Aplicação algébrica para se calcular o valor da raiz quadrada de um número natural não-quadrado perfeito pelo método iterativo babilônico

An algebraic application for calculating the square root of a non-square perfect natural number by the iterative babylonian method

DOI:10.34117/bjdv8n6-102

Recebimento dos originais: 21/04/2022
Aceitação para publicação: 31/05/2022

Odirley Willians Miranda Saraiva
Especialista
Instituição: Universidade do Estado do Pará
Endereço: Rua do Una 156, Telégrafo, Belém PA
E-mail: williamatematica32@gmail.com

Gustavo Nogueira Dias
Doutor
Instituição: Colégio Federal Ten. Rêgo Barros
Endereço: Av. Júlio César s/n, Souza, Belém - PA
E-mail: gustavonogueiradias@gmail.com

Gilberto Emanoel Reis Vogado
Doutor
Instituição: Universidade do Estado do Pará
Endereço: Rua do Una 156, Telégrafo, Belém - PA
E-mail: gilberto.vogado@uepa.br

Eldilene da Silva Barbosa
Mestre
Instituição: Universidade Federal Rural da Amazônia
Endereço: Estr. Principal da Ufra 2150, Curió Utinga, Belém - PA
E-mail: eldilene.barbosa@gmail.com

Rondineli Carneiro Loureiro
Mestre
Instituição: Secretaria Estadual de Educação do Estado do Pará
Endereço: Av. Augusto Montenegro s/n, Icoaraci, Belém - PA
E-mail: rondiloureiro@yahoo.com.br

Wagner Davy Lucas Barreto
Mestre
Instituição: Colégio Tenente Rêgo Barros
Endereço: Av. Júlio César s/n, Souza, Belém - PA
E-mail: profwlucas@yahoo.com.br

Antonio Thiago Madeira Beirão
Doutor
Instituição: Universidade Federal Rural da Amazônia
Endereço: Estr. Principal da Ufra 2150, Curió Utinga, Belém - PA
E-mail: Thiago.madeira@ufra.edu.br

Katiane Pereira da Silva
Doutora
Instituição: Universidade Federal Rural da Amazônia
Endereço: Estr. Principal da Ufra 2150, Curió Utinga, Belém - PA
E-mail: Katiane.silva@ufra.edu.br

Washington Luiz Pedrosa da Silva Junior
Especialista
Instituição: Colégio Federal Ten. Rêgo Barros
Endereço: Av. Júlio César s/n, Souza, Belém - PA
E-mail: jwl_pedrosa@hotmail.com

Waljucy Furtado Cardoso
Mestre
Instituição: Universidade Federal Rural da Amazônia
Endereço: Estr. Principal da Ufra 2150, Curió Utinga, Belém - PA
E-mail: Waljuci@gmail.com

RESUMO
A matemática passou por muitas transformações ao longo da história da humanidade. Embora, as atuais mudanças a tornaram mais sofisticadas, do que no passado, e hoje se façam muitos cálculos, com o auxílio dos computadores atuais, na utilização de algoritmos preestabelecidos em softwares, não se deve esquecer como tais algoritmos foram criados. Numa perspectiva para os leigos, que desconhecem a matemática desenvolvidas por civilizações antigas, muitos dos algoritmos que ainda operam hoje em avançados sistemas de computadores, foram criados por civilizações que dominaram os primeiros quatro milênios antes da era comum, como: os babilônicos e posteriormente gregos. Que, até hoje, estes povos despertam a admiração e beleza, para a aqueles que, apreciam a arte que as generalizações matemáticas podem alcançar. Logo, o objetivo deste trabalho é apresentar, entre tantos métodos existentes, o método iterativo babilônico para se calcular a raiz quadrada de um número natural não quadrado perfeito, como forma alternativa, em relação ao métodos das tentativas e a utilização da calculadora e outros dispositivos eletrônicos que de longe são os mais utilizados para se calcular raiz quadrada.

Palavras-chave: raiz quadrada, matemática babilônica, algoritmo, método iterativo.

ABSTRACT
The mathematics has undergone many transformations through human history. Although, the changes have become more sophisticated than in the past and today many calculations are made, with the aid of current computers, in the use or pre-established algorithms in software, it should not be forgotten how such algorithms were created. From a perspective for lay people, who are unaware of the mathematics developed by ancient civilizations, many of the algorithms that still operate today in advanced computer systems was created by civilizations that dominated the first four millennia before the

Common Era, such as the Babylonians and later Greeks. That, until today, these peoples arouse admiration and beauty, to those who appreciate the art that mathematical generalizations can achieve. The objective of this work is to present, among so many existing methods, the iterative for calculating the square root of any natural number, as an alternative to trial methods and the use of calculators or other electrical devices that are by far the most used to calculate square roots.

Keywords: square roots, babylonian mathematics, algorithm, iterative methods.

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como propósito apresentar, entre tantos métodos existente na atualidade, um dos primeiros métodos iterativos que foram desenvolvidos por civilizações que habitaram a região da mesopotâmia, como os babilônios, entre os últimos 4.000 a.C., para se calcular a raiz quadrada de um número natural qualquer, principalmente dando ênfase aos números naturais que sejam não-quadrados perfeitos, numa perspectiva de aplicação em sala de aula, como forma alternativa a outros métodos utilizados atualmente como: o método das tentativas ou aparelhos eletrônicos.

Como dito anteriormente sobre os vários métodos existentes para se calcular raiz quadrada, coube a escolha de um dos primeiros métodos desenvolvidos, não por ser o melhor, ou pelo método escolhido neste artigo possuir a convergência para a raiz quadrada melhor que outros métodos iterativos existentes e igualmente úteis, e sim, por ser um dos primeiros métodos desenvolvidos pelo homem, se não o primeiro.

Além disso, por não necessitar de conhecimentos mais técnicos e contemporâneos da matemática como: o cálculo diferencial, como no algoritmo denominado de "método das tangentes" ou na utilização de diversos tipos de médias e desigualdades algébricas como no, método das aproximações sucessivas, também, desenvolvido pelo físico e matemático inglês Sir Isaac Newton; ou ainda, como comumente é feito, através utilização de dispositivos eletrônicos: calculadoras, tabletes, notebooks, entre outros.

Uma vez que, não haja nada de errado na utilização das tecnologias computacionais como ferramenta para auxiliar um matemático ou cientista na análise e interpretação de informação do mundo físico. Deve se ter cuidado de não se esquecer os processos matemático-lógico desenvolvidos por povos que tiveram a bravura de adentrar em terrenos que hoje é comum e que aparentemente se mostram óbvio depois de descoberto.

Cabe ressaltar, que, embora o método de Heron seja também de fácil compreensão algébrica e geométrica para se calcular raízes quadradas de números naturais quaisquer, e que, facilmente poderia ser utilizado para se calcular a raiz de qualquer número inteiro e positivo, optou se por demonstrar o algoritmo babilônico por sua primazia e, na verdade, o método de Heron deriva deste primeiro.

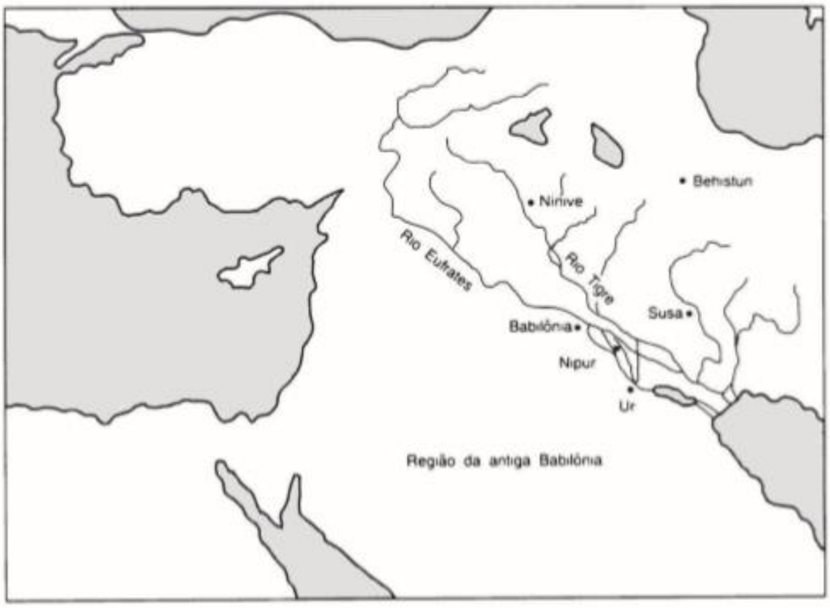
As possíveis omissões nas demonstrações que serão apresentadas são propositais para que esta obra não seja demasiadamente longo e mantenha a essência matemática nas demonstrações em linguagem moderna algébrica para se revelar o método, ao qual este artigo está proposto. Logo, a omissão de alguns métodos pertinentes como: o método finito de uma raiz quadrada e o método que utiliza produtos notáveis para o cálculo de raiz quadrada, embora de fácil compreensão, não serão apresentados. Que podem ser encontrados em obras específicas sobre os respectivos temas, de maneira mais rigorosa. Enquanto, outros métodos serão mais à frente.

2 UMA BREVE INTRODUÇÃO A CONTRIBUIÇÃO HISTÓRICA DA MATEMÁTICA BABILÔNICA

A região da antiga mesopotâmia onde atualmente se encontra o Iraque, não era formada por apenas um povo, chamado de babilônicos[1]. E segundo o livro de Gênesis[2], nesta mesma região nasceu Abraão de Ur, primeiro patriarca do povo judeu, num assentamento sumério onde o Grande Rio Eufrates desaguava no Golfo Persico. Conforme ilustra a figura 1.

[1] Este termo “babilônios” se refere a diversos etnias que habitaram esta região, entre o rio Tigre e Eufrates, e não, exclusivamente, formado pelo por um povo em particular.
[2] Primeiro livro da Bíblia Hebraica e da Bíblia Cristã que, supostamente, narra a história da origem do povo Hebreu em um assentamento sumério denominado Ur dos Caldeus na Mesopotâmia, entre os rios Tigre e Eufrates.

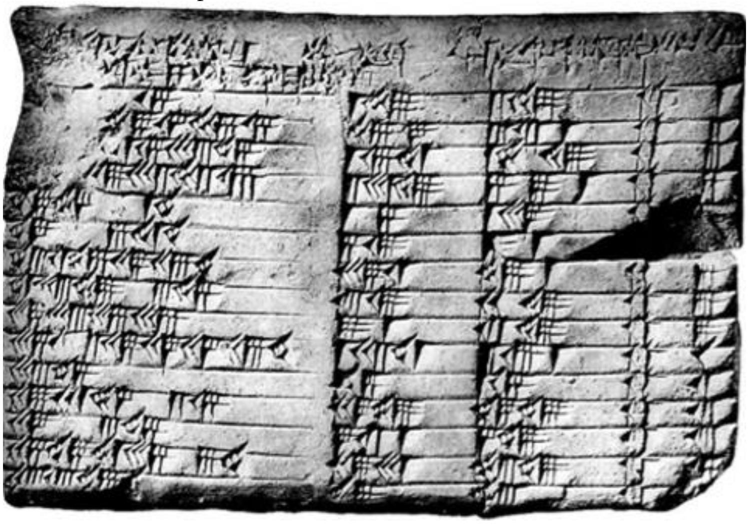
Figura 1 - Localização do civilização babilônica.



Fonte: Howard Eves (2011).

Foi pelos sumérios, um povo que viveu muito antes de Abraão, aproximadamente quatro mil anos antes da era comum que foi desenvolvido a escrita cuneiforme. Possivelmente, mais antiga que a própria escrita hieroglífica e hierática egípcia (BOYER, 2003). Conforme ilustra a figura 2.

Figura 2- Tablete babilônico utilizado para armazenar informação trigonométricas de um triângulo retângulo mais conhecido como Plinpton 322.



Fonte: Carl. Boyer (2003).

Segundo Joseph (1983), citado por Rosa & Orey (2014), apesar da escrita cuneiforme ter sido decodificada há mais de 160 anos, os tabletes que contém os textos matemáticos só começaram a ser decifrados e interpretados por meio do trabalho pioneiro

ISSN: 2525-8761

do matemático e historiador Otto Neugebauer a partir da segunda metade década de 30. Acrescenta Eves:

Os babilônios antigos desenvolveram, em algum momento entre 3000 e 2000 a.C., um sistema sexagesimal que empregava o princípio posicional. O sistema de numeração babilônico, porém, misto, na medida em que, embora os números superiores a 60 fossem escritos de acordo com o princípio posicional, os 60 números correspondentes ao grupo básico eram escritos nos moldes de um sistema de agrupamento simples decimal (EVES, 2011, p. 183).

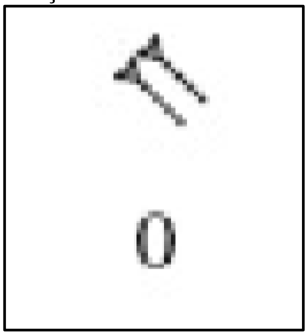
De acordo com Eves (2011) o sistema de numeração posicional babilônica perdurou até 300 a.C., devido não se ter uma simbologia específica para a ausência de unidade, que no caso era o zero, utilizado para representar potências ausente de base sexagesimal causando problemas de interpretação em um número dado. De acordo com a figura 3.

Figura 3 - Símbolos da numeração do sistema sexagesimal utilizado para textos matemáticos ou astronômicos.

Fonte: Fonte: Howard Eves (2011).

Problema amenizado, quando foi introduzido um símbolo, consistindo em duas cunhas pequenas e inclinadas, mas esse símbolo só era usado para indicar uma potência ausente de 60 *dentro* de um número, nunca quando ela ocorresse no seu *final*, no período em que Alexandre o grande invadiu a Mesopotâmia. Esse símbolo era, portanto, apenas um *zero* parcial, pois um zero verdadeiro serve para indicar as potencias ausentes da base tanto no meio como no final dos números, como é o caso de nossos 304 e 340. Conforme ilustra a figura 4.

Figura 4 - Representação do zero como duas cunhas inclinadas.



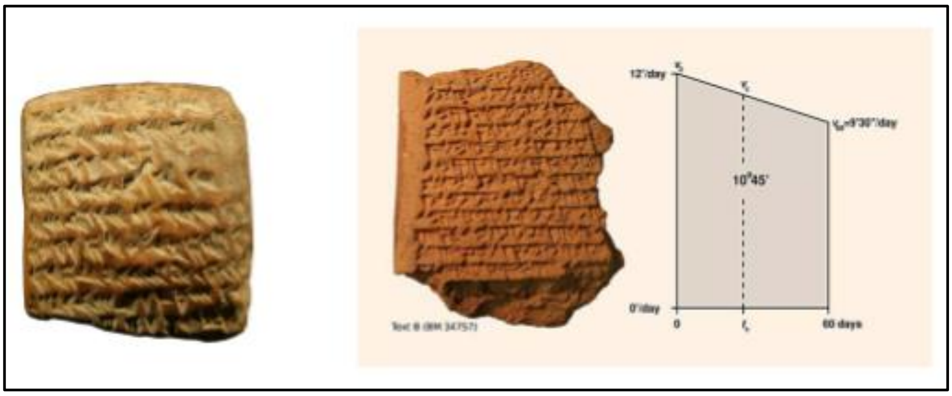
Fonte: Tatiana Roque (2012).

Como corrobora Aires (2010) este símbolo que significava ausência ou falta, sujeito a interpretações, teria sido aproveitado mais tarde pelos hindus, que a partir do ano 400 d.C., o sistema posicional contendo o conceito de zero, já estava sendo empregado de forma generalizada na índia. Embora, o zero não tivesse uma simbologia própria.

Vale ressaltar que, segundo Roque (2012) entre os babilônios, havia também tabletes equivalentes às nossas tabuadas. A maioria das operações realizadas relacionava-se diretamente com os tabletes, como multiplicação, quadrados, raízes quadradas, cubos, raízes cúbicas etc. Como ilustrado na figura 5.

ISSN: 2525-8761

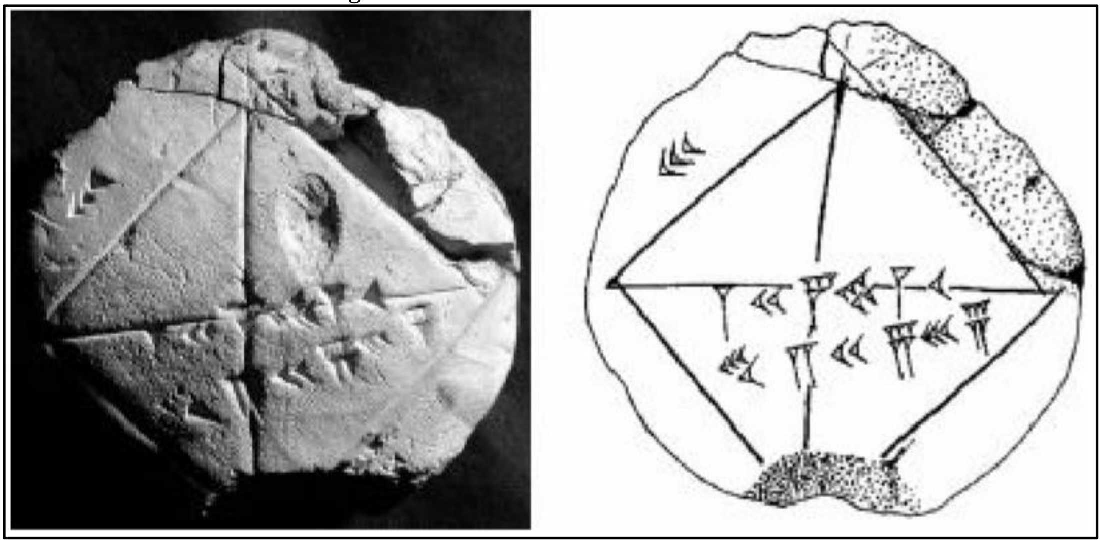
Figura 5 - Tablete que escreve um procedimento para calcular o deslocamento de Júpiter através do plano da eclíptica[3].



Fonte: Geometria na Babilônia, Universidade de São Paulo (USP).

E por mais que pareça inacreditável em nossa concepção que civilizações antigas tenham conseguidos tais feitos na ciência em épocas tão remotas, seus avanços não pararam por aí. Pois, o desenvolvimento e a evolução das ideias algébricas babilônias permitiram que eles resolvessem equações lineares e quadráticas, trabalhassem com números positivos, com sistemas de duas equações com duas variáveis e com algumas equações de graus mais elevados. Embora, os babilônicos reconhecessem somente os números racionais positivos, também resolveram problemas que não possuíam soluções racionais (JOSEPH, 1991). Conforme ilustra a figura 10.

Figura 6 - Tablete babilônico YBC[4] 7289.



Fonte: Fonte: Tatiana Roque (2012).

[3] O caminho que o Sol parece seguir através das estrelas ao longo de um ano terrestre.

[4] O tablete YBC 7289 escrito por volta de 1600 a.C. contém uma aproximação acurada para a raiz quadrada de dois até a quinta casa decimal, evidenciando que os babilônios também trabalharam com os números irracionais. Uma conjectura etnomatemática possível para o procedimento utilizado pelos babilônios para a extração de raízes quadradas é a sua semelhança com o método iterativo utilizado atualmente na programação de computadores (Joseph, 2001). No qual, este procedimento foi descrito por historiadores

Se ainda fora pouco, existe relato que Diofanto de Alexandria introduziu conhecimento babilônico, técnicas algébricas, na matemática grega. (Teresi, 2002, p. 52). Não obstante, o conhecimento matemático dos babilônios, ele pode ser "considerado como a fonte de alguns dos conhecimentos algébricos utilizados por Euclides na escrita de Os Elementos em aproximadamente 300 a.C." (Kline, 1953 p.16 apud Rosa & Orey, 2014 p.86).

E, entre as diversas contribuições matemáticas deixadas pelos babilônicos, eles determinavam potências e, mais surpreendentemente, sabiam como encontrar a raiz quadrada com um método iterativo de precisão muito grande. Os babilônicos conheciam procedimento para a resolução de equações e sistemas de primeiro e segundo grau (KLINE, 1953; TERESI; EICHENBERG, 2008; OREY, 2014; FEITOSA, 2000).

Em relação aos métodos iterativos, são frequentemente ou erroneamente atribuídos a matemáticos que viveram muito tempo depois de sua descoberta. Como o algoritmo que é utilizado para se calcular o valor aproximado de uma raiz quadrada, que foi atribuído ao sábio grego Arquitas (4228-365 A.C) ou a Heron (muitas vezes, chamado de Herão) de Alexandria (100 D.C aproximadamente) (BOYER, 2003).

De tão incrível e fascinante as obras feitas por civilizações antigas, à medida que, se conhece sua estrutura: social, política jurídica e matemática, como a civilização babilônica, egípcia e gregas, que não é à toa a existência em dias atuais de pessoas que criam lendas urbanas, espalhando uma pseudociência especulando que as construções de pirâmides, como as pirâmides do Egito, teriam sido erguidas com o auxílio de "alienígenas astronautas" devido nossos antepassados serem estúpidos demais para desenvolver tal tecnologia (FANKOI; MORRISON; WOLFE, 2017; BOYER, 2003).

Inclusive, de acordo com um documentário americano "*Sir Isaac Newton: The Gravity of Genius*" no qual o Professor I. Bernard Cohen[5], relata que o próprio grande matemático inglês Sir Isaac Newton acreditava que Pitágoras, outro grande matemático grego, adquiriu o conhecimento e a sabedoria antiga devido um suposto encontro com Moises no monte Sinal quando estava recebendo das mãos do próprio Deus, as tábuas da Lei.

como D. Fowler e E. Robson, e pode ser encontrado em seu trabalho "Square root approximations in Old Babylonian mathematics: YBC 7289 in context".

[5] Entrevista concedida a um documentário americano intitulado **"*Sir Isaac Newton: The Gravity of Genius*"** produzido por Peter Doyle pela Greystone Communications, Inc. for A&E Network; ,Distributed by New Video [2004].

Se a linha de raciocínio, exposta acima for seguida, ainda que absurda, não é difícil supor que a matemática babilônica tivesse sido desenvolvida pelo próprio Abraão, de acordo com as ideias de Newton. Apesar de tantos esforços e pesquisas para o desenvolvimento da história da matemática, as realizações dos babilônios do domínio da álgebra são admiráveis, apesar de o motivo que impulsionaram essa obra não são fáceis de entender (BOYER, 2003).

3 METODOLOGIA

O presente trabalho foi desenvolvido se baseando em pesquisa bibliográfica sobre os temas pertinentes a história da Babilônia, modelagem matemática sobre algoritmos babilônicos, métodos iterativos desenvolvidos em outras épocas e em diferentes momentos históricos, em livros clássicos da literatura matemática, bem, como, em artigos e revistas específicas para o ensino da matemática de grande relevância como a Revista do Professor de Matemática RPM, que tornou possível esta pesquisa.

Será feito uma breve apresentação de alguns métodos iterativos, com técnicas diversificadas, que podem ser utilizados para se calcular a raiz quadrada de um número natural, para posteriormente, ser mostrado a dificuldade de se achar uma raiz quadrada de um número natural qualquer, para depois, simular uma aula fictícia entre dois personagens que supostamente viveram na antiga escola babilônica; Hamurabi, o professor e Sargão, o aluno. No qual é introduzido e apresentado um problema de matemática aplicada relacionado com geometria pelo professor fictício Hamurabi, para explorar a aplicação do algoritmo babilônico em uma linguagem matemática moderna, que é o principal objetivo deste presente trabalho respondida pelo aluno fictício, Sargão.

Logo após esta simulação de aula, será descrita a maneira mais rigorosa matematicamente, o método babilônico, em uma linguagem estritamente algébrica. Uma vez, que, a demonstração de limites será omitida e poderá ser encontradas em obras mais técnicas que foge o objetivo deste presente artigo.

Cabe ressaltar que, de maneira alguma será utilizada os caracteres e simbologias algébricas ou geométricas da matemática original destas civilizações, como a mesopotâmica, na época em que foram desenvolvidos, e sim, através da notação matemática moderna. Para que a transmissão dos métodos, em especial, o babilônico seja de fácil assimilação, pois, envolve somente as quatro operações básicas da aritmética.

4 ALGUNS MÉTODOS PARA SE TIRAR A RAIZ QUADRADA DE UM NÚMERO NATURAL POSITIVO

Existem diversos métodos para calcular a raiz quadrada de um número positivo, a partir apenas das quatro operações elementares. Todos eles envolvem, de um modo ou de outro, um processo de aproximações sucessivas, a partir de uma aproximação inicial. Claro que, neste contexto, não está inserido o uso de dispositivos eletrônicos bem como o uso de tabela. Embora, a programação de computadores seja baseada na reprodução algorítmica necessária pela máquina computacional.

Nesta parte do artigo, será mostrado alguns métodos iterativos, suscintamente, que podem ser utilizados para se calcular a raiz de números não-quadrados perfeitos desenvolvidos por diversos povos e em diversas épocas, e que poderiam ser utilizados em uma abordagem didática para alunos da educação básica, para que se possa ver as diferentes e mais variadas abordagens ao se calcular a raiz quadrada de um número qualquer, antes de ser apresentado o método babilônico que foi um dos primeiros, se não, o primeiro a ser desenvolvido.

5 MÉTODO DAS TENTATIVAS

Este método, das tentativas, embora, seja um método rudimentar de se calcular raízes é um dos mais utilizados pelos professores de matemática no ensino básico, para números de poucas casas decimais, que só perde em utilização para a calculadora. Logo, quando raízes de números não-quadrados perfeitos precisam de aproximações muito longas a calculadora seja, sem dúvida, o mais prático.

Suponha $a, b\ e\ k\ \in R^+\ no\ qual\ a\ e\ b\ são\ números\ consecutivos.$

Logo, caso se queira achar a raiz de um certo número, sempre é possível obter dois quadrados inteiros consecutivos em que $\sqrt{K}$ enteja compreendido entre eles. Ou seja,

$$a^2 < k^2 < b^2\ \rightarrow a < k < b$$

Como $k > a$, arrisca-se em um valor $a + h\ ou\ b - h$, tal que, $0 < h < 1$. Logo, $a + h\ ou\ b - h$. Logo, $k \approx a + h$. Que será a primeira aproximação para $k.$ E pode ocorrer de ser encontrados subintervalos, tais que, para as sucessivas aproximações de k: $\{k_1, k_2, \ldots\}$tem se que $]k_1, k_2[\supset]a; b[$. No qual, este processo pode continuar indefinidamente caso o valor de k seja irracional. Como segue o exemplo abaixo.

Caso se queira saber o valor de $K = \sqrt{10}$, então, pode se argumentar que, $\sqrt{9} < \sqrt{10} = k < \sqrt{16} \rightarrow 3 < k < 4 \therefore k \cong 3 + h\, onde\; 0 < h < 1.$ Caso se escolha $h = 0{,}1$, então, $k_1 \cong 3{,}1. Logo, (3{,}1)^2 = 9{,}61 \neq 10.$ Que induz na busca de uma nova aproximação. Quando se usa uma segunda aproximação, ter se a $k_2 = 3{,}2$ e $(3{,}2)^2 = 10{,}24$. Logo, o valor procurado está em um subintervalo $]3{,}1; 3{,}2[\supset]3; 4[$. Onde, cada vez que for feito este processo de achar os valores de K mais preciso será o valor de $\sqrt{10}$.

6 MÉTODO DE APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS

Método este, atribuído ao matemático e físico inglês Isaac Newton (1642-1727), utiliza uma iteração bastante simples e que serve também como alternativa para o método de iteração babilônico. Embora, mais sofisticado que o método iterativo babilônico necessita de um conhecimento como: média aritmética e geométrica, para ser realizado. E algumas vezes, este método pode ser abordado através de cálculo diferencial, conhecido como método das tangentes, que estão além do escopo didático para a Educação Básica, motivo pelo qual o será omitido.

Seja $a\ e\ b\ \in\ N^+, \exists k\ tal\ que\ a < \sqrt{k} < b, desde\ que\ k = a \cdot b.$

Suponha que $b > a$ e sejam consecutivos, então pode se provar que: $a < a \cdot b < b$. Pois, ao se fazer $b = (a + 1)$; segue, imediatamente, a desigualdade abaixo,

$$a^2 < a \cdot (a+1) < (a+1)^2$$
$$a^2 < a^2 + a < a^2 + 2a + 1$$
$$a^2 < a \cdot (a+1) < a \cdot (a+1) + (a+1)$$

Logo, fica explícito que, ao se tirar a raiz quadrada de todos os termos da desigualdade acima, tem se que:

$$a < \sqrt{a \cdot (a+1)} < b$$

Como $b = (a+1), a < \sqrt{a \cdot b} < b$. Uma vez que, $k = a \cdot b$ segue que, $a < \sqrt{k} < b$. No qual este valor encontrado $\sqrt{k}$ é a média geométrica dado dois números $a\ e\ b$. E que sempre é menor ou igual a média aritmética, como segue abaixo:

Suponha que se escolha dois números naturais e consecutivos $a\ e\ b$. Logo, sua média geométrica (m_a) é sempre maior ou igual do que a média geométrica (m_a). Logo,

$(a+b)^2 \geq 0 \rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$. Segue que , ao se adicionar a quantidade $2ab$ em ambos os lados da desigualdade, tem se que, $(a+b)^2 \geq 4ab, \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Portanto, está provado que $m_a \geq m_g$. E, com este resultado algébrico, pode se perceber que:

$$a < m_g < m_a < b$$

Agora, uma vez que é possível se encontrar um valor c^2 para ser a primeira estimativa m_1, tal que, $c^2 < k < \frac{k}{c}$ pois $\frac{k}{c} > k$ então $k = c \cdot \frac{k}{c}$ então tem um subintervalo $k \in \left[c, \frac{k}{c}\right] \supset [a, b]$. Como $m_g \leq m_a$ pode tomar a média entre em relação $\left[c, \frac{k}{c}\right]$, pois, $< c < \frac{c+\frac{k}{c}}{2} < \frac{k}{c} < b$ para ser uma segunda estimativa m_2. Logo, o próximo subintervalo será $\left[\frac{k}{c}, \frac{c+\frac{k}{c}}{2}\right]$ e assim sucessivamente a medida em que o intervalo das sucessivas aproximações vão tendendo para zero, o valor procurado tende para $\sqrt{k}$.

6.1 TABELA

Da mesma maneira que existem tabelas denominada mantissas para se calcular os logaritmos, pode ser feito tabelas, para se calcular os valores de raízes quadradas para qualquer número natural.

6.2 APARELHOS ELETRÔNICOS

Este método consiste em se utilizar qualquer dispositivo eletrônico que possuem precisão de 8 casas decimais ou mais, como em: calculadoras, tabletes, laptop, notebooks entre outros. Geralmente estes dispositivos ou softwares possuem uma tecla $\sqrt{}$, onde x pode ser escolhido arbitrariamente e depois se apertar a tecla $\sqrt{}$ para que o valor da raiz quadrada seja computado.

Porém, como a maioria dos aparelhos eletrônicos possuem um número de precisão baixo, com no máximo 8 casas decimais como as calculadoras de bolso, se torna inadequado para o cálculo de raiz quadrada de números que apresentam casas decimais elevadas, períodos muito grandes, no caso de dízimas periódicas e para números irracionais.

Evidentemente, fora os métodos citados que envolvem operações básicas, ainda existem muitos outros métodos como o Processo finito para se calcular Raiz quadrada, que seria interessante para o ensino fundamental, pela linguagem familiar pelos alunos como um outro método de Newton denominado “método das tangentes” devido sua interpretação geométrica, neste último sendo inviável para e educação básica.

7 MÉTODO DA TENTATIVA PARA SE ACHAR A RAIZ QUADRADA DE RAÍZES NÃO EXATAS EM SALA DE AULA

Em primeiro lugar, é necessário enfatizar que existem várias formas de se manipular técnicas matemáticas pertinentes a educação básica e levar ao conhecimento dos alunos a calcularem raízes, ao menos, raízes quadradas de números naturais quaisquer, sem o uso de tecnologia. Como segue abaixo, temos que, ao se procurar achar a raiz quadrada de um número qualquer que não resulte em um número natural ou decimal, é natural que, ao se deparar com a raiz de 24, queiram encontrar em meio de quais números sua raiz pode estar por aproximação simples. Como segue abaixo,

$$\sqrt{16} < \sqrt{24} < \sqrt{25}$$

Logo, ficará evidente a desigualdade abaixo.

$$\sqrt{4^2} < \sqrt{24} < \sqrt{5^2}$$

Ou

$$4 < \sqrt{24} < 5$$

Como o número 24 pode ser decomposto em números primos, segue que:

$$4 < \sqrt{2^2 \cdot 6} < 5$$
$$4 < \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3} < 5$$
$$4 < 2\sqrt{6} < 5$$

Dividindo os termos da desigualdade por 2, segue que:

$$2 < \sqrt{6} < 2{,}5$$

Que na tentativa de solucionar a raiz de 6, que é um número irracional, ainda que se tente usar as propriedades da radiciação, o problema ainda se complica, mais. Pois teremos o produto de dois números irracionais. Como se pode observar abaixo.

$$2 < \sqrt{2 \cdot 3} < 2{,}5$$
$$2 < \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} < 2{,}5$$

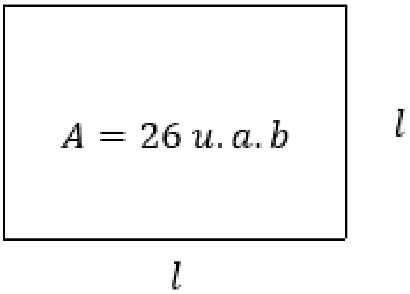
Os passos descritos acima, foram necessários, simplesmente, para justificar que a raiz que se quer achar, no caso a $\sqrt{24}$ está entre dois números inteiros consecutivos, que neste caso, são os números 4 e 5. Dependendo de qual raiz quadrada se queira calcular, isso não é uma tarefa fácil, pois ainda que se utilize de técnicas matemáticas básicas em relação ao ensino básico, elas vão recair em problemas envolvendo números irracionais. Mesmo que, $\sqrt{24}$ é um número irracional. Segue e se justifica a necessidade de se obter um método que possa ser utilizado para se calcular o valor aproximado de uma raiz quadrada de um número qualquer. Que será mostrado mais a frente, utilizando o algoritmo utilizado pelos babilônicos.

8 APLICAÇÃO ALGÉBRICA DO MÉTODO ITERATIVO BABILÔNICO PARA SE ACHAR O VALOR APROXIMADO DE RAIZ QUADRADA

Como já apresentado anteriormente, os babilônicos desenvolveram um método para calcular o valor aproximado de raiz quadrada de um número natural qualquer. Logo, este método apresentado neste trabalho será feito através de uma suposta aula fictícia entre professor e aluno para descrever como este assunto poderia ser desenvolvido em uma linguagem matemática moderna. Embora, a matemática babilônica tivesse caráter mais algébrico, neste artigo será feito algumas imagens geométricas para facilitar a compreensão. Como poderá ser verificado a seguir.

Vamos supor que um professor chamado Hamurabi na antiga babilônia pedisse ao seu aluno chamado Sargão para calcular o lado de um terreno quadrado sendo que sua área seja conhecida e igual a 26 unidades de área babilônicas (u.a.b). Então, a partir de agora, será descrito o processo que Sargão vai fazer para achar o valor do lado deste terreno. Como o terreno possui o lado desconhecido, o que sabemos está ilustrado conforme a figura 1.

Figura 7 - Terreno com lado desconhecido e área igual a 26 (u.a.b).



Fonte: Odirley Willians Miranda Saraiva (2020)

Sargão, chama o valor da área pela letra A. Logo $A = 26\, u.a.b$. Em seguida, procede, da seguinte maneira, verificando que o número não quadrado perfeito abaixo, pode ser representado, de uma outra maneira, conforme desenvolvido abaixo.

$$26 = 25 + 1 \ ou\ 26 = 5^2 + 1$$

Então, Sargão percebe que:

$$\frac{25}{5} < \frac{26}{5}$$

$$ou, efetuando\ a\ divisão\ em\ ambos\ os\ lados\ da\ desigualdade, temos\ que:$$

$$5 < 5{,}2$$

No qual, ele chama para a raiz de 25 de a_1, ou $a_1 = 5$ e para $b_1 = A/a_1$. Onde ele pode verificar que $b_1 = 5{,}2$.

O qual ele verificou que, se:

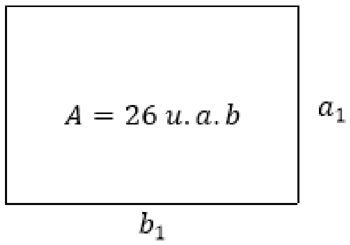
$$b_1 = \frac{A}{a_1} \leftrightarrow a_1.b_1 = A \ \therefore A = 5 \cdot (5{,}2)\ (u.a.b)$$

Logo, a área inicial que era um quadrado se transformou em um retângulo de igual área.

$$5 \cdot (5{,}2) = 26\ (u.a.b)$$

Porém, não em um retângulo qualquer, e sim, em um retângulo em que seus lados são bem mais próximos um do outro. Conforme ilustrado na figura 2.

Figura 8 - Terreno com base $b_1 = 5{,}2$ e altura $a_1 = 5{,}0$.



Fonte: Odirley Willians Miranda Saraiva (2020)

Agora, Sargão imaginou o seguinte: ao se pegar os mesmos valores que formou o retângulo acima e fizer uma nova média que chamou de a_2, ele, então, percebeu que o valor seria ainda menor e que serviria para ser a área do novo retângulo. Logo:

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} \rightarrow a_2 = \frac{5 + 5{,}2}{2} \therefore a_2 = 5{,}1$$

Logo, novamente, dividindo o valor inicial da área por a_2, temos que:

$$b_2 = \frac{A}{a_2} \leftrightarrow b_2 = \frac{26}{5{,}1} \therefore b_2 \cong 5{,}098039216$$

Então, o valor b_2 pode ser aproximado até 6 casas decimais, então, tem se que:

$$b_2 \cong 5{,}098039$$

E como:

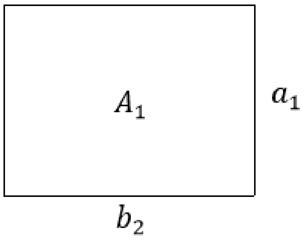
$$A = b_2 \cdot a_2 \therefore A = (5{,}098039) \cdot (5{,}1)$$

Tem se que:

$$A_1 = 25{,}999998 \ \ (u.a.b)$$

O retângulo adquire valores cada vez mais próximos para seus respectivos lados, ainda que a $A_1 \approx A$ conforme mostra a figura 3.

Figura 9 - Terreno com base b_2, altura a_1e $A \approx A_1$.



Fonte: Odirley Willians Miranda Saraiva (2020)

Neste momento, Sargão percebe que os lados do retângulo está mais próximo um do outro, pois, $5{,}098039 \approx 5{,}1$. E repete o processo mais uma vez. Chama de $a_3 = \frac{a_2+b_2}{2}$ que é a média aritmética, e, como:

$$a_3 = \frac{a_2 + b_2}{2} \rightarrow a_3 = \frac{(5{,}1) + (5{,}098039)}{2} \therefore a_3 = 5{,}099019$$

Então, temos que,$A = b_3 \cdot a_3$

$$b_3 = \frac{A}{a_3} \rightarrow b_3 = \frac{26}{5{,}099019} \therefore b_3 = 5{,}09902$$

Logo, o valor da área A torna a igualdade verdadeira para o valor de b_3, conforme observado abaixo,

$$b_3 \cong 5{,}09902 \; e \; a_3 = 5{,}099019$$

Então, o valor

$$A_2 = a_3 . b_3 \rightarrow A_2 = (5{,}099019) \cdot (5.09902)$$

$$A_2 = 25{,}999999 (u.a.b)$$

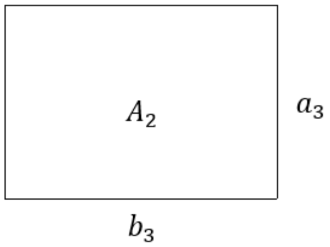
Então, tem se que, se aproximarmos até a 6 casa decimal ter se ia,

$$A_2 \cong 25{,}999999 \ (u.a.b)$$

Pode-se ver que $A_1 < A_2$.

No qual, Sargão verificou a aproximação da área A_2 até a sexta casa decimal, conforme ilustra a fugira 4.

Figura 4. Terreno com base b_3, altura a_3.



Fonte: Odirley Willians Miranda Saraiva (2020)

Ora, neste momento, os valores de $a_3 \approx b_3$, uma vez que $A_n \to A$. Se for comparadas as áreas: A, A_1 e A_2 tem se que:

$$A_1 < A_2 \cong A$$

O qual pose ser verificado que a medida em que o método segue, as áreas $\{A_1, A_2, \ldots A_n\} \to A$, se e somente se $b_n \to a_n$. Interessante, observar que em uma calculadora comum a precisão máxima já seria obtida neste processo. Pois, se for utilizada uma calculadora de bolso com precisão de 9 casas decimais, teríamos para a raiz de 26, ter se ia que:

$$\sqrt{26} = 5{,}099019514$$

Se a precisão fosse de até 6 casas decimais, e ainda se utilizasse qualquer calculadora de bolso, poderia ser percebido o valor calculado pelo aparelho eletrônico e o método babilônico descoberto a mais de 5.000 anos atrás. Conforme pose ser verificado abaixo o se utilizar uma calculadora de baixa precisão que o valor

$$\sqrt{26} = 5{,}099019 = a_3 \approx b_3$$

Logo, quando comparados com os valores de a_3 e b_3 eles concordam com o valor obtido pela calculadora em quatro casas decimais para b_3 e com as seis casas decimais, em relação a a_3, e isto, com apenas três iterações através do método babilônico.

Assim, o professor Hamurabi ficou espantado com o método utilizado por Sargão, pois foi utilizado operações básicas para se achar a raiz de um número não-quadrado perfeito. Muito tempo depois, em Alexandria na Grécia, um aluno chamado Heron utilizaria o mesmo método que Sargão utilizara em uma forma mais geométrica. Mas, isto já é uma outra história.

9 DESCRIÇÃO MATEMÁTICA DO MÉTODO BABILÔNICO PARA CALCULAR O VALOR APROXIMADO DE RAIZ QUADRADA DE UM NÚMERO NATURAL

Seja o valor A a número que se queira extrair a raiz quadrada, que no caso anterior, era 26. Agora, se deve obter o valor da raiz quadrada menor, mais próxima do número 26. Que no caso anterior é 5 e que foi denominado de a_1. Agora, o primeiro termo, denominado de b_1 será a divisão de A por A_1.

$$b_1 = \frac{A}{a_1} \rightarrow A = a_1 \cdot b_1$$

Agora, se obtém o valor de $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$

Logo,

$$b_2 = \frac{A}{a_2} \rightarrow A = a_2 \cdot b_2$$

Novamente, se faz,

$$a_3 = \frac{a_2 + b_2}{2}$$

Que por sua vez,

$$b_3 = \frac{A}{a_3} \rightarrow A = a_3 \cdot b_3$$

E assim, o processo iterativo se repete indefinidamente. Ao passo que, os valores de A_3 e b_3 cada vez vão ficando mais próximos. Ou seja:

$$|a_3 - b_3| \approx 0, a_3 \cdot b_3 \approx a_3^2 \; ou \; a_3 \cdot b_3 \approx b_3^2$$

Pois, o valor fixo de A vai servindo como um ajustador que faz com que o retângulo seja cada vez mais próximo de uma quadrado. Pois, quando,

$$|a_n - b_n| \rightarrow 0 \; segue \; que \;\; a_n \cdot b_n \rightarrow A.$$

Tem se, estão, que:

$$a_n \rightarrow b_n \; ou \; b_n \rightarrow a_n$$

Logo,

$$|a_n - b_n| \rightarrow 0, \sqrt{a_n \cdot b_n} \; \rightarrow A \; .$$

E assim o método iterativo está justificado para aproximação de raiz quadrada qualquer.

10 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi elaborado em uma tentativa de, a quem tiver interessado, mostrar o método babilônico para e calcular a raiz quadrada, como dito anteriormente neste trabalho, não por ser o melhor, e sim por ser um dos primeiros métodos utilizados que envolvem apenas o conceito das quatro operações básicas da aritmética na tentativa de ser repassado suas principais ideias através de uma aula simples de matemática. Pois, de acordo com as palavras de Rocha (1997) que diz que, embora o resgate dos métodos iterativos tenha se perdido ao longo do temo, eles não foram esquecidos.

E assim se pretende, que de alguma maneira, este trabalho contribua não somente com a história da matemática na aplicação do procedimento algoritmo, como também, pela admiração e respeito por estes povos que existiram, e alguns ainda existem, e nos são contemporâneos. Para que o contexto histórico e matemático, sejam mais justos e esclarecedores com as contribuições feitas pelos povos do passado, lhe dando o devido respeito e notável valor em sua imensurável contribuição para o ensino de matemática.

REFERÊNCIAS

AIRES, L.M. **Uma história da matemática:** dos primeiros computadores a AlanTuring, dos números ao computador**.** 1º Edição Lisboa. 2010.

BOYER, C.B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Bencher Ltda, 2003.

FEITOSA, H. de A. **Quanto um deus está além de outro deus? Elementos de matemática na Babilônia**. Mimesis, Bauru, v. 21, n. 1, p. 25-38. 2000.

IEZZI, G. **Matemática: ciências e aplicações**, 1º série do ensino médio, matemática, 2ª ed, São Paulo. 2004.

GUELLI, O**. História de Potências e Raízes. Contando a História da Matemática.** n.4. 7 ed. São Paulo. Editora Ática. 1997.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**, vol. 1. Rio de Janeiro, IMPA. 1976.

LIMA, E. L. **Meu professor de Matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro, SB. 1987

LOGEN A. **Matemática em movimento.** 8ª série, Editora do Brasil. 2002

EVES, H. **Introdução à história da matemática** / Howard Eves; tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp. 2001.

FANKOI, MORRISON & WOLFE. **Astronomy,** Rice University. 2017.

JOSEPH, G. G. **The crest of the peacock**: Non-European roots of mathematics. Princeton, NJ: Princeton University Press. 1991.

ALBECHT, P. **Análise Numérica** – Um curso Moderno, de, LTC Editora. 2006.

ROCHA S. **Resgatando Métodos Para Cálculos de Raízes quadradas e Cúbicas.** 1997.

ROQUE, T. **Uma visão crítica: Desfazendo mitos e lendas,** Editora Zahar. 2012.

ROSA, M. & OREY, D. C. **Etnomatemática e modelagem: a análise de um problema retórico babilônio**. Revista Latino-americana de Etnomatemática, 6(3), 80-103. 2013.

R.P. M. **Revista do Professor de Matemática**, n° 21. Sociedade Brasileira de Matemática. 1982.

Sir Isaac Newton: The Gravity of Genius. Greystone Communications, Inc. for A&E Network; Peter Doyle, Melanie Blythe. VT: A&E Home Video; New York, NY: Distributed by New Video [2004]

TERESI, D.; EICHENBERG, R. **Descobertas perdidas: as raízes antigas da ciência moderna, dos babilônios aos maias.** ISBN: 9788535911794. São Paulo: Companhia das Letras, 439p. 2008.

TERESI, D. **Lost discoveries: the ancient roots of modern science – from the Babylonians to the Maya.** New York, NY: Simon & Schuster (2002).