.

O Modelo C, com as armaduras verticais e horizontais dimensionadas segundo o CEB-FIP ModelCode 1990 [11], atingiu uma carga máxima de 730 kN e conduziu a uma

ruptura mais dúctil, o que evidenciou a eficiência desse tipo de arranjo. Após o início do dano na escora de concreto, as armaduras secundárias do modelo começaram a escoar, evidenciando que o reforço melhorou a ductilidade da escora na ruptura. Tal fato foi verificado no diagrama de carga-deslocamento que apresentou um comportamento pós-pico com características dúcteis. Essa é a situação ideal para o dimensionamento, uma vez que nesse caso a ruptura é gradual, emitindo “avisos” que permitem o reparo antes do colapso da estrutura.

O fator de carga último ficou abaixo do limite adequado para os Modelos A, B, e C. Assim, sugere-se um redimensionamento para aumentar a resistência da escora e limitar superiormente a taxa de armadura do tirante principal, a fim de se garantir o escoamento do aço antes da ruptura do concreto da escora, assegurando a ocorrência de uma falha dúctil.

Contudo, estima-se que o melhor modelo foi o D, com as armaduras de costura inclinadas em 45° , uma vez que apresentou ruptura à tração, com o escoamento do aço do tirante principal antes do colapso do concreto, sendo que seu fator de carga último foi igual a 1,66, maior do que o limite de 1,61 relativo ao colapso do aço, o que atestou a segurança da estrutura. Isto evidenciou que armaduras dispostas transversalmente à escora de concreto aumentam a sua resistência ao absorver tensões de tração e promover o confinamento. No entanto, esse tipo de arranjo não é muito utilizado na prática, devido às dificuldades executivas.

AGRADECIMENTOS

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, pelo auxílio financeiro concedido para o desenvolvimento da pesquisa.

REFERÊNCIAS

- DASSAULT SYSTEMES SIMULIA CORP. ABAQUS. Versão 12-1: Finite elemento analysis software, 2012.
- ALONSO, U. R. Exercícios de fundações. 1. ed., 12. Reimpressão, São Paulo: Edgard Blücher LTDA., 2001.
- CAMPOS, J. C. Elementos de fundações em concreto. São Paulo: Oficina de Textos, 2015.
- BOWLES, J. E. Foundation Analysis and Design. 5. ed., New York: McGraw-Hill, 1997.
- GUZMAN, T. Heavily Loaded Strap Footings – Design, Detailing and Behavior. Practical Solutions. Structure Magazine, New York, abr. 2010, p. 12-15. Disponível em: <<https://www.structuremag.org/?p=4904>>. Acesso em: 10 abr. 2018.
- DAS, B. M. Principles of Foundation Engineering, SI. 7. ed., Stamford: Cengage Learning, 2011.
- TANNO, D. C. S. Blocos de concreto sobre estacas posicionados nas divisas de terrenos: estudo analítico e análise numérica linear, São Carlos, 2012, Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 158 p. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/18/18134/tde-03072012-101640/publico/2012ME_DanieliColomboSantosTanno.pdf>. Acesso em: 15 jun. 2017.
- SCHLAICH, J., SCHAFER, K., JENNEWEIN, M. Toward a consistent design of reinforced structural concrete. Journal of Prestressed Concrete Institute, v. 32, n. 3, 1987; p. 74–150.
- CANHA, R. M. F.; KUCHMA, D. A.; EL DEBS, M. K.; SOUZA, R. A. Numerical analysis of reinforced high strength concrete corbels. Engineering Structures, Elsevier, v. 74, 2014; p. 130-144.
- EL DEBS, M. K. Concreto Pré-Moldado: Fundamentos e Aplicações. São Carlos: Editora EESC USP, 2000.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. CEB-FIP Model Code 1990. London: Thomas Telford Services Ltd., 1993.
- EUROCODE 2. EN 1992-1-1: 2004 - Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings. 2004.
- SANTOS, D. M.; STUCCHI, F. R. Dimensionamento de Consolos de Concreto com o Auxílio de Modelos de Bêlase e Tirantes - Parte I: Fundamentos. Revista Técnica, São Paulo: Editora Pini, n. 192, mar. 2013. Disponível em: <<http://techne17.pini.com.br/engenharia-civil/192/artigo288028-3.aspx>> Acesso em: 04 abr. 2018.
- MARTHA, L. F. A Graphical-Interactive Program for Teaching Structural Behavior. Versão 4.00, 2018. Disponível em: <<https://www.ftool.com.br/Ftool/>> Acesso em: 20 fev. 2018.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. ABNT NBR 6118: Projeto de Estruturas de Concreto –

Procedimento, Rio de Janeiro, 2014.

VELLOSO, D. A.; LOPES, F. R. Fundações: critérios de projeto, investigação do subsolo, fundações superficiais, fundações profundas. Volume completo, São Paulo: Oficina de Textos, 2010.

TERZAGHI, K. Evaluation of Coefficients of Subgrade Reaction. *Geotechnique*, v. 5, n. 4, Dec. 1955.

HOGNESTAD, E. A study of combined bending and axial load in reinforced concrete members. *University of Illinois Bulletin*, v. 49, n. 22, 1951; 128 p.

ARDUINI, M.; TOMMASO, A. DI; NANNI, A. Brittle Failure in FRP Plate and Sheet Bonded Beams. *ACI Structural Journal*, v. 94, n. S33, 1997; p. 363-370.

WAHALATHANTRI, B. L.; THAMBIRATNAM, D. P.; CHAN, T. H. T.; FAWAZIA, S. A material model for flexural crack simulation in reinforced concrete elements using ABAQUS. In: *International Postgraduate Conference on Engineering, Designing and Developing the Built Environment for Sustainable Wellbeing, 1., Infrastructure, Transport and Urban Development, 2011, Brisbane, Australia. Proceedings...* Brisbane: eddBE2011, 2011; p. 260-264.

NAYAL, R.; RASHEED, H. A. Tension Stiffening Model for Concrete Beams reinforced with Steel and FRP Bars. *Journal Of Materials In Civil Engineering, ASCE*, v. 8, n. 6, Nov./Dec. 2006; p. 831-841.

LUBLINER, J.; OLIVER, J.; OLLER, S.; OÑATE, E. A plastic-damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, v. 25, n. 3, 1989; p. 299–326.

ABAQUS ANALYSIS USER'S GUIDE. Concrete Damaged Plasticity. Dassault Systèmes Simulia Corp., Providence, RI, USA, 2014. Disponível em: <<https://www.sharcnet.ca/Software/Abaqus/6.14.2/v6.14/books/usb/default.htm?startat=pt05ch23s06abm39.html#usb-mat-cconcretedamaged>> Acesso em: 05 abr. 2018.

ALONSO, U. R. Dimensionamento de Fundações Profundas. 1. ed., 3. Reimpressão, São Paulo: Edgard Blücher LTDA., 2003.

GENIKOMSOU, A. S.; POLAK, M. A. Damaged plasticity modelling of concrete in finite element analysis of reinforced concrete slabs. In: *International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures, 9., 2016, Berkeley, California. Proceedings...* Berkeley: IA-FraMCoS-9, 2016; p. 1-8.

SOUZA, R. A. Concreto estrutural: Análise e dimensionamento de elementos com descontinuidades, São Paulo, 2004, Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, 379p. Disponível em: <http://www.lmc.ep.usp.br/people/tbitten/gmec/teses/tese_Rafael.pdf>. Acesso em: 09 set. 2017.