

## **Efeitos da discretização do método das diferenças finitas na solução da equação da onda**

### **Effects of finite difference method discretization on the solution of the wave equation**

DOI:10.34117/bjdv7n10-339

Recebimento dos originais: 25/09/2021

Aceitação para publicação: 25/10/2021

#### **Christie de Vilhena Prata Machado**

Graduanda em Engenharia Civil pela Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Escola Politécnica – Centro de Tecnologia – Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Endereço: Avenida Athos da Silveira Ramos, 149 – Edifício do Centro de Tecnologia –  
Bloco A, 2º andar – Cidade Universitária – Rio de Janeiro, RJ – Brasil  
E-mail: christievpmachado@poli.ufrj.br

#### **Magnus Carvalho de Vilhena Prata**

Graduando em Engenharia Civil pela Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Escola Politécnica – Centro de Tecnologia – Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Endereço: Avenida Athos da Silveira Ramos, 149 – Edifício do Centro de Tecnologia –  
Bloco A, 2º andar – Cidade Universitária – Rio de Janeiro, RJ – Brasil  
E-mail: magnus.prata@poli.ufrj.br

#### **Raphael Vieira Menezes de Souza**

Doutor em Engenharia Civil pela COPPE/UFRJ  
Laboratório de Métodos de Modelagem e Geofísica Computacional – LAMEMO–  
COPPE/UFRJ  
Endereço: Avenida Pedro Calmon s/nº – Prédio Anexo ao Centro de Tecnologia –  
Cidade Universitária – Rio de Janeiro, RJ – Brasil  
E-mail: raphaelphmat@gmail.com

#### **Webe João Mansur**

Doutor em Engenharia Civil pela Universidade de Southampton, Inglaterra  
Laboratório de Métodos de Modelagem e Geofísica Computacional – LAMEMO–  
COPPE/UFRJ  
Endereço: Avenida Pedro Calmon s/nº – Prédio Anexo ao Centro de Tecnologia –  
Cidade Universitária – Rio de Janeiro, RJ – Brasil  
E-mail: webe@coc.ufrj.br

### **RESUMO**

A equação da onda tem sido utilizada ao longo dos anos em diversas aplicações em engenharia e geofísica. O fenômeno físico de propagação de ondas é modelado por meio dessa equação, que tem sido uma ferramenta vital nas atividades exploratórias de bacias sedimentares que buscam hidrocarbonetos, uma vez que o método da sísmica de reflexão é um dos mais utilizados para esses fins (KEAREY, A., 2009). Esse método consiste em criar um campo de ondas, oriundo de uma fonte pontual, que se propaga pela subsuperfície terrestre, de modo que a energia desse pulso é particionada nas interfaces entre as camadas de impedâncias acústicas diferentes. Dessa forma, parte da energia é

refletida e ascende até ser lida na superfície e a outra parte segue descendente até encontrar outra interface e assim ter sua energia particionada novamente (TARANTOLA, A., 1984). É a partir dos dados registrados em superfície que a indústria do petróleo consegue utilizar técnicas de imageamento para recuperar as propriedades de subsuperfície, utilizadas para localizar as reservas de hidrocarbonetos. A acurácia dessas técnicas de imageamento, que em sua maioria consiste na resolução de problemas inversos, depende da precisão e estabilidade dos métodos utilizados na modelagem da propagação de ondas, e é nesse contexto que este trabalho está inserido. O presente trabalho aborda a modelagem no domínio do tempo da propagação de ondas, utilizando o Método das Diferenças Finitas (MDF), e busca, por meio de diferentes experimentos numéricos, avaliar os efeitos da escolha de diferentes discretizações espaciais e temporais do operador do MDF na obtenção da solução da equação da onda em modelos geológicos com diferentes dimensões.

**Palavras-Chave:** MDF, Equação Da Onda, Modelagem.

### **ABSTRACT**

The wave equation has been used over the years in various applications in engineering and geophysics. The physical phenomenon of wave propagation is modeled through this equation, which has been a vital tool in the exploratory activities of sedimentary basins that seek hydrocarbons, since the seismic method of reflection is one of the most used for these purposes (KEAREY, A., 2009). This method consists of creating a wave field, originating from a point source, which propagates through the terrestrial subsurface, so that the energy of that pulse is partitioned into the interfaces between the layers of different acoustic impedances. Thus, part of the energy is reflected and ascends until it is read on the surface and the other part continues downwards until it finds another interface and thus has its energy partitioned again (TARANTOLA, A., 1984). It is from the surface data that the oil industry can use imaging techniques to recover the subsurface properties used to locate hydrocarbon reserves. The accuracy of these imaging techniques, which mostly consists of solving inverse problems, depends on the accuracy and stability of the methods used in the modeling of wave propagation, and it is in this context that this work is inserted. The present work approaches the modeling in the time domain of wave propagation, using the Finite Differences Method (MDF), and seeks, through different numerical experiments, to evaluate the effects of the choice of different spatial and time discretizations of the MDF operator in obtaining the solution of the wave equation in geological models with different dimensions.

**Keywords:** MDF, Wave Equation, Modeling.

## **1 INTRODUÇÃO**

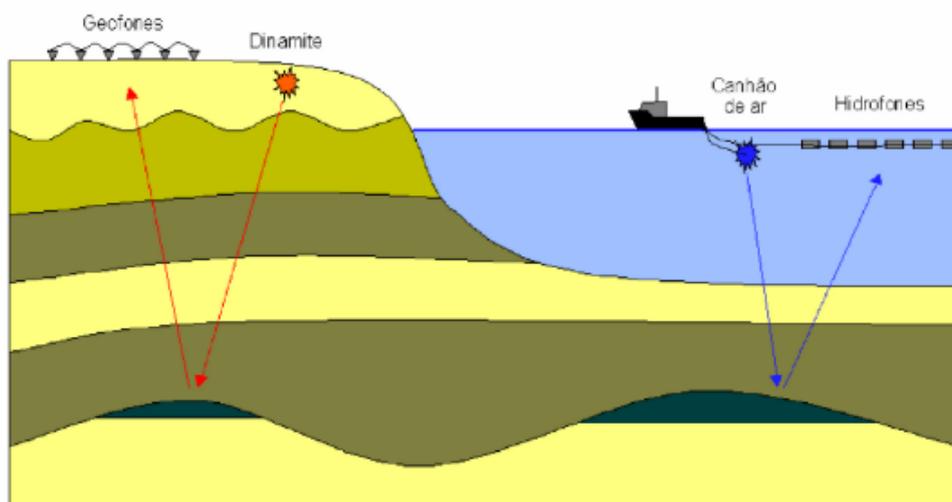
Atividades exploratórias de hidrocarbonetos possuem um papel de extrema importância mundial. Como os reservatórios de petróleo localizam-se no subsolo, muitas das vezes no fundo dos oceanos a profundidades extremamente elevadas, se faz necessário a realização de um levantamento geofísico para se mapear o subsolo a fim de descobrir as características dele e a localização das reservas de hidrocarbonetos. Outras

finalidades importantes da modelagem da subsuperfície são a definição dos melhores locais para a perfuração de novos poços e a avaliação dos reservatórios já encontrados para que possam ser mais bem explorados (DI BARTOLO, 2010; SOUZA, 2018). Existem inúmeros métodos para explorar uma bacia sedimentar, dentre eles, o método mais utilizado é o da sísmica de reflexão, que utiliza uma fonte de energia artificial para geração de ondas (SILVA et al., 2009).

O método da sísmica de reflexão consiste em criar um campo de ondas, oriundo de uma fonte pontual como a dinamite em terra ou canhão de ar comprimido no mar, criando-se assim, um campo de ondas que gera uma perturbação controlada, que se propaga pela subsuperfície terrestre, interagindo com o meio de estudo, e produzindo reflexões que são captadas e registradas por aparelhos, geofones (em terra) e hidrofones (meio marinho), conhecidos como receptores, como mostra a Figura 1.1. Cada receptor registra um chamado traço sísmico, e o conjunto dos traços sísmicos é chamado sismograma. Essas informações são então processadas, resultando na descrição das estruturas presentes na subsuperfície (SILVA et al., 2009).

A seguir é ilustrado o método sísmico de reflexão:

Figura 1.1 – Ilustração do método sísmico de reflexão.



Fonte: (SILVA et al., 2009).

Na fase de processamento dos dados sísmicos, será criada uma imagem das camadas de material presentes em subsuperfície. A acurácia dessas técnicas de imageamento, que em sua maioria consiste na resolução de problemas inversos, depende da precisão e estabilidade dos métodos utilizados na modelagem da propagação de ondas,

e é nesse contexto que este trabalho está inserido.

Para que seja possível realizar a modelagem da propagação de ondas é preciso resolver a equação da onda. Em geral, se utiliza métodos numéricos para se obter a solução aproximada dessas equações diferenciais. Entre os métodos mais conhecidos tem-se: Método das Diferenças Finitas (MDF), Método dos Elementos Finitos (MEF) e Método dos Elementos de Contorno (MEC). O grande avanço na capacidade de processamento dos computadores possibilitou que hoje em dia os métodos numéricos consigam resolver problemas que envolvam equações diferenciais mais complicadas e modelos mais complexos (THOMAS, 2013).

O MDF é amplamente utilizado em diversas áreas do conhecimento, como transferência de calor, mecânica dos fluidos e propagação de ondas, tanto acústicas, quanto elásticas, sendo amplamente utilizado na área de geofísica, devido à simplicidade de formulação e implementação computacional.

O presente trabalho aborda a modelagem no domínio do tempo da propagação de ondas, utilizando o MDF, e busca, por meio de diferentes experimentos numéricos, avaliar os efeitos da escolha de diferentes discretizações espaciais do operador do MDF na obtenção da solução da equação da onda em modelos geológicos com diferentes dimensões.

## 2 DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

Equações diferenciais são instrumentos matemáticos usados para calcular a evolução de sistemas. A modelagem tem como objetivo encontrar a dinâmica temporal do sistema que se tem interesse, isto é, determinar a taxa de variação com o tempo das grandezas que caracterizam o problema. Ao se resolver a equação diferencial (ou sistema de equações diferenciais) que caracteriza o processo de propagação da onda, pode-se prever o seu comportamento. Sendo assim, a modelagem de um sistema de propagação de onda em um conjunto de equações diferenciais fornecerá uma descrição aproximada e simplificada do processo real (THOMAS, 2013).

A equação diferencial da onda é amplamente utilizada na modelagem. A equação (1) expressa a equação geral da onda, que descreve a propagação da onda acústica em todas as direções, considerando que o meio possua uma densidade ( $\rho$ ) constante ou que ela varie suavemente, de tal modo que seja possível simplificar a equação.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p = s(x, y, t), \quad (1)$$

onde  $c$  é a velocidade de propagação do meio,  $p$  é o campo de pressão,  $t$  é o tempo,  $\nabla$  é o gradiente e  $s(x, y, t)$  representa a fonte sísmica.

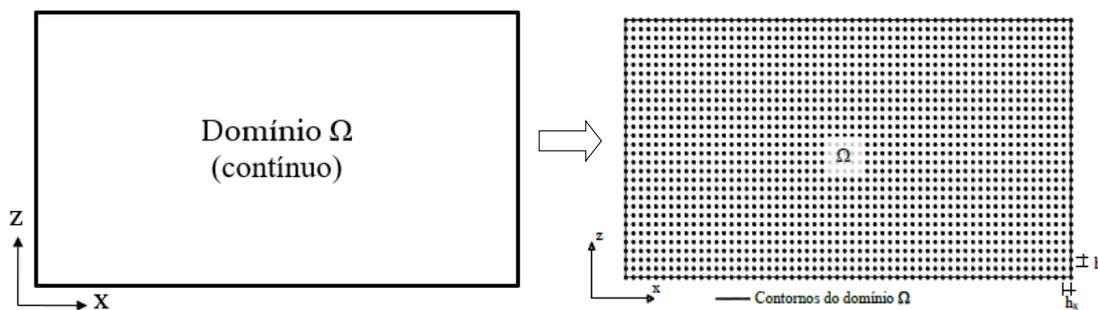
No presente trabalho, foi utilizada uma fonte sísmica do tipo Ricker, que é representada por:

$$F_{Ricker}(x, t) = \begin{cases} (1 - 2\pi^2 f_p^2 t^2) \exp(-\pi^2 f_p^2 t^2) & \text{se } x = x_0, \\ 0 & \text{se } x \neq x_0 \end{cases}, \quad (2)$$

onde  $x$  é a variável do espaço,  $t$  é a variável do tempo,  $f_p$  é a frequência de pico e  $x_0$  é a posição inicial.

Para resolver numericamente a equação (1), aplica-se então o MDF para se obter a solução aproximada da equação diferencial. Para isso, se faz necessário a discretização do meio, passando então a considerar o domínio físico do problema (domínio contínuo) como sendo um domínio discreto (domínio aproximado) representado por um conjunto finito de pontos regularmente espaçados (grid ou grade), como mostra a figura 2.1. Como as funções/variáveis e propriedades de interesse são consideradas apenas nestes pontos discretos, o método calcula uma solução aproximada, sendo mais acurada a solução quanto mais pontos o grid conter.

Figura 2.1 – Discretização do domínio.



Através do meio discretizado é possível que as derivadas da equação diferencial que se deseja aproximar, sejam numericamente equilibradas em pontos discretos do domínio. A aproximação das derivadas espaciais e temporais pode ser feita a partir da expansão da série de Taylor truncada, usando pontos vizinhos em diferenças ponderadas. Para isso, a série de Taylor é rearranjada de modo a isolar a derivada da ordem da qual se deseja aproximar. Isso permite obter a ordem do erro de aproximação, fazendo com que seus resultados sejam tão precisos quanto o desejado. Esse motivo faz com que o Método

da Diferenças Finitas apresente acurácia muito superior em comparação aos outros métodos de modelagem sísmica. Cabe observar que quanto maior a ordem de aproximação, mais pontos serão considerados no cálculo e em consequência maior custo computacional em termos de memória e tempo de processamento (SANTOS; FIGUEIRÓ, 2006). Por exemplo, para a aproximação da derivada segunda com erro de aproximação de 4ª ordem para a derivada espacial tem-se as expressões (6) e (7), já para a aproximação da derivada segunda com erro de aproximação de 2ª ordem para a derivada temporal tem-se a expressão (8). Neste trabalho, foi utilizado o erro de 2ª ordem na derivada segunda do tempo e um erro de 4ª ordem na derivada segunda do espaço.

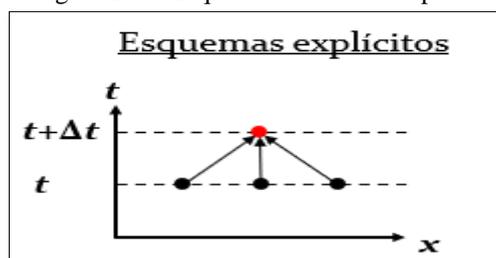
$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \frac{-f(x + 2\Delta x) + 16f(x + \Delta x) - 30f(x) + 16f(x - \Delta x) - f(x - 2\Delta x)}{12(\Delta x)^2} + O(\Delta x^4), \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} = \frac{-f(z + 2\Delta z) + 16f(z + \Delta z) - 30f(z) + 16f(z - \Delta z) - f(z - 2\Delta z)}{12(\Delta z)^2} + O(\Delta z^4), \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} = \frac{f(t + \Delta t) - 2f(t) + f(t - \Delta t)}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2). \quad (5)$$

Tratando-se de algoritmos de integração temporal, existem dois tipos: o método explícito e o método implícito. Para o presente trabalho, optou-se pelo uso do método explícito por ele não necessitar da resolução dos sistemas algébricos ou inversão de matrizes, melhorando assim sua eficiência computacional (DI BARTOLO, 2010). Nesse método, a equação de equilíbrio é expressa no instante  $t$  e sua solução é calculada no instante  $t + \Delta t$ , isso permite calcular a solução em  $t + \Delta t$  usando um esquema iterativo, como ilustrado na figura 2.1. A desvantagem do método explícito é que ele é condicionalmente estável, ou seja, os valores de  $\Delta t$  e  $\Delta x$  são limitados para que se possa garantir que a solução atenda aos critérios de estabilidade e dispersão. O método implícito por sua vez, necessita da resolução dos sistemas algébricos, mas é incondicionalmente estável, ou seja, possui solução estável para qualquer valor de  $\Delta t$  e  $\Delta x$ .

Figura 2.2 – Esquema do método explícito.



O critério de dispersão numérica, um dos focos de estudo deste trabalho, está associado ao espaçamento  $\Delta x$  e  $\Delta y$  da malha/grade adotado. Segundo Irshad R. Mufti, para que o critério da dispersão seja atendido o valor limite de  $\Delta x$  deve satisfazer a seguinte relação:

$$\Delta x \leq \frac{V_{\min}}{N \cdot f_{\text{corte}}}, \quad (6)$$

onde  $V_{\min}$  é a velocidade mínima do meio,  $f_{\text{corte}}$  é a frequência de corte da fonte e  $N$  assume o valor de 10 quando usado operador de 2ª ordem e 5 quando o operador for de 4ª ordem.

Por sua vez, o critério de estabilidade numérica está associado ao esquema de integração temporal e está relacionado ao tamanho do passo de tempo  $\Delta t$ . Para que esse critério seja atendido no caso 2D, tem-se que a expressão a seguir deve ser satisfeita.

$$\frac{V_{\max} \cdot \Delta t}{\Delta x} \leq \sqrt{\frac{3}{8}}, \quad (7)$$

onde  $V_{\max}$  é a velocidade máxima do meio.

#### 4 DESENVOLVIMENTO NUMÉRICO/IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

No presente trabalho, serão analisados casos com diferentes  $\Delta x$  e  $\Delta t$  no intuito de verificar se os valores dos limites teóricos de  $\Delta x$  e  $\Delta t$  realmente são os limites dos critérios da dispersão e estabilidade, respectivamente. Para isso, foi desenvolvido um programa em linguagem Fortran para realizar a modelagem de propagação de ondas.

O problema possui as condições iniciais de repouso apresentadas nas equações (8) e (9), e o domínio possui condições de contorno do tipo não reflexivas para as bordas laterais e inferior e para a borda superior condição de pressão nula, como expressas pelas equações (10), (11), (12) e (13), respectivamente.

Condições iniciais de repouso:

$$u(x, t = 0) = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial u(x, t = 0)}{\partial t} = 0 \quad (9)$$

Condições de contorno não reflexivas das bordas laterais:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v(x)} \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x = 0, t) = 0 \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v(x)} \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x = L, t) = 0 \quad (11)$$

Condição de contorno não reflexiva da borda inferior:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v(z)} \frac{\partial}{\partial t}\right) u(z = L, t) = 0 \quad (12)$$

Condição de contorno da borda superior:

$$u(z = 0, t) = 0 \quad (13)$$

O meio de propagação da onda, que possui dimensões  $(301 \times 301)m$ , foi considerado homogêneo (água), possuindo velocidades de propagação máximas ( $V_{máx}$ ) e mínimas ( $V_{mín}$ ) iguais ao valor de  $1500m/s$ . A fonte utilizada possui frequência ( $f_{corte}$ ) de  $25Hz$  e está situada no nó central do modelo.

#### 4.1 CRITÉRIO DA DISPERSÃO

Foi determinado o limite teórico do critério da dispersão numérica ( $\Delta x_{limite\ teórico}$ ), expresso na equação (34). Como foi utilizado um erro de 4ª ordem na derivada segunda do espaço, adota-se  $N=5$ . Portanto:

$$\Delta x \leq \frac{V_{mín}}{N \cdot f_{corte}} \rightarrow \Delta x \leq \frac{1500}{5 \times 25} \rightarrow \Delta x \leq 12m \quad (34)$$

Dessa forma, tem-se que  $\Delta x_{limite\ teórico} = 12m$ , ou seja, para valores superiores a esse a solução já começaria a gerar dispersão numérica.

Para se verificar o limite da dispersão de forma experimental ( $\Delta x_{limite\ exp.}$ ) e avaliar os efeitos da escolha de valores acima desse limite, o programa foi testado usando os valores de  $\Delta x = \Delta x_{limite\ teórico} = 12m$  e  $\Delta x = 20m$ , utilizando para esses casos o  $\Delta t_{limite\ teórico}$  respectivo para cada um dos  $\Delta x$ . Para esses exemplos foi analisado o perfil da onda gerada com o propósito de encontrar a manifestação da dispersão.

## 4.2 CRITÉRIO DA ESTABILIDADE

Para a análise do critério da estabilidade numérica determinou-se algebricamente o limite teórico do  $\Delta t$  ( $\Delta t_{\text{limite teórico}}$ ) para  $\Delta x$  pré-estabelecidos. Dessa forma, foram escolhidos os valores de  $\Delta x = 10m$  e  $\Delta x = \Delta x_{\text{limite teórico}} = 12m$ , que satisfazem o critério da dispersão. Nas equações (15) e (16) estão representados os valores dos limites teóricos de  $\Delta t$  encontrados para cada um dos casos:

$$\Delta t \leq \frac{10}{1500} \cdot \sqrt{\frac{3}{8}} \rightarrow \Delta t \leq 0,00408248290463863016366214012451s \quad (15)$$

$$\Delta t \leq \frac{12}{1500} \cdot \sqrt{\frac{3}{8}} \rightarrow \Delta t \leq 0,00489897948556635619639456814941s \quad (16)$$

Tem-se que, para os  $\Delta x$  utilizados, os  $\Delta t_{\text{limite teórico}}$  são os valores expressos acima, de modo que para valores superiores a eles, segundo a literatura, a solução já deveria apresentar instabilidade numérica.

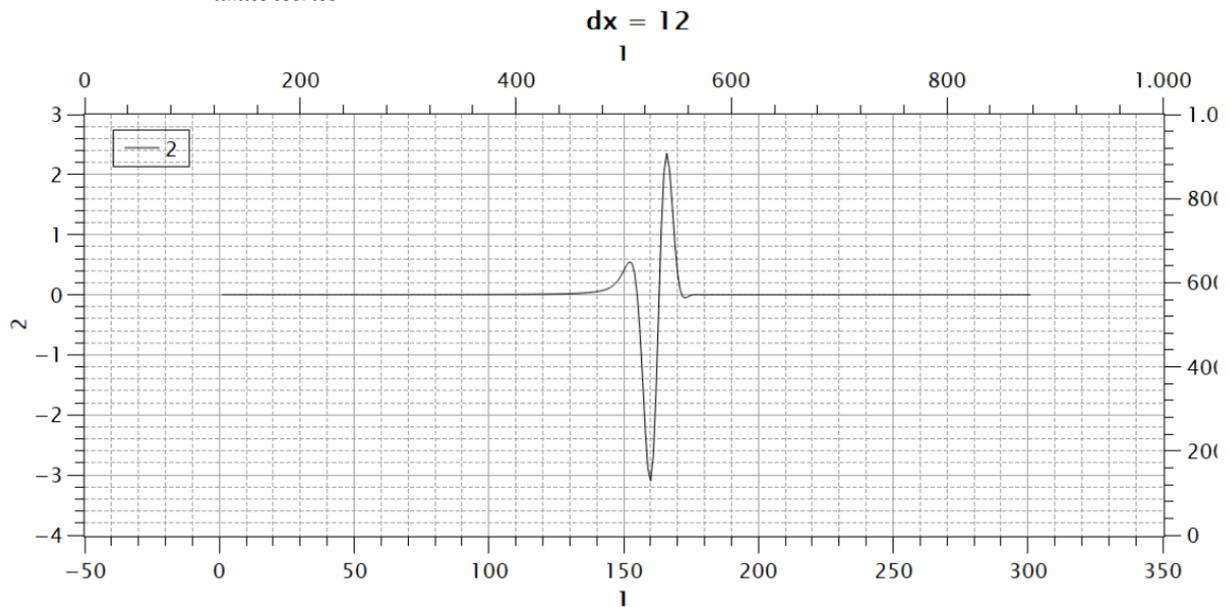
Para se verificar empiricamente o limite do critério da estabilidade numérica experimental ( $\Delta t_{\text{limite exp.}}$ ) foram testados valores acima dos  $\Delta t_{\text{limite teórico}}$ , presentes nas equações (15) e (16), no intuito de identificar a partir de quais valores de  $\Delta t$  iniciavam-se as instabilidades.

## 5 RESULTADOS

### 5.1 CRITÉRIO DA DISPERSÃO

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos com os experimentos numéricos abordados no item anterior. O primeiro experimento consiste no teste com  $\Delta x = 12m$ , onde o  $\Delta t$  utilizado foi o correspondente  $\Delta t_{\text{limite teórico}} = 0,00489897948556635619639456814941s$ . Através da figura 4.1.1, é possível perceber que o perfil da onda gerada no meio do modelo não apresentou dispersão quando utilizado o  $\Delta x = 12m = \Delta x_{\text{limite teórico}}$ , atendendo ao critério da dispersão.

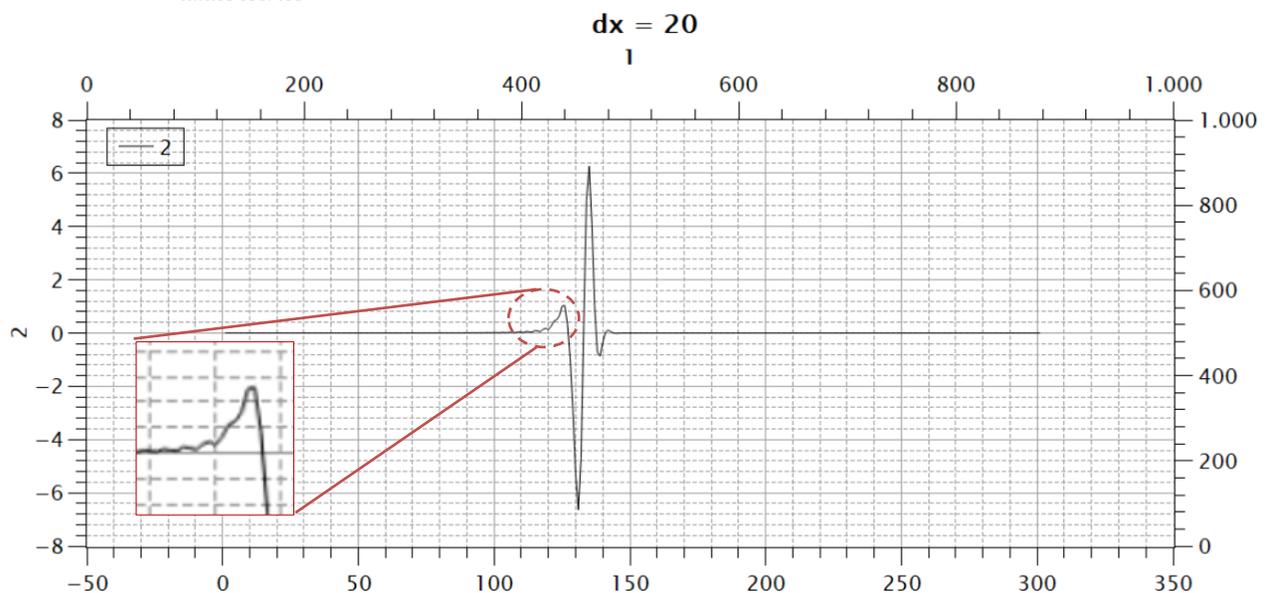
Figura 4.1.1. – Perfil da onda no meio do modelo sem a presença de dispersão numérica, quando utilizado  $\Delta x = 12m$  e  $\Delta t_{limite\ te\acute{o}rico} = 0,00489897948556635619639456814941s$ .



Já para o teste utilizando  $\Delta x = 20m$  e seu correspondente  $\Delta t_{limite\ te\acute{o}rico}$ , presente na equação (17), notou-se a presença de um “serrilhado” no perfil da onda, caracterizando a ocorrência de dispersão numérica. A figura 4.1.2 mostra o perfil da onda gerada no meio do modelo com a presença de dispersão numérica.

$$\Delta t \leq \frac{20}{1500} \cdot \sqrt{\frac{3}{8}} \rightarrow \Delta t \leq 0,00816496580927726032732428024902s \quad (17)$$

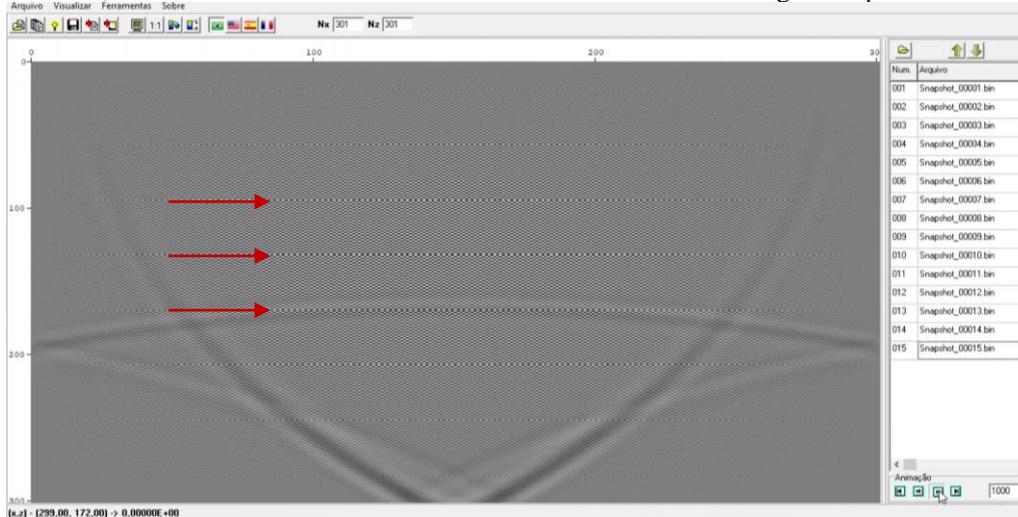
Figura 4.1.2 – Perfil da onda no meio do modelo com a presença de dispersão numérica, quando utilizado  $\Delta x = 20m$  e  $\Delta t_{limite\ te\acute{o}rico} = 0,00816496580927726032732428024902s$ .



## 5.2 CRITÉRIO DA ESTABILIDADE

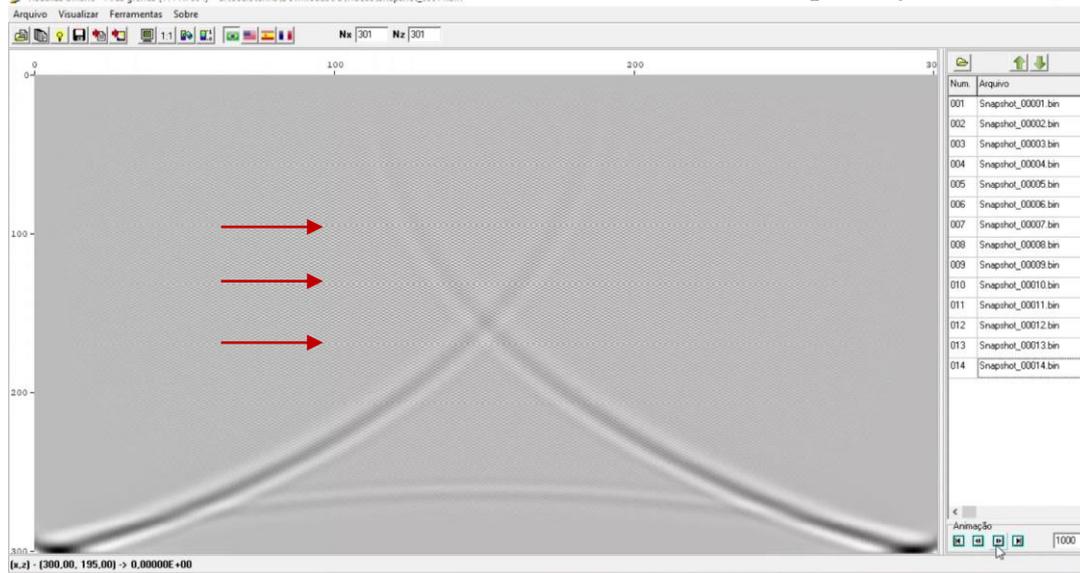
Para o caso em que foi usado  $\Delta x = 10m$  e seu correspondente  $\Delta t_{limite\ te\acute{o}rico} = 0,00408248290463863016366214012451s$ , percebeu-se que a solução comea a apresentar instabilidade quando a sétima casa decimal aumentou de 4 para 9, ou seja, valores iguais ou superiores a  $\Delta t = 0,0040829s$  passaram a apresentar instabilidade numérica. O aumento dos valores das casas decimais posteriores à sétima casa decimal não foi suficiente para gerar instabilidade. A figura 4.2.1 é do *snapshot* gerado pelo programa após 3s de propagação da onda, e através dele é possível ver o início da instabilidade, manifestado pela formação de linhas horizontais no centro da imagem.

Figura 4.2.1 – *Snapshot* após 3s de propagação da onda, com início da instabilidade numérica para  $\Delta x = 10m$  e  $\Delta t = 0,0040829s$ . As setas vermelhas indicam as linhas horizontais geradas pela instabilidade.



Quando utilizado o  $\Delta x = 12m$  com o seu correspondente  $\Delta t_{limite\ te\acute{o}rico} = 0,00489897948556635619639456814941s$ , percebeu-se que apenas quando a sexta casa decimal foi aumentada de 8 para 9, e a sétima casa decimal assumiu o valor de 7, que se verificou instabilidade numérica. Dessa forma, valores iguais ou superiores a  $\Delta t = 0,0048997s$  passaram a apresentar instabilidade numérica. O aumento dos valores das casas decimais posteriores à sétima casa decimal não foi suficiente para gerar instabilidade. A figura 4.2.2 é do *snapshot* gerado pelo programa após 2,8s de propagação da onda, e através dele é possível ver o início da instabilidade, manifestado pela formação de linhas horizontais no centro da imagem.

Figura 4.2.2 – Snapshot após 2,8s de propagação da onda, com início da instabilidade numérica para  $\Delta x = 12m$  e  $\Delta t = 0,0048997s$ . As setas vermelhas indicam as linhas horizontais geradas pela instabilidade.



## 6 CONCLUSÕES

A partir dos diversos experimentos numéricos realizados foi possível verificar que o  $\Delta x_{limite\ teórica} = 12m$  não apresentou dispersão numérica, condizente com o sugerido pela literatura. Porém, os experimentos numéricos indicam que o  $\Delta x_{limite\ experimental}$  pode ser maior do que o  $\Delta x_{limite\ teórica} = 12m$ . Assim, é necessário a implementação de um algoritmo que possibilite determinar o início da dispersão numérica de forma mais acurada.

Quanto aos limites de  $\Delta t$  fornecidos pela literatura, foi verificado que eles são condizentes com os valores encontrados nos testes, uma vez que os valores de  $\Delta t_{limite\ experimental}$  são próximos o suficiente dos valores de  $\Delta t_{limite\ teórica}$ .

Para  $\Delta x = 10m$ :

$$\Delta t_{limite\ teórica} = 0,00408248290463863016366214012451s \approx \Delta t_{limite\ experimental} = 0,0040829s$$

Para  $\Delta x = 12m$ :

$$\Delta t_{limite\ teórica} = 0,00489897948556635619639456814941s \approx \Delta t_{limite\ experimental} = 0,0048997s$$

Assim, a partir das verificações que constam no presente trabalho se conclui que a adoção dos limites de  $\Delta x$  e  $\Delta t$  fornecidos pela literatura resulta em soluções que atendem aos critérios da dispersão e estabilidade.

## REFERÊNCIAS

BELÉM, A. N. Caracterização bidimensional de canais rádio através de diferenças finitas no domínio do tempo. Dissertação de Mestrado. UFMG, 2001.

DI BARTOLO, L. Modelagem sísmica anisotrópica através do método das diferenças finitas utilizando sistemas de equações de segunda ordem. Tese de Doutorado. COPPE/UFRJ, 2010.

KEAREY, P. ; BROOKS, M. ; HILL, I. Geofísica de exploração. Oficina de Textos, 2009.  
MUFTI, I. R. Large-scale three-dimensional seismic models and their interpretive significance. *Geophysics*, v. 55, n. 9, p. 1116–1182, 1990.

PETERS, F. C. Técnicas de parametrização e estabilização para o problema da recuperação de propriedades físicas da subsuperfície por meio de dados sísmicos. Tese de Doutorado. COPPE/UFRJ, 2014.

SANTOS, R. H. M. ; FIGUEIRÓ, W. M. Modelagem acústica bidimensional usando diferentes parametrizações de campos de velocidades. *Revista Brasileira de Geofísica*, v. 24, p. 103–105, 2006.

SILVA, M. W. X. et al. Migração reversa no tempo utilizando diferentes condições de imagem. 11th International Congress of the Brazilian Geophysical Society, p. 1570–1574, 2009.

SOUZA, R. V. M. Técnica de regularização baseada no índice de incoerência geológica para inversão de dados sísmicos. Tese de Doutorado. COPPE/UFRJ, 2018.

TARANTOLA, A. Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation. *Geophysics*, v. 49, n. 8, p. 1259–1266, 1984.

THOMAS, L. R. O uso de equações diferenciais na modelagem de sistemas naturais e outros. Trabalho de Conclusão de Curso - Licenciatura em Ciências Naturais. UnB, 2013.