

Análise e dimensionamento de lajes de concreto armado de pontes pelo Método de Rüsçh

Analysis and design of reinforced concrete bridges slabs by using Rüsçh Method

DOI:10.34117/bjdv7n3-092

Recebimento dos originais: 08/02/2021

Aceitação para publicação: 05/03/2021

Fernando Júnior Resende Mascarenhas

Mestre em Engenharia Civil, com especialização em estruturas, pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGECiv)

Instituição: Universidade Federal de São Carlos (UFSCar)

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia

Endereço: Rodovia Washington Luís (SP-310), Km 235, São Carlos - São Paulo –
Brasil, CEP 13565-905 - Caixa Postal 676

E-mail: fer.jr.resende@hotmail.com

André Luis Christoforo

Professor Doutor do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGECiv)

Universidade Federal de São Carlos (UFSCar)

Instituição: Centro de Ciências Exatas e Tecnologia

Endereço: Rodovia Washington Luís (SP-310), Km 235, São Carlos - São Paulo –
Brasil, CEP 13565-905 - Caixa Postal 676

E-mail: christoforoal@yahoo.com.br

Roberto Chust Carvalho

Professor Doutor Aposentado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGECiv)

Instituição: Universidade Federal de São Carlos (UFSCar)

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia

Endereço: Rodovia Washington Luís (SP-310), Km 235, São Carlos - São Paulo –
Brasil, CEP 13565-905 - Caixa Postal 676

E-mail: robertochustcarvalho@gmail.com

RESUMO

Pontes e viadutos são importantes nas dinâmicas sociais e econômicas de uma nação, além de serem elementos importantíssimos nos sistemas de transportes. Apesar da heterogeneidade dos veículos reais que trafegam em pontes e viadutos, as diferentes normas, nacional e internacionais, de cargas móveis para pontes e viadutos rodoviários possuem seus respectivos trens-tipo para o dimensionamento de tais estruturas. Dentre as verificações e os dimensionamentos que se realiza em pontes, as lajes de concreto armado apresentam grande importância. Baseado nisso, este artigo abordará as etapas para análise e dimensionamento de lajes de concreto armado de pontes pelo método de Rüsçh. Para tanto, um exemplo numérico no qual serão determinados os momentos atuantes nas lajes da ponte, tanto nas lajes em balanço quanto nas lajes centrais. Ao fim, os momentos atuantes nas lajes, as áreas de aço na flexão e a verificação à fadiga são abordados.

Palavra-Chave: Pontes, Concreto Armado, Lajes, Método de Rüsç, Dimensionamento.

ABSTRACT

Bridges and viaducts are important in the social and economic dynamics of a nation, as well as being very important elements in the transport systems. In spite of the heterogeneity of the real vehicles that travel in bridges and viaducts, the different national and international codes of load trains for bridges and road viaducts have their respective standard load trains for the design of such structures. Among the analysis and design that are made in bridges, the reinforced concrete slabs are of great importance. Based on this, this article will address the steps for analysis and dimensioning of reinforced concrete slabs of bridges by the Rüsç method. To do so, a numerical example in which the moments acting on the slabs of the bridge will be determined, in the bending slabs as in the central slabs. At the end, the moments acting on the slabs, the areas of steel in the flexion and the verification to the fatigue are approached.

Keyword: Bridges, Reinforced Concrete, Slabs, Rüsç Method, Design.

1 INTRODUÇÃO

As pontes têm como função “a transposição de obstáculos à continuidade do leito normal da via”, tais como cursos de água; já viadutos “têm por objetivo a transposição de vales e outras vias” (PFEIL, 1983, p. 1). De acordo com levantamentos do DNIT (2018), o Brasil possui 8.336 OAEs. Das 8.336 OAEs levantadas pelo DNIT, 68,47% enquadram-se como pontes e 19,00% como viadutos (DNIT, 2018). Guimarães et al. (2020), Piazza (2020) e Mascarenhas et al. (2020) explicam que a maioria das pontes brasileiras é construída em concreto e possuem idade superior a 30 anos.

Como “uma ponte é um elemento chave nos sistemas de transportes, balanço deve ser encontrado entre a capacidade de suportar o volume de tráfego futuro, as cargas e os custos de estruturas mais pesadas e maiores” (BARKER; PUCKETT, 2007, p. 2, tradução nossa), sobretudo no Brasil que tem o transporte rodoviário como predominante (MASCARENHAS et al. 2021).

Apesar da heterogeneidade dos veículos reais que trafegam em pontes e viadutos, as diferentes normas, nacional e internacionais, de cargas móveis para pontes e viadutos rodoviários possuem seus respectivos trens-tipo para o dimensionamento de tais estruturas. Os trens-tipo são representações de veículos hipotéticos e suas respectivas cargas para serem utilizados nos cálculos, que representam, no que tange a esforços solicitantes, os veículos reais. A Norma Brasileira, ABNT NBR 7188:2013, “Carga Móvel Rodoviária e de Pedestres em Pontes, Viadutos, Passarelas e outras estruturas”, possui o trem-tipo TB-450 cuja configuração representa um veículo tipo de 45 toneladas.

De acordo com Stucchi (2006, p. 47), “as lajes são especialmente importantes porque aparecem em praticamente todas as pontes; não apenas nas pontes em laje, onde constituem toda a superestrutura, mas também nas pontes em viga, onde constituem o tabuleiro que interliga as vigas”.

Ademais, Mascarenhas et al. (2020b) pontuam a importância de se considerar todas as ações que podem afetar o desempenho da ponte, bem como a complexidade que pode existir na análise das cargas móveis.

Baseado nisso, este artigo abordará as etapas para análise e dimensionamento de lajes de concreto armado de pontes pelo método de Rüsç. Para tanto, um exemplo numérico no qual serão determinados os momentos atuantes nas lajes da ponte, tanto nas lajes em balanço quanto nas lajes centrais.

2 COMPORTAMENTO ESTRUTURAL DAS LAJES

De acordo com Bastos (2015, p. 1), “as lajes são classificadas como elementos planos bidimensionais, que são aqueles onde duas dimensões, o comprimento e a largura, são da mesma ordem de grandeza e muito maiores que a terceira dimensão, a espessura. As lajes são também chamadas elementos de superfície, ou placas”.

Quando se trata de laje de pontes, nas quais as cargas móveis variam de posição e isso faz com que as solicitações máximas possam variar bastante a depender dos movimentos dos veículos, tal determinação pode ser, a princípio, um problema (FRANÇA, 2016; SEQUINEL; SILVA, 2017). Albuquerque (2014, p. 37) explica que:

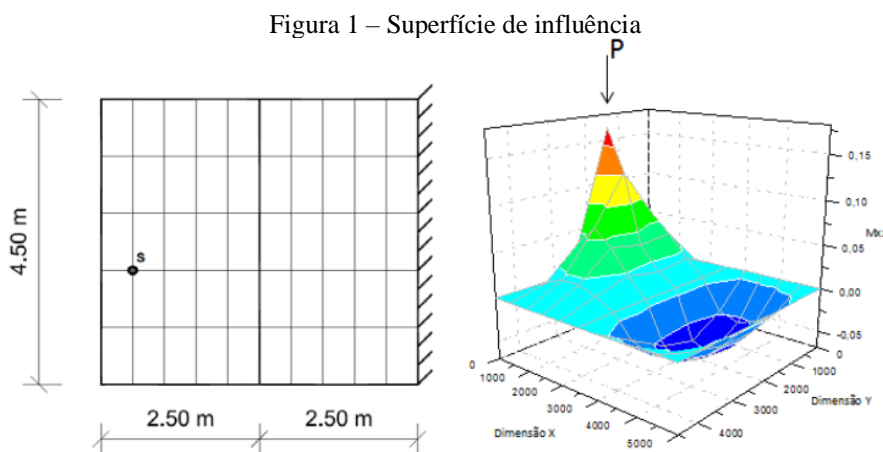
As cargas móveis das pontes possuem características distintas das ações permanentes. Isso acontece porque elas variam não apenas com a amplitude da sua intensidade, mas também com a posição em que ela é aplicada. E a depender dessas duas informações os efeitos na estrutura podem ser os mais diversos (ALBUQUERQUE, 2014, p. 37).

Ao se calcular “as solicitações nas lajes das pontes é utilizada a teoria elástica das placas” (ROCHA, 2015, p. 42). Szilard (2004), citado por Sequinel e Silva (2017) explica que essa “tarefa pode ser feita por tentativa e erro, porém o uso de superfícies de influência elimina a ambiguidade de tal processo e ainda oferece uma economia de tempo” (SZILARD *apud* SEQUINEL; SILVA, 2017, p. 25). Ainda de acordo com Szilard (2004), citado por Sequinel e Silva (2017, p. 25):

As superfícies de influência de placas seguem o mesmo conceito de linhas de influência usadas para análise de pontes de vigas, de arcos e em treliça, porém

considerando em um espaço bidimensional. Assim, elas indicam como a mudança de posição de uma carga unitária intervém em parâmetros de projetos importantes, como, reações, deflexões, momentos de flexão e forças de cisalhamento (SZILARD apud SEQUINEL; SILVA, 2017, p. 25).

A Figura 1 a seguir apresenta um exemplo de uma superfície de influência de uma estrutura “composta por duas placas de dimensões 2,50m x 4,50m”, sob a ação de uma carga unitária P (ALBUQUERQUE, 2014, p. 40).



Fonte: ALBUQUERQUE, 2014.

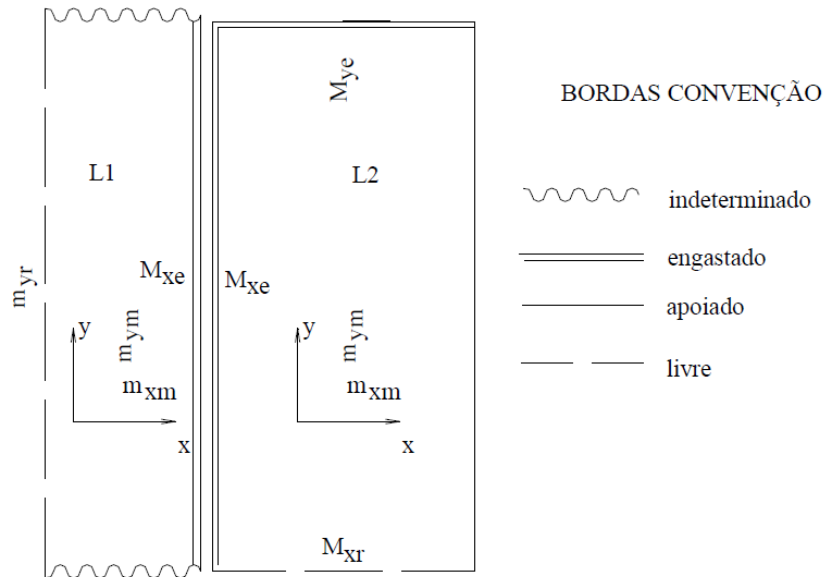
Dentre as diversas soluções que existem, há a utilização de “diversas tabelas tais como as de Marcus e as de Czerny usadas para o caso de carregamento distribuído” (FRANÇA, 2016, p. 33). As mais empregas no Brasil são as tabelas desenvolvidas por Hubert Rüsich que:

São aplicáveis a lajes retangulares e utilizam os carregamentos rodoviários das normas alemãs. Como as normas brasileiras utilizam a mesma geometria de carregamentos que as normas da Alemanha, as tabelas também podem ser utilizadas para cálculo de lajes no Brasil (ROCHA, 2015, p. 43).

Com o intuito de diminuir a complexidade da superfície de influência, “Rüsich transformou as superfícies de influência em tabelas para o cálculo das forças internas de lajes de pontes” (ALBUQUERQUE, HAACH, PACCOLA, 2018, p. 143, tradução nossa).

A Figura 2 apresenta “os momentos que podem ocorrer nas direções x e y (na verdade a direção paralela na qual é colocada a armadura) com as letras “e” para o engaste “m” para o meio da placa (ou próximo do meio) e “r” bordo livre. Usa-se “x” para a direção do menor vão” (CARVALHO, 2017, p. 89).

Figura 2 – Nomenclatura empregada nas tabelas de Rüsç



Fonte: CARVALHO, 2017.

Para tanto, para se determinar os esforços devido às cargas permanentes uniformemente distribuídas utiliza-se a Equação 1:

$$M_g = k.g.l_x^2 \quad (\text{Equação 1})$$

Onde:

- k coeficiente obtido da tabela de Rüsç em função de l_y/l_x ;
- g valor da carga distribuída;
- M_g momento fletor da carga permanente uniformemente distribuída.

Já os esforços devido às cargas móveis são dados pela Equação 2:

$$M_q = \varphi.[P.M_L + p.(M_p + M_p^{\prime})] \quad (\text{Equação 2})$$

Onde:

- φ o coeficiente de impacto vertical;
- P a carga de uma roda do veículo tipo;
- p a carga uniforme na frente e atrás do veículo;
- M_L, M_p, M_p^{\prime} são coeficientes obtidos das tabelas de Rüsç;
- M_q momento fletor da carga móvel.

A determinação de qual tabela de Rüschi a ser empregada passa pela avaliação de alguns parâmetros: vinculação dos bordos, relação de vãos e direção do tráfego. Primeiramente, estabelece-se a relação λ entre os vãos l_y/l_x . Em seguida, determina-se o valor da largura equivalente da roda t através da Equação 3, conforme esquematizado na Figura 3:

$$t = \sqrt{a_1 \cdot b_1} \quad (\text{Equação 3})$$

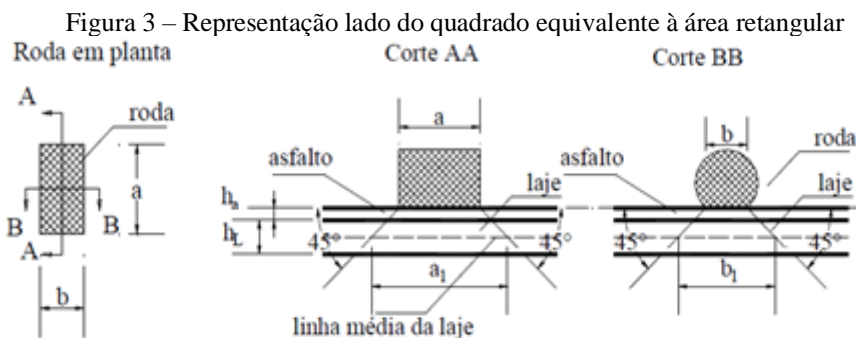
Sendo:

$$a_1 = a + 2 \cdot h_a + h_l \quad (\text{Equação 4})$$

$$b_1 = b + 2 \cdot h_a + h_l \quad (\text{Equação 5})$$

Onde:

- a o comprimento da roda;
- b a largura da roda;
- h_a a altura do asfalto;
- h_l a altura da laje.



Fonte: CARVALHO, 2017.

Em seguida, calcula-se os parâmetros t/a e l_x/a , para que então possa-se determinar qual a tabela de Rüschi mais adequada para a ponte analisada.

2.1 CÁLCULO DAS ARMADURAS LONGITUDINAIS

Para o dimensionamento à flexão com a determinação das armaduras longitudinais empregou-se as equações seguintes na ordem em que elas aparecem:

$$KMD = \frac{M_d}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}} \quad (\text{Equação 6})$$

Onde:

M_d momento fletor de cálculo;

b_w largura da seção transversal (para lajes considera-se igual a 100 cm, pois o valor da armadura será calculado por metro)

d altura útil;

f_{cd} resistência de cálculo à compressão do concreto.

$$x = \frac{0,68 \cdot d \pm \sqrt{(0,68 \cdot d)^2 - 4 \cdot 0,272 \cdot \left(\frac{M_d}{b_w \cdot d}\right)}}{0,544} \quad (\text{Equação 7})$$

Onde:

M_d posição da linha neutra;

$$KX = \frac{x}{d} \quad (\text{Equação 8})$$

$$KZ = 1 - 0,4 \cdot KX \quad (\text{Equação 9})$$

$$A_s = \frac{M_d}{(KZ) \cdot d \cdot f_{yd}} \quad (\text{Equação 10})$$

Onde:

A_s área de armadura necessária;

f_{yd} tensão de escoamento de cálculo do aço.

A área de aço mínima é dada pela Equação 11, segundo a NBR 6118:2014:

$$A_{s,\text{mín}} = \rho_{\text{mín}} \cdot b_w \cdot h \quad (\text{Equação 11})$$

Onde:

ρ_{\min} é fornecido pela Tabela 17.3 da NBR 6118:2014;

$A_{s,\min}$ área de aço mínima.

2.2 VERIFICAÇÃO À FADIGA

Em sequência, faz-se a verificação à fadiga da laje analisada. Nas barras de aço para o concreto armado, a verificação da fadiga é feita através da Equação 12, segundo a NBR 6118:2014:

$$\gamma_f \cdot \Delta\sigma_s \leq \Delta f_{sd, fad} \quad (\text{Equação 12})$$

Onde:

$\Delta f_{sd, fad}$ é a variação de tensão resistente do aço na fadiga;

$\Delta\sigma_s$ é a variação de tensão no aço.

Sendo que os valores de $\Delta f_{sd, fad}$ são dados segundo a Tabela 23.2 da NBR 6118:2014 (ABNT, 2014).

Primeiramente determina-se o momento de cálculo com a combinação frequente, de acordo com a Tabela 11.4, da NBR 6118:2014, dado pela Equação 13:

$$F_{d, ser} = \sum F_{gik} + \psi_1 \cdot F_{q1k} \quad (\text{Equação 13})$$

Onde:

$F_{d, ser}$ é o valor de cálculo das ações para combinações de serviço;

ψ_1 é o fator de redução de combinação frequente para ELS (que para pontes rodoviárias vale 0,8).

Utilizando-se a Equação 13 calcula-se o máximo momento de cálculo. Já o mínimo momento pode ser encontrado através da Equação 14:

$$F_{d, ser, \min} = \sum F_{gik} \quad (\text{Equação 14})$$

Conforme explicado por Rocha (2015, p. 106), “as tensões na armadura são obtidas no estágio II com a peça fissurada, desconsiderando a seção tracionada do

concreto, mas considerando a presença de armadura”. Para tanto, a profundidade da linha neutra x é dada pela Equação 15:

$$x = \frac{n.A_s}{b_w} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2.b_w.d}{n.A_s}} \right) \quad (\text{Equação 15})$$

Onde:

n é a relação entre os módulos de elasticidade do aço (E_s) e do concreto (E_c)
 E_s/E_c .

Feito isso, calcula-se a tensão no aço para o momento máximo e para o momento mínimo de cálculos, conforme Equação 16:

$$\sigma_s = \frac{M_{sd}}{A_s \cdot \left(d - \frac{x}{3} \right)} \quad (\text{Equação 15})$$

Onde:

σ_s é a tensão no aço;
 M_{sd} momento de cálculo (máximo ou mínimo).

Sendo essa variação expressa pela Equação 16:

$$\Delta\sigma_s = \sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_{m\acute{i}n} \quad (\text{Equação 16})$$

Onde:

$\Delta\sigma_s$ é a variação de tensão;
 $\sigma_{m\acute{a}x}$ é a tensão máxima;
 $\sigma_{m\acute{i}n}$ é a tensão mínima.

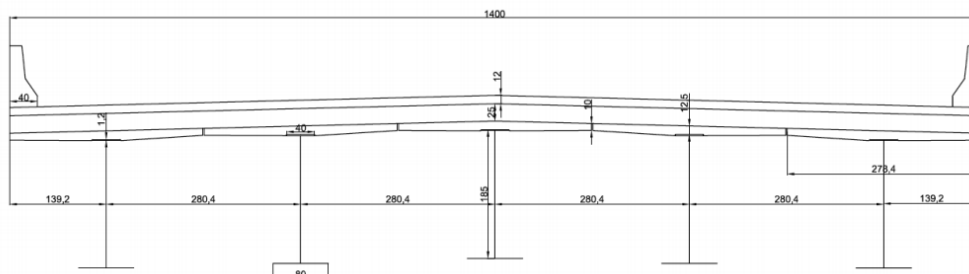
3 MATERIAIS E MÉTODOS

Foi analisado 1 exemplo numérico retirado de Rocha (2015). Destaca-se que todas as contas foram realizadas em uma planilha desenvolvida no Microsoft Excel, de forma a automatizar alguns cálculos.

3.1 EXEMPLO NUMÉRICO 1

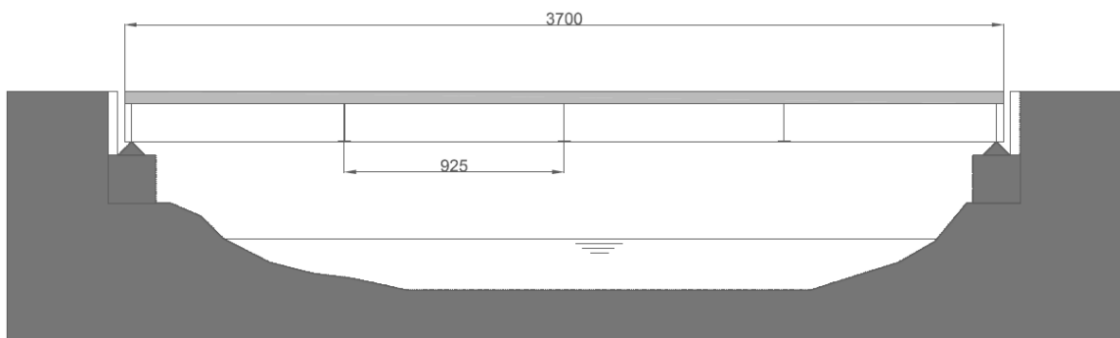
Neste exemplo será demonstrado a análise e o dimensionamento da laje da ponte estudada por Rocha (2015), conforme as Figuras 4 e 5.

Figura 4 – Seção transversal da ponte com cotas em centímetros



Fonte: ROCHA, 2015.

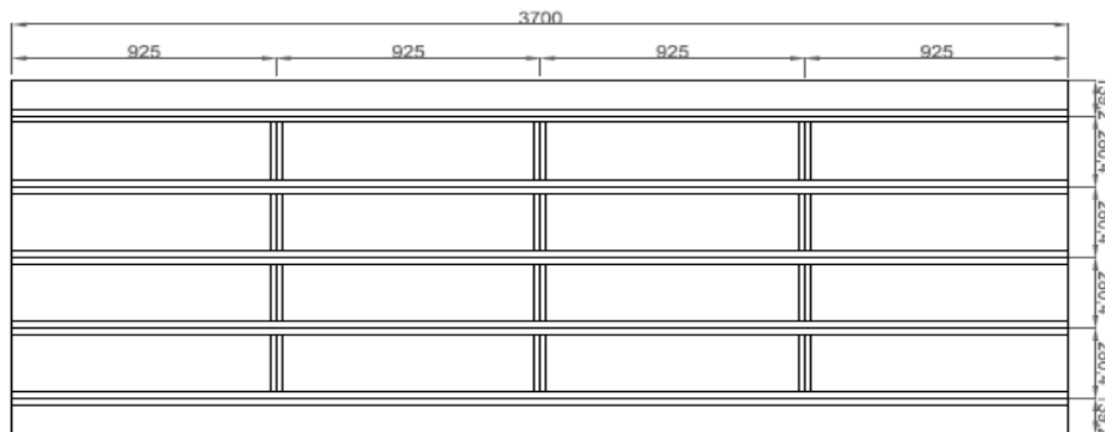
Figura 5 – Seção longitudinal da ponte com cotas em centímetros



Fonte: ROCHA, 2015.

Por sua vez, a Figura 6 apresenta a estrutura da ponte em planta e, conforme pode-se observar, a ponte é composta por 2 lajes em balanço nas laterais e 4 lajes centrais, com as dimensões especificadas na figura.

Figura 6 – Ponte em planta com cotas em centímetros



Fonte: ROCHA, 2015.

A Tabela 1 apresenta as informações da ponte analisada.

Tabela 1 – Características da ponte analisada

Dimensão da seção transversal (m)	Vão l (m)	Número de faixas	Espessura média da laje de concreto - h_t (cm)	Tipo de aço
14,0	37,0	2	25,0	CA-50
Espessura média do asfalto- h_a (cm)	f_{ck} (MPa)	Módulo de elasticidade do aço – E_s (MPa)	Módulo de elasticidade do concreto – E_c (MPa)	
12,0	30	205000	26071,59	

Além disso, essa ponte possui dois trechos a serem analisados. Primeiramente, a laje em balanço e em sequência a laje central. Como a laje da ponte é contínua, faz-se necessário fazer a compatibilização dos momentos fletores, através dos engastamentos elásticos. Para tanto, serão determinados os momentos positivos para as lajes considerando-se 35% dos momentos devidos à consideração de lajes simplesmente apoiadas e 65% dos momentos devidos à consideração de engaste das lajes (CARVALHO, 2017).

3.2 LAJE EM BALANÇO

Primeiramente serão determinados os momentos fletores considerando a situação de engaste. Os valores dos momentos devido às cargas permanentes são dados de acordo com a Tabela 2, sendo o coeficiente de impacto igual a 1,394 e $d = 21,9375$ cm.

Tabela 2 – Momentos devido às cargas permanentes na laje em balanço – Exemplo 1

Momento negativo ao longo de x na seção m - Momento – M_{xmg} (kN.m/m)	Momento negativo ao longo de x na seção e - Momento – M_{xeg} (kN.m/m)
18,491	30,120

Calculando-se os parâmetros para se usar as tabelas de Rüschi, usando as Equações 3, 4 e 5, tem-se a Tabela 3.

Tabela 3 – Parâmetros de entrada para laje em balanço – Exemplo 1

l_x (m)	l_y (m)	t (m)	l_y/l_x
0,792	9,25	0,826	∞
Distância entre os eixos do veículo - a (m)	l_x/a	t/a	Tabela empregada
2,0	0,396	0,413	98

Com isso, utilizando-se o programa gratuito TRüsch 1.0, tem-se os seguintes valores para os parâmetros encontrados na tabela de Rüsch e, empregando a Equação 2 tem-se seus respectivos momentos para a carga móvel (Tabela 4).

Tabela 4 – Momentos devido às cargas móveis para laje em balanço – Exemplo 1

Momento positivo ao longo de x na seção m		
M_L	M_p	$M_p^`$
0,027	0,000	0,000
Momento – $M_{xm,q}$ (kN.m/m)		
2,823		
Momento positivo ao longo de y na seção m		
M_L	M_p	$M_p^`$
0,054	0,000	0,000
Momento – $M_{ym,q}$ (kN.m/m)		
5,646		
Momento negativo ao longo de x na seção e		
M_L	M_p	$M_p^`$
0,366	0,000	0,000
Momento – $M_{xe,q}$ (kN.m/m)		
38,265		
Momento positivo ao longo de y na seção r		
M_L	M_p	$M_p^`$
0,166	0,000	0,000
Momento – $M_{yr,q}$ (kN.m/m)		
17,355		
Momento negativo ao longo de x na seção m		
M_L	M_p	$M_p^`$
0,111	0,000	0,000
Momento – $M_{xm,q}$ (kN.m/m)		
11,605		

O passo seguinte é calcular os momentos no estado limite último, conforme Tabela 11.3, da NBR 6118:2014, considerando-se $\gamma_g = 1,4$ e $\gamma_q = 1,5$. Logo, tem-se os seguintes resultados (Tabela 5).

Tabela 5 – Momentos de cálculo para laje em balanço – Exemplo 1

Momento positivo ao longo de x na seção m		
Momento – M_{xmd} (kN.m/m)		
4,235		
Momento positivo ao longo de y na seção m		
Momento – M_{ymd} (kN.m/m)		
8,469		
Momento negativo ao longo de x na seção e		
Momento – M_{xed} (kN.m/m)		
99,566		
Momento positivo ao longo de y na seção r		
Momento – M_{yrd} (kN.m/m)		
26,033		
Momento negativo ao longo de x na seção m		
Momento – $M_{xm,q}$ (kN.m/m)		
43,265		

Uma vez que se tenha determinado o valor dos momentos de cálculos, calcula-se a armadura longitudinal, aplicando-se as Equações 6 a 11, e os resultados estão na Tabela 6.

Tabela 6 – Armadura para laje em balanço – Exemplo 1

	Armadura negativa na direção x	Armadura positiva na direção x	Armadura positiva na direção y
Momento de cálculo usado (kN.m/m)	99,566	4,232	26,033
KMD	0,102	0,004	0,027
x (m)	0,03415	0,0014	0,0085
KX	0,1598	0,0064	0,0397
KZ	0,9361	0,9975	0,9841
A_s (cm ² /m)	11,445	0,457	2,846
$A_{s,min}$ (cm ² /m)	3,75	3,75	3,75
Diâmetro da barra – ϕ (mm)	12,5	8	5
Espaçamento – s (cm)	10,0	13,4	20
Espaçamento máximo (cm)	20,0	20,0	20,0
Número de barras por metro	10	8	
$A_{s,efet}$ (cm ² /m)	12,272	4,021	3,927
Armadura total	92 ϕ 12,5 c/10	74 ϕ 8 c/12,5	5 ϕ 10 c/20

A etapa seguinte é fazer a verificação à fadiga usando as Equações 12 a 16. Os resultados podem ser analisados na Tabela 7.

Tabela 7 – Verificação à fadiga para laje em balanço – Exemplo 1

	Armadura negativa na direção x	Armadura positiva na direção x
Momento de cálculo máximo (kN.m/m)	60,732	27,775
Momento de cálculo mínimo (kN.m/m)	30,120	18,194
x (m)	5,157	3,383
σ_{max} (MPa)	251,773	249,505
σ_{min} (MPa)	124,867	163,349
$\Delta\sigma_s$ (MPa)	126,906	86,157
$\Delta_{fsd, fud}$ (MPa)	190	190
Verificação	Não ocorrerá a fadiga	Não ocorrerá a fadiga

3.3 LAJE CENTRAL

Primeiramente serão determinados os momentos fletores considerando-se a laje engastada e, em seguida, considerando-se a laje simplesmente apoiada.

Para a laje engastada, a carga permanente total para a laje central é 12,13 kN/m². Calculando-se os parâmetros para se usar as tabelas de Rüsçh, usando as Equações 3, 4 e 5, tem-se a Tabela 8, sendo o coeficiente de impacto igual a 1,38 d = 21,5 cm.

Tabela 8 – Parâmetros de entrada para laje central – Exemplo 1

l_x (m)	l_y (m)	t (m)	l_y/l_x
2,804	9,25	0,826	∞
Distância entre os eixos do veículo - a (m)	l_x/a	t/a	Tabela empregada
2,0	1,402	0,413	27

*

Os valores dos momentos devido às cargas permanentes são dados empregando-se a Equação 1 e usando o programa gratuito TRüsch 1.0, de acordo com a Tabela 9.

Tabela 9 – Momentos devido às cargas permanentes na laje central – Exemplo 1

Momento positivo ao longo de x na seção m	Momento positivo ao longo de y na seção m	Momento negativo ao longo de x na seção e
k_{xm}	k_{ym}	k_{xe}
0,042	0,007	0,083
Momento – M_{xmg} (kN.m/m)	Momento – M_{ymg} (kN.m/m)	Momento – M_{xeg} (kN.m/m)
4,006	0,668	7,913

Com isso, utilizando-se o programa gratuito TRüsch 1.0, tem-se os seguintes valores para os parâmetros encontrados na tabela de Rüsche, empregando a Equação 2 tem-se seus respectivos momentos para a carga móvel (Tabela 10).

Tabela 10 – Momentos devido às cargas móveis para laje central – Exemplo 1

Momento positivo ao longo de x na seção m		
M_L	M_p	M_p^{\wedge}
0,168	0,000	0,040
Momento – M_{xmq} (kN.m/m)		
17,664		
Momento positivo ao longo de y na seção m		
M_L	M_p	M_p^{\wedge}
0,088	0,000	0,026
Momento – M_{ymq} (kN.m/m)		
9,287		
Momento negativo ao longo de x na seção e		
M_L	M_p	M_p^{\wedge}
0,326	0,000	0,336
Momento – M_{xeq} (kN.m/m)		
36,060		

O passo seguinte é calcular os momentos no estado limite último, conforme Tabela 11.3, da NBR 6118:2014, considerando-se $\gamma_g = 1,4$ e $\gamma_q = 1,5$. Logo, tem-se os seguintes resultados (Tabela 11).

Tabela 11 – Momentos de cálculo para laje central – Exemplo 1

Momento positivo ao longo de x na seção m
Momento – M_{xmd} (kN.m/m)
32,104

Momento positivo ao longo de y na seção m
Momento – M_{ymd} (kN.m/m)
14,024
Momento negativo ao longo de x na seção e
Momento – M_{xed} (kN.m/m)
65,168

Para a laje simplesmente apoiada, tem-se a seguinte situação. A carga permanente total para a laje central é 12,13 kN/m². Calculando-se os parâmetros para se usar as tabelas de Rüsç, usando as Equações 3, 4 e 5, tem-se a Tabela 12, sendo o coeficiente de impacto igual a 1,38 d = 21,5 cm.

Tabela 12 – Parâmetros de entrada para laje central – Exemplo 1

l_x (m)	l_y (m)	t (m)	l_y / l_x
2,804	9,25	0,826	∞
Distância entre os eixos do veículo - a (m)	l_x / a	t / a	Tabela empregada
2,0	1,402	0,413	1

Os valores dos momentos devido às cargas permanentes são dados empregando-se a Equação 1 e usando o programa gratuito TRüsç 1.0, de acordo com a Tabela 13.

Tabela 13 – Momentos devido às cargas permanentes na laje central – Exemplo 1

Momento positivo ao longo de x na seção m	Momento positivo ao longo de y na seção m
k_{xm}	k_{ym}
0,125	0,021
Momento – M_{xmg} (kN.m/m)	Momento – M_{ymg} (kN.m/m)
11,921	2,003

Com isso, utilizando-se o programa gratuito TRüsç 1.0, tem-se os seguintes valores para os parâmetros encontrados na tabela de Rüsç e, empregando a Equação 2 tem-se seus respectivos momentos para a carga móvel (Tabela 14).

Tabela 14 – Momentos devido às cargas móveis para laje central – Exemplo 1

Momento positivo ao longo de x na seção m		
M_L	M_p	$M_p \cdot \lambda$
0,405	0,080	0,214
Momento – M_{xmq} (kN.m/m)		
42,991		
Momento positivo ao longo de y na seção m		
M_L	M_p	$M_p \cdot \lambda$
0,244	0,016	0,062
Momento – M_{ymq} (kN.m/m)		
25,235		

O passo seguinte é calcular os momentos no estado limite último, conforme Tabela 11.3, da NBR 6118:2014, considerando-se $\gamma_g = 1,4$ e $\gamma_q = 1,5$. Logo, tem-se os seguintes resultados (Tabela 15).

Tabela 15 – Momentos de cálculo para laje central – Exemplo 1

Momento positivo ao longo de x na seção m
Momento – M_{xmd} (kN.m/m)
81,156
Momento positivo ao longo de y na seção m
Momento – M_{ymd} (kN.m/m)
40,657

De posse dos momentos fletores considerando-se ambas as situações, de engaste e simplesmente apoiado, multiplica-se os momentos positivos de cálculo devido ao engastamento por 65% e os simplesmente apoiados por 35%, obtendo-se a Tabela 16.

Tabela 16 – Momentos de cálculo para laje central após a compatibilização de momentos – Exemplo 1

Momento positivo ao longo de x na seção m
Momento – M_{xmd} (kN.m/m)
49,272
Momento positivo ao longo de y na seção m
Momento – M_{ymd} (kN.m/m)
23,346
Momento negativo ao longo de x na seção e
Momento – M_{xed} (kN.m/m)
65,168

Uma vez que se tenha determinado o valor dos momentos de cálculos, calcula-se a armadura longitudinal, aplicando-se as Equações 6 a 11, e os resultados estão na Tabela 17. Destaca-se que, como há 4 lajes centrais, a armadura negativa para elas deve ser dimensionada com o maior momento de cálculo negativo encontrado, seja para as lajes centrais ou para as lajes em balanço. O momento negativo de cálculo encontrado para a laje central foi de 65,168 kN.m/m, já o encontrado para a laje em balanço foi de 99,566 kN.m/m, logo esse será o empregado.

Tabela 17 – Armadura para laje central – Exemplo 1

	Armadura positiva na direção x	Armadura positiva na direção y	Armadura positiva na direção y
Momento de cálculo usado (kN.m/m)	49,272	23,346	99,566
KMD	0,050	0,024	0,102
x (m)	0,01622	0,00756	0,03415
KX	0,0754	0,0352	0,1598
KZ	0,9698	0,9859	0,9361
A_s (cm ² /m)	5,35	2,533	11,445
$A_{s,min}$ (cm ² /m)	3,75	3,75	3,75

Diâmetro da barra – ϕ (mm)	10	10	12,5
Espaçamento – s (cm)	14	20	10,0
Espaçamento máximo (cm)	20	20	20,0
Número de barras por metro	7	5	10
$A_{s,efet}$ (cm ² /m)	5,498	3,927	12.272
Armadura total	65 ϕ 10 c/14	5 ϕ 10 c/12.5	92 ϕ 12,5 c/10

A etapa seguinte é fazer a verificação à fadiga usando as Equações 12 a 16. Os resultados podem ser analisados na Tabela 18.

Tabela 18 – Verificação à fadiga para laje em balanço – Exemplo 1

	Armadura negativa na direção x	Armadura positiva na direção x
Momento de cálculo máximo (kN.m/m)	18,137	8,098
Momento de cálculo mínimo (kN.m/m)	4,006	0,668
x (m)	3,197	3,197
σ_{max} (MPa)	226,022	100,911
σ_{min} (MPa)	49,922	8,324
$\Delta\sigma_s$ (MPa)	176,100	92,586
$\Delta_{fsd, fad}$ (MPa)	190	190
Verificação	Não ocorrerá a fadiga	Não ocorrerá a fadiga

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Frente às análises realizadas neste artigo é possível concluir que os procedimentos para análise e dimensionamento de lajes de concreto armado de pontes não apresentam passos de alto nível de complexidade. Com o uso das tabelas de Rüsç ou mesmo empregando-se o programa gratuito TRüsç 1.0.

Ademais, os passos para determinação da armadura de flexão e da verificação à fadiga aqui apresentados para lajes de concreto armado de pontes são os mesmos empregados para lajes maciças de concreto armado com vigas de edificações.

Ao fim, espera-se que o roteiro de cálculo aqui demonstrado, bem como o exemplo desenvolvido, sirva de subsídio para estudantes de graduação em Engenharia Civil e de pós-graduação em Engenharia de Estruturas. De forma que eles possam usar este artigo como uma guia de cálculo para outras pontes com diferentes tipos de lajes de concreto armado.

AGRADECIMENTOS

Faz-se especial agradecimento à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), que é uma fundação vinculada ao Ministério da Educação do Brasil, pelo apoio através da bolsa de estudos concedida ao autor correspondente, bem como todo apoio ao PPGCiv, o que permitiu o mais proveitoso desenvolvimento deste trabalho.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, Arthur Álax Araújo. Implementação de Elementos Finitos de Barra e Placa para a Análise de Esforços em tabuleiros de pontes por meio de superfícies de influência. 2014. 250 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, Universidade Federal da Paraíba. São Carlos, 2014.

ALBUQUERQUE, Arthur Álax Araújo; HAACH, Vladimir Guilherme; PACCOLA, Rodrigo Ribeiro. Dependency of modeling parameters for the construction of influence surfaces by the finite element method. *Engineering with Computers*, v. 34, p.143-154, 2018.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 7188: Carga Móvel Rodoviária e de Pedestres em Pontes, Viadutos, Passarelas e outras estruturas. Rio de Janeiro: ABNT, 2013.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118: Projetos de estruturas de concreto – Procedimento, Rio de Janeiro: ABNT, 2014.

BARKER, Richard M; PUCKETT, Jay A. Design of Highway Bridges and LRFD Approach. 2. ed. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc, 2006.

BASTOS, Paulo Sérgio dos Santos. Disciplina: 2117 – Estruturas de Concreto I – Notas de Aula: Lajes de Concreto. Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia, Departamento de Engenharia Civil, Bauru, 2015.

CARVALHO, Roberto Chust. Introdução ao estudo de pontes – Notas de Aula- Universidade Federal de São Carlos, Departamento de Engenharia Civil, São Carlos, 2017.

DEPARTAMENTO NACIONAL DE INFRAESTRUTURA DE TRANSPORTES. Base de Dados das OAE – BDOAE. 2018. Disponível em: <<http://servicos.dnit.gov.br/dnitcloud/index.php/s/gkQB3SNPH7cwF5F>>. Acesso em: 29 de out. 2018.

FRANÇA, Lara Chianca Ferreira de. Análise e Dimensionamento de Ponte em Laje. 2016. 77f. Dissertação - Universidade Federal da Paraíba, Departamento de Engenharia Civil, João Pessoa, 2016.

GUIMARÃES, Rafaela da Silva; PERLINGEIRO, Mayra Soares Pereira Lima; VIEIRA CARNEIRO, Luiz Antonio; JÚDICE, Flavia Moll de Souza. Normas Técnicas Brasileiras sobre Projeto de Pontes em Concreto Armado: Considerações e Evolução. *Brazilian Journal of Development*, v. 6, n. 10, p. 77356-77369, 2020.

MASCARENHAS, Fernando Jr. R.; CHRISTOFORO, André L.; VITÓRIO, José A. Pereira; CARVALHO, Roberto C. A evolução da norma brasileira de cargas móveis para pontes rodoviárias. In: 62 Congresso Brasileiro do Concreto. Anais... Fortaleza, Brasil, 2020.

MASCARENHAS, Fernando Júnior Resende; CHRISTOFORO, André Luis; CARVALHO, Roberto Chust. A utilização de um software livre para determinação dos

esforços internos de cargas móveis em vigas de pontes de concreto. *HOLOS*, v. 3, p. 1-18, 2020b. <https://doi.org/10.15628/holos.2020.9466>

MASCARENHAS, Fernando Júnior Resende; CHRISTOFORO, André Luis; ALMEIDA FILHO, Fernando Menezes de; CARVALHO, Roberto Chust; DIAS, Alfredo Manuel P. G.; VITÓRIO, José Afonso P. Fatigue design in reinforced concrete bridges according to Brazilian code. *International Journal for Innovation Education and Research*, v. 9, n. 3, p. 257–279, 2021. <https://doi.org/10.31686/ijer.vol9.iss3.2994>

PFEIL, Walter. *Pontes em Concreto Armado*. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1983. v. 1.

PIAZZA, Sara Roca; PEIXOTO, Lorena Karla Soares; ROSENDO SOBRINHO, Francisco; BEZERRA, Eric Matheus Fernandes. Avaliação de manifestações patológicas na Ponte Rio do Carmo através da ferramenta GUT. *Brazilian Journal of Development*, v. 6, n. 11, p. 88863-88881, 2020.

ROCHA, Bruna Kirch Nienkötter. *Projeto Da Superestrutura de uma Ponte Utilizando Vigas Mistas Pré-Fabricadas*. 2015. 153 f. Dissertação - Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Engenharia Civil, Florianópolis, 2015.

STUCCHI, Fernando Rebouças. *PEF-2404 – Pontes e Grandes Estruturas – Notas de Aula*. Universidade de São Paulo, Escola Politécnica, Departamento de Estruturas e Fundações. São Paulo, 2006.

TRüsch 1.0. Programa para análise de esforços em lajes de pontes utilizando as Tabelas de Rüsch. Universidade Federal de São Carlos.