

**Modelo para prever evolução do preço de commodities minerais com o tempo:  
Aplicação para o preço das Terras-Raras****Model for predicting mineral commodity price evolution over time:  
Application to the price of Rare Earths**

DOI:10.34117/bjdv6n9-400

Recebimento dos originais: 08/08/2020

Aceitação para publicação: 17/09/2020

**Marcos Flavio de Campos**Depto. de Eng. Mecânica EEIMVR  
UFF – Universidade Federal Fluminense  
Endereço: Volta Redonda RJ BRASIL  
E-mail: marcosflavio@id.uff.br**RESUMO**

Um modelo para prever a evolução do preço de commodities com o tempo é apresentado. O modelo baseia-se nas equações do modelo predador-presa, denominadas equações de Lotke-Volterra. O modelo ajuda a prever o momento correto para investimentos. Uma característica importante do modelo é prever a ocorrência de bolhas. A possibilidade de detecção de bolhas pode evitar a ocorrência de crises, ou pelo menos amenizar essas crises. O modelo é proposto para commodities minerais, mas pode ser aplicado para commodities agrícolas e também para a economia em geral.

**Palavras-chave:** commodities, Lotka-Volterra, minério, preços, investimento, terras-raras.

**ABSTRACT**

A model for predicting the evolution of commodity prices over time is presented. The model is based on the equations of the predator-company model, called Lotke-Volterra equations. The model helps to predict the right time for investments. An important feature of the model is to predict the occurrence of bubbles. The possibility of bubble detection can prevent the occurrence of crises, or at least soften them. The model is proposed for mineral commodities, but can be applied for agricultural commodities and also for the economy in general.

**Keywords:** commodities, Lotka-Volterra, ore, prices, investment, rare earths.

**1 INTRODUÇÃO**

O conceito de minério é puramente econômico. Ou seja, para um depósito ser considerado minério, é necessário que após a extração exista lucro. A oscilação do preço de minérios faz áreas de mineração deixarem de ser econômicas para extração. Ou seja, a possibilidade de prever a variação de preços de commodities minerais é importante, evitando prejuízos em investimentos.

Neste estudo, será empregado o modelo de Lotka-Volterra [1,2], um clássico modelo predador-presa, para descrever a evolução de preços. O modelo pode prever a formação de bolhas,

e evitar prejuízos no planejamento de minas. A analogia que existe em relação ao clássico modelo predador-presa é a seguinte:

Poucos produtores => Preço alto

Poucos predadores => Número de presas alto

Ou seja, presas representam preços, e predadores representam o número de produtores.

Quando o preço do minério decresce, algumas minas fecham pois não são economicamente viáveis. Essa é uma analogia com o predador do modelo Lotka-Volterra. Quando o preço está baixo, em seguida a mineradora entra em falência. Ou seja, o predador “morre”.

O modelo predador-presa é extensamente usado em biologia [3-5]. No presente estudo será utilizado para interpretar a evolução do preço das terras-raras, uma commodity mineral.

Um simples efeito oferta e procura não prevê a possibilidade de ocorrer crises econômicas, nem quando elas ocorrem. A vantagem do modelo predador-presa é poder prever a existência de crises econômicas e também quando elas podem ocorrer.

## 2 ANALOGIA COM O MODELO PREDADOR-PRESA

### 2.1 O MODELO PREDADOR-PRESA

As equações de Lotka-Volterra são um par de equações diferenciais de 1ª ordem, não-lineares.

As equações de Lotka-Volterra têm 6 parâmetros, dos quais 4 são constantes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ , e também 2 parâmetros de entrada, número de presas e de predadores.

Uma população de presas  $x$  aumenta a uma razão  $dx = \alpha x dt$  Eq. (1). Entretanto, a população de presas decresce proporcionalmente a  $dx = -\beta x y dt$ . Portanto, proporcional ao produto dos números de presas e predadores.

Analogamente, uma população de predadores diminui a uma proporção  $dy = -\gamma y dt$  Eq. (2). Essa população de predadores aumenta conforme  $dy = \delta x y dt$ , ou seja, proporcional ao produto dos números de presas e predadores.

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y \quad (2)$$

Como resultado, temos as equações diferenciais acopladas, Eq. (3) e (4).

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \quad (3)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta xy \quad (4)$$

As soluções variam conforme as constantes escolhidas. Pontos críticos acontecem quando as Eqs. (3) e (4) são nulas, ou seja, iguais a zero

$$\alpha - \beta x = 0 \quad (5)$$

$$-\gamma + \delta y = 0 \quad (6)$$

O número de presas está sempre um pouco à frente do número de predadores. Alguns exemplos são apresentados nas figuras 1 a 4. A Tabela I mostra os Parâmetros e respectivos significados.

Tabela I Parâmetros do modelo predador-Presa

Variável	Símbolo	Significado
Alpha	$\alpha$	Presa (Crescimento Populacional)
Beta	$\beta$	Presa (Mortalidade)
Gamma	$\gamma$	Predador (Mortalidade)
Delta	$\delta$	Produtor (Crescimento Populacional)
$X_0$	$X_0$	Presa (Valor inicial)
$Y_0$	$Y_0$	Predador (Valor inicial)

As Figuras 1 a 4 apresentam alguns resultados do modelo predador-presa. Os cálculos foram realizados conforme ref. [6], com os números da Tabela II. O resultado mais evidente das Figs. 1 a 4 é a previsão da formação de bolhas (ou pico de número de presas, ou pico do valor de preços). A alteração dos parâmetros na Tabela II afeta a periodicidade dessas bolhas, mas elas sempre ocorrem, próximas aos pontos críticos. Cada uma dessas bolhas representa uma crise econômica, pois em sequência às bolhas de aumento de número de presas ocorre a morte dos predadores, representando a falência dos produtores.

Tabela II Parâmetros para o modelo predador-Presa

Variável	Símbolo	Fig. 1	Fig. 2	Fig. 3	Fig. 4
Alpha	$\alpha$	1	1	1	1
Beta	$\beta$	1	1	0.02	0.02
Gamma	$\gamma$	1	1	0.8	0.8
Delta	$\delta$	1	1	0.08	0.02
$X_0$	$X_0$	10	5	100	100
$Y_0$	$Y_0$	5	5	5	5

Figura 1. Azul: presa (preço), amarelo: predador (produtores).

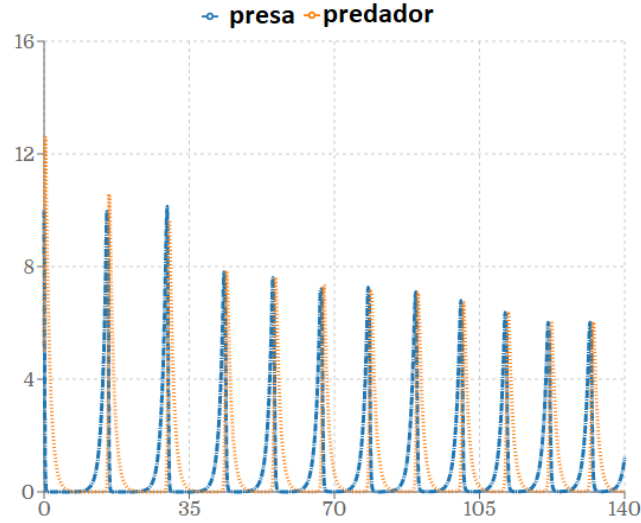


Figura 2 Azul: presa (preço), amarelo: predador (produtores).

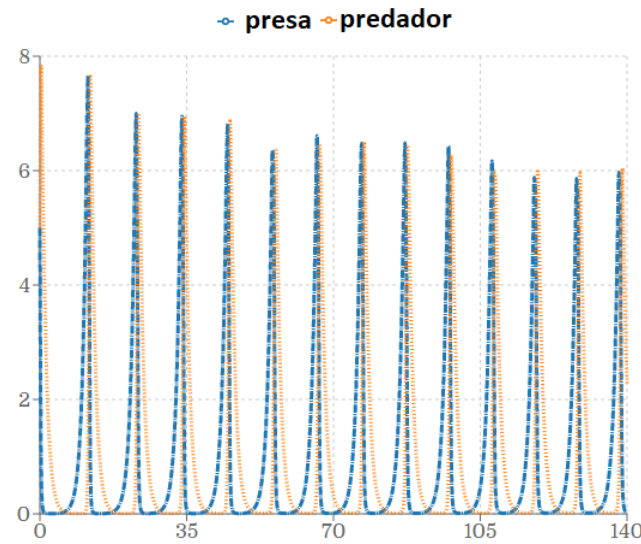


Figura 3 Azul: presa (preço), amarelo: predador (produtores).

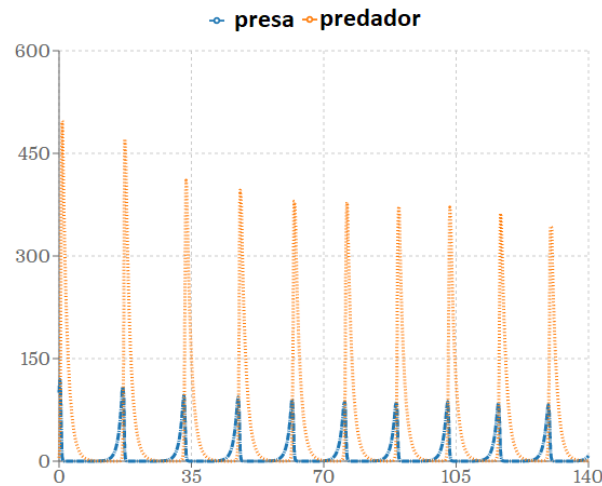
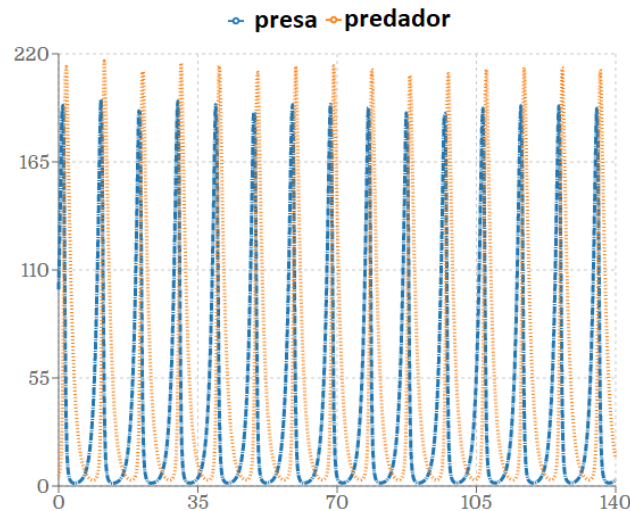


Figura 4 Azul: presa (preço), amarelo: predador (produtores).



A solução das eqs. (5) e (6) envolve a função W de Lambert, ver Eq. (7). B é uma constante.

$$y(t) = -\frac{\alpha}{\beta} W\left(-\frac{\beta}{\alpha} \exp\left(\frac{y x(t) - B}{\alpha}\right) x(t)^{-\frac{\gamma}{\alpha}}\right) \quad (7)$$

A expansão de W em torno de 0 por meio de séries de Taylor é dada pela Eq. (8).

$$W_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} z^n = z - z^2 + \frac{3}{2} z^3 - \frac{8}{3} z^4 + \frac{125}{24} z^5 - \dots \quad (8)$$

O modelo predador-presa pode ser facilmente estendido para mais de 2 componentes predador-presa. Um exemplo de modelo de três participantes é apresentado na Ref. [7].

## 2.2 EVOLUÇÃO DO PREÇO DE COMMODITIES MINERAIS

Petróleo é uma commodity mineral de grande relevância no século XX. Se o preço do petróleo está alto, métodos de extração mais dispendiosos tornam-se viáveis, por exemplo o petróleo do pré-sal, ou o gás de xisto. Ou seja, novos produtores (predadores) surgem quando o preço aumenta. Porém, quando o preço cai, muitos desses novos produtores vão à falência.

É essencial notar que o preço do petróleo é fortemente afetado por situações e eventos políticos, como a Guerra do Golfo em 1991 ou a formação da OPEP em 1973 [8,9]. Nesse caso, o modelo predador-presa continua válido, porém o parâmetro preço (ou X), deve ser alterado, para

cima. Ou seja, crises políticas também podem ser incorporadas no modelo, basta apenas alterar parâmetros do modelo em função do tempo.

O minério de ferro é outra commodity onde o modelo predador-presa pode ser aplicado. O preço do minério de ferro estava acima de 100 dólares a tonelada de 2010 a meados de 2014 [10], quando começou a declinar, devido ao aumento de produção (no Brasil e Austrália) e abertura de novas minas na Austrália, ver Fig. 5. Apenas recentemente o preço do minério de ferro chegou a 125 dólares a tonelada, o que não ocorria desde 2013.

Figura 5. Variação do preço de minério de ferro nos últimos dez anos [10].



O modelo prevê uma oscilação bastante severa de preços ao longo do tempo. Assim, algumas mineradoras talvez tenham de trabalhar em situação de prejuízo (“no vermelho”) por longos períodos, em uma situação de preços baixos. Porém, se conseguirem resistir aos períodos difíceis, existirão momentos de lucros.

Na prática, eventos políticos podem levar a subida de preços, por exemplo a crise do petróleo de 1973, invasão do Iraque. Porém a decisão de abertura de novas minas também é um evento que envolve política, seja de governos ou de grandes empresas.

No caso das terras-raras, a China é responsável por aproximadamente 90% da produção mundial [11], e os preços podem ser profundamente afetados por decisões políticas.

### 2.3 CASO DE ESTUDO: O PREÇO DAS TERRAS RARAS

As figuras 6 e 7 mostram um agudo aumento dos preços das terras-raras em 2010-2011. Esse aumento foi devido a uma crise entre Japão e China, sobre as ilhas Senkaku/Dyaoiu, ocorrido em setembro de 2010 [12].

Figura 6. Evolução dos preços de Dy, Eu e Tb de 2002 a 2017.

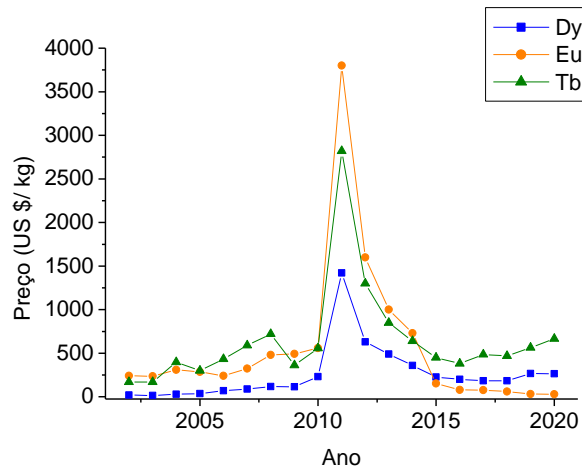
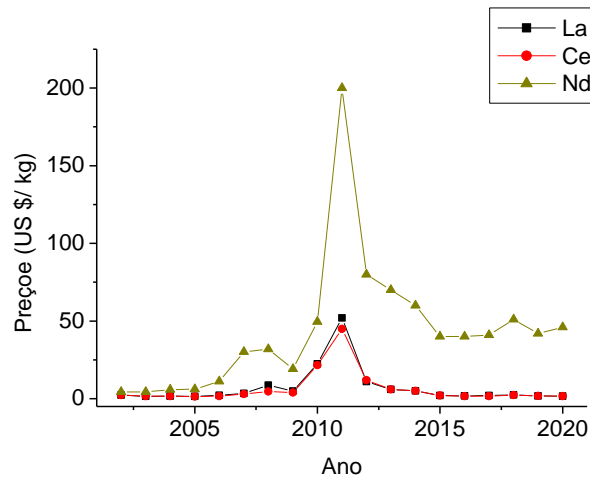


Figura 7. Evolução dos preços de La, Ce e Nd de 2002 a 2020.



Repentinamente, o preço aumentou, e isso pode ser incorporado no modelo, por exemplo, em X (variável que representa o número de presas ou preço), ver Tabela II.

O rápido aumento de preços ocasionou um forte movimento por substituição de terras-raras. Isso afetou bastante o preço do Európio, cuja principal aplicação é em fósforos luminescentes [13,14], ver Fig. 6. A substituição de lâmpadas fluorescentes por lâmpadas de LED (“light-emitting diode”) e a adoção de televisão de LED fez decrescer muito a demanda por európio.

Tabela III. Preços de óxidos de Terras-raras em maio/2017 e agosto de 2020 – FOB China

Óxido	Preço 2017 US\$(kg)	Preço 2020 US\$(kg)
Tb óxido > 99.99%	485	665
Dy óxido >99%	185	265
Eu óxido >99.99%	73	30
Ho óxido >99%	60	60
Pr óxido > 99%	51	41
NdPr (75/25) óxido >99%	41	43.5
Nd óxido > 99%	41	46
Er óxido > 99%	26	22.5
Gd óxido > 99%	13	26
Y óxido > 99.999%	3.2	3
Sm óxido > 99%	2	1.8
La óxido > 99.9%	2.1	1.65
Ce óxido > 99%	1.6	1.7
Óxidos pouco comercializados		
Lu óxido	700	614
Tm óxido	200-300	150-250
Yb óxido	20	14.5

A queda de preços após 2011 ocasionou a falência da Mina Mountain-Pass, na Califórnia. Além da queda de preço das terras-raras, outras razões para a falência são i) a inexistência de compradores de óxidos de terras-raras nos Estados Unidos. ii) os fabricantes de ímãs precisam de metal, e não de óxido, e os Estados Unidos não dispunham de produtores de terra-rara metálica.

Vale notar que a principal mina de terra-rara do mundo é Bayan Obo na China, a qual produz principalmente minério de ferro, sendo que as terras-raras são subproduto. A viabilidade econômica de minas baseadas exclusivamente em terras raras leves (La, Ce, Nd e Pr), caso de Mountain Pass, é muito difícil.

Os preços de maio/2017 e agosto/2020 para óxidos, metais e ferro-ligas são listados nas Tabelas III a VI, com ênfase para terras-raras e metais encontrados em minérios que contêm terras-raras. Os preços são essenciais para indicar a viabilidade econômica de empreendimentos em mineração. A rápida queda de preços ocasiona logo em seguida a falência de muitos produtores, como evidenciado no modelo nas Figs. 1 a 4.



Tabela IV. Preços de Metais em maio/2017 e agosto de 2020 – FOB China

<b>Metal</b>	<b>Preço 2017 US\$(kg)</b>	<b>Preço 2020 US\$(kg)</b>
Nd > 99%	51	58
Pr <sub>0.25</sub> Nd <sub>0.75</sub> > 99%	52	55
Pr	65	88
Dy	260	350
Tb	590	853
Sm	15	13
La	4.7	4.5
Ce	4.7	4.35
Co	54.5	33
Bi	11	6
Mn	2	1.6
Al	1.9	1.75
Ni	9.7	15
Ga	120	183
Cu	5.5	6.6
Zr	35	26
Ti esponja	8	9
Sn	20	18.4
Nb	30-40	50-60

As terras raras com preços mais altos nas Tabelas III e IV são aquelas empregadas em ímãs (Tb, Dy, Pr, Nd e Ho). Tértbio e disprósio são muito escassos, encontrados principalmente em minérios de argila iônica, e os preços de Tb e Dy têm aumentado muito por causa da demanda: esses elementos aumentam a temperatura de operação em ímãs NdPr-Fe-B. Os preços são ilustrativos. Nos dados das Tabelas III, IV, V e VI, existe facilmente uma flutuação de preços de 10% ao longo de um dado mês.

Tabela V. Preços de Ferro-ligas em maio/2017 e agosto de 2020 – FOB China

<b>Ferro-liga</b>	<b>Preço 2017 US\$(kg)</b>	<b>Preço 2020 US\$(kg)</b>
Ferro Boro (Fe-17%B)	4	4
Fe80Ho	64	62
Fe80Dy	180	263
Fe65Nb	20	35

Tabela VI. Preços de alguns óxidos em maio/2017 e agosto de 2020 – FOB China

<b>Óxido</b>	<b>Preço 2017 US\$(kg)</b>	<b>Preço 2020 US\$(kg)</b>
Ta <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	125	194
V <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	7	15
Sc <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	3000	942

## 2.4 ENERGIA INTERPRETADA COMO UMA COMMODITY

O modelo predador-presa pode ser aplicado a outras commodities, e o mais claro exemplo é a energia. Por exemplo, a redução do preço dos painéis solares poderá favorecer a produção de energia em locais próximos ao Equador, caso do Brasil [15]. O preço dos painéis solares manteve-se praticamente estáveis nos últimos 3 anos [16]. É necessária uma maior queda do preço dos painéis solares para viabilizar a energia solar em larga escala [15].

O Brasil tem ventos fortes estáveis e constantes, especialmente na região nordeste, o que faz com que o custo da energia eólica no Brasil seja um dos mais baixos do mundo [17]. Existe, portanto, uma competição entre energia renovável (eólica, solar, hidrelétrica) e energia não renovável (carvão, gás natural, petróleo, nuclear) baseada simplesmente no preço.

Essa relação entre preço da energia e preço de commodity é observada na prática: Nos Estados Unidos, os preços do petróleo e da energia elétrica seguem a mesma tendência [8]. O aumento de geração de energia solar poderá propiciar que a energia elétrica nos países tropicais seja mais barata [18], porém combustíveis fósseis como gás natural e petróleo no momento continuam sendo importantes, especialmente nas regiões mais setentrionais do hemisfério norte. Carvão está em significativo declínio [19], e muitas usinas a carvão nos Estados Unidos tem sido convertida para gás natural [20]. O alto preço da energia a carvão está tornando-a inviável [21].

Assim, o modelo predador-presa das Figs. 1 a 4 pode representar energia como uma única commodity, embora a energia seja produzida de diferentes maneiras (por exemplo: hidrelétrica, carvão, nuclear, eólica, solar). Energia eólica e energia solar fotovoltaica vem sendo apontadas como mais economicamente viáveis em vários estudos [22-24].

## 2.5 DISCUSSÃO

Não existe a mão invisível de Adam Smith. O que existe é um sistema do tipo predador-presa, onde companhias competem, e as companhias menos lucrativas acabam falindo, ou seja saem do mercado. As crises ocorrem na proximidade dos pontos críticos, conforme Eqs. (5) e (6).

A presa pode ser interpretada como o capital. Nos momentos de bolha, há capital sobrando, gerando os preços altos. Nessa situação o número de produtores aumenta, os preços reduzem, e crises econômicas ocorrem.

O setor imobiliário é o que dá mais claro indício de bolha na economia. O capital sobrando faz os preços de imóveis aumentar muito [25].

No presente estudo, o modelo foi apresentado de maneira a fazer previsões qualitativas. Em estudos futuros, existe o objetivo de usar o modelo para previsões quantitativas.

**3 CONCLUSÕES**

É discutida a analogia entre o modelo predador-presa e a evolução do preço das commodities. Decisões políticas podem afetar muito os preços de commodities, mas esse detalhe pode ser incorporado no modelo.

O modelo foi empregado para discutir a evolução de preços das terras-raras. O modelo permite compreender a formação de bolhas na economia. O uso do modelo pode evitar a realização de investimentos em momentos pouco propícios, o que resultaria em prejuízos e falências.

O modelo pode ser estendido para outras commodities e também para aspectos que representam vários setores da economia juntos, por exemplo a energia elétrica e seu preço.

**AGRADECIMENTOS**

FAPERJ, CNPq.

**REFERÊNCIAS**

- [1] Lotka, A.J., “Contribution to the Theory of Periodic Reaction”, *J. Phys. Chem.*, 14 (3), pp 271–274 (1910).
- [2] Volterra, V., *Variations and fluctuations of the number of individuals in animal species living together in Animal Ecology*, Chapman, R.N. (ed), McGraw–Hill, (1931).
- [3] Mimmo Ianneli, Andrea Pugliesi. *An Introduction to Mathematical Population Dynamics: Along the trail of Volterra and Lotka* [1 ed.], 2014.
- [4] S. Ahmad, L. M. Stamova. *Lotka-Volterra and Related Systems: Recent Developments in Population Dynamics*. 2013.
- [5] Y. Takeuchi. *Global Dynamical Properties of Lotka-Volterra Systems*. 1996.
- [6] <http://book.xogeny.com/behavior/equations/population/>
- [7] <http://book.xogeny.com/components/components/population/#population-components>
- [8] <http://www.motherjones.com/blue-marble/2011/05/oil-prices-charlie-sheen-electric-car>
- [9] <https://inflationdata.com/articles/charts/inflation-adjusted-oil-prices-chart/>
- [10] <https://tradingeconomics.com/commodity/iron-ore>
- [11] [https://minerals.usgs.gov/minerals/pubs/commodity/rare\\_earth/mcs-2017-raree.pdf](https://minerals.usgs.gov/minerals/pubs/commodity/rare_earth/mcs-2017-raree.pdf)
- [12] <http://www.nytimes.com/2010/09/23/business/global/23rare.html>
- [13] <http://www2.ifrn.edu.br/ojs/index.php/HOLOS/article/view/3753/1397>
- [14] [https://www.researchgate.net/publication/310267769\\_Recent\\_Developments\\_in\\_Brazilian\\_Rare-Earth\\_Industry](https://www.researchgate.net/publication/310267769_Recent_Developments_in_Brazilian_Rare-Earth_Industry)
- [15] <http://www2.ifrn.edu.br/ojs/index.php/HOLOS/article/view/4315/pdf>
- [16] <https://cleantechnica.com/2020/08/30/solar-panel-prices-have-dropped-off-cliff-sunk-into-ocean-solar-panels-9x-cheaper-than-in-2006/>
- [17] <https://about.bnef.com/blog/scale-up-of-solar-and-wind-puts-existing-coal-gas-at-risk/>
- [18] <https://www.ise.fraunhofer.de/content/dam/ise/de/documents/publications/studies/Photovoltaics-Report.pdf>
- [19] <https://www.theverge.com/2020/8/13/21366373/wind-solar-power-electricity-doubled-paris-climate-change-agreement>

- [20] <https://www.eia.gov/todayinenergy/detail.php?id=44636>
- [21] <https://www.lazard.com/perspective/lcoe2019>
- [22] <https://www.dw.com/en/cheap-solar-energy-prices-explained/a-53590607>
- [23] <https://www.forbes.com/sites/mikescott/2020/06/03/clean-power-continues-to-stretch-its-cost-benefits-over-coal/#5daed85d3b19>
- [24] <https://www.evwind.es/2020/06/25/solar-and-wind-power-now-cheaper-than-coal/75326>
- [25] M. Lewis. *The Big Short: Inside the Doomsday Machine*. 2010.