

Métrica Induzida da Correntropia Complexa Comparada ao NESTA no Problema de Amostragem Compressiva

Induced Complex Correntropy Metric Compared to NESTA on the Compressive Sampling Problem

DOI:10.34117/bjdv7n4-210

Recebimento dos originais: 04/02/2021

Aceitação para publicação: 01/03/2021

João P. F. Guimarães

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte (IFRN)
E-mail: joao.guimaraes@ifrn.edu.br

Aluisio I. R. Fontes

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte (IFRN)
E-mail: aluisio.rego@ifrn.edu.br

Felipe B. da Silva

University of Texas at El Paso (UTEP)
E-mail: fbdasilva@miners.utep.edu

Ricardo von Borries

University of Texas at El Paso (UTEP)
E-mail: rvonborries@utep.edu

Allan de M. Martins

Universidade Federal do Rio Grande do Norte
E-mail: allan@dca.ufrn.br

RESUMO

Esse artigo compara ao algoritmo de Nesterov (NESTA) o desempenho da métrica induzida da correntropia complexa (*Complex Correntropy Induced Metric - CCIM*) enquanto uma aproximação de 10 num problema de amostragem compressiva. As simulações mostram que a CCIM é capaz de reconstruir um vetor esparsos complexo usando menos medidas do que o NESTA.

Palavras chave: Amostragem Compressiva, Correntropia Complexa, Dados Complexos, NESTA

ABSTRACT

This paper compares to Nesterov's algorithm (NESTA) the performance of the Complex Correntropy Induced Metric (CCIM) as an approximation of 10 in a compressive sampling problem. Simulations show that CCIM is able to reconstruct a complex sparse vector using fewer measurements than NESTA.

Keywords: Compressive Sampling, Complex Correntropy, Complex Data, NESTA

1 INTRODUÇÃO

Em processamento de sinais há um grande interesse em uma área chamada amostragem compressiva. Esse campo de estudo visa aproveitar-se de sinais esparsos, ou seja, sinais onde a maioria dos dados são nulos, para reconstruí-los usando menos medidas do que a teoria da amostragem de Nyquist-Shannon indicaria como adequada [1].

Seja um sinal \mathbf{x} de tamanho L , com esparsidade S , ou seja, das L amostras, apenas S são diferentes de zero, é possível reconstruir x a partir de um sinal menor \mathbf{y} com tamanho M , ou seja, $M < L$, através do mapeamento por meio de uma matriz \mathbf{A} de dimensão $M \times L$. Matematicamente, isso pode ser expresso como um sistema possível indeterminado (com múltiplas soluções) $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Vários algoritmos foram propostos para resolver este problema, tais como programação linear e otimização convexa. Uma parte da literatura opta por implementar uma solução aproximada da minimização de $\|\mathbf{x}\|_0$ sujeito a restrições:

$$\text{minimizar } \|\mathbf{x}\|_0$$
$$\text{sujeito a } \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 \leq \epsilon \quad (1)$$

em que \mathbf{b} é o vetor de medidas que é poluído pelo ruído aditivo e ϵ é um fator de tolerância. Entretanto, minimizar (1) é um problema NP-difícil [1], fazendo com que sua solução seja muito demorada [3]. Por esse motivo, uma das soluções propostas na literatura é minimizar a norma ℓ_1 [3],[4] ao invés da norma ℓ_0 :

$$\text{minimizar } \|\mathbf{x}\|_1$$
$$\text{sujeito a } \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 \leq \epsilon \quad (2)$$

Paralelo ao desenvolvimento dessa área de amostragem compressiva, a correntropia é uma medida de similaridade que vem sendo bastante empregada na literatura por conseguir extrair mais informação quando comparada a métricas de segunda ordem [5]. Alguns trabalhos já aplicaram com êxito a correntropia ao problema de amostragem compressiva mas, particularmente [3] mostrou que a métrica induzida da correntropia (CIM - *Correntropy Induced Metric*) poderia aproximar a norma ℓ_0 , reduzindo o número de medidas necessários à reconstrução de sinais reais quando comparada à norma ℓ_1 . Entretanto, várias são as aplicações de amostragem compressiva que necessitam de dados complexos. Por essa motivação, nosso grupo de pesquisa desenvolveu uma nova métrica que usa a recém definida correntropia complexa [6][7]

para derivar a métrica induzida da correntropia complexa (CCIM - *Complex Correntropy Induced Metric*) [8], possibilitando a aplicação dessa medida de similaridade em problemas envolvendo dados de natureza complexa. Mas o trabalho em [8] não comparou a CCIM com nenhum algoritmo capaz de resolver problemas envolvendo números complexos, dificultando sua efetiva avaliação. O presente artigo compara os resultados do uso da CCIM na reconstrução de vetores esparsos com o algoritmo de Nesterov (NESTA) [4], um algoritmo clássico na literatura que é capaz de lidar com vetores complexos. Resultados mostram que a CCIM é capaz de reconstruir vetores complexos usando menos medidas do que o NESTA.

2 CCIM NO PROBLEMA DE AMOSTRAGEM COMPRESSIVA

Seja $\mathbf{z} = \mathbf{x} + j\mathbf{s}$ um vetor esparso complexo. Em [8], os autores mostraram que é possível usar a métrica induzida da correntropia complexa, $\psi^c(\mathbf{z}, 0)$, com o *kernel* Gaussiano para aproximar a norma ℓ_0 de \mathbf{z} no problema de amostragem compressiva fazendo o tamanho do *kernel* σ tender a zero:

$$\|\mathbf{z}\|_0 \approx \psi^c(\mathbf{z}, 0) = \sqrt{\frac{G_\sigma^c(0)}{L} \sum_{i=1}^L \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{x_i^2 + s_i^2}{2\sigma^2}\right) \right\}}, \quad (3)$$

em que $G_\sigma^c(\cdot)$ é um *kernel* Gaussiano complexo [8]. Dessa forma, o problema passa a ser

$$\text{sujeito a } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{z} \quad \underset{(4)}{\text{minimizar}} \quad \underset{\square}{\text{argmin}} \psi^c(\mathbf{z}, 0)$$

Assim como no caso real em [3], usou-se neste trabalho e em [8] de um gradiente descendente para reconstruir o vetor esparso \mathbf{z} . O vetor gradiente \mathbf{g} é computado e projetado no espaço \mathbf{A}^T . Foi necessário usar do Cálculo de Wirtinger para obter a derivada da equação por ela não ser analítica no domínio complexo [8]. Dessa forma, têm-se:

$$[\mathbf{g}]_{L \times 1} = \left[\frac{\partial \psi^c(\mathbf{z}, 0)}{\partial z_1^*}, \dots, \frac{\partial \psi^c(\mathbf{z}, 0)}{\partial z_L^*} \right],$$

em que

$$\frac{\partial \psi^c(\mathbf{z}, 0)}{\partial z_i^*} = \frac{G_\sigma^c(0)z_i}{2L\sigma^2} \exp\left(-\frac{z_i z_i^*}{2\sigma^2}\right).$$

Então a projeção é obtida: $\tilde{\mathbf{g}} = [\mathbf{I} - \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}] \mathbf{g}$. Por fim, a regra de atualização de \mathbf{z} é

$$\mathbf{z}_{t+1} = \mathbf{z}_t - \eta \frac{\tilde{\mathbf{g}}}{\|\tilde{\mathbf{g}}\|_2},$$

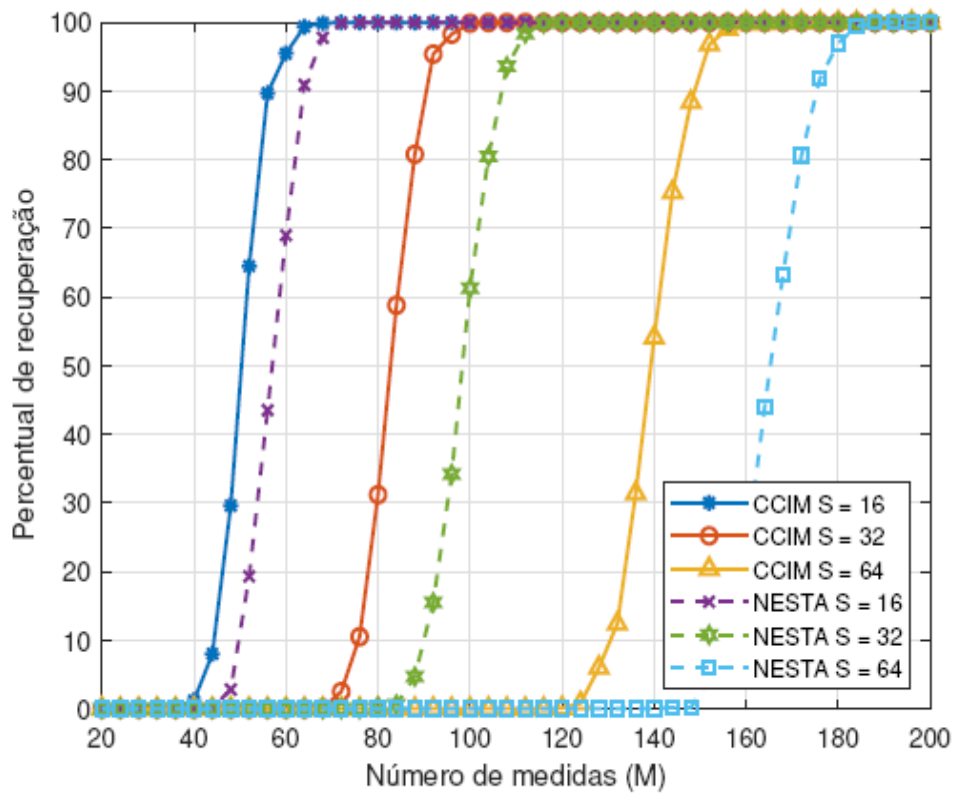
em que η é o passo do gradiente. Mais detalhes podem ser encontrados em [9].

3 RESULTADOS

Foi reconstruído um sinal complexo z esparso de tamanho $L = 512$ e com três valores de esparsidade $S = 16, 32, 64$. Os valores não nulos são selecionados aleatoriamente e uniformemente distribuídos dentro do vetor z . O valor propriamente dito foi gerado usando uma distribuição normal com média 0 e variância 1, tanto para a parte real quanto para a parte imaginária. Vários números de medida foram testados, de $M = 40$ até $M = 300$ medidas. Foi usada a mesma estratégia de anelamento de kernel presente em [3] e [8].

A Figura 1 mostra a média de 10^3 iterações de Monte Carlo para cada valor de M testado. Nessa simulação nenhum ruído é acrescentado ao sinal. Uma reconstrução do vetor esparso é considerada realizada com sucesso quando $\|\mathbf{z} - \mathbf{z}_r\|_2 < 10^{-3}$. O gradiente descendente é inicializado com a solução de mínima energia $\mathbf{z}_0 = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{y}$. O método aqui proposto é comparado ao algoritmo de Nesterov (NESTA) [4], algoritmo que minimiza a norma ℓ_1 ao invés da CCIM na aproximação da norma ℓ_0 e que é capaz de lidar com dados complexos.

Figura 1 - Comparativo entre o percentual de reconstruções com sucesso usando a aproximação da norma ℓ_0 com a CCIM com o NESTA, que utiliza a norma ℓ_1 . O vetor complexo esparso que é recuperado tem tamanho $L = 512$ e S elementos não nulos para um número de medidas (M) realizadas.



As simulações numéricas, mostradas pela Figura 1, apontam que não só a CCIM é capaz de aproximar a norma ℓ_0 , como foi já mostrado em [8], mas também como menos medidas são necessárias para reconstruir o vetor esparso complexo do que o NESTA, que usa a norma ℓ_1 . Como esperado no problema de amostragem compressiva, a medida em que se aumenta o número de elementos não nulos (S) no vetor esparso, mais medidas são necessárias para se reconstruir com sucesso o vetor original complexo.

4 CONCLUSÃO

Este artigo mostrou por meio de simulações computacionais que, em geral, a métrica induzida da correntropia complexa (CCIM) é capaz de reconstruir um vetor esparso complexo usando menos medidas que o NESTA, que usa a norma ℓ_1 . Isso porque a CCIM aproxima ℓ_0 quando o tamanho de *kernel* tende a zero.

REFERÊNCIAS

- [1] E. J. Candes and M. B. Wakin. An introduction to compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, 25(2):21–30, March 2008.
- [2] Emmanuel J. Candès. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing. *Comptes Rendus Mathematique*, 346(9):589 – 592, 2008.
- [3] S. Seth and J. C. Principe. Compressed signal reconstruction using the correntropy induced metric. In *2008 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pages 3845–3848, March 2008.
- [4] S. Becker, J. Bobin, and E. Candès. NESTA: A fast and accurate first-order method for sparse recovery. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 4(1):1–39, 2011.
- [5] I. Santamaria, P.P. Pokharel, and J.C. Principe. Generalized correlation function: definition, properties, and application to blind equalization. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54(6):2187–2197, June 2006.
- [6] J. P. F. Guimarães, A. I. R. Fontes, J. B. A. Rego, A. de M. Martins, and J. C. Príncipe. Complex correntropy: Probabilistic interpretation and application to complex-valued data. *IEEE Signal Processing Letters*, 24(1):42–45, Jan 2017.
- [7] João P.F. Guimarães, Aluisio I.R. Fontes, Joilson B.A. Rego, Allan de M. Martins, and José C. Principe. Complex correntropy function: Properties, and application to a channel equalization problem. *Expert Systems with Applications*, 107:173 – 181, 2018.
- [8] J. P. F. Guimarães, A. I. R. Fontes, F. B. da Silva, A. de M. Martins, and R. v. Borries. Complex correntropy induced metric applied to compressive sensing with complex-valued data. In *2018 IEEE Southwest Symposium on Image Analysis and Interpretation (SSIAI)*, pages 21–24, 2018.
- [9] João Paulo Ferreira Guimarães. *Correntropia Complexa: Definição, Propriedades e Aplicações*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Computação - PGGEEC, 9 2019.