

A obra clássica centenária “Über die Härte plastischer Körper” de Ludwig Prandtl (1920) revisitada: tradução e comentários

The centennial classical article “Über die Härte plastischer Körper” by Ludwig Prandtl (1920) revisited: translation and reviews

DOI:10.34117/bjdv8n10-312

Recebimento dos originais: 26/09/2022

Aceitação para publicação: 25/10/2022

Nilton de Souza Campelo

Doutor em Geotecnia

Instituição: Universidade Federal do Amazonas

Endereço: Av. Gen. Rodrigo Octavio Jordão Ramos, 1200, Coroado I, Manaus - AM

E-mail: ncampelo@ufam.edu.br

Edgar Giovanni Diaz-Segura

Doutor em Engenharia Civil

Instituição: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Endereço: Av. Brasil, 2147, Valparaíso, Chile

E-mail: edgar.diaz@pucv.cl

Raimundo Pereira de Vasconcelos

Doutor em Engenharia Civil

Instituição: Universidade Federal do Amazonas

Endereço: Av. Gen. Rodrigo Octavio Jordão Ramos, 1200, Coroado I, Manaus - AM

E-mail: vasconcelos@ufam.edu.br

RESUMO

A grande maioria dos estudos sobre a análise da capacidade de carga de fundações tem se baseado no trabalho de 1920 do professor Ludwig Prandtl intitulado “Über die Härte plastischer Körper” (sobre a dureza dos corpos plásticos). No entanto, não é comum encontrar referências que apresentem as diferentes considerações por trás da proposta original. Como, por exemplo, que o método exposto é de origem teórica, sem validação empírica, não sendo formulado nem para solos, nem para fundações, pois seu objetivo era avaliar a dureza de um material sólido, determinando as tensões que produzem a sua plastificação total. Em vista disso, apresenta-se uma versão rigorosa do artigo original completo de Prandtl de 1920, adaptado do alemão para o espanhol, e, posteriormente, do espanhol para o português, o que se espera contribuir para o conhecimento dos princípios, considerações e limites de validade, da amplamente conhecida Cunha de Prandtl, que representa um dos pilares dos métodos para o dimensionamento geotécnico de fundações rasas.

Palavras-chave: Ludwig Prandtl, Cunha de Prandtl, Über Die Härte Plastischer Körper, dureza de corpos plásticos, zonas de plastificação.

ABSTRACT

Most studies on the analysis of the load-bearing capacity of foundations have been based on the 1920 work by Professor Ludwig Prandtl entitled “Über die härte plastischer

körper” (on the hardness of plastic bodies). However, it is not common to find references that present the different considerations behind the original proposal. As for example, that the related method is of theoretical origin without empirical validation not being formulated for soils or foundations, since its objective was to evaluate the hardness of a solid material, determining the stresses that produce its total plastification. In view of this, a rigorous version of Prandtl's complete original article from 1920 is presented, adapted from German to Spanish, and later from Spanish to Portuguese, which is expected to contribute to the knowledge of the principles, considerations, and validity limits, from the widely known Prandtl Wedge, which represents one of the pillars of the methods for the geotechnical design of shallow foundations.

Keywords: Ludwig Prandtl, Prandtl's Wedge, Über Die Härte Plastischer Körper, hardness of plastic bodies, plastification zones.

1 COMENTÁRIOS INICIAIS

No ano de 1920, o engenheiro mecânico alemão Ludwig Prandtl, com o objetivo de avaliar a dureza de um material sólido, determinando a tensão produzida por sua plastificação total, analisou teoricamente sua resposta ante a solicitação imposta por um material rígido [i]. A partir disso, propôs um mecanismo de ruptura, conhecido como “Cunha de Prandtl”. Mais de um século após sua formulação, seus princípios ainda são utilizados para a análise geotécnica de fundações rasas. No entanto, a abordagem e a origem de sua solução não tinham objetivo prático para a engenharia geotécnica, nem muito menos para a análise de fundações, por isso as considerações tomadas para a solução do problema analisado estão distantes dos requisitos de engenharia, como, por exemplo, a consideração de um material com propriedades de atrito e coesão, e com peso próprio. Além disso, não foi apresentada uma validação do método com medidas experimentais.

Trabalhos sucessivos enriqueceram o trabalho pioneiro de Prandtl, culminando com a formulação teórica da conhecida expressão polinomial da capacidade de carga de fundações rasas, realizada por Terzaghi [ii]. No entanto, não é comum encontrar referências que apresentem as considerações por trás da proposta original de Prandtl, levando em alguns casos a considerações fora do criado pelo autor.

Com base no exposto, apresenta-se uma versão rigorosa do artigo original de Prandtl de 1920, adaptado do alemão para o espanhol [iii], e, posteriormente, do espanhol para o português – recorrendo ao original para definição de alguns termos técnicos –, considerado de grande utilidade prática para analisar, desde a fonte, os princípios, considerações e limites de validade da amplamente conhecida Cunha de Prandtl.

No presente trabalho, a estrutura original do artigo de Prandtl foi respeitada, em toda a sequência de parágrafos, incluindo a originalidade das figuras e tabela – e a correspondente ausência de títulos para elas –, e a nomenclatura e numeração das equações. Ademais, embora o documento original contenha várias citações de obras da época, as referências bibliográficas não foram apresentadas no documento (apenas no rodapé), pelo que neste trabalho foram devidamente incluídas, para todos os autores citados. Faz-se, aqui, uma diferenciação entre as referências do artigo original e as introduzidas pelos tradutores.

Por fim, para fins de entendimento, foi necessário ajustar algumas das frases originais, onde sua estrutura dificultava notavelmente a interpretação da ideia a ser transmitida. A seguir, é apresentada a tradução *in totum* do artigo.

2 ÜBER DIE HÄRTE PLASTISCHER KÖRPER (PRANDTL, 1920)

Deve-se a Heinrich Hertz [iv] a Teoria do Contato de Corpos Elásticos, onde deduziu uma magnitude da dureza correspondente à tensão de compressão, aplicada no centro da superfície de contato, que excede o limite elástico. Pela impossibilidade de estabelecer essa tensão limite em corpos não frágeis, convencionou-se, para a medição prática de dureza, causar um afundamento permanente no material a ser estudado, e adotar, como magnitude de dureza, a tensão de compressão média aplicada na superfície de contato. Para fazer isso, por exemplo, em um ensaio Brinell, uma esfera de aço temperado é pressionada sobre a superfície do material em análise. Até agora, não se conhece uma teoria do estado de tensão associado com a mudança de forma¹ permanente. Em seguida, busca-se demonstrar que tal teoria é possível para um *problema bidimensional*, sob certas premissas simplificadoras.

Busca-se ampliar o conceito de corpo plástico, para além de como ele é entendido, geralmente, de acordo com o método de B. de Saint Venant [1] e M. Lévy [2]. De acordo com a abordagem de ambos, nas regiões de um corpo onde o limite elástico foi excedido, a maior tensão de cisalhamento deve ter um valor constante C , ou seja, a diferença entre as tensões principais maior e menor deve ser constante e igual a $2C$. Haar e v. Kármán [3] também diferenciam os estados “semiplástico” e o “perfeitamente plástico”, dependendo se a magnitude da tensão principal intermediária tem valor entre as outras duas tensões principais ou se coincide com uma dessas duas.

¹ Nota dos Tradutores: Esse termo associa-se com “deformação”, mas os tradutores preferiram deixá-lo no seu sentido original, em alemão.

É necessário formular uma condição geral para o estado plástico, que pode ser caracterizada por uma determinada relação entre as tensões principais maior e menor, e que de forma simplificada considera-se como linear, mas que, também, pode ser não linear. Nessa hipótese, formulada por O. Mohr [4-6], com uma aparência um tanto diferente, o “corpo plástico ideal” de Saint-Venant [1] é incluído como um caso especial. Sem dúvida, a formulação também abrange os casos em que a tensão de cisalhamento limite é incrementada pela pressão exercida em todas as direções. O caso limite, onde a tensão de cisalhamento é igual a zero, sem nenhuma tensão lateral, conduz a uma aproximação linear à tradicional Teoria da Pressão Lateral de Terra.

Portanto, assume-se um comportamento elástico sempre que a diferença entre as tensões principais maior e menor é menor que o valor deduzido da relação anteriormente mencionada. Pelo contrário, sempre que o limite elástico for ultrapassado, independentemente da magnitude da mudança de forma, cumpre-se a relação indicada acima entre as tensões principais externas. Para isso, os eixos principais do elipsoide de incremento de deformação deve coincidir em direção com os do elipsoide de tensão, e os sinais das diferenças de cada uma das principais deformações devem ser iguais aos gerados a partir das diferenças das respectivas tensões.

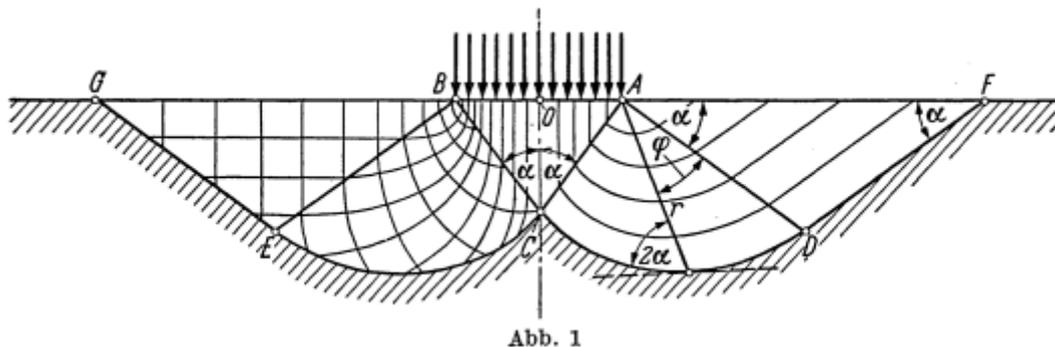
Devido às premissas do problema bidimensional, as deformações na direção perpendicular ao plano são iguais a zero, do que segue imediatamente que o estado “semiplástico” é gerado, no qual a tensão principal intermediária é perpendicular ao plano de análise do problema.

Uma vez que as mudanças de forma elásticas dos elementos compactos que compõem os materiais de construção usuais são muito pequenas, e que as mudanças de forma plásticas as superam em muitos casos, é possível, como primeira aproximação, simplificar a análise ignorando as trajetórias de deformação elástica. Ao mesmo tempo, será considerada, também, a região plástica como incompressível, e os deslocamentos são considerados pequenos. Consequentemente, deve-se resolver o problema de se encontrar a borda que delimita a zona plástica do resto do corpo, de modo que a zona delimitada permaneça rígida, enquanto, ao mesmo tempo, nas outras fronteiras as respectivas condições especificadas devem ser preenchidas. Com o pressuposto de uma delimitação rígida é facilitada, consideravelmente, a análise.

Após avaliar o que foi observado por O. Mohr [4-6] - onde o supracitado é cumprido -, devido ao estado de tensão em um corpo, ocorre um deslizamento ao longo de dois conjuntos de superfícies que são inclinados em um ângulo α , em relação à direção

da maior tensão de compressão (a menor corresponde à tensão de tração) e contendo, em si, a direção da tensão principal média. No caso de uma relação linear, o ângulo α é uma constante do material. Uma simples reflexão ensina que esse limite rígido deve ser uma superfície de deslizamento.

Procura-se, agora, um mecanismo de deslizamento no qual uma região AB da superfície livre plana (Figura 1) é submetida à pressão do exterior para o interior. As regiões adjacentes à esquerda e à direita dela sobressaem-se, então, até a superfície. Uma investigação mais detalhada mostra que esta solução é encontrada pela divisão de área mostrada na Figura 1, onde no triângulo ABC domina um estado de tensão uniforme, e a maior tensão ocorre na direção vertical, com uma contrapressão horizontal de magnitude um pouco menor. Da mesma forma, um estado de tensão uniforme domina, também, nos triângulos ADF e BEG , onde a pressão vertical é igual a zero, enquanto a horizontal é igual à resistência à compressão comum. Entre o primeiro e último triângulos estão os setores ACD e BCE .



Se puder ser demonstrado que se prevalece uma condição na qual cada um dos raios de A ou B irradiam um estado de tensão homogêneo que conduz a um equilíbrio compatível com a condição do estado plástico, então, é possível unir os “setores” ACD e BCE com uma transição suave de tensões, em direção aos triângulos ADF e BEG e, com isso, satisfazer plenamente as condições do problema, como mostrarão os cálculos apresentados posteriormente. Ao mesmo tempo, verifica-se que, em ambos os setores, os raios são linhas de deslizamento, donde se deduz imediatamente que, no caso de relação linear, as curvas CD e CE – que representam o outro sistema de linhas de deslizamento e interceptam o primeiro em um ângulo 2α – são espirais logarítmicas. Pela experiência, a tensão na área de compressão será significativamente maior que a resistência à compressão.

3. A execução do cálculo é a seguinte: Para o caso linear, a relação da tensão principal maior σ_1 e a menor (maior tensão de compressão) σ_2 pode ser escrita na forma:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = C - k \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad (1)$$

onde o lado esquerdo representa a maior tensão de cisalhamento, função linear da média de σ_1 e σ_2 .

Conforme proposto por O. Mohr [4-6], se forem consideradas ordenadas as tensões de cisalhamento τ , que atuam nas superfícies de cisalhamento traçadas nas diferentes orientações, e como abcissas as tensões normais σ correspondentes, então todos os estados de tensão são representados com pontos de uma região delimitada externamente por um círculo de diâmetro $\sigma_1 - \sigma_2$ e centro no eixo σ . A Equação 1 mostra, como uma linha reta, o envelope do círculo de estados de tensão, com a distância C da origem, e intercepta o eixo das abcissas em $\sigma = C/k$, conforme mostrado na Figura 2. Para o caso geral onde uma relação não linear possa ser considerada, em vez da Equação 1, o envelope será representado por uma curva.

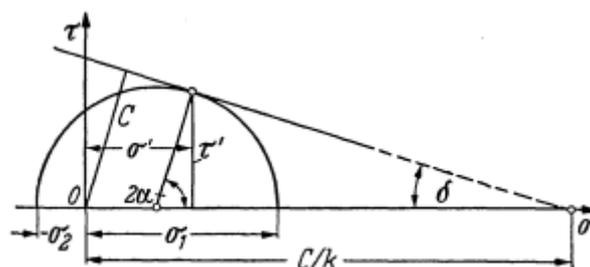


Abb. 2

As superfícies de cisalhamento, cujos estados de tensão na condição limite são representados por pontos, contêm a direção da tensão principal média. Segundo O. Mohr [4-6], o ponto de contato entre o círculo e o envelope está relacionado com as superfícies de deslizamento. A perpendicular do ponto $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ no envelope fornece o dobro do ângulo da superfície de deslizamento α , uma vez que, em geral, os raios do círculo de tensão formam o dobro do ângulo com o eixo σ , como ocorre com as respectivas interseções com o eixo σ_2^2 . De acordo com a Figura 2, no caso linear tem-se:

² Nota dos Tradutores: A rigor, não existe eixo σ_2 , mas apenas eixo σ .

$$k = \text{sen}\delta = \text{cos}2\alpha \quad (2)$$

De acordo com a Figura 2, as componentes de tensão na superfície de deslizamento são:

$$\sigma' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \text{sen}\delta \quad (3a)$$

$$\tau' = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \text{cos}\delta \quad (3b)$$

Se não se tem, diretamente, as tensões principais σ_1 e σ_2 , mas sim, um estado geral de tensão plano, então tem-se as equações:

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}; \quad \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (4)$$

Da equação 1 obtém-se agora:

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} + k \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = C^3 \quad (5)$$

obtida como condição para o estado plástico.

Se for inserido, por meio de relações, uma função

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad \tau = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

de tensão F (“função de Airy”), então a Equação 5 resulta em uma equação diferencial de segunda ordem do tipo hiperbólico, pois $k < 1$. Devido a essa circunstância, justifica-se, matematicamente, a possibilidade de se chegar à solução a partir de componentes individuais. As características da equação diferencial são as linhas de deslizamento; portanto, cada um dos componentes da equação é sempre delimitado por linhas de deslizamento.

³ Nota dos Tradutores: No artigo original há um erro tipográfico na Equação 5, ao colocar um sinal “+” no primeiro termo da expressão do interior da raiz quadrada.

Para os setores *ACD* e *BCE* é necessário, agora, encontrar um estado de tensão que satisfaça a Equação 5, gerando, em cada raio, um estado limite de tensões constantes, mas de magnitude diferente entre eles, que deve ser cumprido para todos os raios. Se se introduz uma função de tensão *F* para determinar o equilíbrio interno, então ela deve estar em coordenadas polares, na forma:

$$F = \frac{r^2}{2} f(\varphi) \quad (6)$$

onde as tensões radiais σ_r , tangenciais σ_t e de cisalhamento τ são iguais a:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{1}{2} f'' + f; \\ \sigma_t &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = f; \quad \tau = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) = -\frac{1}{2} f' \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Da Equação 5, a seguinte equação diferencial é obtida:

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} f''^2 + f'^2} + k \left(\frac{1}{4} f'' + f \right) = C \quad (8)$$

Uma solução da Equação 8 é:

$$f = \frac{C}{k} + A e^{\beta \varphi} \quad (9)$$

onde β deve satisfazer a equação:

$$\frac{\beta^2}{4} \left(\frac{\beta^2}{4} + 1 \right) - k^2 \left(\frac{\beta^2}{4} + 1 \right)^2 = 0^4 \quad (10)$$

um primeiro par de valores que satisfaz essa equação de quarto grau é $\beta = \pm 2i$; a solução correspondente $f(\varphi) = C_1 \cos 2\varphi + C_2 \sin 2\varphi$ representa um estado de tensão homogêneo comum e não o aqui procurado. Depois de dividir a Equação 10 por $\frac{\beta^2}{4} + 1$ resulta no seguinte par de valores:

⁴ Nota dos Tradutores: No artigo original há um erro tipográfico na Equação 10, ao colocar um sinal “+” no segundo termo da expressão.

$$\beta = \pm \frac{2k}{\sqrt{1-k^2}} = \pm 2tg\delta \quad (11)$$

Para o caso especial de $k = 0$ (corpo plástico ideal), $\beta = 0$, então a Equação 9 assume a forma indeterminada $\infty - \infty$. Um cruzamento de limite muito simples dá a solução:

$$f = \pm 2C\varphi + constante \quad (9a)$$

Se - para o caso geral - as expressões para σ_r , σ_t e τ são formadas, usando a Equação 7, então as tensões principais podem ser determinadas usando a Equação 4. Para os sinais positivo e negativo na Equação 11 tem-se:

$$\sigma_2^1 = \frac{C}{k} + \frac{Ae^{2\varphi tg\delta}}{1 \pm k} \quad (12)$$

onde deve ser considerado que A é sempre negativo. Para o corpo plástico ideal tem-se:

$$\sigma_2^1 = \pm C(2\varphi + 1) + constante^5$$

Dada a concordância dos valores de σ_t e τ com os valores calculados de σ' e τ' , a partir das Equações 12, 3a e 3b, respectivamente, segue-se que as superfícies radiais do setor são, de fato, superfícies de deslizamento. Com isso, decorre, imediatamente, de que prevalece nas áreas triangulares estados de tensão (as tensões principais são perpendiculares e paralelas à superfície) em que os ângulos $\sphericalangle FAD$ e $\sphericalangle ACO$ - e os ângulos simétricos a eles - são ângulos de deslizamento, ou seja, iguais a α . Do exposto, segue-se que os ângulos $\sphericalangle CAD$ e $\sphericalangle CBE$ são ângulos retos.

Se agora for considerado que no triângulo ADF - e, portanto, também no raio AD do setor ADC - $\sigma_l = 0$, de acordo com a Equação 1, $\sigma_2 = -\frac{2C}{1-k}$ (resistência à compressão ponderada), então, com um cálculo simples, para o raio AC girado em $\pi/2$, contra AD , tem-se:

⁵ Nota dos Tradutores: Há um erro tipográfico na equação do artigo original, ao colocar sinal “±” entre os termos dentro dos parênteses.

$$\sigma_1 = -\frac{C}{k} (e^{\pi t g \delta} - 1) \quad (13a)$$

$$\sigma_2 = -\frac{C}{k} \left(\frac{1+k}{1-k} e^{\pi t g \delta} - 1 \right) \quad (13b)$$

No entanto, essas tensões são uniformes em todo o triângulo ABC . A Equação 13b indica a tensão de compressão da superfície entre A e B , que corresponde à magnitude de dureza desejada. Se se introduz a resistência à compressão ordinária $\sigma_d = \frac{2C}{1-k}$ na Equação 13b, a seguinte equação é determinada para a “dureza plástica”:

$$\sigma_h = \frac{\sigma_d}{2k} \left[(1+k)e^{\frac{\pi k}{\sqrt{1-k^2}}} - (1-k) \right] \quad (14)$$

Com o mesmo raciocínio obtém-se, para o corpo plástico ideal, e as considerações definidas na Equação 9a, ou cruzando com o limite da Equação (14):

$$\sigma_h = \sigma_d \left(1 + \frac{\pi}{2} \right) \quad (14a)$$

Se k for diferente de zero, como acontece, por exemplo, em misturas de materiais de grãos duros com ligante plástico, em que o atrito dos grãos entre si desempenha um papel relevante no movimento⁶ plástico do ligante, a razão σ_h/σ_d aumenta acentuadamente com o aumento de k (ver a tabela no final do trabalho).

2.1 NOTAS

As considerações acima podem, também, ser aplicadas diretamente à resistência ao cisalhamento com bordas inclinadas com um ângulo de cunha ϑ (em vez da Figura 1, deve-se usar uma figura onde a polilinha $FABG$ é dobrada nos pontos A e B , e onde as linhas FA e BG formam o ângulo ϑ entre si). Como pode ser visto, facilmente, a resistência com as bordas inclinadas é obtida quando na Equação 14 ϑ é aplicado no lugar de π .

Se a pressão de punção não atuar perpendicularmente à superfície - ou no caso de uma borda inclinada da Nota 1, fora da linha de bissetriz - mas de alguma forma

⁶ Nota dos Tradutores: Esse termo pode, também, ser associado à “deformação”.

distorcida, o triângulo ABC (Figura 1) também se torna distorcido, de tal forma que a bissetriz do ângulo ACB permanece na direção da pressão. Como resultado, ambos os setores teriam ângulos diferentes, assim também, diferentes tensões σ_1 e σ_2 resultam para as linhas AC e BC . Devido ao equilíbrio em ABC , isso não é possível, segue-se, então, que apenas no setor de menor ângulo e no triângulo adjacente ocorrem o estado plástico, mas o limite elástico não é excedido no outro lado de ABC . Nesse caso, a mudança de forma é completamente unilateral.

Se a condição de estado plástico não tem a forma da Equação 1, mas o envelope da Figura 2 é curvo, os desenvolvimentos da Nota anterior ainda se aplicam para setores de ângulo infinitesimal, pois o estado de tensão é constante em cada raio e, portanto, também a magnitude k . Além disso, por exemplo, diferenciando-se a Equação 12:

$$\frac{d\sigma_2}{d\vartheta} = 2 \left(\sigma_2 - \frac{C}{k} \right) tg \delta = 2 \frac{k\sigma_2 - C}{\sqrt{1 - k^2}}$$

No entanto, k pode ser representado, a qualquer momento, por uma lei específica de plasticidade em função de σ_2 , de modo que o ângulo do setor, que agora é $\frac{\pi}{2} + \alpha_h - \alpha_d$ (α_h ângulo de deslizamento para a tensão de endurecimento⁷, α_d ângulo de deslizamento para a resistência à compressão) por quadratura. Em vez da Equação 14, a relação agora aparece:

$$\int_{\sigma_d}^{\sigma_h} \frac{\sqrt{1-k^2}}{k\sigma_2 - C} d\sigma_2 = \pi + 2(\alpha_h - \alpha_d) \quad (14b)$$

Resta esclarecer os movimentos do corpo plástico sob a ação de um pistão⁸. Supondo que o pistão seja rígido e a sua superfície suficientemente rugosa para evitar o deslizamento, à medida que o pistão penetra mais profundamente, partes da superfície do corpo plástico que entram em contato com ele continuam a se mover paralela e uniformemente para baixo, resultando que a área ABC na Figura 1 move-se como um corpo rígido. Um movimento infinitesimal desse tipo causa, como uma observação mais detalhada mostra isso, deslocamentos nos setores na direção tangente às espirais logarítmicas, onde os referidos deslocamentos são constantes em qualquer raio particular

⁷ Nota dos Tradutores: Esse termo corresponde à “plastificação”.

⁸ Nota dos Tradutores: Na verdade, trata-se do elemento penetrante na superfície do metal a ser submetido ao ensaio de dureza.

e, devido à constância do volume, são inversamente proporcionais ao comprimento do raio. Dessa forma, os triângulos externos são empurrados para fora como corpos rígidos, ao longo das linhas DF e EG . A componente perpendicular à superfície dv desse deslocamento comporta-se inversamente como \overline{AF} para \overline{OA} , devido à continuidade com o deslocamento do pistão ds . Dado que:

$$\overline{OA}:\overline{AC} = \text{sen}\alpha, \quad \overline{AD}:\overline{AF}^9 = \frac{1}{2\cos\alpha} \quad e \quad \overline{AC}:\overline{AD} = e^{-\frac{\pi}{2}\text{tg}\delta}$$

(espiral logarítmica com um ângulo de inclinação $\frac{\pi}{2} - 2\alpha = \delta$, veja a Figura 2),
então:

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{1}{2}\text{tg}\alpha e^{-\frac{\pi}{2}\text{tg}\delta} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-k}{1+k}} e^{-\frac{\pi}{2}\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}} \quad (15)$$

(uma vez que $\cos 2\alpha = \text{sen}\delta = k$, Equação 2).

Para movimentos finitos deve-se notar que, enquanto o pistão continua a penetrar, a extensão AB da tira comprimida aumenta continuamente e, portanto, os limites mostrados na Figura 1 mudam constantemente. O material previamente deslocado opõe-se à penetração, de modo que a extensão AB , para uma determinada trajetória s acaba sendo maior do que resultaria da análise geométrica elementar. A forma do deslocamento da superfície que ocorre por meio de uma trajetória do pistão s , com um raio de curvatura r do pistão, pode ser calculado como segue.

Uma vez que todas as trajetórias de deformação são consideradas pequenas, em comparação com o raio r , e, portanto, ocorrem apenas pequenas inclinações em relação à superfície original, os efeitos dos deslocamentos tangenciais u , na forma da superfície podem ser desprezados, em comparação com os deslocamentos v (perpendicular à superfície). Desse modo, apenas v é calculado aqui. A equação para a superfície do pistão é $y = x^2/2r$, o que resulta (veja a Figura 3) no deslocamento da superfície do corpo plástico dentro do segmento \overline{AB} com a trajetória do pistão s :

$$v = \frac{x^2}{2r} - s \quad (16)$$

⁹ Nota dos Tradutores: No artigo original há um erro tipográfico, ao colocar o termo $\frac{1}{2}\cos\alpha$.

Se x_1 denota o comprimento atual da linha \overline{OA} , então $\overline{AF} = \lambda x_1$ com:

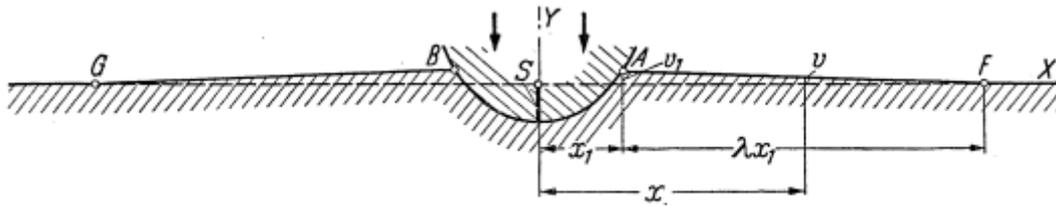
$$\lambda = \frac{1}{\frac{\partial v}{\partial s}} = 2 \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} e^{\frac{\pi k}{2\sqrt{1-k^2}}} \quad (17)$$

então, para $x > (\lambda + 1)x_1$: $v = 0$.

Para $x_1 < x < (\lambda + 1)x_1$, levando-se em consideração a Equação 15:

$$v = \frac{\partial v}{\partial s}(s - s') = \frac{(s-s')}{\lambda} \quad (18)$$

onde s' é o deslocamento do pistão, no qual a elevação no ponto x iniciou-se, com a superfície de pressão tendo um raio $x' = \frac{x}{(\lambda+1)}$.



Da equação 16 verifica-se que para $x = x_1$ há o deslocamento v_1 correspondente a (veja a Figura 3):

$$s + v_1 = \frac{x_1^2}{2r} \quad (19)$$

Assumindo que a razão numérica entre s e v_1 é invariável e definida:

$$s = \mu \frac{x_1^2}{2r} \quad (20)$$

também:

$$s' = \frac{\mu x^2}{2r(\lambda+1)^2} \quad (21)$$

As Equações 19 e 20 e as Equações 18 e 21 aplicadas a $x = x_1$ são suficientes apenas para estabelecer uma relação entre μ e λ , após eliminar s , s' e $x_1^2/2r$, o que prova a suposição proposta na Equação 20, onde:

$$\mu = \frac{\lambda(\lambda+1)^2}{(\lambda+1)^3-1} \quad (22)$$

e com isso, usando as Equações 18 e 21:

$$v = \frac{s}{\lambda} - \frac{x^2}{2r} \frac{1}{(\lambda+1)^3-1} \quad (23)$$

para $x_1 < x < (\lambda + 1)x_1$, onde, de acordo com a Equação 20, $x_1 = \sqrt{2rs/\mu}$.

Em uma primeira aproximação, o deslocamento da superfície livre fornece uma imagem afim da forma do pistão, com uma abcissa ampliada na proporção $(\lambda + 1):1$ e uma ordenada reduzida na proporção de $1:\lambda$. Essa relação aparece para perfis de pistão simétrico plano e, com exceção da posição $x = 0$, em nenhum lugar se aplica para inclinação variável.

Devido às Equações 19 e 20, a maior elevação na borda é:

$$v_1 = (1 - \mu) \frac{x_1^2}{2r} = s \frac{(1-\mu)}{\mu} = s \frac{(\lambda+2)}{(\lambda+1)^2} \quad (24)$$

2.2 NOTA

Se o movimento do pistão não for vertical, mas oblíquo, a elevação em ambos os lados do pistão terá uma altura desigual. Além disso, enquanto o esforço conserva sua direção vertical inalterada, somente se a inclinação do deslocamento exceder o ângulo de deslizamento α , e o levantamento não ocorre em um dos lados, resultam em direções oblíquas da força (ver notas 2 a 4¹⁰).

δ	α	k	σ_h/σ_d	λ	μ	v_1/s
0°	45°	0	2,571	2,000	0,6923	0,4445
10°	40°	0,1736	3,499	3,144	0,7695	0,2995
20°	35°	0,3420	5,194	5,059	0,8387	0,1923
30°	30°	0,5000	8,701	8,579	0,8966	0,1153
40°	25°	0,6428	17,558	16,924	0,9413	0,0624

¹⁰ Nota dos Tradutores: No artigo original há um erro tipográfico em mencionar as Notas 2 a 4, porquanto somente existem três delas; logo, trata-se das Notas 2 e 3.

3 RESUMO

Para materiais que, ao ultrapassarem os limites elásticos, apresentam comportamento plástico, caracterizado por uma relação linear entre as tensões principais maior e menor, os estados de tensão e deformação tornam-se um problema bidimensional, ante a penetração de um corpo rígido. Algumas extensões são adicionadas em Notas.

4 COMENTÁRIOS FINAIS

Van Baars (2018) [v] revisitou a obra clássica de Prandtl e reportou alguns comentários interessantes, *e.g.*, o fato de que:

- i) O trabalho de Prandtl fora criado e analisado essencialmente por um engenheiro mecânico, daí as suas premissas e conclusões basearem-se em materiais como o aço, pois, para este material, o ângulo de atrito é igual a zero, mas, para os solos, isso não é correto, porque uma parte da resistência ao cisalhamento vem do ângulo de atrito;
- ii) Os símbolos empregados no artigo são diferentes daqueles consagrados em engenharia de fundações, como é o caso do ângulo de atrito (δ), ao invés do consagrado símbolo ϕ , e, também, C , em vez de c , para a coesão do material; há, também, o emprego do parâmetro k , em vez de $\text{sen } \delta$;
- iii) Em relação à Figura 1, há outras duas observações notáveis: primeiro, o envelope de ruptura de Coulomb é desenhado, para engenheiros geotécnicos, como uma imagem de espelho, pois, na engenharia mecânica, a tensão de tração é positiva, enquanto na geotécnica a tensão de compressão é positiva; em segundo lugar, a coesão não é traçada verticalmente como deveria ser, mas, perpendicularmente, ao envelope de ruptura. Esses dois pontos explicam por que na solução final (Equação 13b) existe um $-C/k$, uma vez que deveria ser apenas um c , conforme emprego na engenharia geotécnica;
- iv) Infelizmente, o artigo é muito direto; soluções finais são muitas vezes dadas sem muita explicação. Por exemplo, a parte mais importante da publicação, a “descoberta” da Cunha de Prandtl é discutida em apenas algumas linhas; ademais, como a solução final (Equação 13b) é encontrada, não é indicada no artigo;
- v) A simples razão pela qual Prandtl não analisara o efeito da sobrecarga na superfície do material é que este efeito é, tipicamente, um problema de engenharia

civil, tema abordado, posteriormente, por Reissner (1924) [vi], que era um engenheiro civil e Prandtl, um engenheiro mecânico.

Pode-se, ainda, incrementar as observações daquele autor relatando que Prandtl apenas afirmou que as linhas de cisalhamento CD e CE (Figura 1) são espirais logarítmicas, sem, todavia, comprovar essa afirmação. Ademais, uma importante contribuição do trabalho é a demonstração que, para caso de materiais sem atrito (com $k = 0$), e aplicando-se a Equação 14a, tem-se que a tensão de compressão de ruptura é igual $\sigma_h = C(\pi + 2) = 5,14C$, um valor muito próximo dos valores atuais, encontrados para argilas puras, em termos de tensões totais. Outra contribuição foi a questão do levantamento (elevação) das bordas, na fase de plastificação total (ruptura física), confirmado por modelos em laboratório e colapsos de estruturas em verdadeira grandeza. Em adição, reportou os conceitos de superfície rugosa e lisa que depois foram incorporados às teorias de capacidade de carga, para o contato entre a base da fundação e o maciço de solo.

Finalmente, não se pode deixar de mencionar o interessante fato de que a Teoria de Capacidade de Carga de Fundações Superficiais moderna teve sua origem a partir do trabalho de Prandtl (1920), *i.e.*, a partir de uma teoria aplicada a um ensaio de indentação de metais!

REFERÊNCIAS

- [i] L. Prandtl. Über die Härte plastischer Körper. Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen Mathematisch-physikalischen Klasse, 74–85, 1920.
- [ii] K. Terzaghi. Theoretical soil mechanics. New York: J. Wiley and Sons, Inc., 1943.
- [iii] E.G. Diaz-Segura. Origen de la Cuña de Prandtl – Mecanismo de falla usado para cimentaciones superficiales. Revista Gaceta Técnica. Artículo de Divulgación. 23(2), 107-120, julio-diciembre, 2022, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado. ISSN: 2477-9539.
- [iv] H. Hertz. Über die Berührung fester elastischer Körper. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 92, 156-171, 1881.
- [1] B. de Saint-Venant. Mémoire sur l'établissement des équations différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état. Journal de mathématiques pures et appliquées, 16, 308-316, 1871.
- [2] M. Lévy. Extrait du Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état. Présenté le 20 juin 1870. Journal de mathématiques pures et appliquées, 16, 369-37, 1871.
- [3] A. Haar and von T. Zu Kármán. Theorie der Spannungszustände in plastischen und sandartigen Medien. Nachr. Gesellsch. Wissensch., Göttingen, Math-phys. Klasse, 204, 1909.
- [4] O. Mohr. Über die Darstellung des Spannungszustandes und des Deformationszustandes eines Körperelementes und über die Anwendung derselben in der Festigkeitslehre. Der Civilingenieur, 28(2), 113-156, 1882.
- [5] O. Mohr. What are the circumstances that lead to reach the limit of elasticity and the failure of materials. Zeitschrift des Ver Deutsch Ing, 44, 1524-1530, 1900.
- [6] O. Mohr. Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik, Berlin: Ernst, 1906.
- [v] S. van Baars. 100 Years of Prandtl's Wedge. IOS Press BV, Amsterdam, The Netherlands, 2018.
- [vi] H. Reissner. Zum Erddruckproblem. Proceedings of the 1st International Congress for Applied Mechanics, Biezeno, C. B. and Burgers, J. M. eds., Delft, the Netherlands, 295–311, 1924.