

Influência do momento polar de inércia no projeto mecânico: como a geometria pode afetar na resistência dos materiais

The influence of the polar moment of inertia in mechanical design: how geometry can affect the strength of materials

DOI:10.34117/bjdv8n5-278

Recebimento dos originais: 21/03/2022

Aceitação para publicação: 29/04/2022

David Coverdale Rangel Velasco

Mestre em Engenharia e Ciência dos Materiais pela Universidade Estadual do Norte Fluminense, Darcy Ribeiro (UENF)

Instituição: Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro (UENF)
Endereço: Av. Alberto Lamego, 2000 - Parque California, Campos dos Goytacazes, RJ,
CEP: 28013-602

E-mail: davidc.r.v2014@gmail.com

Fábio Seabra Puglia

Mestrando em Engenharia e Ciência dos Materiais pela Universidade Estadual do Norte Fluminense, Darcy Ribeiro (UENF)

Instituição: Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro (UENF)
Endereço: Av. Alberto Lamego, 2000 - Parque California, Campos dos Goytacazes, RJ,
CEP: 28013-602

E-mail: fb.puglia@gmail.com

RESUMO

A resistência de um componente não está associada somente aos materiais que o constituem. A geometria nas quais os mesmos estão dispostos influencia diretamente na resistência dos materiais. Neste sentido, o momento de inércia é um parâmetro que representa a dificuldade de uma determinada seção se deformar ao sofrer um determinado esforço. Assim, este trabalho avalia o Momento Polar de Inércia (MPI) em função da geometria da seção em diferentes cenários. O MPI foi determinado pelo Autodesk Inventor por meio da instrução propriedades da região em três cenários: com limitação de espaço, com restrição de área e com limitação de espaço para obter um determinado momento de inércia. Os resultados deste trabalho apresentaram que seções circulares tendem a otimizar o espaço, enquanto as seções poligonais possuem uma relação MPI/área superior, sendo esta maior em polígonos conforme a quantidade de lados é menor. Contudo, seções circulares vazadas permitem proporcionar o mesmo MPI que seções poligonais, enquanto ocupa o mesmo espaço e necessitam de menos material.

Palavras-chave: mecânica dos sólidos, momento polar de inércia, torção mecânica.

ABSTRACT

The strength of a component is not only associated with the materials that constitute it. The geometry in which they are arranged directly influences the strength of materials. In this sense, the moment of inertia is a parameter that represents the difficulty of a given section to deform when undergoing a given effort. Thus, this work evaluates the Polar Moment of Inertia (MPI) as a function of the section geometry in different scenarios. The

MPI was determined by Autodesk Inventor by means of the region properties statement in three scenarios: with space limitation, with area restriction, and with space limitation to obtain a given moment of inertia. The results of this work showed that circular sections tend to optimize space, while polygonal sections have a higher MPI/area ratio, which is higher for polygons as the number of sides is smaller. However, hollow circular sections provide the same MPI as polygonal sections, while occupying the same space and requiring less material.

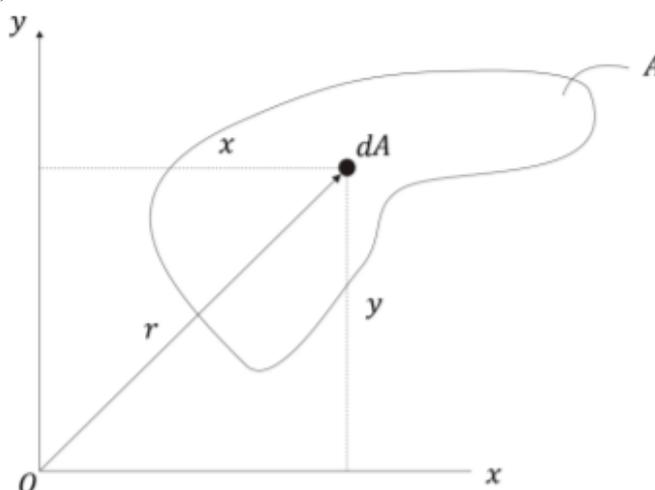
Keywords: solid mechanics, polar moment of inertia, mechanical torsion.

1 INTRODUÇÃO

O momento de inércia está associado a dificuldade do material em se deformar mediante carregamentos específicos. o nível de dificuldade de alterar o estado de um corpo. Na mecânica, dois tipos de momentos de inércia se destacam, o Momento de Inércia de Área (MIA), que está associado à resistência à flexão de uma viga, e o Momento Polar de Inércia (MPI), que está associado a resistência a torção (HIBBELER, 2009).

Considerado a representação apresentada na Figura 1, pode-se expressar o MIA em relação ao eixo X e Y por meio das Equações 1 e 2 respectivamente, bem como o MPI por meio da Equação 3 (SCREMIN, 2009).

Figura 1: Representação esquemática de uma seção de área A em um sistema de eixos ortogonais x e y. Fonte: Scremin (2009).



$$I_X = \int_A Y^2 dA \quad (1)$$

$$I_Y = \int_A X^2 dA \quad (2)$$

$$J_o = \int_A r^2 dA = \int_A (X^2 + Y^2) dA = I_X + I_Y \quad (3)$$

Onde:

I_X : Momento de Inércia de Área (MIA) em relação ao eixo X;

Y : Distância do eixo x ao diferencial de área;

I_Y : Momento de Inércia de Área (MIA) em relação ao eixo Y;

X : Distância do eixo y ao diferencial de área;

J_o : Momento polar de inércia (MPI);

r : Distância da origem (O) ao diferencial de área;

Por meio das equações supracitadas, é possível observar que os fundamentos atrelados ao momento de inercia estão associados a funções matemáticas que, especialmente em cursos de nível técnico, são substituídas por uma abordagem simplificada, utilizando formulas deduzidas para seções específicas. Assim, em geral, as eficiências das seções não são comparadas entre si, sobretudo quando as seções não são convencionais.

Neste sentido, este trabalho tem por objetivo apresentar de quantitativa a influência da geometria de uma seção no MPI, visando proporcionar uma reflexão sobre a razão pela qual algumas geometrias tendem a proporcionar uma maior eficiência que as demais. O recorte do trabalho foi o MPI, pois, o mesmo não é relativo à posição de um determinado eixo, como o MIA.

2 METODOLOGIA

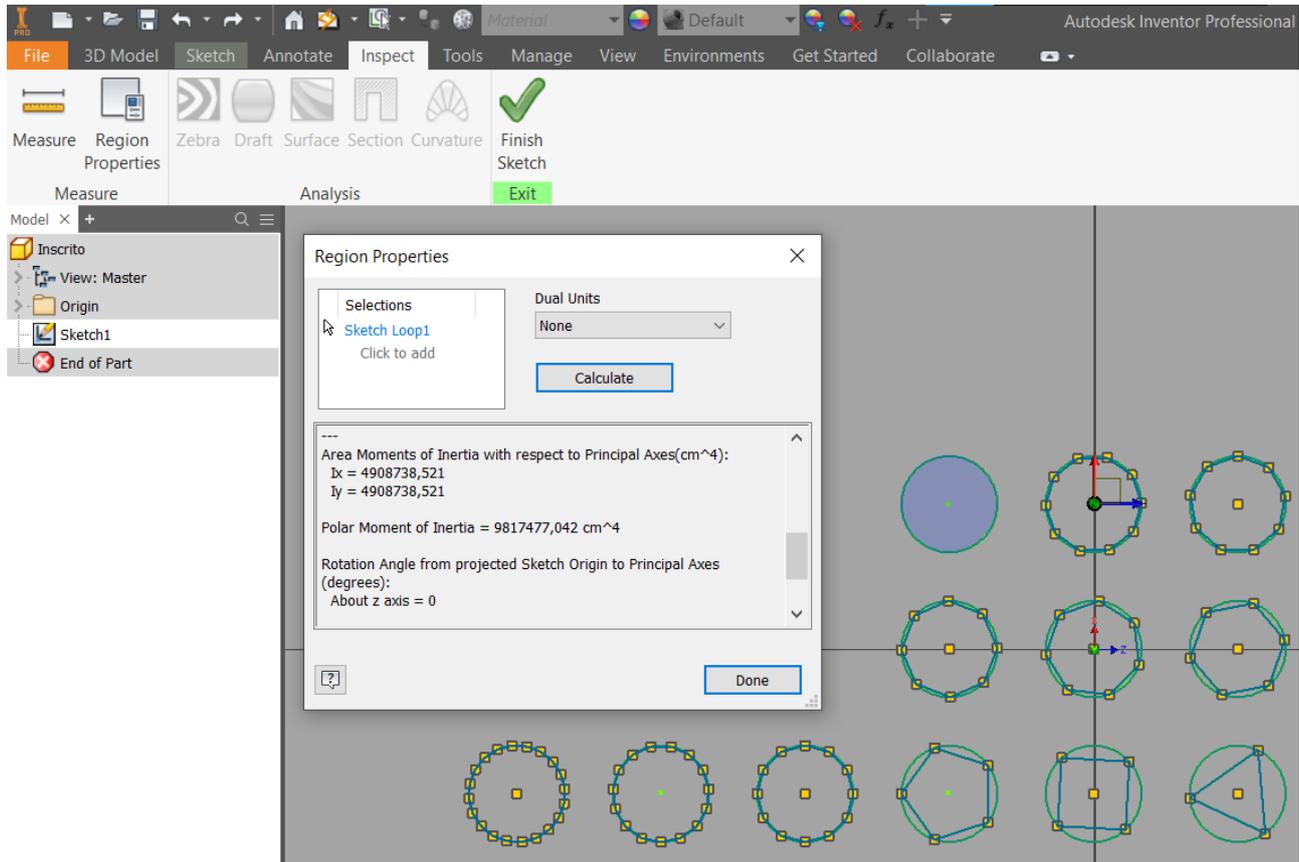
A metodologia deste trabalho pode ser observada nas subseções a seguir.

2.1 MÉTODO DE CÁLCULO DO MOMENTO POLAR DE INÉRCIA (MPI)

O uso de sistemas de modelagens para realização de simulações e cálculo de parâmetros básicos é observado em diversos trabalhos, sendo uma maneira produtiva de resolver problemas que muitas das vezes são complexos. Dentre os softwares de modelagens, o Autodesk Inventor se destaca por disponibilizar seu uso gratuito para estudantes (AUTODESK, 2021; TELEGIN, KOZLOV e SAKALO, 2017).

Assim, neste trabalho foi utilizada a versão estudantil do Autodesk Inventor 2019. As seções avaliadas foram desenhadas em um *sketch* e o MPI foi mensurado por meio da instrução *Region Properties*, como pode ser observado na Figura 1. Este método foi utilizado em outros trabalhos como os de Munguia, Akande e Dalgarno (2014).

Figura 1: Apresentação da interface do Autodesk Inventor 2019.



2.2. CENÁRIOS SIMULADOS

Neste trabalho foram simulados três cenários, variando a seção ao considerar a mesma igual a um polígono regular (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12 e 15) e comparando com uma seção circular.

O primeiro considerou que os polígonos estavam circunscritos em círculos de mesmo diâmetro. Posteriormente, o valor do MPI do polígono foi dividido pelo da seção na qual estava circunscrito, sendo este valor denominado como MPI relativo. Este cenário visa realizar uma avaliação considerando um mesmo espaço disponível para rotação em todos os polígonos.

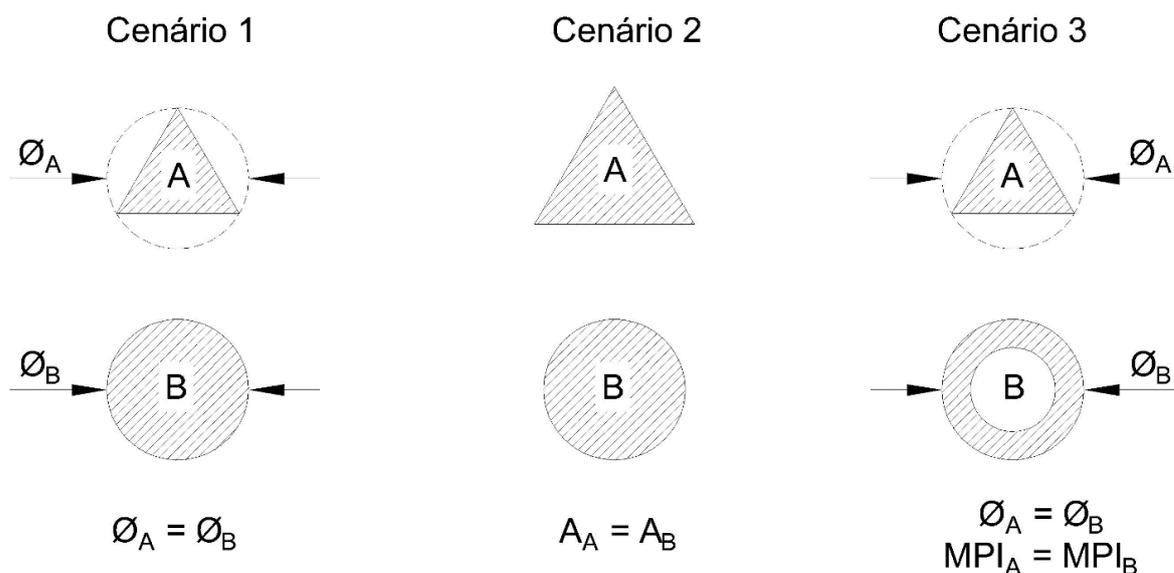
O Segundo cenário também variou a quantidade de lados do polígono, sendo agora avaliada a razão de MPI do polígono em relação a de uma seção circular maciça de mesma

área. Este cenário visa realizar uma avaliação considerando uma relação MPI/massa proporcionada pela seção, sendo por este motivo a razão supracitada é denominada neste trabalho como MPI específico. Acrescenta-se ainda que também foi reportado o aumento do diâmetro da seção por meio da razão entre o diâmetro circunscrito do polígono e o diâmetro da seção circular correspondente, sendo neste trabalho denominado como diâmetro circunscrito específico.

Por fim, no último cenário foi avaliada uma razão de área do polígono em relação a de uma seção circular de mesma área, sendo esta seção circular vazada e com diâmetro externo igual ao diâmetro no qual circunscribe o polígono supracitado. Esta razão é denominada neste trabalho como área específica, sendo uma relação que busca representar ao mesmo tempo uma MPI/massa e considerar que ambas as geometrias demandam o mesmo espaço para rotacionar.

A Figura 2 apresenta uma representação esquemática dos cenários simulados.

Figura 2: Cenários simulados.



$$MPI_{\text{relativo}} = MPI_A / MPI_B$$

$$\text{Diâmetro}_{\text{específico}} = \varnothing_A / \varnothing_B$$

$$MPI_{\text{específico}} = MPI_A / MPI_B$$

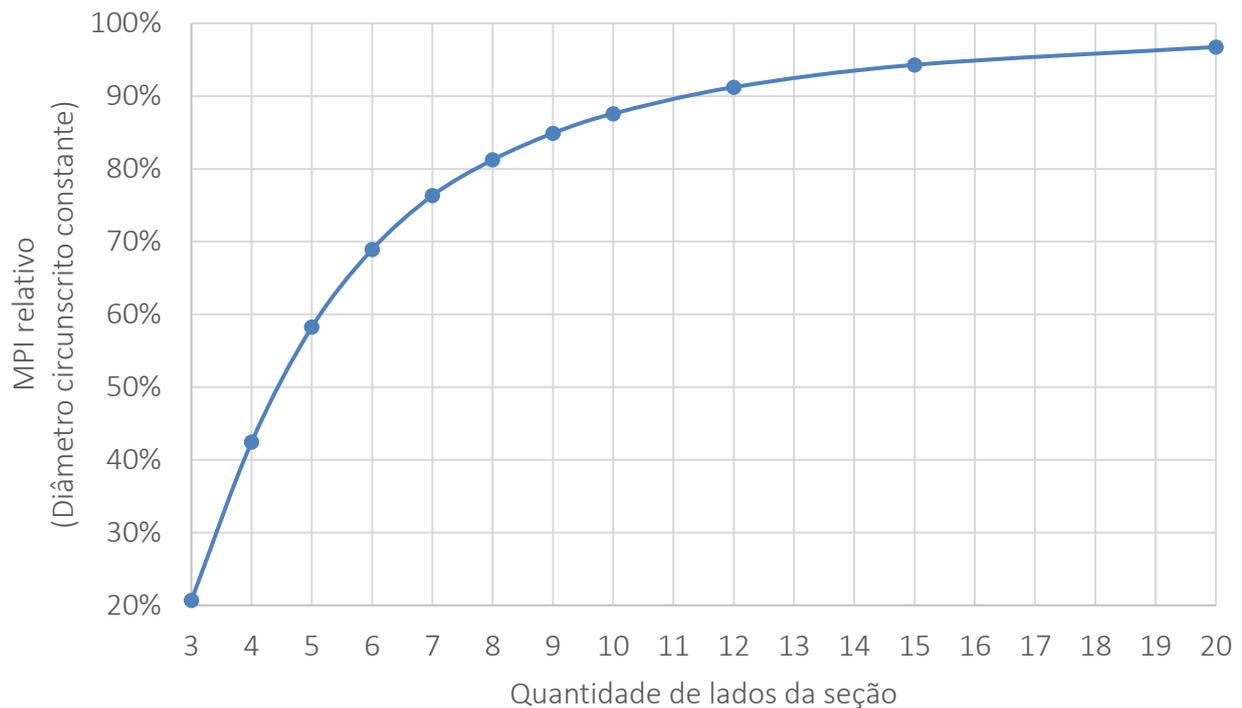
$$A_{\text{específica}} = A_A / A_B$$

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

O cenário 1 pode ser observado na Figura 3. Nesta é possível observar que o MPI relativo tende a aumentar conforme é elevado a quantidade de lados do polígono. O formato triangular apresentou um MPI relativo de 20,7%, o que implica que uma barra

circular maciça, que ao girar ocupe o mesmo espaço, tem um MPI quase que 5 vezes superior. No entanto, a taxa na qual o MPI relativo varia em função da quantidade de lados do polígono tende a reduzir conforme é aumentada a quantidade de lados do polígono, sendo um formato octogonal capaz de apresentar mais de 80% de MPI relativo. O que faz sentido visto que com o aumentar da quantidade de lados é elevada a área da seção e, portanto, a quantidade material utilizada.

Figura 3: Variação do MPI relativo em função da quantidade de lados de um polígono.



Acrescenta-se ainda, que o MPI relativo, que foi apresentado na Figura 3, funciona como fator para determinação de MPI de seções que tradicionalmente não são tabeladas por meio da Equação 4.

$$MPI_{Seção} = MPI_{circunscrito} \cdot MPI_{relativo} \quad (4)$$

Onde:

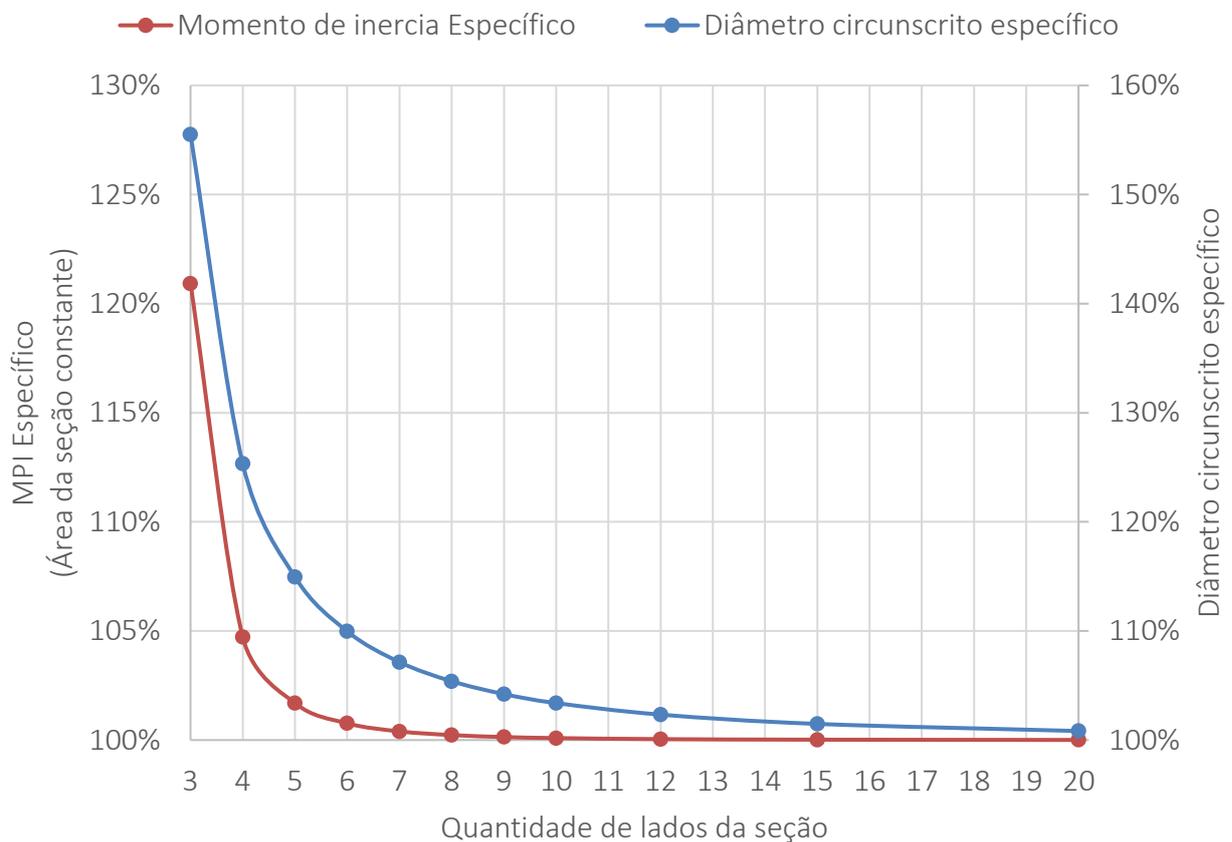
$MPI_{Seção}$: Momento polar de inércia de uma seção poligonal regular;

$MPI_{Circunscrito}$: Momento polar de inércia da seção que circunscribe o polígono;

$MPI_{Relativo}$: Fator obtido pela razão entre Momento polar de inércia polígono e o da seção que o circunscribe.

A Figura 4 apresenta o cenário 2, sendo neste possível observar que ao comparar barras maciças de mesma área que, quanto menor a quantidade de lados da seção, maior tende a ser seu MPI. Uma seção triangular, apresenta um MPI 20,9% superior que uma seção circular de mesma área. Contudo, a taxa na qual o MPI relativo é reduzido em função do aumento da quantidade de lados do polígono é exponencial. Assim, seções com mais de cinco lados com um MPI específico inferior a 101%. O que indica que ao comparar seções maciças de mesma área, os polígonos com uma menor quantidade de lados tendem a apresentar um maior MPI e, portanto, necessitariam de menos material para resistir a um mesmo esforço que uma seção circular. O que implicariam em vigas mais leves.

Figura 4: Variação do MPI relativo em função da quantidade de lados de um polígono

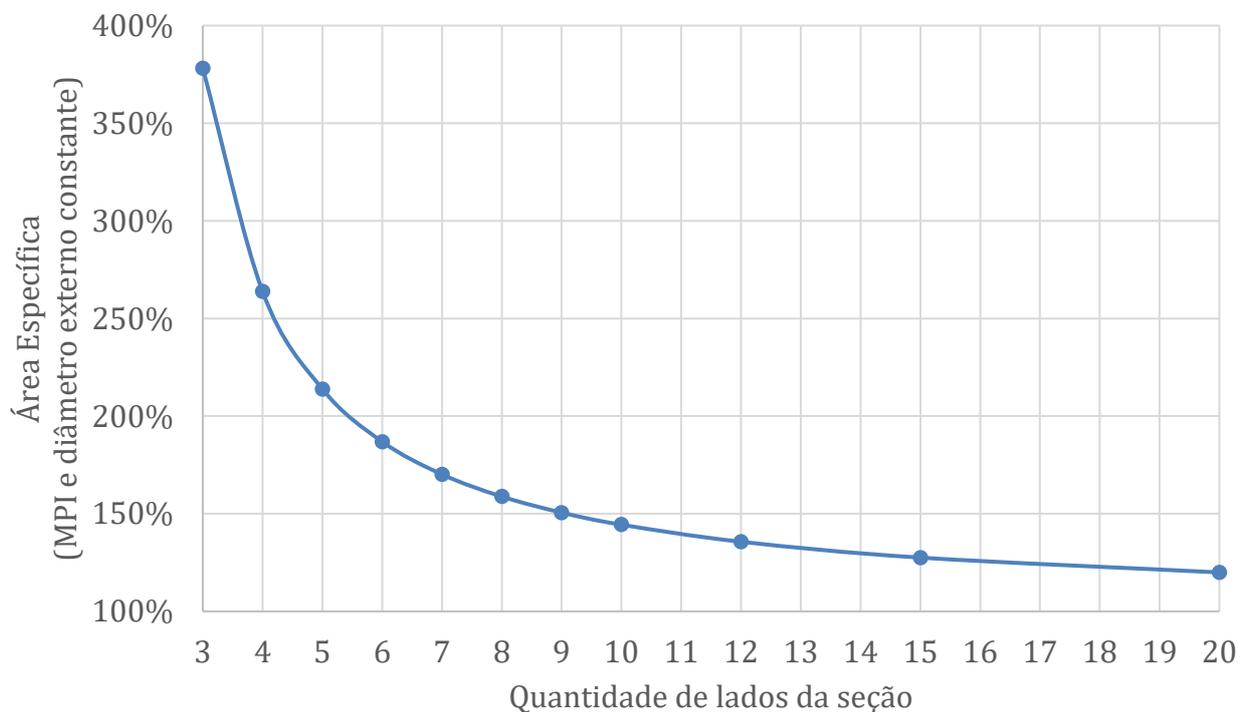


Contudo, também é possível observar que em contrapartida é exigido uma maior espaço para que a rotação deste elemento. O diâmetro que circunscribe uma seção triangular por exemplo, ocupa 56% maior que uma seção circular de mesma área. O que está em consonância com o cenário 1, que indicou que um elemento de seção circular é a que necessita de um menor espaço livre para rotação da mesma rotação.

Acrescenta-se ainda que o formato triangular, por exemplo, não é um formato convencional. Visto que em geral não é viável para usinagens produzir um prisma com base poligonal de qualquer lado a partir de uma barra cilíndrica, enquanto o contrário é um processo simples. Por exemplo, a fabricação de uma seção circular utilizando uma barra de seção quadrada pode ser realizada por um processo de torneamento.

Já a Figura 5 demonstrou que em um cenário onde as seções não necessitariam ser maciças, seções circulares ocas, mesmo que demandem de um mesmo espaço, necessitam de menos material para proporcionar um mesmo MPI. Área que uma seção triangular demanda, por exemplo, tem um MPI específico de 378%. Contudo, em conformidade ao que pode ser observado nos outros cenários, a diferença entre a propriedade avaliada tende a se reduzir conforme a seção avaliada possui mais lados, visto que a mesma se torna mais próxima de uma seção circular. Contudo, mesmo uma seção constituída de 20 lados necessita de uma quantidade significativa de material a mais, 20%. Fora que esta possuiria uma geometria complexa e de difícil fabricação.

Figura 5: Variação do MPI relativo em função da quantidade de lados de um polígono.



4 CONCLUSÃO

Tendo em vista os resultados, é visível que a variação da forma geométrica influencia diretamente a distribuição de massa na seção e conseqüentemente varia diretamente o momento polar de inercia.

No cenário 1, onde o espaço é restrito a uma determinada circunferência, pode-se observar que quanto mais lados possui um polígono, maior é o MPI.

No cenário 2, onde a área da seção é padronizada, observou-se que as seções com menores quantidades de lados possuem um maior MPI.

No cenário 3, onde o espaço é restrito e a barra circular de referência é vazada, pode-se observar que os perfis circulares vazados, com menos material, conseguem proporcionar o mesmo MPI que seções poligonais.

REFERÊNCIAS

AUTODESK. Software Inventor. Disponível em:
<<https://www.autodesk.com.br/products/inventor/overview>>. Acesso em: 9 set. 2021.

HIBBELER, R. C. Resistência dos materiais. 7. ed. São Paulo (SP): Pearson Education do Brasil, 2009.

Melconian, S. Mecânica Técnica e Resistência dos Materiais. Ed Érica, 1999.

MUNGUIA, J.; AKANDE, S.; DALGARNO, K. W. Compliant flexural behaviour in laser sintered nylon structures: Experimental test and Finite Element Analysis – correlation. *Materials & Design*, v. 54, p. 652–659, fev. 2014.

SCREMIN, A. Capítulo 10 - Momentos de Inércia. Universidade Federal do Paraná, 2009. Disponível em:
<http://ftp.demec.ufpr.br/disciplinas/TM227/Prof_Adriano/Notas%20de%20aula/Cap10.pdf>

TELEGIN, V. V.; KOZLOV, A. M.; SAKALO, V. I. Solid Modeling and Dynamic Analysis of Mechanisms of Press-forging Machines. *Procedia Engineering*, v. 206, p. 1258–1263, 2017.