

Análise inelástica de vigas considerando a mecânica do dano contínuo

Inelastic analysis of beams considering the continuous damage mechanics

DOI:10.34117/bjdv8n7-063

Recebimento dos originais: 23/05/2022

Aceitação para publicação: 30/06/2022

Luiz Antonio Farani de Souza

Doutorado

Instituição: Universidade Federal Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Curso de Engenharia Civil

Endereço: R. Marçílio Dias, 635, Jardim Paraíso, Apucarana - PR, CEP: 86812-460

E-mail: lasouza@utfpr.edu.br

Everton Luis Consoni da Silva

Graduação

Instituição: Universidade Estadual de Maringá (UEM), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PCV)

Endereço: Bloco C67, Pavimento Térreo, sala 002, Av. Colombo, nº 5790, Maringá – PR, Campus Universitário, CEP: 87020-900

E-mail: pg403386@uem.br

RESUMO

A análise linear elástica é ainda muito utilizada devido à simplicidade de aplicação e ao fato de que o seu conhecimento já se encontra consolidado. Entretanto, uma das dificuldades da análise linear é sua inaptidão em refletir o real comportamento de estruturas menos comuns sob condições de carregamentos próximos ao colapso. Há uma tendência atual das normas de incorporar, direta ou indiretamente, os efeitos das não linearidades física e geométrica em projetos estruturais. Os modelos constitutivos de dano têm sido usados como uma ferramenta importante de análise da perda de rigidez de elementos estruturais com o intuito de prever a degradação do material. O dano pode ser visto como as deformações plásticas ou permanentes originadas pela deterioração das propriedades físicas do material, como por exemplo, o módulo de elasticidade longitudinal. Nesse contexto, este artigo apresenta modelo numérico-computacional para a análise estática não linear física de vigas por meio do Método dos Elementos Finitos. O material é descrito por um modelo constitutivo fundamentado na teoria da Mecânica do Dano Contínuo. A solução aproximada do sistema de equações não lineares é obtida com o procedimento incremental de Newton - Raphson associado à técnica de continuação Controle de Deslocamento Generalizado. Na obtenção do vetor de força interna e da matriz de rigidez do elemento de viga, o módulo de rigidez à flexão equivalente é obtido com o Método das Fatias. Problemas de vigas encontrados na literatura são analisados com o intuito de comprovar a eficiência do código computacional implementado, quanto à obtenção da trajetória de equilíbrio e à distribuição do dano em seções transversais ao longo do comprimento da viga.

Palavras-chave: elementos finitos, mecânica do dano, não linearidade física, método das fatias, rigidez equivalente à flexão.

ABSTRACT

Elastic linear analysis is still widely used due to its simplicity of application and the fact that its knowledge is already consolidated. However, one of the difficulties of linear analysis is its inability to reflect the real behavior of less common structures under conditions of near-collapse loading. There is a current trend in norms to incorporate, directly or indirectly, the effects of physical and geometric nonlinearities in structural designs. The constitutive models of damage have been used as an important tool to analyze the loss of stiffness of structural elements in order to predict the degradation of the material. Damage can be seen as plastic or permanent deformations caused by the deterioration of the physical properties of the material, such as the longitudinal elasticity modulus. In this context, this article presents a numerical-computational model for the physical nonlinear static analysis of beams using the Finite Element Method. The approximate solution of the system of nonlinear equations is obtained with the Newton - Raphson incremental procedure associated with the Generalized Displacement Control path-following technique. In obtaining the internal force vector and the stiffness matrix of the beam element, the equivalent bending stiffness modulus is obtained with the Slice Method. Beam problems found in the literature are analyzed in order to prove the efficiency of the implemented computational code, regarding obtaining the equilibrium path and the distribution of damage in cross sections along the length of the beam.

Keywords: finite element, damage mechanics, physical nonlinearity, slice method, equivalent bending stiffness.

1 INTRODUÇÃO

Na análise estrutural, muitos problemas são caracterizados pelo comportamento inelástico dos materiais que conformam as estruturas, identificando fenômenos tais como plasticidade, dano, fraturamento, entre outros, os quais mudam substancialmente as propriedades de rigidez do sistema. Um problema complexo gerado pela inelasticidade dos materiais é a ocorrência de deformações localizadas no sistema. A consideração desse fenômeno pode levar a problemas na implementação numérica, acarretando inclusive a interrupção da análise por problemas de convergência ou mau condicionamento numérico. Nesse contexto, a análise numérica de estruturas com características inelásticas de material requer controles de análise que permitam avaliar as mudanças de rigidez do sistema ocasionadas pelo comportamento não linear dos materiais (MUÑOZ; ROEHL, 2012).

Com o avanço do conhecimento do comportamento dos materiais e das técnicas de cálculo, além do desenvolvimento de computadores cada vez mais eficientes, torna-se possível a consideração de mecanismos de comportamento das estruturas por meio de

modelos matemáticos mais realísticos. A tentativa de aproximação desses modelos à realidade do comportamento estrutural tem a vantagem de possibilitar uma resposta mais precisa. Contudo, tais modelos apresentam o inconveniente do número excessivo de parâmetros de entrada, a identificação paramétrica complexa com a necessidade de ensaios experimentais elaborados e processamento numérico - computacional com custo computacional elevado (PITUBA; DELALIBERA, 2010).

Pilares e vigas são amplamente utilizados como componentes estruturais para resistir a cargas de compressão e de flexão, respectivamente, na maioria das estruturas da engenharia civil. Esses elementos estruturais são conectados entre si para formar pórticos, que são utilizados para suportar cargas verticais oriundas da gravidade e cargas laterais provocadas pela ação do vento. O projeto e a segurança de tais membros estruturais são geralmente baseados nas propriedades iniciais da seção não danificada. O dano presente em qualquer elemento estrutural provoca alterações nos parâmetros físicos e nas propriedades mecânicas de uma estrutura, como por exemplo, a área da seção transversal, o momento de inércia e as rigidezes à flexão e ao cisalhamento (KHAN et al., 2020).

A Mecânica do Dano Contínuo (MDC) é uma ferramenta para a análise da deterioração do material em sólidos submetidos à ação de natureza mecânica ou térmica. Enquanto a Mecânica da Fratura lida com as condições de propagação de fissuras macroscópicas, a MDC estuda o efeito de microfissuras distribuídas na resposta do material. Os modelos constitutivos formulados pela aplicação dos conceitos da MDC permitem considerar as perdas de rigidez e de resistência, observadas em diferentes materiais, como resultado do processo evolutivo de microfissuração. Essa teoria pretende descrever a evolução dos fenômenos dessas perdas que se desenvolvem entre um estado inicial, relativo a uma situação de material íntegro, e um estado final, correspondente à ruptura do elemento de volume. Para tanto, fundamenta-se nos princípios e nos métodos da mecânica dos meios contínuos e da termodinâmica dos processos irreversíveis (PROENÇA, 1992).

A MDC tornou-se um dos campos de pesquisa mais ativos em Mecânica dos Sólidos. A ideia principal dessa teoria é a introdução da variável interna dano. Essa variável inclui a degradação do desempenho mecânico decorrente de imperfeições e defeitos em microescala no meio contínuo. A sua evolução está associada a um mecanismo dissipativo derivado de um potencial de dano elástico (CIPOLLINA; LÓPEZ-INOJOSA; FHEZ-LÓPEZ, 1995; ALVES; YU; JONES, 2000; FINCATO; TSUTSUMI, 2016).

Os elementos finitos de viga são usados tipicamente para a análise estrutural de vigas e pórticos devido a sua eficiência computacional e à capacidade de capturar com precisão a resposta deslocamento - carga da estrutura com comportamento elástico-plástico. Este artigo apresenta um modelo numérico-computacional para a análise não linear de vigas por meio do Método dos Elementos Finitos, levando-se em consideração o efeito da não linearidade física. O material é descrito por um modelo constitutivo isotrópico fundamentado na teoria da Mecânica do Dano Contínuo proposto por Manzoli (1998), com a possibilidade de prever o comportamento diferenciado tanto à tração quanto à compressão. Nesse modelo, a variável dano é um escalar, uma vez que a distribuição dos defeitos no interior do meio é considerada uniforme.

As análises não lineares estáticas são efetuadas com o método de Newton – Raphson padrão associado à técnica de continuação Controle de Deslocamento Generalizado. Problemas de estruturas de vigas encontrados na literatura são analisados com o intuito de comprovar a eficiência do código computacional implementado quanto à obtenção da trajetória de equilíbrio.

O vetor de força interna e a matriz de rigidez do elemento de viga são obtidos em função do módulo de rigidez à flexão equivalente, o qual é obtido por meio do Método das Fatias. Nesse método, a seção transversal é dividida em fatias e permite a degradação gradual da seção transversal ao longo da altura do elemento. As simulações computacionais são efetuadas com o programa livre Scilab, versão 6.1.1 (SCILAB, 2021).

2 MODELO CONSTITUTIVO PARA O MATERIAL DA VIGA

O modelo baseado na teoria Mecânica do Dano Contínuo proposto por Manzoli (1998) é utilizado para descrever o comportamento do material que constitui a viga. A variável interna dano, que caracteriza a densidade superficial de microfissuras e microvazios, é introduzida nessa teoria. Sejam A_d a área de microdefeitos e A área nominal total de um elemento de volume representativo. O dano d é definido como (CIPOLLINA; LÓPEZ-INOJOSA; FHEZ-LÓPEZ, 1995):

$$d = \frac{A_d}{A}. \quad (1)$$

O dano pode assumir valores entre zero (elemento íntegro) e um (elemento totalmente danificado), isto é, $d \in [0,1]$. O dano influencia no comportamento elástico do

material, que é levado em consideração por meio das hipóteses de tensão efetiva e de deformação equivalente. A tensão efetiva $\bar{\sigma}$ é definida como a razão entre a carga aplicada no elemento de volume e a área de resistência efetiva $\bar{A} = A - A_d$. A relação entre a tensão efetiva e a tensão de Cauchy é dada por (CIPOLLINA; LÓPEZ-INOJOSA; FHEZ-LÓPEZ, 1995; AMIR; PAPAKONSTANTINOU; WARN, 2022):

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - d}. \quad (2)$$

A hipótese de equivalência de deformação consiste em assumir que se a tensão de Cauchy for substituída pela tensão efetiva, o comportamento de um material danificado é o mesmo de um material íntegro, ou seja (CIPOLLINA; LÓPEZ-INOJOSA; FHEZ-LÓPEZ, 1995):

$$\varepsilon^e = \frac{\bar{\sigma}}{E_0} = \frac{\sigma}{E_0(1 - d)}, \quad (3)$$

na qual ε^e é a deformação elástica e E_0 é o módulo de elasticidade longitudinal para o material íntegro. As equações constitutivas na Mecânica do Dano são obtidas por adicionar uma lei de evolução de dano na Equação (3).

Seja o limite de dano inicial r_0 uma propriedade do material, sendo relacionado à tensão limite de proporcionalidade f_0 por:

$$r_0 = B_1 \frac{f_0}{\sqrt{E_0}}, \quad (4)$$

em que B_1 é um parâmetro adicionado ao modelo original. Define-se a norma da tensão efetiva $\tau(\bar{\sigma})$ por:

$$\tau(\bar{\sigma}) = \sqrt{\frac{\bar{\sigma}^2}{E_0}}. \quad (5)$$

A partir das relações de Kuhn - Tucker, o limite de dano r é dado pelo máximo valor da variável t durante o processo de carregamento, tal que:

$$r = \text{máx}(r_0, \tau). \quad (6)$$

A partir das Equações (3) e (5), t pode ser expresso em termos da deformação específica ε por:

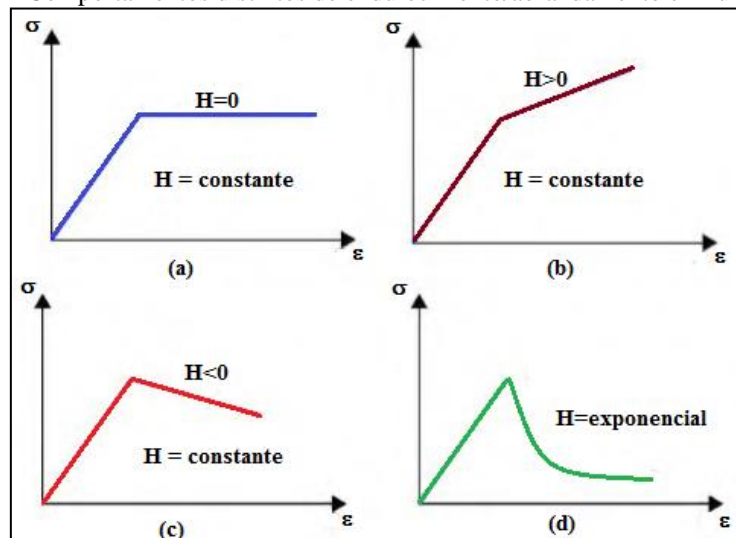
$$\tau(\varepsilon) = \sqrt{E_0} \varepsilon^e. \quad (7)$$

A variável de dano d é escrita em função do módulo H e do limite de dano r de acordo com a equação:

$$d = \frac{r - r_0}{r(1 + H)}. \quad (8)$$

Variando-se a função que descreve o módulo H , tem-se na Figura 1 em: (a) o regime elastodegradável perfeito (perfeitamente plástico); em (b) o encruamento linear positivo (endurecimento); em (c) o encruamento linear negativo (abrandamento); e em (d) o abrandamento exponencial.

Figura 1 – Comportamentos distintos de endurecimento/abrandamento em função de H .



3 MÓDULO DE RIGIDEZ À FLEXÃO EQUIVALENTE

Ao considerar a não linearidade física do material, as fibras constituintes da seção transversal danificam devido às tensões provenientes do carregamento aplicado serem superiores à tensão limite de proporcionalidade f_0 do material. Para a determinação do módulo de rigidez à flexão equivalente EI_{eq} , emprega-se o Método das Fatias, o qual consiste na divisão da seção transversal retangular da viga em n_c camadas de mesma

espessura, conforme o desenho esquemático na Figura 2. O momento de inércia da camada i (I_i) é calculado, conforme o Teorema do Eixo Paralelo, por:

$$I_i = \frac{b(y_i - y_{i-1})^3}{12} + b(y_i - y_{i-1}) \left(y_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{2} \right)^2, \quad i = 1, \dots, nc + 1, \quad (9)$$

em que b é a largura e y_i é a coordenada da i -ésima camada a partir do centro geométrico da seção transversal retangular.

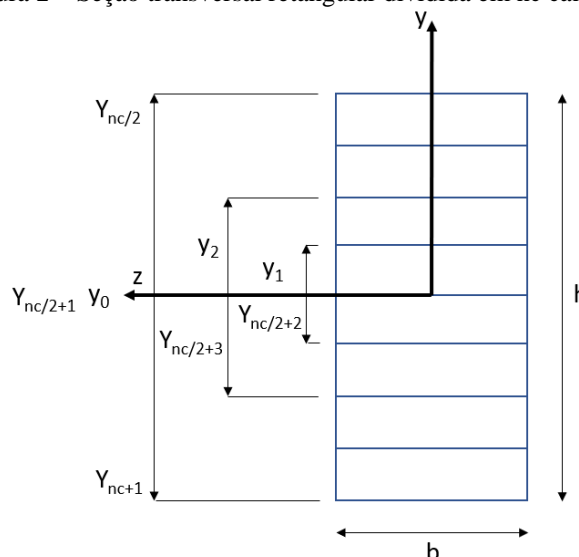
A rigidez à flexão equivalente EI_{eq} é calculada conforme a equação:

$$EI_{eq} = \sum_{i=1}^{nc} E_i I_i = \sum_{i=1}^{nc} E_0 (1 - d_i) I_i, \quad (10)$$

na qual E_i é o módulo de elasticidade longitudinal para o material danificado e d_i é o dano, referentes à camada i .

Na obtenção do vetor de força interna e da matriz de rigidez do elemento, o módulo EI_{eq} é avaliado nos pontos de Gauss na integração numérica (método de Quadratura de Gauss-Legendre). Supõe-se, por simplificação, que a linha neutra está localizada no centroide da seção transversal no procedimento de cálculo desse módulo, não mudando de posição durante a análise não linear.

Figura 2 – Seção transversal retangular dividida em nc camadas.



A danificação da camada i da seção transversal inicia ($d_i > 0$) quando o valor de τ , avaliado de acordo com a Equação (7), atinge o valor do limite de dano inicial na tração r_{0t} ou na compressão r_{0c} . Esses parâmetros são calculados por, respectivamente:

$$r_{0t} = B_1 \frac{f_{0t}}{\sqrt{E_0}} \quad (11)$$

$$r_{0c} = B_1 \frac{f_{0c}}{\sqrt{E_0}} \quad (12)$$

em que f_{0t} é a tensão limite na tração e f_{0c} é a tensão limite na compressão.

Para o caso de um procedimento incremental, o dano d no passo de carga $t + \Delta t$ pode ser obtido a partir da deformação específica ε^e em cada camada de divisão da seção transversal da viga, na iteração k , por meio do algoritmo do modelo constitutivo de dano diferenciado à tração e à compressão apresentado na Figura 3. Nesse algoritmo, os módulos H_c e H_t referem-se à compressão e à tração, respectivamente.

Figura 3 – Algoritmo para o modelo de dano diferenciado à tração e à compressão.

```

Entrada:  $E_0, H_c, H_t, r_{0c}, r_{0t}, \varepsilon^{(k-1)}$ 
1) Calcular  $\tau^{(k)} = \sqrt{E_0} |\varepsilon^{(k-1)}|$ 
2) Se  $\varepsilon^{(k-1)} > 0$  (tração)
   Se  $\tau^{(k)} > r_{0t}$ 
      $r^{(k)} = \tau^{(k)}$ 
   senão
      $r^{(k)} = r_{0t}$ 
   Fim
   Calcular  $d^{(k)} = \frac{r^{(k)} - r_{0t}}{r^{(k)}(1 + H_t)}$ 
   Fim
3) Se  $\varepsilon^{(k-1)} < 0$  (compressão)
   Se  $\tau^{(k)} > r_{0c}$ 
      $r^{(k)} = \tau^{(k)}$ 
   senão
      $r^{(k)} = r_{0c}$ 
   Fim
   Calcular  $d^{(k)} = \frac{r^{(k)} - r_{0c}}{r^{(k)}(1 + H_c)}$ 
   Fim
4) Se  $\varepsilon^{(k-1)} = 0, d^{(k)} = 0, \text{ Fim}$ 
5) Se  $d^{(k)} > 1, d^{(k)} = 1, \text{ Fim}$ 
6) Se  $d^{(k)} < 0, d^{(k)} = 0, \text{ Fim}$ 
Saída:  $d^{(k)}$ 

```

4 MÉTODO DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA ESTRUTURAL

Algoritmos existentes de métodos de solução apresentam como passo fundamental a avaliação do vetor de carga de forças residuais ${}^{t+\Delta t}\mathbf{g}^{(k)}$, e uma nova estimativa para os deslocamentos é obtida por meio do sistema de equações não lineares:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(k-1)} {}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{g}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\lambda^{(k)} \mathbf{F}_r - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i^{(k-1)}, \quad (13)$$

na qual ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(k-1)}$ é a matriz de rigidez representativa do sistema estrutural, ${}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}^{(k)}$ é o vetor subincremento de deslocamentos nodais, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i^{(k-1)}$ é o vetor de forças internas e

$t+\Delta t\lambda^{(k)}$ é o parâmetro de carga total. No sistema de equações dado em Equação (13), o superíndice direito refere-se à iteração e o superíndice esquerdo, ao passo de carga.

O parâmetro de carga total λ e o vetor de deslocamentos totais \mathbf{u} são obtidos pelas seguintes equações no passo de carga $t+\Delta t$ e iteração k , respectivamente:

$$t+\Delta t\lambda^{(k)} = t+\Delta t\lambda^{(k-1)} + t+\Delta t\delta\lambda^{(k)}, \quad (14)$$

$$t+\Delta t\mathbf{u}^{(k)} = t+\Delta t\mathbf{u}^{(k-1)} + t+\Delta t\delta\mathbf{u}^{(k)}. \quad (15)$$

Uma equação de restrição foi proposta por Yang e Kuo (1994) para o cálculo do subincremento de carga $t+\Delta t\delta\lambda^{(k)}$, sendo que essa equação deve ser respeitada na obtenção da solução do sistema em duas etapas (solução predita e ciclo de iterações). A equação de restrição é dada por (ROCHA, 2000):

$$\mathbf{C}^T \delta\mathbf{u}^{(k)} + k_1\delta\lambda^{(k)} = H_k, \quad (16)$$

sendo o vetor \mathbf{C} e o escalar k_1 constantes e H_k um parâmetro incremental. Em função dos valores selecionados para essas variáveis na Equação (16), obtêm-se diferentes técnicas de continuação.

Para a determinação do parâmetro de carga iterativo, utiliza-se a técnica de continuação Controle de Deslocamento Generalizado (GDCM). Essa técnica foi apresentada por Yang e Shieh (1990) e consiste na utilização do parâmetro geral de rigidez (GSP), que é definido pela seguinte equação (RODRIGUES et al., 2008):

$$\text{GSP} = \frac{{}^1\delta\mathbf{u}_r^{(1)T} {}^1\delta\mathbf{u}_r^{(1)}}{{}^t\delta\mathbf{u}_r^{(1)T} t+\Delta t\delta\mathbf{u}_r^{(1)}}, \quad (17)$$

em que ${}^1\delta\mathbf{u}_r^{(1)}$ é o vetor de deslocamentos tangentes da primeira iteração no primeiro passo de carga, ${}^t\delta\mathbf{u}_r^{(1)}$ é o vetor de deslocamentos tangentes da primeira iteração do passo de carga anterior e $t+\Delta t\delta\mathbf{u}_r^{(1)}$ é o vetor de deslocamentos tangentes da primeira iteração do passo de carga corrente. O parâmetro do subincremento de carga $t+\Delta t\delta\lambda^{(k)}$ é calculado por (ciclo de iterações) (RODRIGUES et al., 2008):

$${}^{t+\Delta t}\delta\lambda^{(k)} = -\frac{{}^t\delta\mathbf{u}_r^{(1)T}{}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_g^{(k)}}{{}^t\delta\mathbf{u}_r^{(1)T}{}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_r^{(k)}} \quad (18)$$

A Equação (18) pode ser obtida fazendo-se na Equação (16) $k_1 = {}^t\delta\mathbf{u}_r^{(1)T}{}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_r^{(k)}$, $H_k = 0$ e $\mathbf{C}^T\delta\mathbf{u}^{(k)} = {}^t\delta\mathbf{u}_r^{(1)T}{}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_g^{(k)}$. Os vetores ${}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_g^{(k)}$ e ${}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_r^{(k)}$ são avaliados segundo às equações, respectivamente:

$${}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_g^{(k)} = \left[{}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(k-1)} \right]^{-1} {}^{t+\Delta t}\mathbf{g}^{(k-1)}, \quad (19)$$

$${}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_r^{(k)} = \left[{}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(k-1)} \right]^{-1} \mathbf{F}_r. \quad (20)$$

A solução do sistema dado em Equação (13) é obtida por meio da decomposição do vetor subincremento de deslocamentos ${}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}^{(k)}$ em duas parcelas:

$${}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\delta\lambda^{(k)} {}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_r^{(k)} + {}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_g^{(k)}. \quad (21)$$

Há possibilidade de que o subincremento de carga tenda ao infinito em pontos próximos a um ponto limite da trajetória de equilíbrio. Para evitar que isso ocorra, limitou-se a norma do vetor ${}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}^{(k)}$ a um valor máximo $\delta u_{\text{máx}}$, de tal forma que se $\|{}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}^{(k)}\| > \delta u_{\text{máx}}$, então (KRENK, 1995):

$${}^{t+\Delta t}\delta\lambda^{(k)} = \frac{\delta u_{\text{máx}}}{\|{}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}^{(k)}\|} {}^1\delta\lambda^{(1)}, \quad (22)$$

em que $\|\cdot\|$ é a norma Euclidiana. Uma estratégia adaptativa que pode ser muito útil no emprego da técnica de controle de carga é a determinação automática da variação do parâmetro de carga inicial (${}^1\delta\lambda^{(1)}$) para a definição do valor do parâmetro de carga para a primeira iteração (${}^{t+\Delta t}\lambda^{(1)}$), que consiste em, ao final de cada passo da análise, monitorar o número de iterações requeridas para a convergência (N_{it}) da técnica iterativa e comparar esse número com um valor ótimo (N_{ot}). Por meio dessa monitoração, calcula-se ${}^{t+\Delta t}\delta\lambda^{(1)}$ para o passo de carga seguinte por (CRISFIELD, 1991):

$${}^{t+\Delta t}\delta\lambda^{(1)} = \sqrt{\frac{N_{ot}}{N_{it}}} {}^1\delta\lambda^{(1)} \sqrt{|GSP|}. \quad (23)$$

O sinal do subincremento de carga inicial (${}^{t+\Delta t}\delta\lambda^{(1)}$) pode ser positivo ou negativo. A escolha do sinal correto é de suma importância na definição de sequências de soluções que permitam o avanço na resposta carga - deslocamento. O parâmetro de rigidez generalizado (GSP) depende exclusivamente dos vetores ${}^t\delta\mathbf{u}_r^{(1)}$ (passo de carga anterior) e ${}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_r^{(1)}$ (passo de carga corrente). A mudança de sinal do parâmetro GSP serve como um indicador para a mudança do sentido de crescimento da carga, uma vez que o mesmo se torna negativo somente nos incrementos da carga imediatamente após a passagem por pontos limites. Na Figura 4 é apresentado o algoritmo implementado referente ao método de Newton - Raphson associado à técnica de continuação GDCM.

Figura 4 – Algoritmo para o método de solução.

<p>1) Determinar um valor para o parâmetro de carga inicial ${}^1\delta\lambda^{(1)}$ e fazer ${}^1\lambda^{(0)} = 1$</p> <p>2) Para a primeira iteração ($k = 1$), em qualquer passo $t + \Delta t$:</p> <p>a) Determinar a matriz de rigidez $\mathbf{K}^{(0)}$.</p> <p>b) Resolver as equações de equilíbrio $\delta\mathbf{u}_r^{(1)} = \mathbf{K}^{(0)-1}\mathbf{F}_r$ e $\delta\mathbf{u}_g^{(1)} = \mathbf{K}^{(0)-1}\mathbf{g}^{(0)}$</p> <p>c) No primeiro incremento, fazer $GSP = 1$. Do segundo incremento em diante utiliza-se a equação:</p> $GSP = \frac{{}^1\delta\mathbf{u}_r^{(1)T} {}^1\delta\mathbf{u}_r^{(1)}}{{}^t\delta\mathbf{u}_r^{(1)T} {}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_r^{(1)}}$ <p>d) Do segundo passo em diante, usar $\delta\lambda^{(1)} = \sqrt{\frac{N_{ot}}{N_{it}}} {}^1\delta\lambda^{(1)} \sqrt{ GSP }$.</p> <p>e) Verificar o sinal de GSP. Se $GSP < 0$, multiplicar $\delta\lambda^{(1)}$ por -1 para mudar o sentido de crescimento do parâmetro de carga.</p> <p>f) Calcular o deslocamento $\delta\mathbf{u}^{(1)} = \delta\mathbf{u}_g^{(1)} + \delta\lambda^{(1)}\delta\mathbf{u}_r^{(1)}$.</p> <p>3) Para as próximas iterações ($k \geq 2$) no passo $t + \Delta t$:</p> <p>a) Determinar o vetor das forças $\mathbf{g}^{(k-1)} = \lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i^{(k-1)}$.</p> <p>b) Atualizar a matriz de rigidez $\mathbf{K}^{(k-1)}$.</p> <p>c) Resolver $\delta\mathbf{u}_g^{(k)} = \mathbf{K}^{(k-1)-1}\mathbf{g}^{(k-1)}$ e $\delta\mathbf{u}_r^{(k)} = \mathbf{K}^{(k-1)-1}\mathbf{F}_r$.</p> <p>d) Calcular $\delta\lambda^{(k)} = -\frac{{}^t\delta\mathbf{u}_r^{(k)T} {}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_g^{(k)}}{{}^t\delta\mathbf{u}_r^{(k)T} {}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_r^{(k)}}$.</p> <p>e) Calcular os deslocamentos $\delta\mathbf{u}^{(k)} = \delta\mathbf{u}_g^{(k)} + \delta\lambda^{(k)}\delta\mathbf{u}_r^{(k)}$.</p> <p>f) Se $\ \delta\mathbf{u}^{(k)}\ > \delta u_{m\acute{a}x}$, então $\delta\lambda^{(k)} = \frac{\delta u_{m\acute{a}x}}{\ \delta\mathbf{u}_r^{(k)}\ } {}^1\delta\lambda^{(1)}$.</p> <p>4) Atualizar o parâmetro de carga total λ e o vetor de deslocamentos totais \mathbf{u}:</p> $\lambda^{(k)} = \lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^{(k)}$ $\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta\mathbf{u}^{(k)}$ <p>5) Repetir os passos 3) a 4) até que $\ \mathbf{g}^{(k-1)}\ \leq \zeta$.</p> <p>6) Voltar ao passo 2) para o próximo incremento de carga fazendo $\lambda^{(k)} = \lambda^{(k)} + 1$.</p>

5 ELEMENTO FINITO DE VIGA-PILAR

Nesta seção é apresentada a formulação do elemento finito de viga-pilar, com dois nós e três graus de liberdade por nó (duas translações e uma rotação), baseada na teoria de viga de Euler-Bernoulli. Essa teoria considera que a seção transversal se mantém plana e normal ao eixo da barra após a deformação. A matriz de rigidez elementar \mathbf{k}_{elem} no sistema local de coordenadas é determinada conforme a equação (KWON; BANG, 2018; BATHE, 1996):

$$\mathbf{k}_{elem_{6 \times 6}} = \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \frac{L}{2} ds, \quad (24)$$

na qual L é o comprimento do elemento, a matriz \mathbf{B} é:

$$\mathbf{B}_{2 \times 6} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-6}{L^2}s & \frac{1}{L} - \frac{3}{L}s & 0 & \frac{6}{L^2}s & -\frac{1}{L} - \frac{3}{L}s \end{bmatrix}, \quad (25)$$

e a matriz \mathbf{D} contém as rigidezes equivalentes axial e à flexão:

$$\mathbf{D}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} EA_{eq} & 0 \\ 0 & EI_{eq} \end{bmatrix}. \quad (26)$$

O vetor de forças internas elementar \mathbf{f}_{elem} no sistema local de coordenadas é representado por:

$$\mathbf{f}_{elem_{6 \times 1}} = \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \frac{L}{2} ds, \quad (27)$$

sendo o vetor $\boldsymbol{\varepsilon}$ dado por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{2 \times 1} = \mathbf{B} \mathbf{u}_{local}, \quad (28)$$

em que \mathbf{u}_{local} é o vetor de deslocamentos nodais do elemento:

$$\mathbf{u}_{local_{6 \times 1}} = [u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2]^T, \quad (29)$$

na qual u_i é a translação na direção do eixo local X, v_i é a translação na direção do eixo local Y e θ_i a rotação em torno do eixo local Z, com $i = 1, 2$.

A matriz de rigidez e o vetor de força interna no sistema global de coordenadas são determinados por, respectivamente:

$$\mathbf{K}_{\text{elem}_{6 \times 6}} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}_{\text{elem}} \mathbf{T}, \quad (30)$$

$$\mathbf{F}_{\text{elem}_{6 \times 1}} = \mathbf{T}^T \mathbf{f}_{\text{elem}}, \quad (31)$$

em que \mathbf{T} é a matriz de transformação.

Para o cálculo das integrais dadas nas Equações (24) e (27) é utilizado o método Quadratura de Gauss-Legendre com dois pontos. Os pontos de integração s_i e os respectivos coeficientes de ponderação w_i são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 - Pontos de integração e coeficientes de ponderação para a quadratura de Gauss-Legendre supondo um intervalo $(-1, 1)$.

Número de pontos (n)	s_i	w_i
2	$\pm 0,5773502691$	1,00

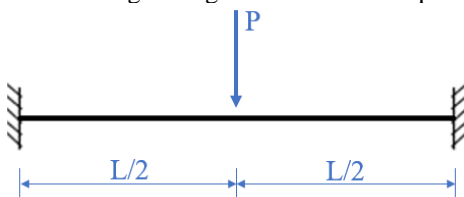
6 RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção são apresentados os resultados numéricos de problemas de vigas hiperestáticas encontrados na literatura, levando-se em conta a não linearidade física na análise estática. Com relação à discretização das estruturas, a malha é constituída por 20 elementos finitos de viga com dois nós e três graus de liberdade por nó (duas translações e uma rotação). Em todas as análises estruturais, consideraram-se os seguintes parâmetros para o método de solução: tolerância $z = 1,0 \times 10^{-5}$ para a verificação da convergência a cada iteração k ; número desejável de iterações $N_{ot} = 5$; e o deslocamento máximo $\delta u_{\text{máx}} = \|\delta \mathbf{u}_r^{(1)}\|$. O peso próprio das estruturas é desprezado nas análises.

6.1 SIMULAÇÃO NUMÉRICA 1 - VIGA BIENGASTADA

Seja o problema de viga biengastada, mostrada na Figura 5, de comprimento $L = 5,0$ m e seção transversal retangular $(0,30 \times 0,60)$ m². O material é o aço macio com o comportamento elastodegradável perfeito (Figura 1a). A viga está sujeita a uma força concentrada vertical P aplicada no meio vão. Esse problema foi estudado por Lourenço (1999).

Figura 5 – Esquema estático da viga biengastada. Fonte: Adaptada de Lourenço (1999).

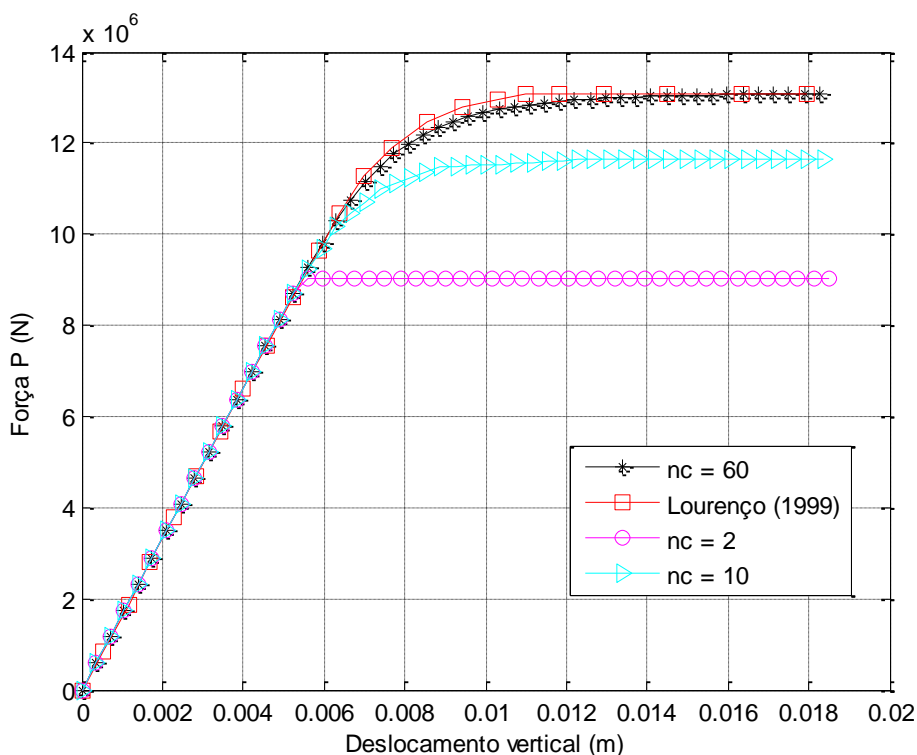


Na Tabela 2 são apresentados os parâmetros do Modelo de Dano e os utilizados na técnica GDCM. Na Figura 6 aparecem as curvas numéricas deslocamento vertical máximo *versus* força, variando-se o número de camadas da seção transversal da viga (n_c).

Tabela 2 - Parâmetros do Modelo de Dano e da técnica GDCM.

Modelo de Dano	GDCM
$E_0 = 200 \text{ GPa}$	$\Delta P = 0,29 \text{ MN}$ $\delta\lambda^{(1)} = 1,0 \times 10^{-14}$
$f_{0c} = f_{0t} = 300 \text{ MPa}$	
$H_c = H_t = 0$	
$B_1 = 1$	

Figura 6 – Deslocamento vertical máximo *versus* força P variando-se no número de camadas (n_c).



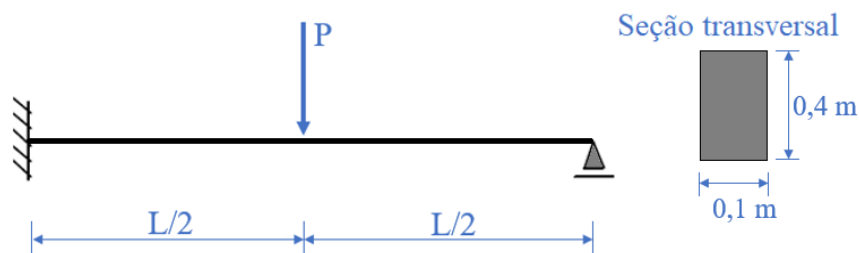
Vê-se no Figura 6 que, com o aumento do número de camadas de divisão da seção transversal da viga, a curva numérica obtida pelo modelo implementado se aproxima da curva numérica obtida por Lourenço (1999).

O valor da força limite de elasticidade obtido na simulação é igual a 8,99 MN (o valor teórico é igual a 8,64 MN), e corresponde ao momento em que as fibras mais afastadas em relação ao eixo neutro da seção atingem a tensão de escoamento tanto na compressão quanto na tração. O valor da força de colapso (P_{lim}) obtido é de 13,08417 MN com erro relativo percentual igual a 0,958 % em relação ao valor teórico de 12,96 MN.

6.2 SIMULAÇÃO NUMÉRICA 2 - VIGA ENGASTADA - APOIADA

Seja a viga engastada - apoiada indicada na Figura 7, de seção retangular e comprimento $L = 10$ m, submetida a uma força concentrada P no meio do vão, e para a qual deseja-se o valor da força de colapso (P_{lim}). A viga é constituída por um material com comportamento elastodegradável perfeito, conforme o diagrama tensão x deformação esquemático apresentado na Figura 1a. Essa estrutura foi estudada por Santos (2003).

Figura 7 – Esquema estático da viga engastada - apoiada. Fonte: Adaptada de Santos (2003).



A seção transversal da viga foi dividida em 64 camadas de mesma espessura. Na Tabela 3 são apresentados os parâmetros do Modelo de Dano e da técnica GDCM. A trajetória de equilíbrio (deslocamento vertical no centro do vão *versus* força) é apresentada na Figura 8.

No modelo constitutivo, considera-se que a camada da seção transversal danifica quando a variável dano assume valor maior que zero ($d > 0$). A força limite teórica (carga de colapso da estrutura) é calculada pela seguinte equação:

$$P_{lim} = \frac{3bh^2}{2L} f_0 \quad (32)$$

sendo b a largura da seção, h a altura da seção e L o comprimento da viga.

Tabela 3 - Parâmetros do Modelo de Dano e da técnica GDCM.

Modelo de Dano	GDCM
$E_0 = 205 \text{ GPa}$	$\Delta P = 100 \text{ kN}$ $\delta\lambda^{(1)} = 1,0 \times 10^{-14}$
$f_{0c} = f_{0t} = 250 \text{ MPa}$	
$H_c = H_t = 0$	
$B_1 = 1$	

A partir da Equação (32), obtém-se o valor da força limite igual a 600 kN. Vê-se na Figura 8 que o valor numérico da força limite (599,6552 kN) ficou bastante próximo do valor teórico, com erro relativo percentual igual a 0,0574587 %. A distribuição do dano no final da simulação nas camadas das seções transversais ao longo do comprimento da viga pode ser vista na Figura 9. Observa-se, nessa figura, as camadas das seções transversais da viga que iniciaram a danificação ($d > 0$), sendo que as regiões mais danificadas se situam próximas ao engaste e ao ponto de aplicação da força P.

Figura 8 – Deslocamento vertical no centro do vão *versus* força P.

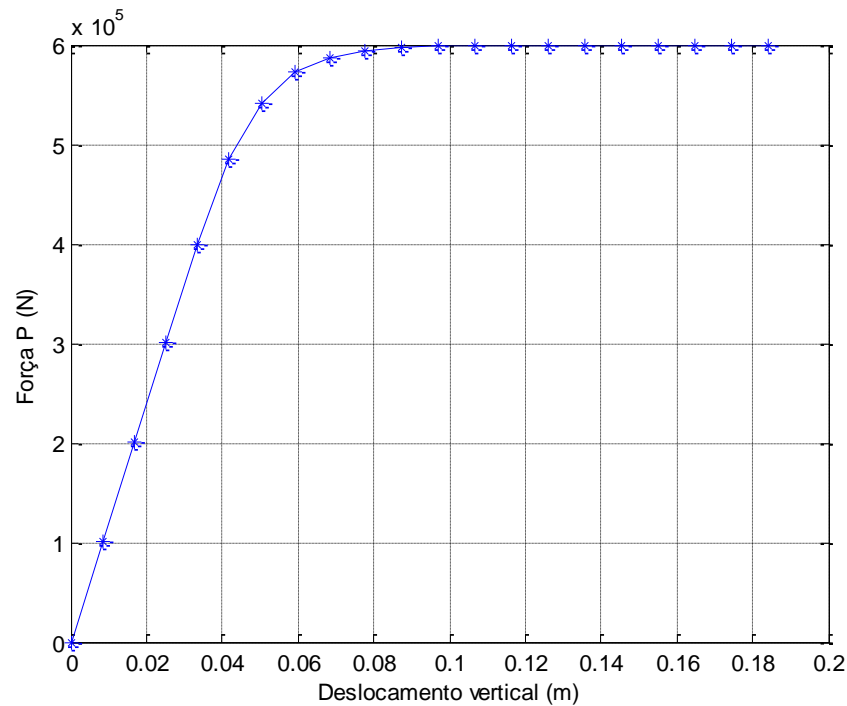
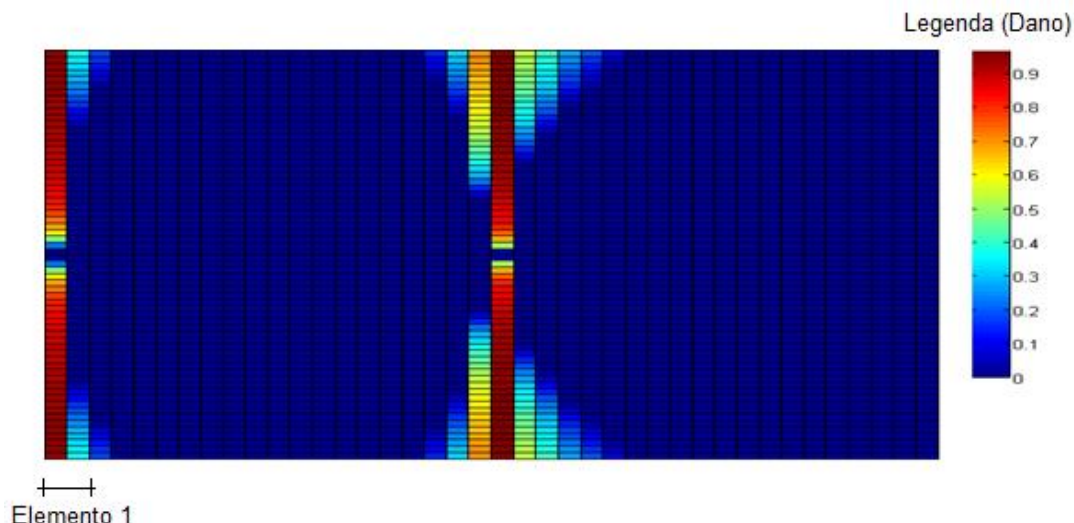


Figura 9 – Distribuição do dano nas camadas das seções transversais ao longo do comprimento da viga.



7 CONCLUSÃO

A partir das simulações computacionais realizadas dos problemas de vigas, a modelagem proposta utilizando o Método dos Elementos Finitos e o modelo constitutivo baseado na Mecânica do Dano Contínuo apresentou razoável performance quanto à obtenção da trajetória de equilíbrio em comparação com os resultados disponíveis na literatura.

No segundo problema, o modelo numérico produziu um mapa da distribuição do dano nas camadas das seções transversais em pontos ao longo do comprimento da viga (localizadas nos pontos de Gauss de cada elemento finito), evidenciando a formação de fissuras nas regiões mais solicitadas da estrutura. Em geral, modelos discretos necessitam de técnicas sofisticadas e onerosas computacionalmente de reconstrução da malha para capturar a propagação de fissuras ao longo do processo de carregamento. Assim, essa metodologia apresenta a vantagem de não requerer o uso de técnicas de reconstrução da malha de elementos finitos.

Uma barreira no uso corrente de modelos não lineares está relacionada aos problemas numéricos e instabilidades na convergência que podem surgir em virtude de diversos refinamentos de modelo. Isso ocorre por conta da calibração dos parâmetros necessários nos modelos não lineares, sendo oneroso o processo, visto que diversas análises preliminares devem ser feitas antes de realizar o estudo final da estrutura.

Evidencia-se a necessidade da utilização de um método incremental-iterativo para a solução adequada de problemas com não linearidade física. A técnica Controle de

Deslocamento Generalizado (GDCM) mostrou-se eficiente na obtenção das trajetórias de equilíbrio.

Como pesquisa futura, sugere-se a análise estrutural de vigas de concreto armado reforçadas à flexão com lâminas de PRFC, acrescentado na determinação da rigidez à flexão equivalente as rigidezes das armaduras longitudinais e do reforço. Além disso, a modelagem proposta pode ser estendida para a análise de estruturas do tipo pórtico plano, levando-se em conta o efeito da não linearidade geométrica.

AGRADECIMENTOS

Este estudo foi financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) – Código financeiro 001.

REFERÊNCIAS

- ALVES, M.; YU, J.; JONES, N. On the elastic modulus degradation in continuum damage mechanics. **Computers & Structures**, v. 76, n. 6, p. 703-712, 2000.
- AMIR, M.; PAPAKONSTANTINOU, K. G.; WARN, G. P. State-space formulation for structural analysis with coupled degradation-plasticity and geometric nonlinearity. **Journal of Structural Engineering**, v. 148, n. 4, p. 04022016, 2022.
- BATHE, K. J. **Finite element procedures**. Klaus-Jurgen Bathe, 2006.
- CIPOLLINA, A.; LÓPEZ-INOJOSA, A.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. A simplified damage mechanics approach to nonlinear analysis of frames. **Computers & Structures**, v. 54, n. 6, p. 1113-1126, 1995.
- CRISFIELD, M. A. **Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. Vol. 1. Essentials, Chichester, John Wiley & Sons, Inc., 1991.
- FINCATO, R.; TSUTSUMI, S. Numerical modelling of ductile damage mechanics coupled with an unconventional plasticity model. **Frattura ed Integrità Strutturale**, v. 10, n. 38, p. 231-236, 2016.
- KHAN, M. A.; AKHTAR, K.; AHMAD, N.; SHAH, F.; KHATTAK, N. Vibration analysis of damaged and undamaged steel structure systems: cantilever column and frame. **Earthquake engineering and engineering vibration**, v. 19, n. 3, p. 725-737, 2020.
- KRENK, S. An orthogonal residual procedure for non-linear finite element equations. **Int. J. Numer. Methods Eng.**, v. 38, p. 823-839, 1995.
- KWON, Y. W.; BANG, H. **The finite element method using MATLAB**. New York: CRC Press, 2018.
- LOURENÇO, P. B. **Métodos computacionais na mecânica dos sólidos não linear**. Relatório 99-DEC/E-1, Departamento de Engenharia Civil, Universidade do Minho, 1999.
- MANZOLI, O. L. **Um modelo analítico y numérico para la simulación de discontinuidades fuertes em la mecânica de sólidos**. Tese (Doutorado), Escola Técnica Superior D'Enginyers de Camins, Canals i Ports, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 1998.
- MUÑOZ, L. F. P.; ROEHL, D. M. Comparação de Métodos de Continuação em Problemas com Análise Inelástica. In: Congresso Argentino de Mecânica Computacional, 2012, Salta. **Anais...** Salta: AMCA, v. XXXI, 2012.
- PITUBA, J. J. C.; DELALIBERA, R. G. Contribuição para a estimativa de deslocamentos em vigas de concreto armado. In: Mecânica Computacional, v. XXIX, Buenos Aires, 2010, Buenos Aires. **Anais...** Buenos Aires: Eduardo Dvorkin, Marcela Goldschmit, Mario Storti (Eds.), 2010.
- PROENÇA, S. P. B. Simulação numérica do comportamento de elementos estruturais em concreto e argamassa armada pelo emprego de um modelo de dano. **Revista**

Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, v. 8, n. 4, p. 351-360, 1992.

ROCHA, G. **Estratégias de incremento de carga e de iteração para a análise não linear de estruturas**. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2000.

RODRIGUES, P. F. N.; VARELA, W. D.; SOUZA, R. A. Análise de estratégias de solução do problema não linear. **Revista de Ciência & Tecnologia**, v. 8, n. 2, p. 36-48, 2008.

SANTOS, F. D. **Análise limite e projeto ótimo de vigas em concreto armado**. Dissertação (Mestrado), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2003.

SCILAB, versão 6.1.1. France: **ESI Group**, 2021.

YANG, Y. B., KUO, S. R. **Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures**. Singapore: Prentice-Hall, 1994.

YANG, Y. B.; SHIEH, M. S. Solution Method for Nonlinear Problems with Multiple Critical Points. **AIAA Journal**, v. 28, n. 12, p. 2110-2116, 1990.