

**Avaliação da confiabilidade em resultados numéricos obtidos na análise matricial de estruturas****Assessment of reliability in numeric results obtained in matrix analysis of structures**

DOI:10.34117/bjdv6n9-213

Recebimento dos originais: 10/08/2020

Aceitação para publicação: 10/09/2020

**Stênio Mourão Lira da Silva**

Graduado em Engenharia Civil pela Universidade Estadual Vale do Acaraú  
Instituição: Universidade Estadual Vale do Acaraú  
Endereço: Travessa Doutor Guarani, 481, apto 101 – Derby Clube, Sobral – CE, Brasil  
E-mail: eng.steniolira@hotmail.com

**Audelis de Oliveira Marcelo Júnior**

Doutorando em Engenharia e ciência de materiais, Mestre em Engenharia e ciência de materiais e engenheiro civil, pela Universidade Federal do Ceará  
Instituição: Universidade Estadual Vale do Acaraú  
Endereço: Av. Francisco Sá, 2101, apto 704 – Jacarecanga, Fortaleza – CE, Brasil  
E-mail: audelisjr@yahoo.com.br

**Rodrigo Nunes de Souza**

Graduado em Engenharia Civil pela Universidade Estadual Vale do Acaraú  
Instituição: Universidade Estadual Vale do Acaraú  
Endereço: Rua das Pedrinhas, 290 - Pedrinhas, Sobral – CE, Brasil  
E-mail: rodrigons.1995@gmail.com

**Karen Furtado Timbó**

Graduado em Engenharia Civil pela Universidade Estadual Vale do Acaraú  
Instituição: Universidade Estadual Vale do Acaraú  
Endereço: Travessa Maria Dolores Gomes Furtado, 150 - Centro, Guaraciaba do Norte – CE, Brasil  
E-mail: karenft.eng@gmail.com

**José Aurisnando Marques**

Graduado em Engenharia Civil pela Universidade Estadual Vale do Acaraú  
Instituição: Universidade Estadual Vale do Acaraú  
Endereço: Rua Alagoas, 1272, apto 103 – Centro, Jijoca de Jericoacoara – CE, Brasil  
E-mail: jnandomarques@gmail.com

**Francisco Yuri Rios Osterno**

Graduado em Engenharia Civil pela Universidade Estadual Vale do Acaraú  
Instituição: Universidade Estadual Vale do Acaraú  
Endereço: Rua Edgard Silveira, 75 – Centro, Morrinhos – CE, Brasil  
E-mail: osterno.engcivil@gmail.com

**Edivaldo Pereira de Carvalho Neto**

Graduado em Engenharia Civil pela Universidade Estadual Vale do Acaraú  
Instituição: Universidade Estadual Vale do Acaraú  
Endereço: Rua Raimundo Nogueira, 215, Apto 103 – Coração de Jesus, Sobral – CE, Brasil  
E-mail: nt.edivaldo@gmail.com

**Newton Pontes Ribeiro**

Estudante de Engenharia Civil pela Universidade Estadual Vale do Acaraú  
Instituição: Universidade Estadual Vale do Acaraú  
Endereço: Avenida Vereador José da Mata e Silva, 77 – bairro, Sobral – CE, Brasil  
E-mail: newton281992@gmail.com

**RESUMO**

O objetivo deste estudo é a análise da confiabilidade dos resultados obtidos na resolução de matrizes de ordem superior em comparação ao esforço computacional entre dois dos principais métodos utilizados na resolução de sistemas lineares. Os métodos utilizados foram a Eliminação de Gauss, tido como exato, e Decomposição de Cholesky. A justificativa deste trabalho dá-se pela alta complexidade dos estudos nessa área, fazendo-se necessária a análise do erro e do esforço computacional por diferentes métodos de resolução de sistemas lineares, obtendo-se assim um modelo eficaz de análise estrutural computacional. Os dois métodos resolvem um sistema de equações lineares da forma  $Ax = B$ , usual na formulação analítica para o método dos deslocamentos, onde  $A$  é a matriz de rigidez,  $B$  é o vetor carga e  $x$  as deslocabilidades dos nós de uma estrutura reticulada aleatória. A linguagem de programação utilizada para o experimento foi a linguagem de código aberto Python 3.6, através do console Spyder 3.2. O pórtico plano analisado é uma estrutura de apenas três pavimentos, tendo como variável o número de pilares sendo gerada a análise de erro e demonstrado o tempo de processamento do estudo, essa metodologia utilizada mostra-se bastante satisfatória para o estudo por ser gerada uma matriz de rigidez de ordem superior positiva definida. Além disso, os resultados obtidos pelo programa desenvolvido coincidem com os valores obtidos em softwares conceituados que calculam as deslocabilidades dos nós em um pórtico plano, apontando a eficácia do programa estrutural desenvolvido.

**Palavras-chave:** Sistemas Lineares, Métodos Numéricos, Análise de Erro.

**ABSTRACT**

The aim of this study is to analyze the reliability of the results obtained in solving higher order matrices compared to the computational effort between two of the main methods used in solving linear systems. The methods used were Gaussian Elimination, taken as exact, and Cholesky Decomposition. The justification for this work is given by the high complexity of studies in this area, making it necessary to analyze the error and computational effort by different methods of solving linear systems, thus obtaining an effective model of structural computational analysis. Both methods solve a system of linear equations of the form  $Ax = B$ , usual in the analytical formulation for the displacement method, where  $A$  is the stiffness matrix,  $B$  is the load vector and  $x$  the displacements of the nodes of a random lattice structure. The programming language used for the experiment was the open source language Python 3.6, through the Spyder 3.2 console. The planar portico analyzed is a structure with only three floors, with the number of pillars being variable being generated the error analysis and demonstrating the processing time of the study, this methodology used is shown to be quite satisfactory for the study because a matrix is generated of defined positive higher order stiffness. In addition, the results obtained by the developed program coincide with the values obtained in reputable software that calculate the displacement of the nodes in a flat frame, pointing out the effectiveness of the structural program developed.

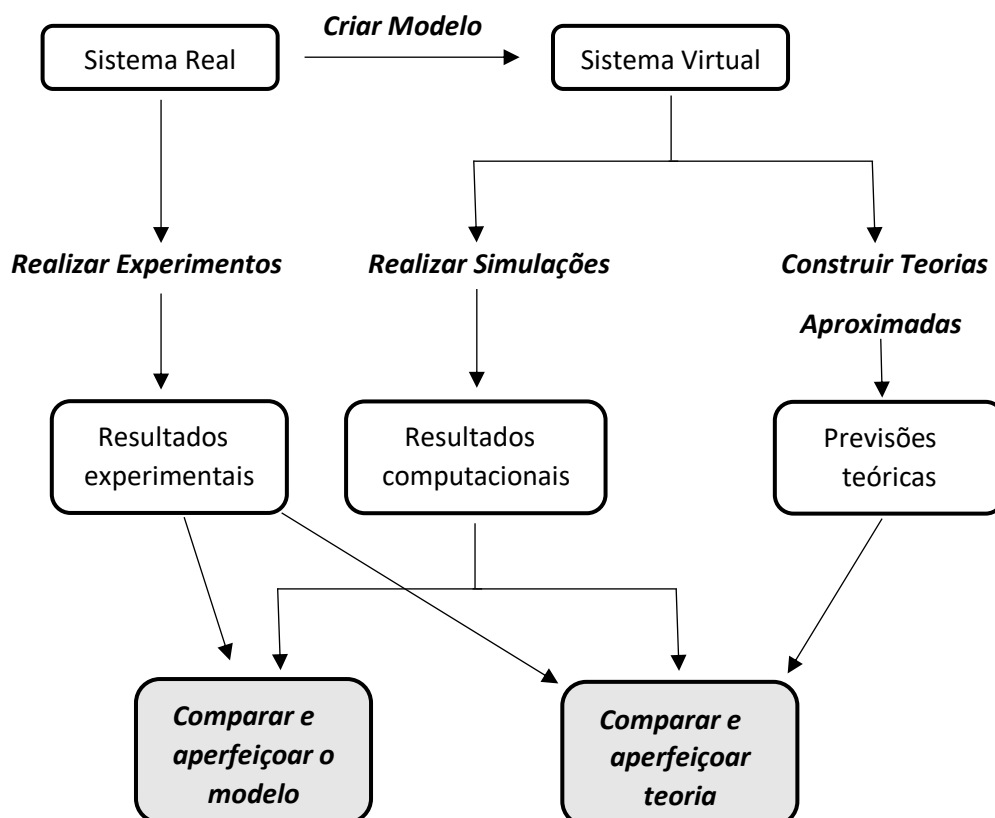
**Keywords:** Linear systems, Numerical methods, Error Analysis.

## 1 INTRODUÇÃO

A engenharia sempre conviveu com grandes desafios, buscando meios para contornar eventuais problemas que surjam devido a concepção estrutural, dessa forma, a análise computacional se mostrou grande aliada para execução de diferentes métodos construtivos.

Como forma de viabilizar a concepção de variadas estruturas, são utilizados programas que permitem o desenvolvimento de algoritmos, fixando-se características e variáveis intrínsecas do elemento, o que gera resultados com alta confiabilidade. Assim, softwares foram desenvolvidos especialmente para permitir a análise computacional de estruturas complexas, através do desenvolvimento de algoritmos elaboradas em um curto período de tempo e com esforço intelectual bem menor em comparação aos métodos tradicionais.

Figura 1: Interação entre modelo, realização de experimentos, simulações computacionais e aplicação de teorias.



Fonte: Adaptado de ALLEN & TILDESLEY (1989).

O presente trabalho aborda resoluções de sistemas de equações lineares, que aparecem frequentemente na engenharia para resolução dos mais diversos tipos de problemas estruturais. Em

análise computacional de estruturas geralmente é discutido como otimizar a eficiência da análise quando existem certas restrições relacionadas, por exemplo, à disponibilidade de tempo.

### 1.1 O PROBLEMA DA PESQUISA

Tendo como justificativa deste trabalho a alta complexidade dos estudos nessa área, fazendo-se necessária a análise do erro e do esforço computacional por diferentes métodos de resolução de sistemas lineares, obtendo-se assim um modelo eficaz de análise estrutural computacional. Com o avanço das ferramentas computacionais, em conjunto dos métodos numéricos este estudo apresenta uma análise computacional da resolução de matrizes de ordem superior com uso de um algoritmo desenvolvido em linguagem Python 3.6, comparando os resultados numéricos com obtidos na literatura através de formulações teóricas.

### 1.2 JUSTIFICATIVA

Com a grande necessidade de buscar formas de reduzir o tempo de processamento na solução de problemas estruturais comumente presentes na engenharia, softwares de cálculo estrutural são utilizados e requerem computadores cada vez mais potentes para a obtenção de soluções com alto nível de confiabilidade e eficiência.

### 1.3 OBJETIVOS

O objetivo deste estudo é a análise da confiabilidade dos resultados obtidos na resolução de matrizes de ordem superior em comparação ao esforço computacional entre dois dos principais métodos utilizados na resolução de sistemas lineares, a Eliminação de Gauss e Decomposição de Cholesky.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1 MÉTODOS NUMÉRICOS

#### 2.1.1 Introdução aos Métodos Numéricos

De acordo com Santos (2008), uma forma de resolver um sistema linear é substituir o sistema inicial por outro que tenha o mesmo conjunto solução do primeiro, mas que seja mais fácil de resolver. O outro sistema é obtido depois de aplicar sucessivamente uma série de operações, que não alteram a solução do sistema.

Sistemas de equações lineares aparecem frequentemente em matemática aplicada, economia e engenharia. Deste modo, um sistema de equações lineares é um conjunto de equações lineares envolvendo o mesmo conjunto de variáveis. A solução de um sistema linear é dada por um conjunto

de valores que ao mesmo tempo satisfaz todas as equações do sistema. O resultado pode ser obtido a partir de métodos diretos e métodos iterativos.

Os métodos diretos são caracterizados por uma quantidade definida e sequenciada de operações, pela qual a solução do sistema é obtida. Os Métodos Iterativos caracterizam-se pela busca do resultado de um sistema linear através de etapas (iterações). Para cada iteração é encontrada uma aproximação para a solução do sistema. A sequência de aproximações tende para a solução exata quando o número de etapas tende a infinito.

### 2.1.2 Eliminação de Gauss

O método da Eliminação de Gauss permite a resolução de sistemas lineares através da transformação da matriz estendida do sistema analisado em uma matriz triangular superior, de resolução imediata. Após a triangularização do sistema, a solução pode ser obtida por substituição regressiva. Para isso, são utilizadas operações que anulam os elementos localizados abaixo da diagonal principal da matriz estendida, sendo elas:

1. Multiplicação de uma linha por uma constante não nula.
2. Substituição de uma linha por ela mesma somada a um múltiplo de outra linha.
3. Permutação de duas linhas.

De acordo com CUNHA (2000), É importante que a eliminação seja feita de forma sistemática, pois assim podemos elaborar algoritmos para os programas computacionais.

Considerando um sistema linear qualquer de ordem  $n$ , em que o número de equações é igual ao número de incógnitas, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{11} \cdot X_1 + A_{12} \cdot X_2 + A_{13} \cdot X_3 + \dots + A_{1j} \cdot X_j = b_1 \\ A_{21} \cdot X_1 + A_{22} \cdot X_2 + A_{23} \cdot X_3 + \dots + A_{2j} \cdot X_j = b_2 \\ A_{31} \cdot X_1 + A_{32} \cdot X_2 + A_{33} \cdot X_3 + \dots + A_{3j} \cdot X_j = b_3 \\ \vdots \\ A_{i1} \cdot X_1 + A_{i2} \cdot X_2 + A_{i3} \cdot X_3 + \dots + A_{ij} \cdot X_j = b_j \end{array} \right.$$

$$\left( \begin{array}{cccccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1j} & b_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2j} & b_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & A_{3j} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & A_{i3} & \dots & A_{ij} & b_j \end{array} \right)$$

Seja  $Ax = b$  um sistema linear, a sua resolução pelo método de Gauss segue as seguintes etapas:

1. Obtenção da matriz aumentada  $\left( \begin{array}{c} A \\ b \end{array} \right)$  do sistema;
2. Transformação da matriz aumentada em uma matriz triangular superior;
3. Resolução do sistema linear equivalente, obtido a partir da matriz triangular superior, utilizando retro substituição.

Após a obtenção da matriz aumentada  $\left( \begin{array}{c} A \\ b \end{array} \right)$ , procede-se a triangularização, para isso são executados os seguintes procedimentos:

- Definir os multiplicadores

$$m_{ij} = \frac{\text{elemento que se quer zerar}}{\text{pivô}}$$

pivô = elemento da diagonal principal localizado na mesma coluna do elemento que se quer zerar ( $A_{ij}$ , com  $i=j$ ).

Assim,

$$m_{i1} = \frac{A_{i1}}{A_{11}}, m_{i2} = \frac{A_{i2}}{A_{22}}, m_{i3} = \frac{A_{i3}}{A_{33}}, \dots, m_{ij} = \frac{A_{ij}}{A_{jj}} \quad (i \neq j), \text{ com } (i = 2, 3, \dots, n) \text{ e } (j = 1, 2, \dots, n)$$

- Zerar todos os elementos abaixo da diagonal principal ( $A_{ij}$ , com  $i=j$  para  $i, j=1, 2, \dots, n$ );

$$A_{21}' = A_{21} - m_{21} * A_{11}$$

$$A_{31}' = A_{31} - m_{31} * A_{11}$$

$$A_{32}' = A_{32} - m_{32} * A_{22}$$

⋮

$$A_{ij}' = A_{ij} - m_{ij} * (\text{pivô}) \quad \text{com } (i= 2, 3, \dots, n) \text{ e } (j= 1, 2, \dots, n)$$

A matriz triangular superior fica da seguinte forma:

$$(A/b) = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1j} & b_1 \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2j} & b_2 \\ 0 & 0 & A_{33} & \dots & A_{3j} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{jj} & b_j \end{pmatrix}$$

O novo sistema linear obtido a partir da matriz triangular,

$$\begin{cases} A_{11} \cdot X_1 + A_{12} \cdot X_2 + A_{13} \cdot X_3 + \dots + A_{1j} \cdot X_j = b_1 \\ A_{22} \cdot X_2 + A_{23} \cdot X_3 + \dots + A_{2j} \cdot X_j = b_2 \\ A_{33} \cdot X_3 + \dots + A_{3j} \cdot X_j = b_3 \\ \vdots \\ A_{jj} \cdot X_j = b_j \end{cases}$$

Dessa forma, basta fazer uma retro substituição, iniciando pela última equação e substituindo a incógnita encontrada na equação imediatamente anterior, até que se tenham os valores de todas as incógnitas.

Caso exista algum elemento da diagonal principal que seja nulo, é feita a permutação entre linhas, até que o coeficiente seja diferente de zero.

### 2.1.3 Decomposição de Cholesky

Segundo TREFETHEN & BAU (1997), se  $A$  é uma matriz positiva definitiva hermitiana, a maneira padrão de resolver um sistema de equações  $Ax = b$  é por Decomposição de Cholesky.

O método da decomposição de Cholesky consiste em decompor uma matriz  $A$  (simétrica e definida positiva) na forma  $A = L \cdot L^t$ , sendo  $L$  uma matriz triangular inferior em que todos os elementos da diagonal principal são positivos.

Sabendo que a matriz  $A$  é definida positiva somente se for simétrica ( $A = A^t$ ) e se  $x^t Ax > 0 \forall x \neq 0$ .

Sabendo que  $A = L \cdot L^t$ , temos:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1j} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & \dots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{i1} & L_{i2} & \dots & L_{ij} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} & \dots & L_{i1} \\ 0 & L_{22} & \dots & L_{i2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & L_{ij} \end{pmatrix}$$

Determinando os elementos da matriz L:

→ COLUNA 1

$$A_{11} = L_{11} * L_{11} \rightarrow L_{11} = \sqrt{A_{11}}$$

$$A_{21} = L_{21} * L_{11} \rightarrow L_{21} = A_{21} / L_{11}$$

$$A_{31} = L_{31} * L_{11} \rightarrow L_{31} = A_{31} / L_{11}$$

⋮

$$A_{i1} = L_{i1} * L_{11} \rightarrow L_{i1} = A_{i1} / L_{11}$$

→ COLUNA 2

$$A_{22} = L_{21} * L_{21} + L_{22} * L_{22} \rightarrow L_{22} = \sqrt{A_{22} - (L_{21})^2}$$

$$A_{32} = L_{31} * L_{21} + L_{32} * L_{22} \rightarrow L_{32} = [A_{32} - (L_{31} * L_{21})]$$

⋮

$$A_{i2} = L_{i1} * L_{21} + L_{i2} * L_{22} \rightarrow L_{i2} = A_{i2} - [(L_{i1} * L_{21}) / L_{22}]$$

→ COLUNA J

$$A_{ij} = L_{i1} * L_{1j} + L_{i2} * L_{2j} + \dots + L_{ij} * L_{ij} \rightarrow L_{ij} = A_{ij} - [(L_{i1})^2 + (L_{i2})^2 + \dots + (L_{i-1,j-1})^2]$$

Encontrados todos os elementos que compõem a matriz L, basta aplicar a condição  $A = L * L^t$ , solucionando o sistema linear.



## 2.2 ANÁLISE DE ESTRUTURAS

### 2.2.1 Introdução à análise de estruturas

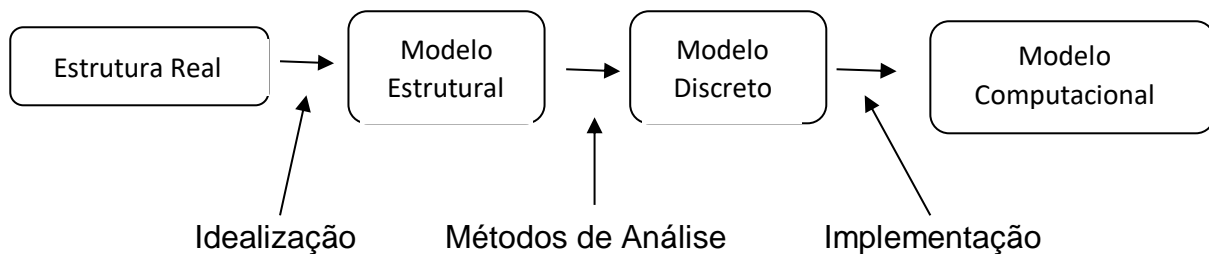
A análise de estruturas consiste na previsão do comportamento real da estrutura, considerando todos os cenários possíveis quanto a combinação esforços e carregamentos atuantes na estrutura através da concepção de modelos teóricos. Sendo assim, a análise de estruturas é uma etapa essencial da elaboração de um projeto estrutural, sabendo que os modelos teóricos serão utilizados como ferramentas para determinar as reações nos apoios, esforços internos, os deslocamentos e rotações atuantes na estrutura quando submetida a um determinado carregamento externo.

A análise estrutural moderna trabalha com quatro níveis de abstração com relação a estrutura que está sendo analisada, sendo o primeiro o mundo físico, isto é, o nível que representa a estrutura real tal como é construída.

O segundo nível de abstração da análise estrutural é o modelo analítico utilizado para representar matematicamente a estrutura que está sendo analisada. Esse modelo é chamado de modelo estrutural ou modelo matemático e incorpora todas as teorias e hipóteses elaboradas para descrever o comportamento da estrutura em função das diversas solicitações.

O terceiro nível de abstração utilizado na análise estrutural é o modelo discreto, que é concebido dentro das metodologias de cálculo dos métodos de análise. (MARTHA, 2010)

Figura 2: Quatro níveis de abstração referentes a uma estrutura na análise estrutural.



Fonte: MARTHA (2010)

### 2.2.2 Leis constitutivas dos materiais

Com base em estudos e análise da composição real dos materiais, as propriedades macroscópicas dos materiais estudados devem ser respeitadas. Para o desenvolvimento deste estudo, os materiais constituintes do pórtico plano a ser analisado são considerados como lineares elásticos. Segundo MARTHA (2010), no contexto de uma análise com pequenos deslocamentos, a tensão normal associada a um esforço axial é dada pela razão entre o valor do esforço e a área da seção transversal, e a deformação normal é a razão entre o alongamento da barra e seu comprimento original. Assim, para barras verticais, tem-se:

$$\frac{N_1}{A} = E \frac{d_1}{l} \quad (1)$$

e, para barras inclinadas, tem-se:

$$\frac{N_2}{A} = E \frac{d_2}{l/\cos\theta} \quad (2)$$

### 2.2.3 Método dos deslocamentos

Quando uma estrutura hiperestática é estudada, não é possível determinar as reações e deslocamentos da estrutura apenas com as condições de equilíbrio, se faz necessário a utilização de métodos para a análise da estrutura. O que nada mais consiste em criar um sistema de equações possível e determinado, constituída por variáveis presentes na estrutura estudada fazendo que qualquer reação, deslocamento ou força interna possa ser determinada. Os métodos básicos da análise de estruturas são o Métodos das Forças e o Método dos Deslocamentos.

O método das Forças não foi utilizado para o presente trabalho por requerer uma grande quantidade de casos virtuais, tornando-o ineficiente para o problema.

O método dos deslocamentos ou método da rigidez consiste em "determinar, dentro do conjunto de soluções os deslocamentos que satisfazem as condições de compatibilidade, qual das soluções faz com que as condições de equilíbrio também sejam satisfeitas." MARTHA (2010)

Em uma estrutura reticulada o número de incógnitas será definido pelo número total de "graus de liberdade" (GL) de todos os nós da estrutura, sendo o grau de liberdade do nó a sua direção de possível deslocamento.

Para a aplicação do método dos deslocamentos, primeiramente deve ser adotado um modelo teórico e faz-se a introdução de vínculos fictícios, tornando a estrutura cinematicamente determinada. Assim, as cargas aplicadas nas barras são consideradas de forma a calcular os esforços causados na estrutura fixa (sistema hipergeométrico).

Em seguida são estabelecidos os deslocamentos unitários nos nós e calculados os esforços decorrentes destes na estrutura e, através da superposição de efeitos são calculados os esforços totais que devem estar em equilíbrio com as forças externas aplicadas nos nós. Por fim, chega-se a um sistema de equações de equilíbrio de forças em torno dos nós da estrutura na forma de

$$\{\beta_{i0}\} + [K_{ij}] \cdot \{d_i\} = 0 \quad (3)$$

No caso de um pórtico plano, cada ponto nodal apresenta três graus de liberdade (dois deslocamentos lineares e uma rotação) e uma seção genérica apresenta três esforços internos, a saber: um esforço normal, um esforço cortante e um momento fletor.

Dessa forma, o Método dos Deslocamentos foi utilizado, visto que no caso de estruturas reticuladas o único sistema principal possível é obtido pela fixação de todos os nós.

A matriz de rigidez de um pórtico plano será sempre quadrada, simétrica, positiva e definida, sendo sua dimensão equivalente ao número de graus de liberdade de cada elemento analisado na estrutura. Sabendo que cada elemento da estrutura apresenta dois nós e, que cada nó apresenta 3 graus de liberdade, a matriz de rigidez do elemento analisado será sempre de ordem seis ( $K_{6 \times 6}$ ).

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix}$$

Segundo Martha (2016), é possível relacionar as deslocabilidades e forças generalizadas locais de uma barra no sistema local com as deslocabilidades e forças generalizadas no sistema global pela equação

$$\{d'\} = [R] \cdot \{d\} \quad (4)$$

Sendo  $[R]$  uma matriz de transformação por rotação:

$$R = \begin{bmatrix} + \cos \theta & + \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - \sin \theta & + \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + \cos \theta & + \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - \sin \theta & + \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz de transformação por rotação é ortogonal, isto é, sua inversa é igual a sua transposta:  $[R]^{-1} = [R]^T$ . Por causa disso, pode-se obter as deslocabilidades no sistema global em função das deslocabilidades no sistema

local a partir da transposta da matriz  $[R]$ :

$$\{d\} = [R]^T \cdot \{d'\} \quad (5)$$

### 3 METODOLOGIA – ANÁLISE COMPUTACIONAL

A análise computacional deste trabalho visa estudar qual o método algébrico mais eficiente computacionalmente na solução de estruturas reticuladas e comparar os resultados. O algoritmo foi desenvolvido na linguagem de programação Python 3.6 através do software Spyder 3.1.2.

A análise computacional foi realizada indicando qual o método mais eficiente na solução de sistemas lineares na forma de  $ax = b$  comparando esforço computacional e erro relativo.

A matriz de rigidez cresce de acordo com o grau de liberdade restringido pela variável T, na ordem de 3. Portanto, quando  $T = 1$  a ordem da matriz será  $3 \times 3$ , para  $T = 2$  temos a ordem de  $6 \times 6$ . Assim, para  $T = n$  teremos uma matriz de ordem  $3n \times 3n$ . De forma similar, a Matriz de Carregamento é gerada de acordo com o grau de liberdade. Assim, para  $T = n$  tem-se uma matriz com o formato  $3n \times 1$ .

Para a estimativa de erro no presente trabalho foi considerado uma análise de erro absoluto entre os resultados obtidos pela Eliminação de Gauss e a Decomposição de Cholesky. O erro absoluto é tido da diferença entre o valor um número  $x$  e seu valor aproximado  $\bar{x}$  obtido a partir de um procedimento numérico.

$$E_{a_x} = x - \bar{x} \quad (5)$$

Figura 3: Fluxograma de funcionamento do algoritmo.



Fonte: Próprio autor.

### 3.1 ANÁLISE ALGÉBRICA

O algoritmo desenvolvido para esta análise apresenta nos dados de saída os resultados obtidos na solução e comparação entre os métodos de solução de sistemas lineares citados anteriormente aplicados à uma estrutura de pórtico plano de dimensão variável sujeita a carregamentos nodais.

Na primeira etapa é definido o formato da estrutura na forma de quantidade de vigas e pilares, estes com dimensões pré-definidas gerando assim a matriz de rigidez global. Também é feito o cálculo dos carregamentos nodais sob a qual a estrutura estará sendo afetada.

Na segunda etapa é feita a solução pelo método da Rigidez Direta através das soluções algébricas diretas da Eliminação de Gauss e Decomposição de Cholesky.

Na terceira etapa é feita uma comparação do erro relativo percentual e tempo de processamento entre os valores deslocabilidades obtidas com estes métodos.

O erro relativo percentual foi calculado da seguinte forma:

$$e_{relativopercentual} = \frac{|e_{estudado} - e_{referência}|}{e_{referência}} \cdot 100 \quad (6)$$

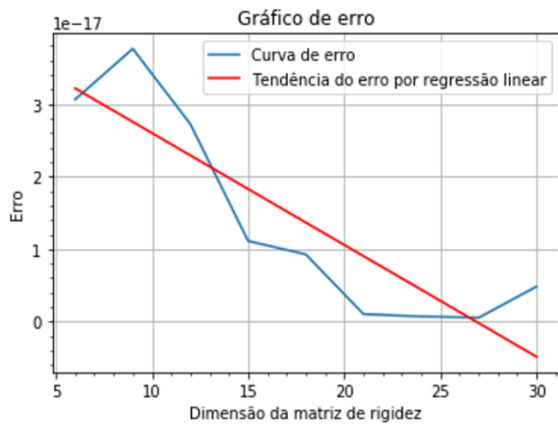
Na quarta e última etapa o algoritmo gera gráficos para uma melhor visualização e demonstração dos resultados obtidos.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

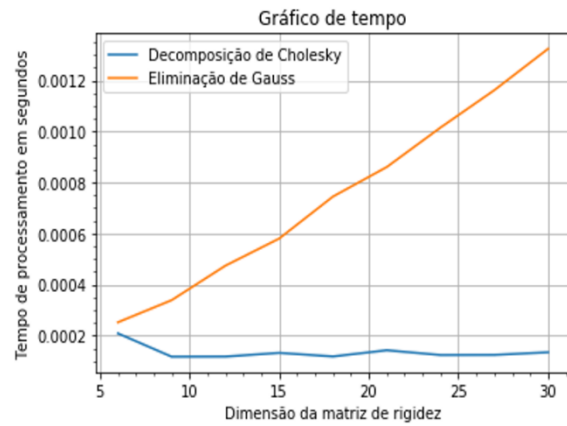
Os resultados foram organizados em gráficos de acordo com o método numérico utilizado na solução da estrutura, e são apresentados a seguir.

O método da Decomposição de Cholesky mostrou-se bastante eficiente computacionalmente por ter um tempo de processamento bem menor que da Eliminação de Gauss e por apresentar um erro relativo percentual na casa de  $1 \cdot 10^{-17}$ .

Figura 4: Resultados para T = 10. (a) Gráfico de Erro Absoluto. (b) Gráfico de Tempo de Processamento.

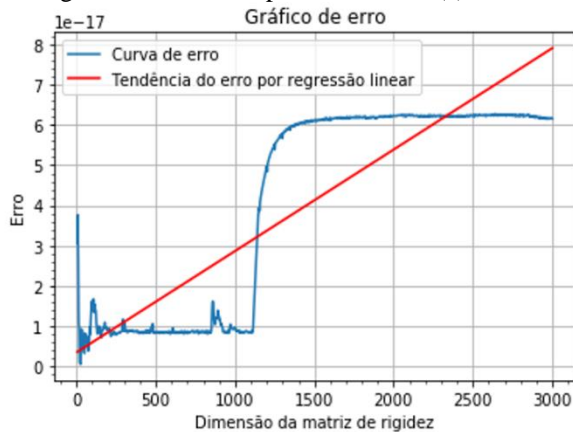


(a)

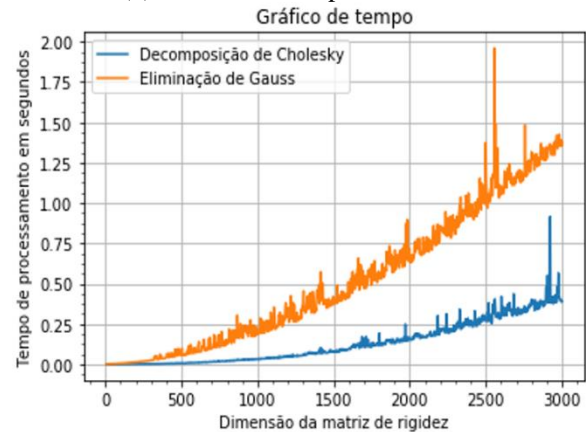


(b)

Figura 5: Resultados para T = 1000. (a) Gráfico de Erro Absoluto. (b) Gráfico de Tempo de Processamento.



(a)



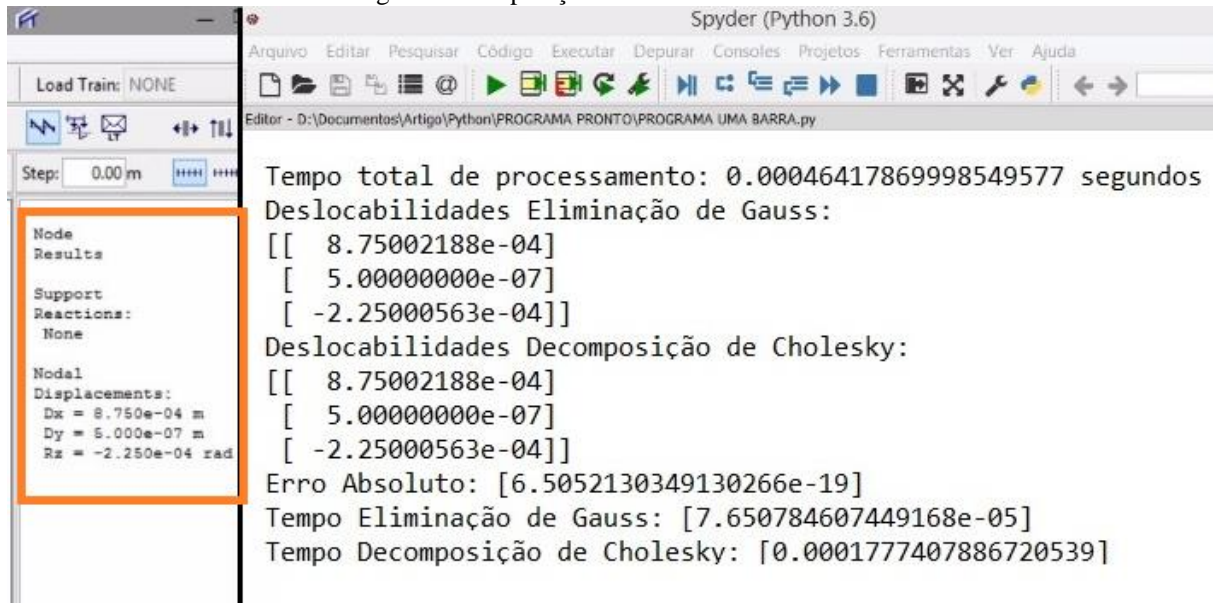
(b)

Tabela 1 – Tempo de Processamento e Erro Máximo.

T	Tempo de Processamento Total (s)	Erro Máximo	Intervalo da Matriz de Rigidez
T = 10	0,019	$3,81 \times 10^{-17}$	3 – 30
T = 25	0,115	$0,92 \times 10^{-17}$	30 – 75
T = 50	0,580	$1,69 \times 10^{-17}$	75 – 150
T = 100	2,389	$1,22 \times 10^{-17}$	150 – 300
T = 250	18,892	$1,03 \times 10^{-17}$	300 – 750
T = 500	116,252	$6,17 \times 10^{-17}$	750 – 1500
T = 1000	769,559	$6,30 \times 10^{-17}$	1500 - 3000

Para a validação dos resultados obtidos através do software desenvolvido foi feita uma parametrização com software já validado academicamente (ftool). Os resultados apontados para ambos bateram, comprovando a eficácia do programa desenvolvido.

Figura 6: Comparação de Resultados com Ftool.



```

Tempo total de processamento: 0.00046417869998549577 segundos
Deslocabilidades Eliminação de Gauss:
[[ 8.75002188e-04]
 [ 5.00000000e-07]
 [-2.25000563e-04]]
Deslocabilidades Decomposição de Cholesky:
[[ 8.75002188e-04]
 [ 5.00000000e-07]
 [-2.25000563e-04]]
Erro Absoluto: [6.5052130349130266e-19]
Tempo Eliminação de Gauss: [7.650784607449168e-05]
Tempo Decomposição de Cholesky: [0.0001777407886720539]

Node
Results
Support
Reactions:
None

Nodal
Displacements:
Dx = 8.750e-04 m
Dy = 5.000e-07 m
Rz = -2.250e-04 rad

```

## 5 CONCLUSÕES

Dentre os métodos analisados no estudo, a Decomposição de Cholesky apresentou uma maior eficiência, por demandar menos tempo de processamento, e um erro absoluto quase nulo, sendo o máximo de  $6,3 \times 10^{-17}$  no intervalo analisado no estudo. Devido a característica exponencial das curvas de tempo de processamento levantado no estudo para os métodos analisados, fica como sugestão a análise de mais métodos, de modo a encontrar qual deles gera uma curva com menor ordem exponencial para apontar o ideal de modo a otimizar os programas estruturais profissionais.

## REFERÊNCIAS

- ALLEN, M. P & TILDESLEY, D. J (1989). *Computer simulation of liquids (Reprinted with corrections)*. Clarendon Press ; New York : Oxford University Press, Oxford [England].
- CUNHA, M.C., *Métodos Numéricos*, 2a edição, Editora da UNICAMP, 2000.
- KACHANOV, L. M.; AKAD, T. V. Z. *Time of rupture process under creep conditions*, 1958.
- MARTHA, LUIZ FERNANDO. *Análise de estruturas: conceitos e métodos básicos*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.
- MARTHA, L.F., *Análise Matricial de Estruturas: Aplicada a Modelos Lineares*, Elsevier, 2016.
- SANTOS, R.J., *Introdução à Álgebra Linear*. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2008.
- TREFETHEN, LLOYD N.; BAU III, DAVID (1997). *Numerical linear algebra*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics. ISBN 978-0-89871-361-9.