

Aplicação da equação de linha elástica na mecânica dos materiais: uma proposta didática para o estudo do deslocamento**Application of the elastic line equation in the mechanics of materials: a didactic proposal for the study of displacement**

DOI:10.34117/bjdv6n9-601

Recebimento dos originais: 08/08/2020

Aceitação para publicação: 25/09/2020

Geórgia Veríssimo Mesquita

Acadêmica do Curso de Engenharia Civil da Universidade Estadual de Montes Claros

Instituição: Universidade Estadual de Montes Claros – UNIMONTES

Endereço: Campus Universitário Prof. Darcy Ribeiro, Av. Prof. Rui Braga, s/n – Vila Mauricéia,
39401-089, Montes Claros, MG, Brasil

E-mail: georgiavmesquita@hotmail.com

Álvaro Barbosa de Carvalho JúniorProf. Doutor do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional e Sistemas
(PPGMCS)

Instituição: Universidade Estadual de Montes Claros – UNIMONTES

Endereço: Campus Universitário Prof. Darcy Ribeiro, Av. Prof. Rui Braga, s/n – Vila Mauricéia,
39401-089, Montes Claros, MG, Brasil

E-mail: alvaro.junior@unimontes.br

Alessandro Rosa Silva

Prof. Mestre do Departamento de Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo (IFES)

Instituição: Instituto Federal do Espírito Santo – Campus Ibatiba.

Endereço: Av. 7 de Novembro, 40 - Centro, 29395-000, Ibatiba - ES, Brasil

E-mail: alephymt@yahoo.com.br

Maria Helena Teles Lopes

Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional e Sistemas (PPGMCS)

Instituição: Universidade Estadual de Montes Claros – UNIMONTES

Endereço: Campus Universitário Prof. Darcy Ribeiro, Av. Prof. Rui Braga, s/n – Vila Mauricéia,
39401-089, Montes Claros, MG, Brasil

E-mail: mariahelenatl23@gmail.com

RESUMO

Esse estudo teve como objetivo apresentar um experimento simples e didático para demonstrar o cálculo do deslocamento em uma barra de aço. Analisando alguns conceitos físicos, como por exemplo, tensão, deformação e deslocamento, aliados aos conhecimentos do cálculo diferencial e integral, foi possível demonstrar as etapas que antecedem a apresentação final da equação da linha elástica. Com o desenvolvimento matemático exposto de forma mais detalhada, os alunos da disciplina de Mecânica dos Materiais podem compreender mais facilmente o comportamento elástico dos materiais submetidos aos carregamentos verticais.

Palavras-chave: mecânica, materiais, aço, curvatura, deslocamento.

ABSTRACT

The aim of this study is to presented a simple and didactic experiment to demonstrate the calculation of displacement in the steel bar. Analyzing some physical concepts, such as, stress, strain and displacement, combined with the knowledge of differential and integral calculus, it was possible to demonstrate the steps that precede the final presentation of the elastic line equation. The mathematical development exposed in more detail offer the students of the Mechanics of Materials a understand clearer about the elastic behavior of materials submitted to vertical loads.

Keywords: mechanics, materials, steel, curvature, displacement.

1 INTRODUÇÃO

As disciplinas de física e cálculo diferencial e integral são de extrema importância nos cursos de engenharia civil por contribuir para uma melhor compreensão dos esforços mecânicos que atuam nos materiais e nas estruturas. No cotidiano de um engenheiro existe uma variedade de problemas onde conceitos da física e do cálculo são utilizados. Por exemplo, no monitoramento de taxas de variação, desperdícios mínimo e máximo de materiais, tempo de uma obra e custos de fabricação, bem como no estudo do comportamento das cargas, volumes, áreas, centros de gravidade, momentos de inércia, deformações e regimes elásticos de uma estrutura (GERE, 2010; HIBBELER, 2010; DIAS, 2011).

No que se refere aos elementos estruturais utilizados como vigas e pilares, o uso de equações diferenciais na Mecânica dos Materiais tem sido uma das alternativas de análise para a determinação precisa de esforços cortantes, momentos fletores, raios de curvatura, inclinações e deslocamentos, provocados pela aplicação de carregamentos (GERE, 2010; HIBBELER, 2010). Entretanto, as disciplinas de física e cálculo diferencial e integral representam um desafio para muitos acadêmicos, uma vez que podem ser constatados altos índices de reprovações nessas disciplinas em diversas Instituições de Ensino Superior (IES).

Sabe-se que nos últimos anos o ensino da física tradicional, que se restringe unicamente à apresentação da teoria e conceitos, vem sendo modificado para formas de abordagens mais didáticas em salas de aula. Isso porque, com o acesso mais frequente dos acadêmicos à informação e tecnologia, a exposição simples, dialogada e abstrata dos conteúdos no quadro, não desperta o interesse dos acadêmicos, comprometendo o processo de ensino e aprendizagem.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, os docentes da área de ciências são orientados sobre a importância do estímulo à compreensão da natureza e suas tecnologias, com o objetivo do exercício crítico da plena cidadania do estudante (PCN+, 2002; LABURÚ, 2005; CHIQUETTO, 2011). Portanto, o uso de tecnologias e experimentos práticos, podem contribuir de forma significativa para a compreensão dos conteúdos e para a formação alunos, não só no ensino médio, mas também no ensino superior.

A realização de mudanças na forma do ensino da física e do cálculo para a engenharia, aprimora o aprendizado teórico e preparar melhor os acadêmicos para o mercado de trabalho. Essa proposta consiste na abordagem de problemas práticos de engenharia, com questões contextualizadas e a utilização direta dos conteúdos absorvidos nas disciplinas. Com a exclusão de conteúdos apresentados quase que exclusivamente de forma teórica e sem aplicação prática, existe uma expectativa de motivação e melhor desempenho acadêmico, a partir do momento em que se demonstra a importância da física e do cálculo para a vida prática dos futuros engenheiros.

Entre as disciplinas dos cursos de engenharia que são pré-requisitos para o ciclo profissional, a Mecânica dos Materiais, também chamada de Resistência dos Materiais, tem ocupado um lugar de destaque por ser a base que fundamenta a escolha dos sistemas estruturais, dos materiais que compõem uma estrutura e a garantia de que essas estruturas possam cumprir suas finalidades com segurança e durabilidade (GERE, 2010). Nessa disciplina, diferentes esforços mecânicos que atuam em um material ou estrutura podem ser investigados por meio de derivadas parciais e equações diferenciais. No caso do comportamento elástico dos materiais, essas equações são utilizadas para expressar matematicamente a curvatura da linha elástica (GERE, 2010; HIBBELER, 2010).

Embora as equações diferenciais sejam indicadas pela literatura clássica da engenharia para a resolução de vigas defletidas, muitas vezes são constatadas simplificações e ausências de detalhes nas explicações, resultado em dificuldades de compreensão no cálculo dos deslocamentos. Acredita-se que a ausência de detalhes no desenvolvimento dessas equações, com apresentação apenas de suas formas finais, esteja associada a uma crença de que os acadêmicos dos cursos de engenharia possuem um completo domínio das disciplinas de física e cálculo. Em algumas literaturas da engenharia podem ser encontradas frases do tipo “...a maioria dos livros de cálculo mostra que...”, antecedendo a forma final das expressões (HIBBELER, 2010).

Com base nesse contexto, este trabalho tem como objetivo demonstrar os procedimentos de cálculo para a determinação da equação da linha elástica de vigas, bem como realizar um experimento simples e prático com o intuito de ressaltar a importância da física e do cálculo diferencial e integral para a engenharia civil. Para isso foi utilizada uma maquete composta por barra de aço na condição de engaste, onde o valor de deslocamento medido foi posteriormente comparado com o valor calculado por meio da equação de linha elástica.

2 UMA BREVE REVISÃO SOBRE LINHA ELÁSTICA E DEFLEXÃO DE ELEMENTO ESBELTO

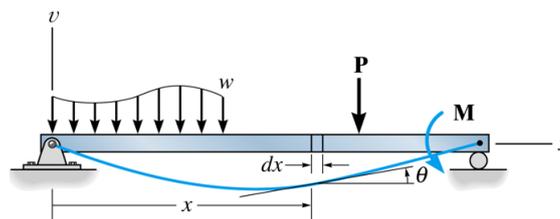
2.1 DESENVOLVIMENTO E CÁLCULO DO RAIOS DE CURVATURA (ρ)

A equação da linha elástica é uma equação diferencial obtida a partir do desenvolvimento de funções com valores vetoriais e equações paramétricas que partem do conceito de curvatura (GRAY; ABBENA; SALAMON, 2006; SWOKOWSKI, 1995). O entendimento conceitual da curvatura permite determinar o quanto uma curva se afasta de uma determinada direção tangente, ou ainda, o quanto ela muda de forma. Além disso, esse conceito também permite calcular a taxa de variação da direção de uma curva em relação à variação do seu comprimento (SWOKOWSKI, 1995; LEITHOLD, 2002).

Os conceitos de linha elástica e raio de curvatura fundamentam a noção de deformação que o eixo neutro de um elemento estrutural esbelto, como uma viga ou um pilar, assume ao ser submetido aos esforços solicitantes. O eixo neutro, ou linha neutra, é o lugar geométrico ocupado pelo centroide de cada área da seção transversal do elemento estrutural estudado (GERE, 2010; HIBBELER, 2010).

No estudo da mecânica dos materiais a relação existente entre o raio de curvatura (ρ) e o momento fletor (M) pode ser deduzida a partir da análise de um elemento estrutural esbelto, como por exemplo uma viga horizontal reta. Admitindo que a viga seja feita de um material linear elástico e esteja submetida à carregamentos perpendiculares ao seu eixo principal x , pode-se desprezar as deformações por cisalhamento, quando o comprimento da viga for muito maior do que a sua altura (HIBBELER, 2010; SWOKOWSKI, 1995). Nesse caso, a deflexão da viga pode ser representada como a distância entre um ponto do seu eixo neutro deslocado (linha elástica), devido ao esforço de flexão, até o eixo principal x . A Figura 1 mostra um esquema representativo de uma viga esbelta sob ação de carregamentos verticais (w , P). Supondo que a viga esteja em um regime elástico, se os carregamentos forem removidos a linha elástica perde a sua curvatura e retorna à posição coincidente sobre o eixo x .

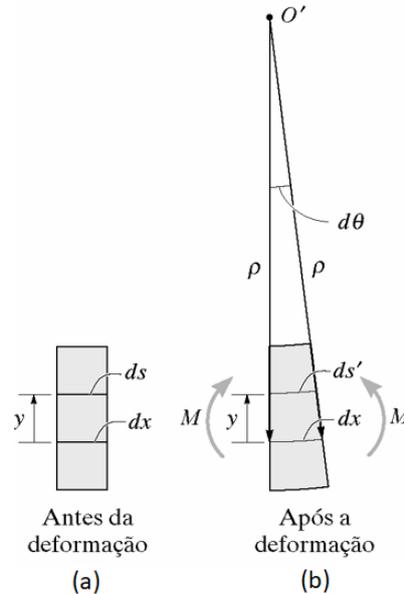
Figura 1 – Representação esquemática de uma viga reta sob ação de esforços verticais.



Fonte: Adaptado de (HIBBELER, 2010).

O deslocamento vertical existente na viga é orientado segundo o eixo v , que é perpendicular ao eixo x e paralelo a um eixo y coincidente. Analisando um elemento diferencial de largura não deformada dx , pertencente a seção transversal da viga, em um trecho consideravelmente reto e onde inicialmente não há carregamentos, considera-se que qualquer arco ds , com distância y da linha neutra, será retilíneo. Na Figura 2 encontra-se uma representação do elemento diferencial antes e após a deformação da viga.

Figura 2 – Elemento diferencial antes e após a deformação da viga.



Fonte: Adaptado de (HIBBELER, 2010).

Depois que a viga é deformada pela ação do momento fletor (M), proveniente dos carregamentos verticais (w , P), um ângulo $d\theta$ surge entre as seções do elemento diferencial da viga. Nesse caso, qualquer arco ds do elemento diferencial, exceto dx , está sujeito a uma deformação normal. Portanto, a deformação (ϵ) causada pelo carregamento da viga pode ser calculada em função dos arcos ds e ds' , como mostra equação (1) (GERE, 2010; HIBBELER, 2010):

$$\epsilon = \frac{ds' - ds}{ds} \quad (1)$$

Observando o esquema apresentado na Figura 2 é possível descrever algumas relações, tais como:

$$dx = ds = \rho \cdot d\theta \quad (2)$$

(antes da deformação)

$$ds' = (\rho - y) \cdot d\theta \quad (3)$$

(após a deformação)

Substituindo as expressões (2) e (3) na equação (1), tem-se:

$$\varepsilon = \frac{(\rho - y) \cdot d\theta - \rho \cdot d\theta}{\rho \cdot d\theta} = \frac{-y}{\rho}$$

Ou seja,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{-\varepsilon}{y} \quad (4)$$

Considerando que a viga esbelta é constituída de um material homogêneo, o comportamento elástico linear pode ser descrito pela Lei de Hooke, onde a deformação (ε) é obtida pela razão entre a tensão (σ) e o módulo de Young (E), também chamado de módulo de elasticidade (DOWLING, 2012):

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (5)$$

A tensão na flexão pode ser representada em função do momento fletor (M), da linha neutra (y) e do momento de inércia (I), que depende da forma da seção transversal da viga. Logo, a tensão de flexão pode ser representada pela seguinte expressão (GERE, 2010; HIBBELER, 2010, DOWLING, 2012):

$$\sigma = \frac{-My}{I} \quad (6)$$

Substituindo a tensão de flexão na equação (5), a deformação também pode ser representada por:

$$\varepsilon = \frac{-My}{EI} \quad (7)$$

De maneira semelhante, substituindo a equação (7) na equação (4), encontra-se uma relação entre o momento fletor (M), o raio de curvatura (ρ) e o momento de inércia (I), como mostra a equação (8). Na equação, a razão $1/\rho$ representa a curvatura da viga esbelta, que será melhor detalhada posteriormente.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (8)$$

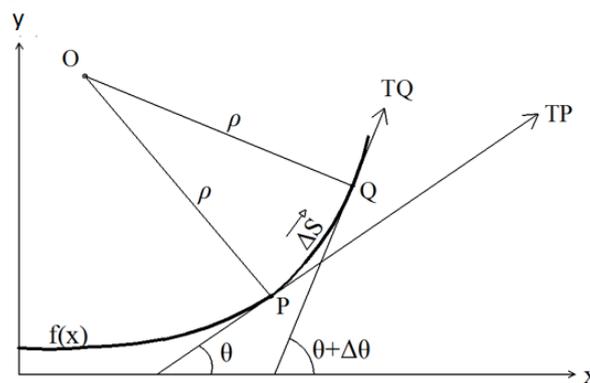
2.2 REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA DA EQUAÇÃO DE LINHA ELÁSTICA

A curva de linha elástica para uma viga pode ser expressa matematicamente pela função $v = f(x)$ (HIBBELER, 2010). Entretanto, alguns estudos sobre mecânica dos materiais ressaltam que, para se obter essa função, em primeiro lugar é necessário representar a curvatura $1/\rho$ em termos de v e x (GERE, 2010; HIBBELER, 2010, DOWLING, 2012). Logo, não é difícil encontrar a equação da linha elástica expressa em sua forma final, como mostra a equação (9), associada à uma frase do tipo “...a maioria dos livros de cálculo mostra que...” (HIBBELER, 2010):

$$\frac{M}{EI} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (9)$$

Para demonstrar com maior clareza como se chega na equação diferencial que representa a linha elástica, será necessário utilizar o conhecimento de equações paramétricas e geometria analítica (STEWART, 2007). Portanto, a partir da Figura 3 serão feitas algumas considerações. Nessa figura encontra-se uma função $y = f(x)$ e duas retas tangentes aos pontos P e Q, denominadas de TQ e TP, respectivamente.

Figura 3 – Representação esquemática de uma curvatura K.



Fonte: Adaptado de (GERE, 2010).

Na geometria analítica, uma curvatura K pode ser definida como sendo o módulo da derivada do ângulo θ entre o vetor tangente à curva em relação ao seu comprimento s , como mostra a seguinte

expressão (GRAY, ABBENA e SALAMON, 2006; SWOKOWSKI, 1995; GONÇALVES e FLEMMING, 2007):

$$K = \left| \frac{d\theta}{ds} \right| \quad (10)$$

Dessa forma, pela Figura 3, quando o ponto P tende ao ponto Q, temos uma variação de Δs e $\Delta\theta$, ou seja:

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} \quad (11)$$

Utilizando do conceito da derivada de uma função composta, a equação (11) pode ser reescrita como:

$$K = \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dx}} \quad (12)$$

Como a função tangente de uma função é a sua derivada, tem-se que:

$$\tan \theta = y' = \frac{dy}{dx} \quad (13)$$

$$\theta = \tan^{-1}(y') \quad (14)$$

Derivando $\theta = \tan^{-1}(y') = \tan^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ em relação a x , obtém-se

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{1 + [y']^2} \cdot y'' \quad , \text{ que resulta em:}$$

$$d\theta = \frac{dx \cdot y''}{1 + [y']^2} \quad (15)$$

Por definição, o cálculo do comprimento s de uma curva com parametrização pode ser feito pela seguinte expressão (GRAY, ABBENA e SALAMON, 2006; SWOKOWSKI, 1995; GONÇALVES e FLEMMING, 2007):

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad (16)$$

Considerando $t = x$, o comprimento s fica definido como:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dt \quad (17)$$

Derivando a equação (17), obtém-se:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (y')^2} \quad (18)$$

Logo, isolando o termo ds tem-se a seguinte expressão:

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (19)$$

A partir das substituições das equações (15) e (19) na equação (11), tem-se:

$$K = \frac{d\theta}{ds} = \frac{\frac{dx \cdot y''}{1 + [y']^2}}{\sqrt{1 + (y')^2} dx} = \frac{dx \cdot y''}{(1 + [y']^2) \cdot (1 + (y')^2)^{1/2} dx} \therefore$$

$$K = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}} \quad (20)$$

O resultado mostrado na equação (20) representa a função que descreve a linha elástica de curvatura K .

2.3 REPRESENTAÇÃO DA EQUAÇÃO DE LINHA ELÁSTICA EM FUNÇÃO DO MOMENTO FLETOR

Para construir uma relação entre a função da linha elástica e momento fletor (M), a qual é geralmente apresentada na sua forma final nos livros de Mecânica dos Materiais, relaciona-se primeiramente a curvatura K com o raio de curvatura ρ , utilizando equações paramétricas. A partir do conceito de derivada paramétrica, admite-se duas funções em que $x = f(t)$ e $y = g(t)$. Pela notação de Newton, tem-se que (GRAY, ABBENA e SALAMON, 2006; SWOKOWSKI, 1995; GONÇALVES e FLEMMING, 2007):

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} ; \frac{dy}{dt} = \dot{y} \text{ e } \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} ; \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}$$

Logo,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad \text{e}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) \cdot \frac{1}{\dot{x}} = \left(\frac{\frac{d}{dt} \dot{y} \cdot \dot{x} - \frac{d}{dt} \dot{x} \cdot \dot{y}}{\dot{x}^2} \right) \frac{1}{\dot{x}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\ddot{y} \cdot \dot{x} - \ddot{x} \cdot \dot{y}}{\dot{x}^3} \quad (21)$$

Se a equação (21) for substituída na equação (20), e sabendo que $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$,

obtém-se a seguinte resolução:

$$K = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}} = \frac{\frac{\ddot{y} \cdot \dot{x} - \ddot{x} \cdot \dot{y}}{\dot{x}^3}}{\left(1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{\frac{\ddot{y} \cdot \dot{x} - \ddot{x} \cdot \dot{y}}{\dot{x}^3}}{\left(1 + \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}\right)^{3/2}} = \frac{\frac{\ddot{y} \cdot \dot{x} - \ddot{x} \cdot \dot{y}}{\dot{x}^3}}{\left(\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}^2}\right)^{3/2}} = \frac{\frac{\ddot{y} \cdot \dot{x} - \ddot{x} \cdot \dot{y}}{\dot{x}^3}}{\frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\dot{x}^3}} =$$

$$K = \frac{\ddot{y} \cdot \dot{x} - \ddot{x} \cdot \dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \quad (22)$$

As equações paramétricas de uma circunferência e suas derivadas podem ser escritas em função do parâmetro t da seguinte forma (SWOKOWSKI, 1995; GONÇALVES e FLEMMING, 2007):

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos t ; y = \rho \sin t \\ \dot{x} &= -\rho \sin t ; \dot{y} = \rho \cos t \\ \ddot{x} &= -\rho \cos t ; \ddot{y} = -\rho \sin t\end{aligned}$$

Substituindo as equações paramétricas na equação (22), pode ser estabelecida uma relação entre o raio de curvatura ρ e a curvatura K , como mostra o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned}K &= \frac{\ddot{y} \cdot \dot{x} - \ddot{x} \cdot \dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{(-\rho \sin t) \cdot (-\rho \sin t) - (-\rho \cos t) \cdot (\rho \cos t)}{([-\rho \sin t]^2 + [\rho \cos t]^2)^{3/2}} = \frac{\rho^2 \sin^2 t + \rho^2 \cos^2 t}{(\rho^2 \sin^2 t + \rho^2 \cos^2 t)^{3/2}} \\ &= \frac{\rho^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)}{[\rho^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)]^{3/2}} = \frac{\rho^2 \cdot 1}{[\rho^2 \cdot 1]^{3/2}}\end{aligned}$$

$$K = \frac{1}{\rho} \quad (23)$$

Portanto, foi demonstrado pela equação (23) que a curvatura K , mencionada anteriormente no item 2.1, é o inverso do raio de curvatura ρ . A partir das equações (8), (20) e (23), é possível estabelecer a relação da função da linha elástica com o momento fletor (M), resultado na equação (9) anteriormente apresentada. Na prática, a deflexão de vigas horizontais e outros elementos estruturais é muito restrita, com valores muito pequenos em relação a sua dimensão e, portanto, os valores assumidos pela primeira derivada da função da linha elástica $v = f(x)$, são muito pequenos. O quadrado dessa primeira derivada, ou seja, o termo $(dv/dx)^2$, se torna desprezível e a equação (9) pode ser simplificada assumindo a seguinte forma (GERE, 2010; HIBBELER, 2010, DOWLING, 2012):

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (24)$$

A mecânica dos materiais demonstra que a derivada da função de momentos (M) fletores é igual a função dos esforços cortantes, que são cargas concentradas sobre a viga. Assim, a derivada

da função dos esforços cortantes é igual a função de carregamentos distribuídos ao longo da viga. Consequentemente, a função de linha elástica pode ser expressa também em função dos esforços cortantes, que pode ser encontrado na literatura como V , P ou Q , e das cargas distribuídas (w), ambas representadas anteriormente na viga da Figura 1. Logo, derivando duas vezes a equação (24) tem-se:

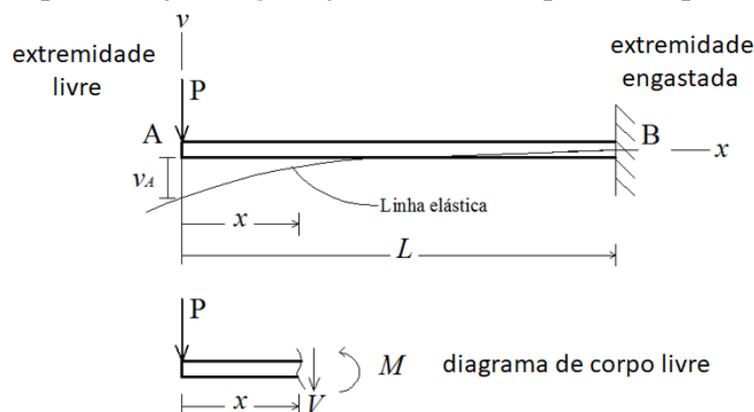
$$\frac{V}{EI} = \frac{d^3v}{dx^3} \quad (25)$$

$$\frac{-w}{EI} = \frac{d^4v}{dx^4} \quad (26)$$

2.4 APLICAÇÃO TEÓRICA DA LINHA ELÁSTICA PARA O CÁLCULO DA DEFLEXÃO

A seguir, será apresentado um exemplo teórico de aplicação da linha elástica para o cálculo da deflexão em um elemento estrutural esbelto proposto por (GERE, 2010). A Figura 4 representa uma viga esbelta engastada no ponto B, a qual encontra-se defletida pela ação da carga vertical P , aplicada para baixo no ponto A de sua extremidade livre. Com a aplicação da carga é possível perceber o comportamento da linha elástica pelo deslocamento do ponto A (v_A). Admitindo que a viga se encontra no regime elástico, se a carga P for removida a linha elástica perde a sua curvatura e retorna à posição coincidente sobre o eixo x , conforme discutido anteriormente no item 2.1.

Figura 4 – Representação esquemática de uma viga esbelta engastada.



Fonte: Adaptado de (HIBBELER, 2010).

Analisando o detalhe do diagrama de corpo livre em função de x , é possível obter o momento fletor (M) que atua no sentido anti-horário por meio da seguinte expressão:

$$M = -Px \quad (27)$$

O deslocamento v pode ser obtido substituindo a equação (27) na equação (24), seguido de duas integrações consecutivas, como mostra os resultados apresentados nas equações (28), (29) e (30).

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = -Px \quad (28)$$

$$EI \frac{dv}{dx} = -\frac{Px^2}{2} + C_1 \quad (29)$$

$$EI \cdot v = -\frac{Px^3}{6} + C_1x + C_2 \quad (30)$$

No resultado da equação (30) nota-se a presença de duas constantes C_1 e C_2 , que devem ser calculadas para a resolução da equação. A solução é utilizar as condições de contorno, que são valores conhecidos de pontos da curva na função da linha elástica, como por exemplo, valores de inclinações e deslocamentos. Nesse caso, existem tabelas que disponibilizam esses valores, os quais são diferentes para cada tipo de apoio (GERE, 2010; HIBBELER, 2010). No exemplo da Figura 4, o apoio da viga é um engaste. Para esse tipo de apoio, utiliza-se os valores tabelados de inclinação $dv/dx = 0$ e deslocamento $v = 0$, quando $x = L$. Logo, substituindo $dv/dx = 0$ na equação (29), calcula-se o valor de C_1 da seguinte forma:

$$EI \cdot 0 = -\frac{PL^2}{2} + C_1$$

$$C_1 = \frac{PL^2}{2} \quad (31)$$

Da mesma forma, substituindo $v = 0$ e $C_1 = PL^2/2$ na equação (30), quando $x = L$, calcula-se o valor de C_2 da seguinte forma:

$$EI \cdot 0 = -\frac{PL^3}{6} + C_1L + C_2$$

$$C_2 = \frac{PL^3}{6} - C_1L = \frac{PL^3}{6} - \frac{PL^2}{2} \cdot L$$

$$C_2 = -\frac{PL^3}{3} \quad (32)$$

Por fim, os valores calculados das constantes, em função de P e L, podem ser substituídos na equação (30) para calcular o deslocamento v da seguinte forma:

$$EI \cdot v = -\frac{Px^3}{6} + \frac{PL^2}{2}x - \frac{PL^3}{3}$$

$$v = \frac{P}{6EI}(-x^3 + 3L^2x - 2L^3) \quad (33)$$

A equação (33) é a função que expressa os valores dos deslocamentos da viga, em qualquer ponto x de seu comprimento. Portanto, para calcular o deslocamento apresentado no ponto A devido à carga P, basta substituir o valor de x na expressão por zero, uma vez que a variável x na Figura 4 cresce do ponto A para o ponto B. Assim, aplicando $x = 0$ na equação (33) tem-se a seguinte equação geral para o cálculo do deslocamento máximo em vigas engastadas (HIBBELER, 2010):

$$v = -\frac{PL^3}{3EI} \quad (34)$$

Na equação (34) o sinal negativo indica apenas que o deslocamento é para baixo, podendo os resultados serem adotados em módulo. Nessa equação, o valor numérico do deslocamento v pode ser obtido substituindo os termos: P = carga concentrada; L = comprimento da viga; E = módulo de Young e I = momento de inércia. É importante ressaltar que a equação do deslocamento também pode ser utilizada para estimar o valor do módulo de Young, quando houver incertezas sobre o tipo de material que constitui o elemento estrutural.

3 MATERIAIS E MÉTODOS (APLICAÇÃO PRÁTICA DA EQUAÇÃO DO DESLOCAMENTO)

Para demonstrar uma aplicação direta da equação de deslocamento, foi construído um experimento simples e didático, que representa um elemento estrutural na condição de engaste, conforme ilustra a Figura 5. Nesse experimento, o elemento estrutural consiste em uma barra de aço inox AISI 304, com comprimento igual a 585 mm e diâmetro de 12 mm. A barra de aço não apresentava em sua superfície polida nenhuma falha ou imperfeições visíveis. Para simular a condição de engaste, uma das extremidades da barra foi encaixada em um furo realizado no apoio vertical, sendo o local de encaixe posteriormente soldado.

Figura 5 – Barra de aço inox na condição de engaste.



Com exceção da barra de aço, toda a estrutura de suporte foi projetada em ferro fundido. Os efeitos da torção e dos deslocamentos laterais foram considerados desprezíveis, tendo em vista que a carga P foi aplicada verticalmente na extremidade livre sobre o eixo da barra. Esse procedimento foi realizado com o auxílio de um suporte confeccionado para o recebimento da carga. Nesse estudo foram utilizados diferentes valores para a carga P , os quais foram obtidos com anilhas metálicas (Figura 6).

A massa das anilhas foi aferida utilizando uma balança digital, sendo considerado como carga P o produto entre a massa da anilha e o valor da aceleração da gravidade ($9,8 \text{ m/s}^2$). A Tabela 1 sumariza os valores assumidos para a carga P em Newtons (N).

Figura 6 – Anilhas metálicas utilizadas para aplicação das cargas.



Tabela 1 – Valores utilizados para a carga P.

Anilha	Massa (kg)	Carga P (N)
1	0,5	4,9
2	1,0	9,8
3	1,5	14,7
4	2,0	19,6
5	2,5	24,5
6	3,0	29,4

Para estimar o deslocamento provocado pela carga P, na extremidade livre da barra foi instalado um apontador laser, que direciona um feixe monocromático de diâmetro igual a 1 mm para o zero de uma escala graduada. A escala foi instalada perpendicularmente ao deslocamento da barra, possibilitando mensurar o deslocamento vertical. A Figura 7 ilustra a indicação do deslocamento após a aplicação de uma carga P.

Figura 7 – Exemplo de um deslocamento vertical causado por uma carga P.



Depois de medir os deslocamentos provocados por diferentes valores de carga, os resultados foram comparados com aqueles obtidos a partir da substituição dos parâmetros P , L , E e I na equação

(34). Nesse caso, o valor do módulo de Young para um aço inox AISI 304 é de 193 GPa (MATWEB, 2020). Para calcular o momento de inércia (I) da barra foi utilizada a equação (35), que se aplica ao valor do momento de inércia para seções circulares de diâmetro (d) (GERE, 2010; HIBBELER, 2010).

$$I = \frac{\pi d^4}{64} \quad (35)$$

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A Tabela 2 apresenta os parâmetros utilizados para o cálculo dos deslocamentos na barra por meio da equação (34). Para comparar os resultados calculados com os valores estimados visualmente no experimento, foram realizadas aproximações para duas casas decimais depois da vírgula.

Tabela 2 – Parâmetros utilizados para o cálculo dos deslocamentos (v).

Comprimento L (mm)	Módulo de Young E (N/mm ²)	Momento de Inércia I (mm ⁴)	P (N)	v (mm)
585	193.000	1.017,87	4,90	1,66
			9,80	3,33
			14,70	4,99
			19,60	6,66
			24,50	8,32
			29,40	9,99

A partir dos resultados teóricos nota-se que os valores dos deslocamentos (v) são proporcionais aos valores das cargas, aumentando em torno de 1,66 mm para cada acréscimo de 4,90 N. Portanto, teoricamente, os valores calculados podem fornecer estimativas sobre os deslocamentos máximos de elementos estruturais, prevenido assim, situações de colapso ou danos permanentes pela deformação excessiva. Uma análise comparativa entre os resultados teóricos e os valores medidos experimentalmente pode ser feita por meio dos dados disponíveis na Tabela 3.

Tabela 3 – Valores dos deslocamentos calculados e medidos.

Anilha (N°)	Carga (N)	Deslocamento calculado v_C (mm)	Deslocamento medido v_M (mm)	Diferença (mm)
1	4,90	1,66	1,70	0,04
2	9,80	3,33	3,30	0,03
3	14,70	4,99	5,05	0,06
4	19,60	6,66	6,75	0,09
5	24,50	8,32	8,70	0,38
6	29,40	9,99	10,95	0,96

De acordo com os resultados da Tabela 3, nota-se que, praticamente, não há diferenças significativas entre os valores calculados e os valores medidos experimentalmente com as anilhas de 1 a 4, tendo em vista que as pequenas diferenças entre esses valores estão associadas à imprecisão visual de leitura na escala graduada. Entretanto, com o aumento crescente da carga, a diferença entre os valores aumenta e os valores dos deslocamentos se distanciam da proporcionalidade. Esse fato fica mais evidente observado os valores medidos com uso das anilhas 5 e 6.

Uma justificativa que pode explicar a perda da proporcionalidade nos deslocamentos medidos é o aumento excessivo da carga. Nesse caso, valores de cargas superiores a 19,60 N podem ocasionar uma curvatura acentuada da barra, comprometendo a leitura visual por meio do feixe pontual sobre a escala graduada. Além disso, também foi observado durante o experimento que a carga de 29,40 N ultrapassa o regime elástico da barra, sendo constatada uma pequena deformação permanente após a remoção da carga.

5 CONCLUSÃO

Nesse trabalho foi apresentado um experimento simples e didático, que demonstrou uma aplicação direta da equação de deslocamento para uma barra de aço com um apoio do tipo engaste. Analisando alguns conceitos físicos, tais como tensão, deformação e deslocamento, aliados também aos conhecimentos do cálculo diferencial e integral, foi possível demonstrar as etapas que antecedem a apresentação final da equação da linha elástica. O desenvolvimento matemático exposto de forma mais detalhada, oferece aos alunos da disciplina de Mecânica dos Materiais uma forma mais fácil de compreender o comportamento elástico dos elementos estruturais, no que se refere aos deslocamentos verticais provocados pela ação de carregamentos.

Com a realização de um experimento prático nas aulas, os alunos podem comprovar que os valores de deslocamentos calculados de forma teórica são muito próximos dos valores medidos experimentalmente, atestando assim, a confiabilidade do cálculo para a estabilidade dos elementos estruturais. Essa metodologia pode contribuir de forma positiva com o processo de ensino e aprendizagem, uma vez que os alunos podem analisar vários tipos de elementos estruturais, independente do material, da forma da seção transversal ou dos tipos de apoios. Além disso, o experimento realizado desperta o interesse dos alunos para as disciplinas de física e cálculo, ressaltando a importância dessas disciplinas para a formação dos futuros engenheiros.

REFERÊNCIAS

- DIAS, P. R. V. **Engenharia de custos: uma metodologia de orçamentação para obras civis**, 9ªed. Sindicato dos Editores de Livros: Rio de Janeiro, 2011.
- GERE, J. M. **Mecânica dos materiais**, Cengage Learning: São Paulo, 2010.
- R. C. HIBBELER, **Resistência dos materiais**. 7ªed. Pearson Education do Brasil: São Paulo, 2010.
- PCN+ Ensino Médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias, **Secretaria de Educação Média e Tecnológica–Brasília**, 2002.
- CHIQUETTO, M. J. O currículo de física do ensino médio no Brasil: discussão retrospectiva. **Revista e-curriculum**, v. 7, n. 1, 2011.
- LABURÚ, C. E. Seleção de experimentos de física no ensino médio: uma investigação a partir da fala de professores. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 10, n. 2, p. 161-178, 2005.
- GRAY, A.; ABBENA, E.; SALAMON, S. **Modern differential geometry of curves and surfaces with mathematica**. 3ªed. Chapman & Hall/CRC: London, 2006.
- SWOKOWSKI, E. W., **Cálculo com geometria analítica**. 2ªed. Makron Books: São Paulo, 1995.
- LEITHOLD, L. **O cálculo com geometria analítica**. v. 1., 3ªed. Harbra: São Paulo, 2002.
- DOWLING, N. E. **Mechanical behavior of materials: engineering methods for deformation, fracture, and fatigue**. 4ªed. Pearson: Boston, 2012.
- STEWART, J. **Cálculo**, v. 2. 5ªed. Thomson Learning: São Paulo, 2007.
- GONÇALVES, M. B.; FLEMMING, D. M. **Cálculo B: funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície**. 2ªed. Pearson Prentice Hall: São Paulo, 2007.
- PROPRIEDADES DE MATERIAIS. **MatWeb**. Disponível em: <www.matweb.com>. Acesso em: 28 ago. 2020.