

Eficiência dos métodos de Runge-Kutta de quarta ordem, Dormand-Prince e Bulirsch-Stoer na solução de problemas de valor inicial

Efficiency of fourth order Runge-Kutta, dormand-prince and Bulirsch-Stoer methods in solving initial value problems

DOI:10.34117/bjdv8n4-407

Recebimento dos originais: 21/02/2022

Aceitação para publicação: 31/03/2022

Marco Aurélio Amarante Ribeiro

Mestrado em Engenharia e Gestão de Processos e Sistemas

Instituição: Instituto de Educação Tecnológica – IETEC, Belo Horizonte, MG

Endereço: Rua Monte Sião 515/ap. 101 - Serra, CEP:30240-050, Belo Horizonte, MG
Brasil

E-mail: marcoaurelioamaranteribeiro@gmail.com

José Helvécio Martins

Ph.D. em Engenharia Agrícola pela Purdue University, Estados Unidos

Instituição: Instituto de Educação Tecnológica – IETEC, Belo Horizonte, MG

Endereço: Rua Didico Bonicontró, 93 – Fátima, CEP:36572-152, Viçosa – MG, Brasil
E-mail: j.helvecio.martins@gmail.com

Wanyr Romero Ferreira

Doutorado em Energia pela Université Paul Sabatier, Toulouse, França

Instituição: Instituto de Educação Tecnológica – IETEC, MG

Endereço: Rua Tomé de Souza, 1065 - Savassi, CEP:30140-138, Belo Horizonte, MG
Brasil

E-mail: wanyr@terra.com.br

RESUMO

Este artigo discute a eficiência dos métodos numéricos de Runge-Kutta clássico de quarta ordem, de Dormand-Prince e de Bulirsch-Stoer, na solução de problemas de valor inicial. Os três métodos foram comparados resolvendo-se um problema da dinâmica de suspensão de um veículo, quando ele passa sobre uma lombada na pista. O problema é descrito por uma equação diferencial ordinária de segunda ordem. Os resultados foram obtidos variando-se o tamanho do passo inicial igualmente para os três métodos e o comportamento da suspensão do veículo em resposta à elevação da lombada foi analisado para cada tamanho de passo. Concluiu-se que é essencial conhecer a natureza do problema a ser resolvido, para escolher adequadamente o método numérico e o tamanho do passo de integração a ser utilizado. Quanto mais alta a ordem do método de integração, maior a possibilidade de usar um tamanho de passo maior com precisão desejada. Portanto, o conhecimento da natureza do problema é fundamental para a escolha do método de solução e do tamanho do passo de integração para se obter resultados adequados.

Palavras-chave: métodos numéricos, equações diferenciais ordinárias, runge-kutta, dormand prince, bulirsch-stoer.

ABSTRACT

This article discusses the efficiency of the Runge-Kutta classical of fourth-order, Dormand-Prince and Bulirsch-Stoer numerical methods in solving initial value problems. The three methods were compared by solving a problem of the suspension dynamics of a vehicle when passing over a speed bump in the lane. The problem is described by a second order ordinary differential equation. Results were obtained by varying the initial step size equally for the three methods, and the behavior of the vehicle suspension in response to the speed bump height was analyzed for each step size. It was concluded that it is essential to know the nature of the problem to be solved, to properly choose the numerical method and the size of the integration step to be used. The higher the order of the integration method, the greater the possibility of using a larger step size with the desired precision. Therefore, knowledge of the nature of the problem is essential for choosing the solution method and the size of the integration step to obtain adequate results.

Keywords: numerical methods, ordinary differential equations, runge-kutta, dormand prince, bulirsch-stoer.

1 INTRODUÇÃO

Vários problemas encontrados nas ciências, particularmente em engenharia, podem ser resolvidos pela modelagem matemática que resulta, na maior parte, em equações diferenciais. Equações diferenciais ordinárias (EDO) são um subconjunto desse universo, que constituem a formulação de problemas de valor inicial de uma variedade de processos e sistemas. A solução desses problemas pode ser obtida pela solução das EDO que descrevem a dinâmica do sistema (GEAR, 1971, NAGLE; SAFF; SNIDER, 2018, DUTTA et al., 2020). Uma das ferramentas fundamentais para obter essas soluções são os métodos numéricos (LAPIDUS; SEINFELD, 1971, HULL et al., 2006, BISWAS; CHATTERJEE; MUKHERJEE, 2013, BRONSON; COSTA, 2014).

Uma das vantagens da modelagem de processos por meio de EDO é que elas podem ser resolvidas utilizando métodos de integração numérica, sem a necessidade de focalizar profundamente nos aspectos teóricos dos modelos matemáticos utilizados (STOER; BULIRSCH, 2002, QUARTERONI; SACCO; SALERI, 2007, PRESS et al., 2007).

Estudos de métodos de resolução de EDO mostraram, ao longo do tempo, que a maioria delas não podia ser resolvida apenas por integração simples ou por soluções analíticas (BRONSON; COSTA, 2014, NAGLE; SAFF; SNIDER, 2018). Em muitos casos, ou em sua maioria, tornou-se necessária a utilização de métodos numéricos para

obter uma solução aproximada, com acurácia desejada, utilizando-se algoritmos computacionais eficientes, possibilitando a solução de problemas complexos.

Os Métodos de resolução das EDO podem ser vistos como originados de modelos diferentes, o que facilita a compreensão do problema, e a computação está intimamente ligada à origem do problema e ao uso que será feito das respostas. Portanto, a modelagem e os métodos computacionais não são passos a serem dados separadamente da realidade e está inserido em um contexto mais amplo, que envolve a análise numérica. Neste contexto, um método numérico é uma ferramenta matemática projetada para resolver problemas numéricos e a sua implementação, com uma verificação de convergência apropriada, consiste na criação de um algoritmo numérico implementado em uma linguagem de programação ou em uma plataforma computacional (QUARTERONI; SACCO; SALERI, 2007, ZILL, 2018).

Dentre os primeiros métodos numéricos desenvolvidos, destaca-se os métodos de Euler (BOYER, 1996), que, devido à sua simplicidade, são utilizados para facilitar a compreensão dos conceitos envolvidos nos métodos de integração numérica, além de fornecer resultados satisfatórios para alguns problemas, sob certas condições e restrição (CORLESS, 2000, BISWAS et al., 2013, SHAMPINE).

Vários outros métodos foram desenvolvidos, que fornecem resultados mais precisos para problemas mais complexos, embora necessitem de algoritmos mais sofisticados e maior tempo computacional. Dentre os métodos numéricos clássicos mais modernos citam-se os métodos de Runge-Kutta, e seus aprimoramentos, e o método de Bulirsch-Stoer (BUTCHER, 2000, PRESS et al., 2007).

Vários trabalhos com aplicações de métodos numéricos para a solução dos mais variados tipos de problemas são encontrados na literatura. Entretanto, detalhamentos sobre o desenvolvimento e a fundamentação teórica desses métodos são encontrados em livros-textos clássicos (GEAR, 1971, NAGLE; SAFF; SNIDER, 2012, ZILL, 2018).

Artigos técnico-científicos sobre o tema são encontrados de maneira geral e apresentados em dissertações e teses e não contêm detalhamento teórico sobre os métodos utilizados na obtenção dos resultados. Entretanto, esses artigos servem como referência para comparação de resultados e validação de novas metodologias ou técnicas de abordagem para solução de novos problemas (VANANI; AMINATAEI, 2011, OBERLEITHNERA; PASCHEREITA; SORIAB, 2015, DUTTA et al., 2020; GHANBARI; BALEANU, 2020, HOSSEINI et al., 2020, BOSCH NETO et al., 2020).

Neste contexto, o presente artigo apresenta uma comparação da eficiência do método clássico de Runge-Kutta de quarta ordem, de Dormand-Prince e do método de Bulirsch-Stoer, na solução do problema da dinâmica de suspensão de um veículo.

2 REVISÃO DA LITERTURA

Um problema envolvendo equações diferenciais ordinárias, genericamente, é reduzido ao estudo de um conjunto de N equações diferenciais acopladas de primeira ordem para uma função y_i , $i = 1, 2, \dots, N$, expressa pela seguinte forma geral (PRESS et al., 2007):

$$\frac{dy_i(x)}{dx} = f'_i(x, y_1, \dots, y_N), \quad i = 1, \dots, N \quad (1)$$

As funções f'_i do lado direito na Equação (1) são conhecidas. A aspa (') aqui não significa derivar, mas apenas uma notação para lembrar que as funções f'_i são derivadas de $y_i(x)$.

Um problema envolvendo equações diferenciais ordinárias não é completamente definido pelas suas equações, porque depende da natureza das condições iniciais, crucial para determinar a melhor maneira de abordá-lo. Condições iniciais são condições algébricas dos valores da função $y_i(x)$ na Equação (1) que, em geral, podem ser satisfeitas em pontos discretos específicos, mas não são automaticamente preservadas pelas equações diferenciais (NAGLE; SAFF; SNIDER, 2012, PRESS et al., 2007, ZILL, 2018).

Ao invés de serem fornecidas as condições iniciais, podem ser apresentadas as condições de contorno junto com a equação, e podem ser tão simples quanto exigir que certas variáveis tenham determinados valores numéricos, ou tão complexas como um conjunto de equações algébricas não-lineares em suas variáveis. Normalmente, são as condições de contorno que determinam quais métodos numéricos são viáveis, e são divididas em duas grandes categorias (PRESS et al., 2007, NAGLE; SAFF; SNIDER, 2012, ZILL, 2018):

1) Problemas de valor inicial - neste caso, todos os $y_i(x)$ são dados para algum valor inicial x_0 , e deseja-se obter os y_i em algum ponto para algum valor final da variável independente, x_f , ou em alguma lista de pontos discretos;

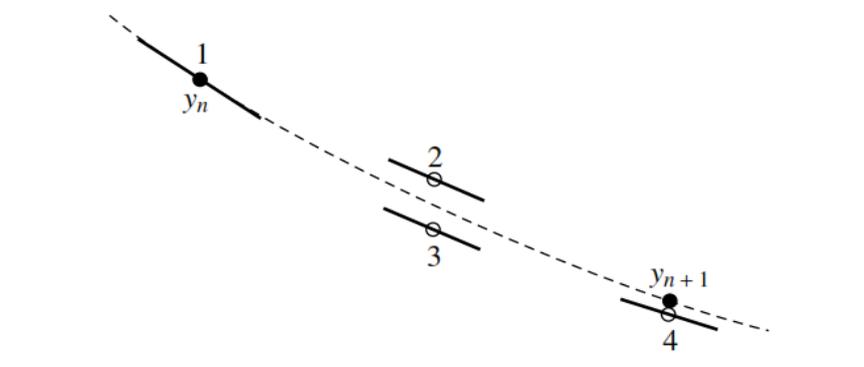
2) Problemas de valor no contorno em dois pontos - aqui as condições de contorno são especificadas em mais de um valor de x . Tipicamente, algumas das condições são especificadas em x_0 e as restantes em x_f .

2.1 MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM

O método de Runge-Kutta de quarta ordem é o mais popular dentre os métodos explícitos de um passo, descrito pela Equação (2). Sem entrar em detalhes, apresenta-se na Figura 1 uma ilustração esquemática desse método (PRESS et al., 2007, NAGLE; SAFF; SNIDER, 2012, ZILL, 2018).

$$\begin{aligned}
 k_1 &= h \cdot f(x_n, y_n) \\
 k_2 &= h \cdot f(x_n + 0,5 \cdot h, y_n + 0,5 \cdot k_1) \\
 k_3 &= h \cdot f(x_n + 0,5 \cdot h, y_n + 0,5 \cdot k_2) \\
 k_4 &= h \cdot f(x_n + h, y_n + k_3) \\
 y_{n+1} &= y_n + (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4)/6
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Figura 1. Ilustração esquemática do método de Runge-Kutta de quarta ordem.



Fonte: PRESS et al., 2007 (adaptado).

2.2 MÉTODO DE DORMAND-PRINCE

O método de Dormand-Prince de sete estágios, com estimativa de erro local e interpolador é apresentado em um quadro de Butcher (Quadro 1). A solução é avançada com y_{n+1} de ordem cinco, procedimento denominado de extrapolação local, e a solução \hat{y}_{n+1} de ordem quatro é usada para obter a estimativa de erro local por meio da diferença $y_{n+1} - \hat{y}_{n+1}$. De fato, \hat{y}_{n+1} não é calculado, ao invés disso, os coeficientes na linha $b^T - \hat{b}^T$ no quadro de Butcher são usados para obter a estimativa de erro local. A sexta constante (C_6) no termo de erro de ordem superior é minimizada, mantendo a

estabilidade. Seis estágios são necessários para o método de ordem 5 e para o sétimo estágio  necessário ter um interpolador, que é a última linha do Quadro 1 (ASHINO; NAGASE; VAILLANCOURT, 2000).

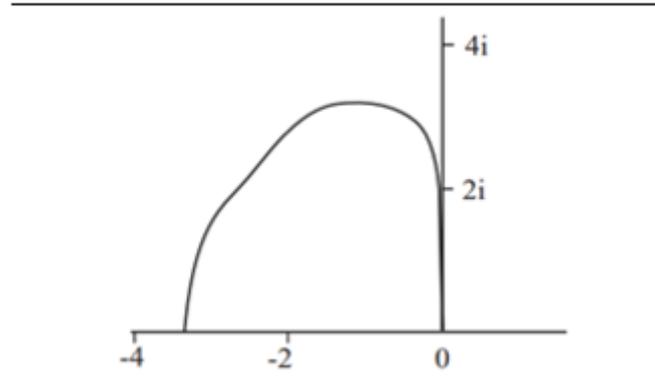
Esse método de sete estágios, na prática, se reduz a seis estágios porque $k_1^{[n+1]} = k_7^{[n]}$, e o vetor linha b^T é igual  sétima linha correspondente a k_7 . O intervalo de estabilidade absoluta desse método é, aproximadamente, $(-3,3, 0)$, como mostrado na Figura 2. Esse método está implementado em sub-rotinas computacionais em diversas plataformas, tais como MATLAB (ASHINO; NAGASE; VAILLANCOURT, 2000), OCTAVE e SCILAB.

Quadro 1. Quadro de Butcher para o método Dormand-Prince de Sete Estágios com Interpolador.

C		A				
k_1	0	0				
k_2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0			
k_3	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$	0		
k_4	$\frac{4}{5}$	$\frac{44}{45}$	$-\frac{56}{15}$	$\frac{32}{9}$	0	
k_5	$\frac{8}{9}$	$\frac{19372}{6561}$	$-\frac{25360}{2187}$	$\frac{64448}{6561}$	$-\frac{212}{729}$	0
k_6	1	$\frac{9017}{3168}$	$-\frac{355}{33}$	$\frac{46732}{5247}$	$\frac{49}{176}$	$-\frac{5103}{18656}$
k_7	1	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$
\hat{y}_{n+1}	\hat{b}^T	$\frac{5179}{57600}$	0	$\frac{7571}{16695}$	$\frac{393}{640}$	$-\frac{92097}{339200}$
y_{n+1}	b^T	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$
$b^T - \hat{b}^T$		$\frac{71}{57600}$	0	$-\frac{71}{16695}$	$\frac{71}{1920}$	$-\frac{17253}{339200}$
$y_{n+0.5}$		$\frac{5783653}{57600000}$	0	$\frac{466123}{1192500}$	$-\frac{41347}{1920000}$	$\frac{16122321}{339200000}$

Fonte: ASHINO; NAGASE; VAILLANCOURT, 2000 (Adaptado).

Figura 2. Região de estabilidade absoluta do método Dormand-Prince.



Fonte: ASHINO; NAGASE; VAILLANCOURT, 2000

2.3 MÉTODO DE BULIRSCH-STOER

Para entender esse método é preciso discutir o método do ponto médio modificado, que tem sua aplicação mais importante no Método de Bulirsh-Stoer. Outra técnica que pode ser combinada com o método de Bulirrsch-Stoer é a Extrapolação de Richardson. Uma breve discussão desses métodos é apresentada a seguir (STOER; BULIRSCH, 2002, PRESS et al., 2007)

2.3.1 Método do Ponto Médio Modificado

O método do ponto médio modificado consiste em avançar um vetor de variáveis dependentes, $y(x)$, de um ponto cuja abscissa é x para $x + H$ por uma sequência de n subpassos de tamanho h cada, dado pela Equação (3):

$$h = \frac{H}{n} \quad (3)$$

O número de avaliações do lado direito exigidas pelo método do ponto médio modificado é $n + 1$. As fórmulas para esse método são:

$$\begin{aligned} z_0 &= y(x) \\ z_1 &= z_0 + h \cdot f(x, z_0) \\ z_{m+1} &= z_{m-1} + 2h \cdot f(x + m \cdot h, z_m); & \text{para } m = 1, 2, \dots, n-1 \\ y(x + H) &\approx y_n \equiv \frac{1}{2} [z_n + z_{n-1} + h \cdot f(x + H, z_n)] \end{aligned} \quad (4)$$

As variáveis z são aproximações intermediárias que marcham ao longo dos passos h , enquanto y_n é a aproximação final de $y(x + H)$. Esse é um método basicamente de diferença centralizada ou ponto médio, exceto no primeiro e no último ponto, que conferem ao método o qualificador modificado.

O método do ponto médio modificado é de segunda ordem com a vantagem de exigir, assintoticamente, para n grande, apenas uma avaliação da derivada primeira por cada passo h , em vez das duas avaliações exigidas pelo método de Runge-Kutta de segunda ordem. Em geral, o uso do método do ponto médio modificado, por si só, é superado pelo método de Runge-Kutta com controle adaptativo de tamanho do passo incorporado.

A utilidade do método do ponto médio modificado para a técnica de Bulirsch-Stoer deriva do fato de obter, a partir da Equação (4), um resultado detalhado (STOER; BULIRSCH, 2002). Ocorre que o erro da Equação (4), expresso como uma série de potências de h , contém apenas potências pares de h :

$$y_n - y(x + H) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \cdot h^{2i} \quad (5)$$

O valor de H é mantido constante, mas o valor de h muda quando n varia na Equação (3). A importância dessas séries de potências pares é que, se forem aplicados os truques habituais de combinar etapas e eliminar termos de erro de ordem superior, podem-se obter mais duas ordens de precisão de cada vez. Esse processo permite que se obtenha precisão de maior ordem com menor número de avaliações da função derivada, em geral mens da metade das avaliações relação ao método de Runge-Kutta de quarta ordem (PRESS et al., 2007).

2.3.2 Extrapolação de Richardson

A extrapolação de Richardson usa a poderosa ideia de extrapolar um resultado computado para o valor que teria sido obtido se o tamanho do passo tivesse sido muito menor do que realmente era. Em particular, a extrapolação para passo de tamanho zero é o objetivo desejado. O primeiro integrador prático de EDOs que implementou essa ideia foi desenvolvido por Bulirsch e Stoer e, portanto, os métodos de extrapolação são, frequentemente, chamados de Métodos de Bulirsch-Stoer (PRESS et al., 2007).

2.4 FORMULAÇÃO DO MÉTODO DE BULIRSCH-STOER

A sequência de tentativas separadas para cruzar o intervalo H é feita com o aumento do número de subpassos, n . Bulirsch e Stoer propuseram, originalmente, a seguinte sequência (PRESS et al., 2007):

$$n = 2, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 64, 96, \dots, [n_j = 2n_{j-2}], \dots \quad (6)$$

De acordo com Deuffhard (1983, 1985) a seguinte sequência era mais eficiente:

$$n = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots, [n_j = 2j], \dots \quad (7)$$

Nessa sequência, para cada etapa, não se sabe, antecipadamente, onde ela irá parar. Depois de cada passo intermediário, n , sucessivo, uma extrapolação polinomial é realizada. Essa extrapolação fornece valores extrapolados e estimativas de erro. Se os valores dos erros não forem satisfatórios, aumenta-se o valor de n . Se forem satisfatórios, prossegue-se para o próximo passo e começa-se novamente com $n = 2$ (PRESS et al., 2007).

Existe algum limite superior, além do qual conclui-se que existe algum obstáculo no caminho ao longo do intervalo H , de modo que devesse reduzir H em vez de apenas subdividi-lo mais finamente, porque ocorre perda de precisão se for escolhido uma subdivisão muito fina. Nas implementações de algoritmo usando esse método, geralmente, considera-se n igual a oito. O oitavo valor na sequência expressa pela Equação (7) é 16, que é o número máximo de subdivisões de H permitido (PRESS et al., 2007).

O controle de erros é reforçado, monitorando-se a consistência interna e adaptando-se o tamanho do passo para corresponder a um limite prescrito do erro de truncamento local. O controle de erros está representado no Quadro 2 por uma espécie de algoritmo genético, expresso na forma da Equação (8), em que P representa uma “filha” e x representa os seus “pais”.

Quadro 2. Representação simbólica do algoritmo de Neville.

$x_0:$	$y_0 = P_0$				
$x_1:$	$y_1 = P_1$	P_{01}			
$x_2:$	$y_2 = P_2$	P_{12}	P_{012}		
$x_3:$	$y_3 = P_3$	P_{23}	P_{123}	P_{0123}	(8)

O algoritmo de Neville é uma maneira recursiva de preencher os números no Quadro 2, uma coluna de cada vez, da esquerda para a direita. É com base no relacionamento entre uma "filha" P e seus "pais" x , conforme Equação (9), que essa recorrência funciona, porque os dois "pais" já concordam nos pontos $x_{i+1} \cdots x_{i+m-1}$.

$$P_{i(i+1)\dots(i+m)} = \frac{(x - x_{i+m})P_{i(i+1)\dots(i+m-1)} + (x_i - x)P_{(i+1)(i+2)\dots(i+m)}}{(x_i - x_{i+m})} \quad (9)$$

Cada novo resultado da sequência de integrações modificadas do ponto médio permite que um quadro, como o Quadro 2, seja estendido por um conjunto adicional de diagonais, escrito como uma matriz triangular inferior, expressa pela Equação (10):

$$\begin{matrix} T_{00} \\ T_{10} & T_{11} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} \\ \dots & \dots & \dots \end{matrix} \quad (10)$$

Em que $T_{k0} = y_k$, e $y_k = y(x_n + H)$ calculado com o tamanho do passo $h_k = H/n_k$. Substituindo-se $P = T$, $x_i = h_i^2$, e $x = 0$ na Equação (10), o algoritmo de Neville pode ser reescrito como:

$$T_{k,j+1} = T_{kj} + \frac{T_{kj} - T_{k-1,j}}{(n_k/n_{k-j})^2 - 1}, \quad \forall j = 0, 1, \dots, k-1 \quad (11)$$

A cada novo tamanho de passo h_i inicia-se uma nova linha na tabela e, em seguida, a extrapolação polinomial preenche o restante da linha. Cada novo elemento na tabela vem dos dois elementos mais próximos da coluna anterior. Os elementos na mesma coluna têm a mesma ordem, e T_{kk} , o último elemento de cada linha, é a aproximação de

mais alta ordem de precisão com esse tamanho de passo. A diferença entre os dois últimos elementos consecutivos é considerada como estimativa de erro (conservadora). Essa estimativa de erro pode ser usada para ajustar o tamanho do passo. Uma boa estratégia foi, originalmente, proposta por Deuffhard (1983, 1985), e posteriormente modificada, cujo detalhamento pode ser obtido na literatura (LAPIDUS; SEINFELD, 1971, HAIRER; WANNER; NØRSETT, 1993, STOER; BULIRSCH, 2002, PRESS et al., 2007).

3 METODOLOGIA

3.1 MODELO DO SISTEMA DE SUSPENSÃO DE UM VEÍCULO

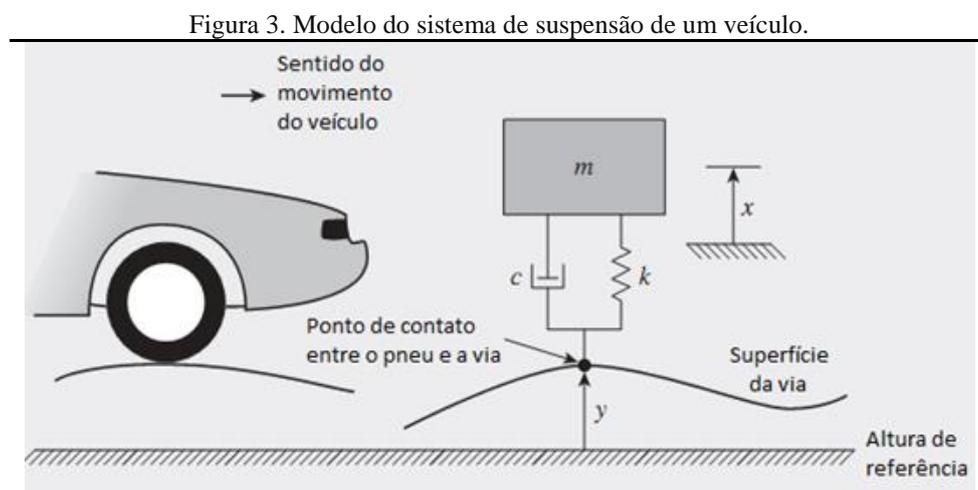
A modelagem da suspensão de um veículo pode ser realizada considerando o veículo passando sobre uma lombada. A força que a lombada exerce sobre a suspensão é descrita pela expressão:

$$F_s(t) = a \cdot y(t) + b \cdot \frac{dy(t)}{dt} \quad (12)$$

em que

- $F_s(t)$ = Força sobre a suspensão, [N];
- $y(t)$ = Deslocamento provocado pela superfície da via, [m];
- a = Constante;
- b = Constante.

O modelo de suspensão do veículo, considerando um quarto do seu tamanho por simetria, é representado na Figura 3.



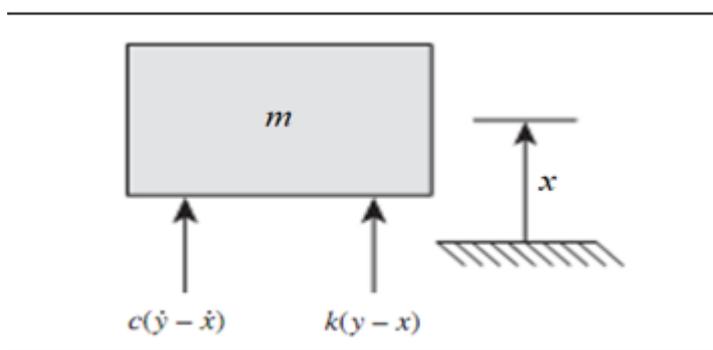
Fonte: ÇENGEL; PALM III, 2014 (Adaptado).

No modelo simplificado, as massas da roda, do pneu e do eixo são desprezadas e, por simetria, a massa m representa um quarto da massa do veículo. A constante da mola k representa uma combinação dos efeitos do pneu e da mola da suspensão. A constante c representa a constante de amortecimento do amortecedor. A posição de equilíbrio da massa m , quando $y = 0$, é $x = 0$.

O deslocamento provocado pela superfície da via, $y(t)$, pode ser obtido a partir do perfil da superfície da via e da velocidade do veículo. A equação do movimento do veículo é obtida por meio do diagrama de corpo livre, mostrado na Figura 4, considerando somente a força dinâmica, porque a força estática é cancelada pela força gravitacional:

$$m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2} + c \cdot \frac{dx(t)}{dt} + k \cdot x(t) = k \cdot y(t) + c \cdot \frac{dy(t)}{dt} \quad (13)$$

Figura 4 - Diagrama de corpo livre, assumindo que $dy/dt > dx/dt$ e $y > x$.



Fonte: ÇENGEL; PALM III, 2014 (Adaptado).

3.2 SIMULAÇÃO DA RESPOSTA DO VEÍCULO À ELEVAÇÃO DE UMA LOMBADA

A resposta de um veículo à elevação de uma dada lombada com altura h e comprimento L , movendo-se a uma velocidade v , pode ser simulada resolvendo a equação diferencial do movimento, Equação (13). Para isto é necessário o perfil da elevação da lombada, nesse caso, dado por (ÇENGEL; PALM III, 2012):

$$y(z(t)) = 5,4366 \cdot z(t) \cdot \exp(-4 \cdot z(t)) \quad (14)$$

em que

- $y(z(t))$ = Perfil da elevação da lombada, [m];
- z = Distância horizontal percorrida pelo veículo sobre a elevação, [m];

O deslocamento $y(t)$ sentido pela suspensão está relacionado com $y(z(t))$, por meio da velocidade, em que $z(t) = v(t) \cdot t$. Substituindo-se $z(t)$ na Equação (14) obtém-se:

$$y(t) = 97,859 \cdot t \cdot \exp(-72 \cdot t) \tag{15}$$

Para este trabalho utilizaram-se os dados contidos na Tabela 1. Combinando a Equação (14) com a Equação (15) e substituindo os dados contidos na Tabela 1, obtém-se a equação do movimento para este problema:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{5.000}{240} \cdot \frac{dx(t)}{dt} + \frac{16.000}{240} \cdot x(t) = \left[\frac{489.290 - (33.663.152) \cdot t}{240} e^{-72 \cdot t} \right] \tag{16}$$

Tabela 1. Dados utilizados na solução do problema.

Parâmetro	Descrição	Valor	Unidade
m	Massa do veículo	240	[kg]
c	Constante de amortecimento	5.000	[N · s/m]
k	Constante elástica da mola	16.000	[N/m]
v	Velocidade do veículo	18	[m/s]
h	Altura da lombada	0,5	[m]
L	Comprimento da lombada	1,0	[m]

Trata-se de um problema de valor inicial de segunda ordem, portanto a solução da Equação (16) foi realizada usando os métodos de Runge-Kutta de quarta ordem e Dormand-Prince (BUTCHER, 2000, ASHINO; NAGASE; VAILLANCOURT, 2000) e de Bulirsch-Stoer (STOER; BULIRSCH, 2002, PRESS et al., 2007), transformando-a em um sistema de duas equações de primeira ordem da forma:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = c_1 \cdot x_2 + c_2 \cdot x_1 + f(x) \end{cases} \tag{17}$$

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados do tempo computacional e as estimativas finais da solução encontram-se na Tabela 2, para vários valores do passo de integração, para os métodos

de Runge-Kutta de ordem 4, Dormand-Prince e Bulirsch-Stoer. A variação do tempo computacional em função do tamanho do passo encontra-se na Figura 5.

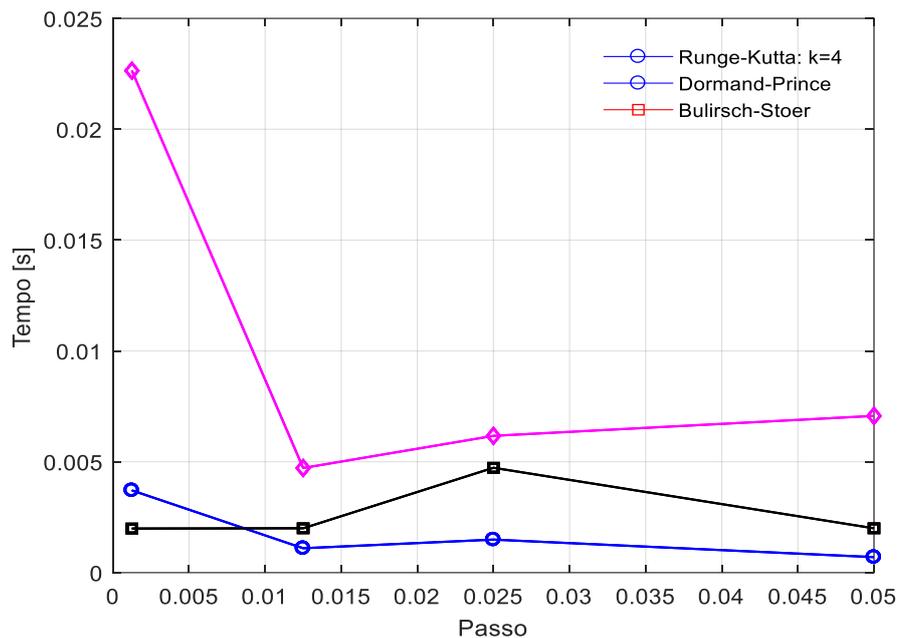
Tabela 2. Tempo computacional e estimativas finais da solução do problema do sistema de suspensão de um veículo.

Passo	Tempo Computacional, [s]*		
	<i>RK4</i>	<i>DP</i>	<i>BS</i>
$h = 0,05000$	0,00070	0,00200	0,00707
$h = 0,02500$	0,00149	0,00473	0,00617
$h = 0,01250$	0,00110	0,00200	0,00472
$h = 0,00125$	0,00371	0,00199	0,02264

Passo	Estimativa Final		
	<i>RK4</i>	<i>DP</i>	<i>BS</i>
$h = 0,05000$	$1,0355 \times 10^{-1}$	$9,3881 \times 10^{-4}$	$9,3304 \times 10^{-4}$
$h = 0,02500$	$9,7124 \times 10^{-3}$	$9,3881 \times 10^{-4}$	$9,3304 \times 10^{-4}$
$h = 0,01250$	$1,5333 \times 10^{-3}$	$9,3881 \times 10^{-4}$	$9,3304 \times 10^{-4}$
$h = 0,00125$	$9,3310 \times 10^{-4}$	$9,3881 \times 10^{-4}$	$9,3304 \times 10^{-4}$

RK4: Runge-Kutta, ordem 4; *DP*: Dormand-Prince; *BS*: Bulirsch-Stoer

Figura 5. Tempo computacional da solução do problema do sistema de suspensão de um veículo em função do tamanho do passo de integração.



Observa-se, na Figura 5, que o comportamento do tempo computacional em relação ao tamanho do passo não apresentou uma tendência funcional bem definida. Não foi possível, neste trabalho, encontrar uma explicação razoável para essa aleatoriedade, embora se cogite que possa ser um efeito do estado transitório do processador do computador utilizado, influenciado por algum evento eletromagnético. O que foi

constatado, efetivamente, foi a obtenção de valores de tempo de processamento diferente para o mesmo problema, quando se repete o processamento.

Observa-se, todavia, que o tempo computacional do método de Runge-Kutta de quarta ordem, em geral, foi o menor e para o método de Bulirsh-Stoer foi o maior, com o método de Dormand-Prince em posição intermediária, mas todos apresentaram resultados coerentes. Por outro lado, esses resultados dependem da natureza do problema em relação ao método utilizado. Portanto, para um problema diferente esses resultados podem ser completamente opostos. As soluções finais estão representadas graficamente nas Figuras 6, 7, 8 e 9.

Figura 7. Soluções numéricas do problema de sistema de suspensão de um veículo, usando o método de Runge-Kutta de quarta ordem ($k = 4$), com passo fixo, e os métodos de passo adaptativo de Dormand-Prince e de Bulirsch-Stoer, com $h = 0,025$.

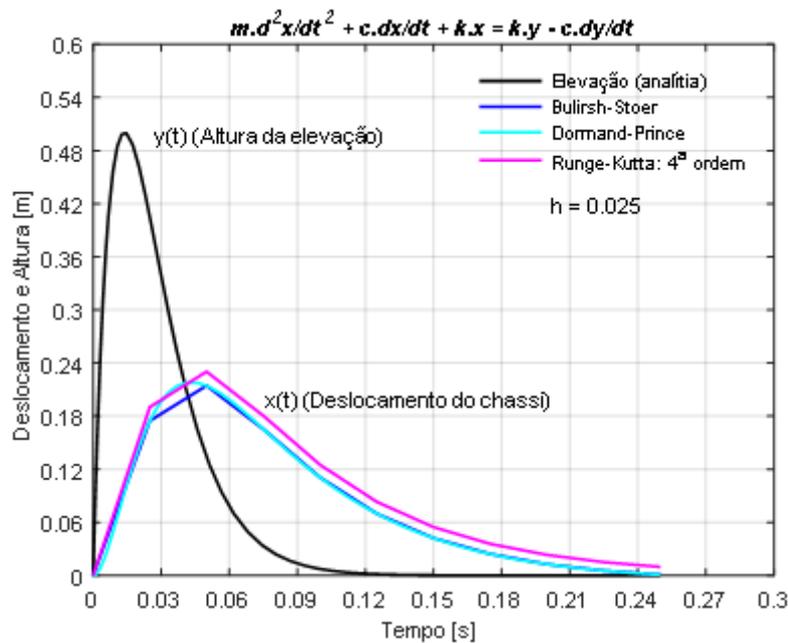


Figura 8. Soluções numéricas do problema de sistema de suspensão de um veículo, usando o método de Runge-Kutta de quarta ordem ($k = 4$), com passo fixo, e os métodos de passo adaptativo de Dormand-Prince e de Bulirsch-Stoer, com $h = 0,0125$.

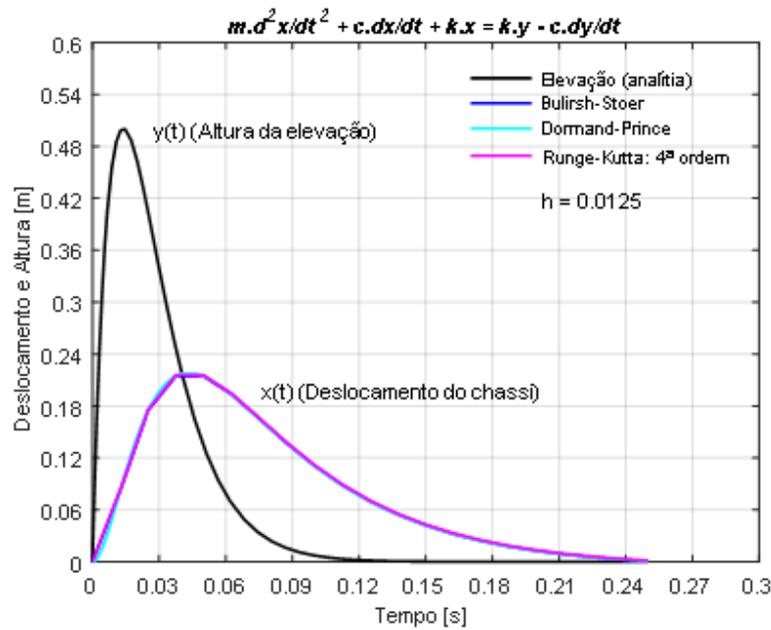
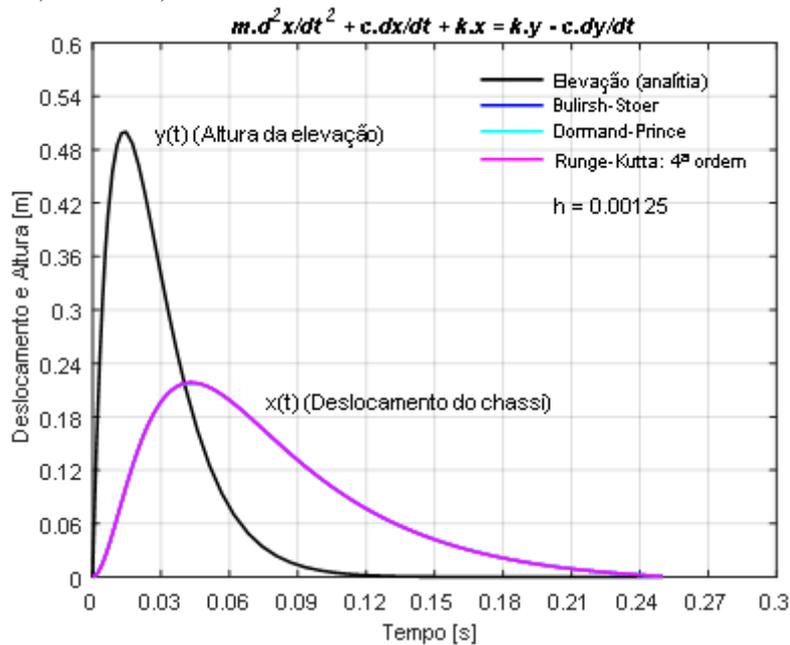


Figura 9. Soluções numéricas do problema de sistema de suspensão de um veículo, usando o método de Runge-Kutta de quarta ordem ($k = 4$), com passo fixo, e os métodos de passo adaptativo de Dormand-Prince e de Bulirsch-Stoer, com $h = 0,00125$.



Observa-se nas Figuras 6 a 9 que, para todos os métodos, houve uma melhora na precisão das respostas do deslocamento do chassi do veículo em função do tempo, com a

diminuição do passo de integração. Todavia, observa-se que o método de Dormand-Prince apresentou, praticamente, a mesma resposta, independentemente do tamanho do passo de integração. Portanto, esse método, depende muito pouco do passo de integração inicial, por causa do processo de adaptação do tamanho do passo. Nesse problema, os métodos de Runge-Kutta de quarta ordem e de Bulirsch-Stoer apresentaram soluções viáveis somente para $h < 0,01$, no domínio $0 \leq t \leq 0,25$.

5 CONCLUSÕES

É essencial conhecer a natureza do problema a ser resolvido, para escolher adequadamente o método numérico e o tamanho do passo de integração a ser utilizado. Quanto mais alta a ordem do método de integração, maior a possibilidade de usar um tamanho de passo maior com precisão desejada.

O método de Dormand-Prince apresentou, praticamente, a mesma resposta, independentemente do tamanho do passo de integração. Portanto, esse método, depende muito pouco do passo de integração inicial, por causa do processo de adaptação do tamanho do passo.

Os métodos com algoritmo de adaptação do passo, como os métodos de Bulirsch-Stoer e Dormand-Prince, são pouco sensíveis ao tamanho inicial do passo porque estes são modificados ao longo do processo para manter a precisão.

Em geral, todos os tipos de métodos podem ser aplicados a qualquer problema de valor inicial, cada um deles com seu próprio conjunto de prós e contras, que deve ser entendido antes de serem usados.

Em todos os métodos numéricos, geralmente, a precisão aumenta com a diminuição do tamanho do passo, principalmente nos métodos de passo fixo. Portanto, os métodos de passo adaptativo como os métodos de Dormand-Prince e Bulirsch-Stoer, em geral, fornecem estimativas mais precisas, desde que usados de forma adequada.

Portanto, conclui-se que o conhecimento da natureza do problema é fundamental para a escolha do método de solução e do tamanho do passo de integração para se obter resultados adequados.

REFERÊNCIAS

ASHINO, R.; NAGASE, M.; VAILLANCOURT, R. Behind and Beyond the MATLAB ODE Suite. CRM-2651. January, 2000.

BISWAS, B. N.; CHATTERJEE, S.; MUKHERJEE, S. P.; PAL, S. A Discussion on Euler Method: A Review. *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications* Vol. 1(2) July 2013, pp. 294-317. ISSN: 2090-792X (online) <http://ejmaa.6te.net/>.

BOSCH NETO, J. C.; BARROS, J. E. M.; ARTUR, A. P. S.; ABREU, B. M. P. N.; PARREIRA, C. C. A. Emissions simulation by coupling chemical equilibrium and reduced kinetics for gasoline/ethanol mixture in IC engines. *Braz. J. of Develop.*, Curitiba, v. 6, n. 10, p.76926-76946, oct. 2020. ISSN 2525-8761.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. 2^a ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.

BRONSON, R.; COSTA, G. B. *Differential Equations*. Fourth Edition, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Education, 2014. 385p.

BUTCHER, J. C. Numerical methods for ordinary differential equations in the 20th century. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, V. 25, Issues 1–2, 15 December, 2000, p. 1-29.

ÇENGEL, Y. A.; PALM III, W. J. *Differential Equations for Engineers and Scientists*. McGraw-Hill Education, 2012. 611p.

DEUFLHARD, P. Order and stepsize control in extrapolation methods. *Numerische Mathematik*, 41(3): p.399–422. 1983. doi:10.1007/BF01418332, ISSN 0029-599X.

DEUFLHARD, P. *SIAM Review*, v. 27, pp. 505–535. 1985.

DUTTA, H; GÜNERHAN, H.; ALI, K. K.; YILMAZER, R. Exact Soliton Solutions to the Cubic-Quartic Non-linear Schrödinger Equation with Conformable Derivative. *Mathematical and Statistical Physics, Frontiers in Physics*, March 2020. <https://doi.org/10.3389/fphy.2020.00062>.

GEAR, C. W. *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*. New York: Prentice Hall, 1971.

GHANBARI, B.; BALEANU, D. New Optical Solutions of the Fractional Gerdjikov-Ivanov Equation with Conformable Derivative. *Mathematical and Statistical Physics, Frontiers in Physics*, May 2020. <https://doi.org/10.3389/fphy.2020.00167>.

HAIRER, E.; WANNER, G.; NØRSETT, S. P. *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. Springer Series in Computational Mathematics, Berlin, Heidelberg, 1993. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-78862-1>.

HOSSEINI, K.; MIRZAZADEH, M.; OSMAN, M. S.; AL QURASHI, M.; BALEANU, D. Solitons and Jacobi Elliptic Function Solutions to the Complex Ginzburg–Landau Equation. *Mathematical and Statistical Physics, Frontiers in Physics*, June 2020. <https://doi.org/10.3389/fphy.2020.00225>.

HULL, T. E., ENRIGHT, W. H., FELLEN, B. M., SEDGWICK, A. E. Comparing numerical methods for ordinary differential equations. *Journal on Numerical Analysis*, 9(4). SIAM, p.603–637, 2006. <https://doi.org/10.1137/0709052>.

LAPIDUS, L.; SEINFELD, J. H. *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*. New York: Academic Press. 1971.

NAGLE, R. K.; SAFF, E. B.; SNIDER, A. D. *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems*. Sixth Edition, Addison-Wesley, Pearson Education, Boston, MA, USA, 2012. 810p.

OBERLEITHNER, K.; PASCHEREITA, C. O.; SORIAB, J. Stability analysis of time-averaged jet flows: fundamentals and application. Elsevier. IUTAM-ABCM Symposium on Laminar Turbulent Transition, *Procedia IUTAM*, Vol. 1, 2015. p.141–146.

PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.; FLANNERY, B. P. Section 17.3. Richardson Extrapolation and the Bulirsch-Stoer Method. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing* (3rd ed.). New York: Cambridge University Press. 2007. ISBN 978-0-521-88068-8.

QUARTERONI, A.; SACCO, R.; SALERI, F. *Numerical Mathematics*. Texts in Applied Mathematics, Springer, 2007. 654p.

SHAMPINE, L. F.; CORLESS, R. M. Initial value problems for ODEs in problem solving environments. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 125, p.31–40, Elsevier, 2000.

STOER, J.; BULIRSCH, R. *Introduction to Numerical Analysis*, 3rd ed. New York: Springer, Chapter 7, 2002.

VANANI, S. K.; AMINATAEI, A. Numerical solution of differential algebraic equations using a multiquadric approximation scheme. Elsevier. *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 53, N. 5–6, p. 659-666. 2011. <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2010.10.002>.

ZILL, D. G. *Differential Equations with Boundary Value Problems*. Ninth Edition, CENGAGE Learning, Boston, MA, USA, 2018. 522p.