

Busca harmônica aplicada à sintonia do regulador linear quadrático

Harmonic search applied to the tuning of quadratic linear regulator

DOI:10.34117/bjdv8n6-287

Recebimento dos originais: 21/04/2022

Aceitação para publicação: 31/05/2022

Luís Bruno Pereira do Nascimento

Doutor em Engenharia Elétrica e de Computação pelo Departamento de Engenharia de Computação e Automação (DCA)

Instituição: Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)

Endereço: Campus Universitário, Lagoa Nova, Natal - RN, CEP: 59078-970

E-mail: lbruno@ufrn.edu.br

Vandilberto Pereira Pinto

Doutor em Engenharia Elétrica pela Instituto de Engenharias e Desenvolvimento Sustentável (IEDS)

Instituição: Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Endereço: Av. da Abolição, 3, Centro, Redenção - CE, CEP: 62790-000

E-mail: vandilberto@unilab.edu.br

Márcio André Baima Amora

Doutor em Engenharia Elétrica

Instituição: Universidade Federal do Ceará (UFC)

Endereço: Rua Estanislau Frota, S/N, Centro, CEP: 62010-560, Sobral - CE

E-mail: marcio@sobral.ufc.br

Darielson Araújo de Souza

Doutor em Engenharia Elétrica

Departamento de Ciência da Computação

Instituição: Universidade Estadual do Piauí (UESPI)

Endereço: Av. Nossa Sra. de Fátima - Reis Veloso, CEP: 64202-262, Parnaíba - PI

E-mail: darielsondesouza@phb.uespi.br

RESUMO

Este trabalho apresenta a aplicação do algoritmo de Busca Harmônica (*Harmony Search* - HS) na ponderação automática das matrizes Q e R do Regulador Linear Quadrático (*Linear Quadratic Regulator* - LQR) com Ação Integral. O projeto do LQR possui como principal obstáculo a dificuldade na ponderação das matrizes Q e R , sendo que, a busca adequada é de vital importância para que o controlador garanta as especificações do projeto. Para solucionar esta limitação, o presente artigo propõe o uso do HS, meta-heurística baseada em conceitos musicais, para a busca das melhores matrizes para o projeto LQR. O controlador foi otimizado usando HS e Algoritmo Genético (AG), e foi aplicado à planta do helicóptero militar CH-47B. Os resultados das simulações foram comparados e pôde-se constatar que algoritmo de Busca Harmônica obteve melhor desempenho, analisando o custo do controlador, índice de estabilidade, índice de tempo

de estabilização e sinal de controle, quando comparado com o AG, uma abordagem mais tradicional para esse problema.

Palavras-chave: controle inteligente, regulador linear quadrático, algoritmo de busca harmônica, algoritmo genético.

ABSTRACT

This work presents the application of the Harmony Search (HS) algorithm to the automatic weighting of matrices Q and R in the Linear Quadratic Regulator (LQR) with integral action. The main obstacle for the implementation of LQR controllers lies in weighting matrices Q and R , which must be performed adequately so that the proper design specifications can be ensured. In order to solve this limitation, this paper proposes the use of HS as meta-heuristics based on musical concepts to search for the best matrices in the LQR design. The controller has been optimized using HS and Genetic Algorithm (GA), being also applied to military helicopter model CH-47B. Simulation results are properly analyzed and discussed, while it can be stated that HS algorithm has presented the best performance considering key aspects such as controller cost, stability index, settling time, and control signal when compared with GA, which is a traditional approach used in such applications.

Keywords: intelligent control, linear-quadratic regulator, harmony search algorithm, genetic algorithm.

1 INTRODUÇÃO

O Regulador Linear Quadrático (LQR) é uma técnica de controle ótimo no domínio do tempo baseada na realimentação de estados com característica de estabilidade robusta, apresentando margens de ganho infinito e margens de fase a 60° . O controlador busca garantir a estabilidade do sistema frente a pequenas perturbações, visando estabelecer a priori um balanceamento entre energia gasta e sinal de controle aplicado através da minimização de uma função de custo que apresenta como parâmetros matrizes de ponderação (Maciejowski, 1989).

O projeto LQR é aplicável aos mais diversos sistemas, entretanto tem sido vastamente explorado em problemas envolvendo controle de aeronaves, como em (Chrifa e Kadda, 2014), (Usta *et al.* 2011) e (Wahid e Rahmat, 2010), uma vez que exigem um alto grau de robustez.

Uma dificuldade no projeto LQR é a definição das matrizes de ponderação, sendo de vital importância para a determinação da lei de controle que satisfaça as especificações do projeto (Stein, 1979), (Medanic *et al.*, 1988) e (Graupe, 1972). A fim de contornar este problema, alguns pesquisadores têm utilizado técnicas de Inteligência Artificial (IA) para otimizar as buscas na determinação das melhores matrizes de ponderação. Isso pode ser

observado em diversos trabalhos que fazem uso do Algoritmo Genético, meta-heurística inspirada na teoria da evolução das espécies e nas leis da genética. Nos trabalhos de (Neto *et al.*, 2007), (Wongsathan e Sirima, 2009), (Yuhendri, 2011) e (Ghoreishi e Nekoui, 2012) foram apresentados modelos de busca baseado em AG para obtenção das matrizes de ponderação.

Dentre os diversos algoritmos de IA existentes atualmente, uma técnica recente vem demonstrando-se promissora, a HS (meta-heurística inspirada em conhecimentos musicais), devido suas características de estrutura simples e eficaz na resolução de problemas de otimização (Manjarres *et al.*, 2013).

Neste trabalho, o estudo é voltado na aplicação da meta-heurística Busca Harmônica para resolver a questão da determinação das matrizes de ponderação do projeto de um controlador LQR com ação integral aplicado no controle longitudinal de uma planta linear do helicóptero militar Boeing CH-47B Chinook.

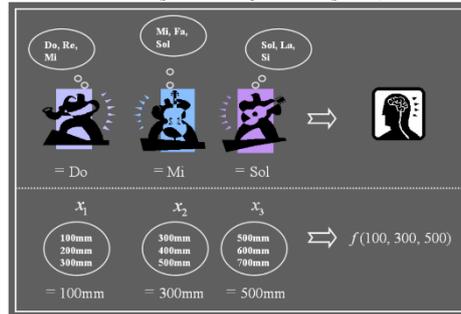
Este artigo está organizado da seguinte maneira: A seção II apresenta uma visão geral do algoritmo de busca harmônica. Na seção III aborda-se o controlador LQR, suas equações e a forma matricial para adição da ação Integral ao controlador. Na seção seguinte (IV) é apresentado o helicóptero CH-47, suas características, assim como a planta que representa sua dinâmica longitudinal, a qual foi o objeto de teste para o controlador. Nesta seção também são apresentados alguns resultados obtidos com o controlador a partir das matrizes de ponderação determinadas pela meta-heurística. Na seção V são apresentadas as conclusões, comentários e tendências do projeto do controlador LQR com otimização harmônica.

2 ALGORITMO DE BUSCA HARMÔNICA

A busca harmônica (Geem *et al.*, 2001) é uma meta-heurística de otimização baseada em população que foi inspirada no processo de improvisação musical onde os músicos alteram as notas de seus instrumentos na busca de um estado de perfeita harmonia.

A analogia entre o processo de otimização e a improvisação de novas harmonias é mostrado na Figura 1, onde há um comparativo com o trio de Jazz composto por um saxofone, um contrabaixo e um violão, cada instrumento compondo uma variável de decisão do problema. As notas tocadas pelos instrumentos representam o intervalo de valores de cada variável, as combinações das notas representam as possíveis soluções e o ato de apreciação dos ouvintes representa a função de avaliação, ou função objetivo.

Figura 1 – Otimização e Improvisação (Geem, 2010).



As pesquisas envolvendo aplicações com o algoritmo HS teve grande expansão nos últimos anos, ele tem sido aplicado em diversos problemas de otimização nas mais diversas áreas do conhecimento. Segundo levantamento bibliográfico realizado por (Manjarres *et al.*, 2013) houve uma atenção maior na aplicação do algoritmo HS em problemas de otimização na Engenharia.

A versão geral do algoritmo HS (Geem *et al.*, 2001) pode ser descrita em cinco passos como segue:

- 1º passo – Inicialização dos parâmetros;
- 2º passo – Inicialização da Memória Harmônica
- 3º passo – Improviso de uma nova harmonia;
- 4º passo – Atualização da Memória Harmônica;
- 5º passo – Verificação do critério de parada.

Os 5 principais parâmetros (Geem *et al.*, 2001) do algoritmo HS são o tamanho da memória harmônica (*Harmony Memory Size - HMS*), a taxa de consideração da memória harmônica (*Harmony Memory Consideration Rate - HMCR*), a taxa de ajuste dos valores (*Pitch Adjustment Rate - PAR*), a largura de banda (*BandWidth - BW*) e o número máximo de improvisações (*Number of Improvisations - NI*).

No algoritmo HS padrão são criadas harmonias aleatoriamente e armazenadas na memória harmônica (*Harmony Memory - HM*), sendo que cada harmonia é avaliada individualmente de acordo com a função objetivo do problema.

No momento do improviso de uma nova harmonia, é considerada uma probabilidade de HMCR para selecionar elementos da HM ou é gerado um valor através de uma distribuição uniforme para compor o vetor x_{nova} (nova harmonia). Na segunda etapa do improviso, é considerada uma probabilidade de PAR para gerar uma pequena alteração no valor atual de x_{nova} , baseado no parâmetro BW.

$$x_{\text{nova}}(j) = x_{\text{nova}}(j) \pm r * BW \quad (1)$$

sendo r , um número randômico uniforme entre 0 e 1 e j o índice atual do vetor dentro da improvisação.

Ao avaliar a nova improvisação, é verificado se ela é melhor que a pior harmonia armazenada na HM. Sendo assim, ocorre a atualização da memória harmônica, ou seja, os vetores são substituídos.

3 LQRI com Otimização Harmônica

3.1 LQR COM AÇÃO INTEGRAL

O LQR é um controlador ótimo com excelentes características de desempenho e de implementação, formulado por meio de um índice de desempenho quadrático J com restrições ao modelo do sistema (matrizes de estado A e B).

$$J = \int_0^{\infty} [x^T Q x + u^T R u] dt \quad (2)$$

Em (2) temos o vetor de estados $x \in R^n$ e o vetor de entrada $u \in R^m$, Q e R , matrizes definidas e semi-definidas positivas, respectivamente, que determinam a importância relativa do erro e o consumo da energia. O LQR permite determinar uma matriz K de ganho ótimo através da lei de controle

$$u = -Kx \quad (3)$$

sendo que

$$K = R^{-1} B^T P \quad (4)$$

A matriz P é determinada a partir da resolução da equação algébrica de Riccati:

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (5)$$

A partir dos ganhos obtidos com a matriz aumentada, por definição (Ogata, 2010), pode-se obter a matriz de integração K_i , definida por $K = [K_r \quad -K_i]$, logo os ganhos de realimentação e os ganhos integrais aplicados à planta seguem no modelo matricial dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK_i \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r(t) \quad (6)$$

3.2 LQRI COM OTIMIZAÇÃO HARMÔNICA

Essa abordagem trata da determinação das matrizes Q e R de estado e controle, respectivamente, utilizando HS para ajustar os ganhos do controlador ótimo a fim de atender aos critérios de projeto.

3.2.1 Codificação da harmonia QR

A fim de reduzir a complexidade no projeto do controlador, as matrizes Q e R são consideradas diagonais principais nesse trabalho, ou seja, $Q = \text{diag}(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ e $R = \text{diag}(R_1, \dots, R_n)$. Dessa forma o vetor de harmonia é dado por:

$$\text{QR} = [Q_1, Q_2, \dots, Q_n, R_1, \dots, R_n] \quad (7)$$

3.2.2 Função de Avaliação

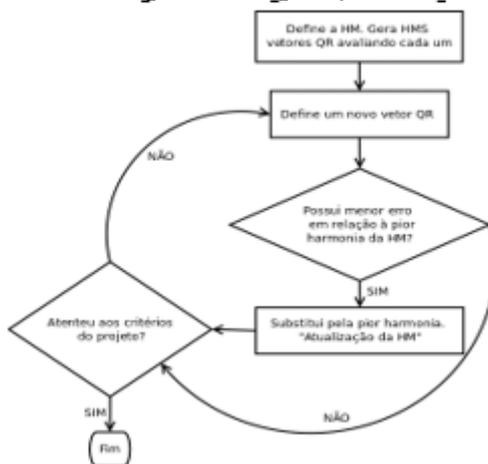
Para avaliar as harmonias improvisadas pelo algoritmo HS, esse trabalho considerou os critérios de projeto do controlador, relacionados aos parâmetros de tempo de subida (*Rise Time - Tr*), tempo de regime estacionário (*Settling Time - Ts*), taxa de sobressinal (*Overshoot/ Maximum Peak - Mp*) e erro em regime estacionário (*Es*).

Através do somatório do módulo dos resíduos gerados entre os parâmetros definidos nos critérios de projeto e os obtidos com a harmonia considerada, foi possível obter um sinal de erro, o qual correspondeu à avaliação da harmonia. A função que avalia uma nova harmonia é dada por:

$$f(\text{QR}_i) = \sum (Tr - Tr_i) (Ts - Ts_i) (Mp - Mp_i) (Es - Es_i) \quad (8)$$

A Figura 2 apresenta um diagrama contendo os passos de um algoritmo HS aplicado ao projeto LQR.

Figura 2 - Diagrama de um algoritmo HS_geral para busca das matrizes Q e R .



4 SIMULAÇÕES E RESULTADOS

4.1 O HELICÓPTERO CH-47 CHINOOK

O Boeing CH-45 Chinook é um helicóptero bimotor americano com dois rotores em tandem, projetado para todos os climas e para múltiplas missões militares ou civis. A Figura 3 apresenta uma imagem de um modelo CH-47B da NASA.

Figura 3 - CH-47B Chinook.



Cada rotor do Chinook possui três lâminas totalmente articuladas, sendo que os rotores são acionados em sentidos opostos. O controle longitudinal (ângulo de *pitch*) do CH-47 é obtido através das alavancas coletiva e coletiva diferencial. O controle lateral-direcional (*roll/yaw*) se dá através do cíclico e cíclico diferencial (Weber *et al.*, 1984).

4.2 O MODELO LINEAR DO CH-47

A fim de simular o controle das medidas de velocidade vertical (V_z) e ângulo de arfagem (θ), a planta linear referente à dinâmica longitudinal de um Chinook CH-47B à velocidade relativa do ar de 20,57 m/s é dada por (Doyle e Stein, 1981).

$$A = \begin{bmatrix} -0,02 & 0,005 & 2,4 & -32 \\ -0,14 & 0,44 & -1,3 & -30 \\ 0 & 0,018 & -1,6 & 1,2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \quad (9)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0,14 & -0,12 \\ 0,36 & -8,6 \\ 0,35 & 0,009 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u \quad (10)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0,3048 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 57,3 \end{bmatrix} x \quad (11)$$

em que:

$$\dot{x} = [V_x \ V_z \ q \ \theta]^T x \quad ; \quad u = [\delta S \ \delta R]^T$$

Tais que:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} Vel_{horizontal} \\ Vel_{vertical} \\ pitchrate \\ pitch \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} Cíclico \\ Cíclico Diferencial \end{bmatrix}$$

Os valores de V_z e θ na matriz C são dados em m/s e graus respectivamente, sendo que 1 ft/s corresponde a 0,3048 m/s e 1 rad corresponde a $57,3^\circ$. Os polos em malha aberta do sistema (9) $[-2,2279; 0,0652; 0,4913+0,4151j; 0,4913-0,4151j]$ mostram que o sistema a priori é instável.

Os critérios de projeto para o controle deste helicóptero foi descrito por (Hartmann *et al.*, 1979).

4.3 DEFINIÇÃO DAS MATRIZES Q E R

Para fins de uma comparação, foram utilizados dois métodos de otimização para obtenção das matrizes Q e R . Foi utilizado um Algoritmo Genético (AG), uma vez que outros trabalhos já utilizaram esta técnica para esse mesmo fim, com sucesso, e também foi utilizado o algoritmo de busca harmônica clássico (HS), ambos os algoritmos baseados em população e utilizando os mesmos critérios de avaliação.

Os parâmetros apresentados nas Tabelas 1 e 2 representam as melhores configurações de parâmetros baseadas em métodos empíricos para o desempenho dos

algoritmos. Os intervalos apresentados para geração aleatória visam criar possíveis soluções dentro de uma grande faixa de valores, sem apresentar resultados tendenciosos. O critério de parada dos algoritmos, adotado neste trabalho foi a avaliação das harmonias (8), sendo $f(QR_i) \leq 4.2$

Tabela 1. Parâmetros utilizados no AG

Tamanho da População	Taxa de Crossover	Taxa de Mutação	Intervalo de geração aleatória
50	0,9	0,4	1 – 50000

Tabela 2. Parâmetros utilizados no HS

HM	HMCR	PAR	BW	Interv. geração aleatória
50	0,9	0,4	10,5	1 – 50000

Segundo (Ghoreishi, Nekoui e S. Basiri, 2011), a forma utilizada para comparar os métodos aplicados na ponderação das matrizes Q e R do projeto LQR pode ser a partir de uma função de custo definida por:

$$J_{total} = w_1 SI + w_2 ST + w_3 u_{max} \quad (12)$$

Os valores de w_1 , w_2 e w_3 , são pesos determinados no projeto. O parâmetro SI é o índice de estabilidade

$$SI = - \frac{1}{\max_i \text{Real}\{\lambda_i\}} \quad (13)$$

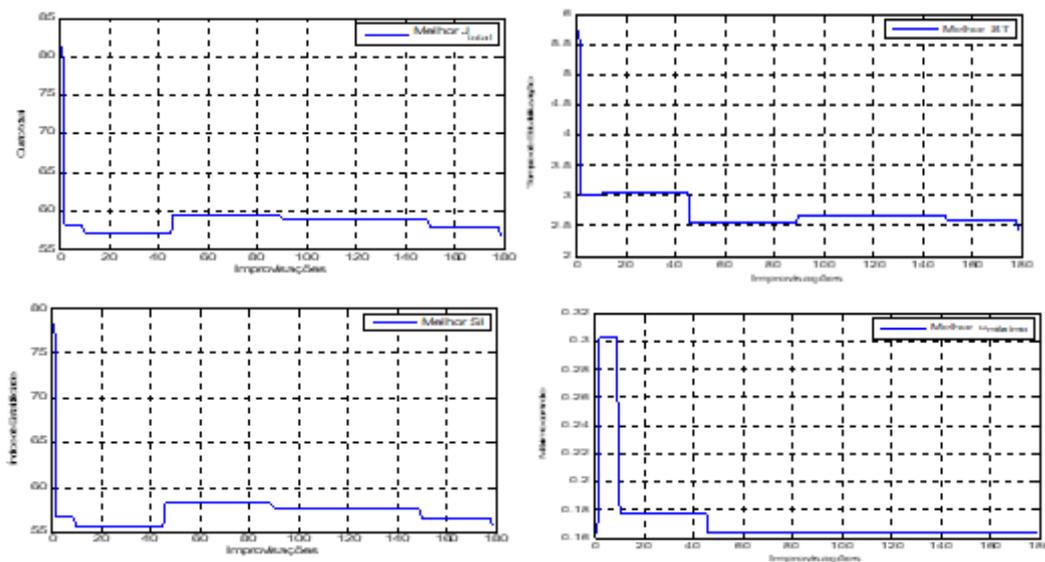
Considerando sistemas de múltiplas saídas, o parâmetro ST corresponde ao maior tempo de estabilização entre as saídas. O parâmetro u_{max} é o índice de esforço máximo, definido por:

$$u_{max} = \max |u(t)| \quad (14)$$

Foi determinado neste trabalho os pesos da função de custo (12) $w_1 = 1$, $w_2 = 0,5$ e $w_3 = 0,1$, os quais modificam a escala dos dados para melhor visualiza-los. Os mesmos valores foram aplicados à função J_{total} nos dois algoritmos.

Os resultados obtidos na Figura 4 são relacionados à aplicação do algoritmo HS na ponderação das matrizes Q e R . O algoritmo parou aproximadamente na improvisação de número 180, quando obteve um erro aceitável. A Figura 4 apresenta o valor da função de custo no decorrer das iterações (chamadas da função de avaliação), o maior tempo de estabilização entre as duas saídas, o índice de estabilidade e o sinal de controle, respectivamente. Pode ser observado o desempenho do controlador sendo melhorado no decorrer das iterações.

Figura 4 – Função de custo (J_{total}), índice do tempo de estabilização (ST), índice de estabilidade (SI) e sinal de controle (U) para HS.



As matrizes Q e R para a solução com HS foram

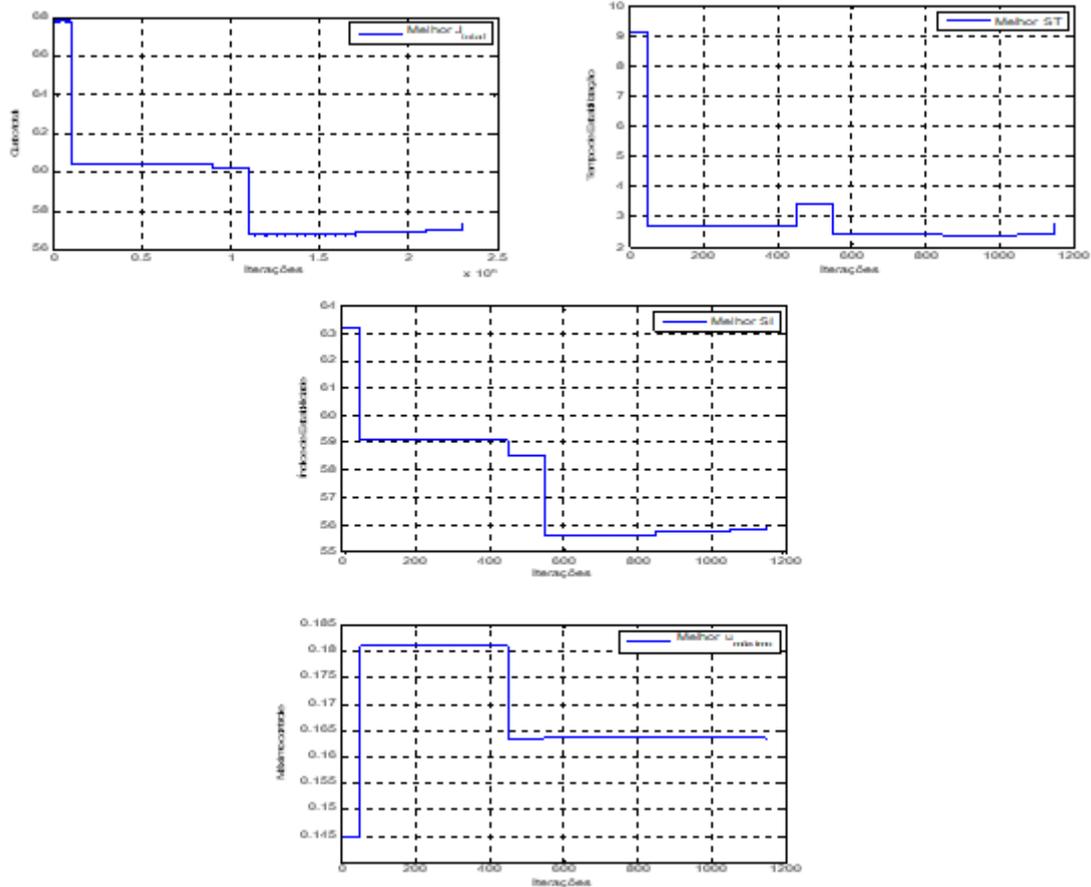
$$10000 * Q = \text{diag} \begin{pmatrix} 0,0012, & 0,1062, & 2,5151, \\ 2,4454, & 4,7230, & 4,7388 \end{pmatrix}$$

$$10000 * R = \text{diag}(3,2193 \quad 3,2193)$$

Os mesmos testes foram realizados com o Algoritmo Genético utilizando os parâmetros citados na Tabela 1.

A Figura 5 apresenta as simulações para AG.

Figura 5 – Função de custo (J_{total}), índice do tempo de estabilização (ST), índice de estabilidade (SI) e sinal de controle (U) para AG.



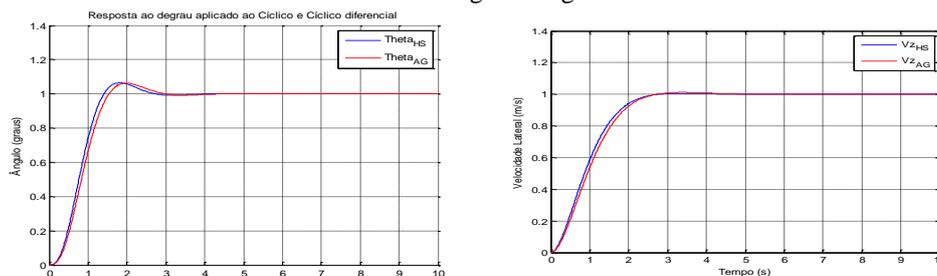
As matrizes Q e R para a solução com AG foram

$$Q = \text{diag}(1, 910, 5925, 50000, 48987, 45895)$$

$$R = \text{diag}(50000, 50000)$$

A Figura 6 mostra a resposta do ângulo θ (theta) e velocidade vertical do sistema em malha fechada, aplicando um degrau às entradas cíclico e cíclico diferencial.

Figura 6 – Comparação da resposta ao degrau unitário aplicado ao cíclico e cíclico diferencial com busca harmônica e algoritmo genético.



Pode-se observar que ambos os algoritmos obtiveram resultados satisfatórios, entretanto o algoritmo HS obteve um melhora quase todos os aspectos de desempenho em relação ao AG, considerando o mesmo critério de parada adotado. A Tabela 3 apresenta a análise do desempenho em regime transitório e o erro e regime estacionário nas duas simulações.

Tabela 3. Desempenho em regime transitório e erro em regime estacionário nas simulações

Saída	Tr (s)	Ts (s)	Mp (%)	Es
Theta_HS	0,8522	2,4288	6,4891	≈ 0
Theta_AG	0,9318	2,6445	6,2651	≈ 0
Vz_HS	1,4924	2,3523	0,6090	≈ 0
Vz_AG	1,5651	2,4138	1,1273	≈ 0

Uma sumarização com os valores médios referentes às variáveis de otimização relacionadas à várias simulações é apresentada na Tabela 4.

Tabela 4. Valores médios dos resultados de otimização.

Algoritmo	J_{max}	ST	SI	u_{max}
HS	56,8245	2,6043	55,3721	0,1620
AG	57,4795	3,0329	55,9350	0,1638

Uma análise do tempo de execução médio dos algoritmos aplicados a este problema é apresentado na Tabela 5.

Tabela 5. Valores médios do tempo de execução

Algoritmo	Tempo de Execução (s)
HS	24,8219
AG	127,3077

As Tabelas 4 e 5 apresentaram uma melhor visualização da diferença entre os resultados obtidos com o algoritmo de HS em comparação com o GA. Em todas as variáveis o HS apresentou maior minimização e na questão do desempenho do algoritmo, o HS apresentou-se superior.

5 CONCLUSÃO

O presente estudo apresentou a aplicação de um algoritmo de busca harmônica para a ponderação ótima das matrizes Q e R de um projeto LQR com ação integral. Para

fins de comparação utilizou-se o algoritmo genético para tentar buscar as melhores matrizes. Pôde-se observar que houve uma melhora considerável nos resultados com algoritmo HS em todos os parâmetros analisados. Na análise da resposta transitória das simulações apresentadas, o HS obteve melhores resultados em todos os parâmetros, exceto no *overshoot*, entretanto, a diferença foi mínima. Vale frisar que os resultados apresentados neste artigo foram obtidos em ambiente simulado, sem aplicação prática.

Pretende-se como trabalhos futuros a implementação de variações do algoritmo de busca harmônica para esse mesmo fim, com modificações dinâmicas nos parâmetros do algoritmo para um melhor desempenho do mesmo. Também planeja-se realizar posteriormente uma análise robusta acerca do controlador com otimização harmônica.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e tecnológico (FUNCAP).

REFERÊNCIAS

- Chrifa, L. e Kadda Z. M. (2014). Aircraft Control System Using LQG and LQR Controller with Optimal Estimation-Kalman Filter Design. *Procedia Engineering*. Vol. 80, pp. 245–257.
- Doyle, J. C. e Stein, G. (1981). Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis. *IEEE Transactions On Automatic Control*, Vol. 26.
- Fonseca Neto, J.V.; Abreu, I. S. ; Silva, F.N. ; Pinto, V. P.; Campos, J. C. T. (2007) Controle LQR Inteligente para Geradores Eólicos DFIG. *VIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente(SBAI)*, Florianópolis.
- Geem, Z.W., Kim, J.H., Loganathan, G.V., 2001. A new heuristic optimization algorithm: harmony search. *Simulation* 76 (2), pp. 60–68.
- Geem, Z. W. (2010) State-of-the-art in the structure of harmony search algorithm. In: GEEM, Z. W.(Ed.). *Recent Advances In Harmony Search Algorithm*. (Studies in Computational Intelligence, v. 270). pp. 1–10.
- Ghoreishi, S.A. Nekoui, M.A. e Basiri, S.O. (2011). Optimal Design of LQR Weighting Matrices based on Intelligent Optimization Methods. *International Journal of Intelligent Information Processing*, Vol. 2
- Ghoreishi, S. A. e Nekoui, M. A., (2012). Optimal Weighting Matrices Design for LQR Controller Based on Genetic Algorithm and PSO, *Advanced Materials Research*, Vols 433-440, pp. 7546-7553.
- Graupe, D. (1972). Derivation of Weighting Matrices towards satisfying Eigenvalue requirements. *Int. J. Control* 16 (5), 881-888.
- Hartmann, G. L., Stein, G. e Pratt, S. G. (1979). Digital adaptive controllers for VTOL vehicles, NASA Contractor Report. 159154. Vol. 1.
- Maciejowski, M. J. (1989). *Multivariable Feedback Design*. Addison – Wiley.
- Manjarres, D. *et al.* (2013). A survey on applications of the harmony search algorithm. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*. Vol. 26. pp. 1818–1831.
- Medanic, J., H.S. Tharp and W.R. Perkins (1988). Pole Placement by Performance Criterion Modification. *IEEE Transactions on Automatic Control* 33 (5), 469-472.
- Ogata, K. (2010) *Engenharia de Controle Moderno*”. 5ed. São Paulo, 2010.
- Stein, G. (1979). Generalized Quadratic Weights for Asymptotic Regulator Properties. *IEEE Transactions on Automatic Control* 24 (4), 559-566.
- Usta, M.A., Akyazi, O., Akpınar, A.S. (2011). Aircraft roll control system using LQR and fuzzy logic controller. *2011 International Symposium on Innovations in Intelligent Systems and Applications (INISTA)*. pp. 223 – 227.

Wahid, N. e Rahmat, M. F., (2010) .Pitch Control System Using LQR and Fuzzy Controller. *IEEE Symposium on Industrial Electronics and Applications (ISIEA 2010)*. pp. 389 – 394.

Weber, J., Liu, T., e Chung, W., (1984). A Mathematical Simulation Model of the CH-47B Helicopter. NASA Technical Memorandum 84351.

Wongsathan, C. e Sirima, C. (2009) Application of GA to design LQR controller for an Inverted Pendulum System. *IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics, 2008. ROBIO 2008*. pp. 951 – 954.

Yuhendri, M., Ashari, M., Purnomo, M.H. (2011). Linear Quadratic Regulator design for modular matrix converter using Genetic Algorithm. *IEEE 3rd International Conference on Communication Software and Networks (ICCSN)*. pp. 175 – 179.