

**Equações Diferenciais Aplicadas à Dinâmica Populacional do Município de Santa Rosa/RS<sup>1</sup>****Differential Equations Applied to Population Dynamics of the Municipality of Santa Rosa/RS**

DOI:10.34117/bjdv6n7-181

Recebimento dos originais: 12/06/2020

Aceitação para publicação: 09/07/2020

**Gilberto Carlos Thomas**

Doutor em Engenharia pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS - 2003

Instituição: Instituto Federal Farroupilha – Campus Santa Rosa

Endereço: Av. Cel. Bráulio de Oliveira, 1400 - Bairro Central - CEP: 98787-740 Santa Rosa/RS

E-mail: gilberto.thomas@iffarroupilha.edu.br

**Jonatan Ismael Eisermann.**

Licenciado em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha (2018), e Mestrando em Matemática pela Universidade Federal de Santa Catarina.

Instituição: Universidade Federal de Santa Catarina.

Endereço: Rua Antônio Francisco da Silveira, 185A - Pantanal, Florianópolis/SC, Brasil.

E-mail: jonatan.eisermann@hotmail.com

**RESUMO**

Equações Diferenciais têm configurado um importante ramo de estudo na construção e no aprimoramento de modelos matemáticos que retratam dinâmicas populacionais. Visando sua exploração para prever a variação do número de habitantes do município de Santa Rosa/RS para as próximas cinco décadas, a presente pesquisa buscou analisar como tem ocorrido o comportamento desta relação no passado e identificar as variantes que a interferem ou possam intervir no futuro, baseando-se na utilização dos modelos matemáticos de Malthus, Verhulst e Gompertz. Trata-se, portanto, de uma pesquisa que alia a abordagem qualitativa à quantitativa, de cunho documental e bibliográfico, ancorada na exploração dos respectivos modelos matemáticos, mediante o reconhecimento histórico de sua construção e da conseguinte simulação de prováveis cenários populacionais santa-rosenses em um futuro próximo. Os resultados evidenciaram maior proximidade da variação populacional do município com o Modelo de Gompertz, induzindo a crer na existência de uma taxa de inibição da variável de estado proporcional ao respectivo logaritmo. Embora a taxa de crescimento da população santa-rosense tenha sido considerável em um passado recente, a previsão é que ela continue sendo positiva, porém em taxas menores, tendendo à estabilidade de um determinado limite sustentável.

**Palavras-chave:** dinâmica populacional, equações diferenciais, modelos matemáticos, Malthus, Verhulst, Gompertz.

**ABSTRACT**

Differential Equations have configured an important branch of study in the construction and improvement of mathematical models that portray population dynamics. Aiming at its exploration to predict the variation of the population of the municipality of Santa Rosa/RS for the next five decades, the present research sought to analyze how the behavior of this relation has occurred in the past and

identify the variants that interfere with it or may intervene in the future, based on the use of the Malthus, Verhulst and Gompertz mathematics models. It is, therefore, a research that combines the qualitative and quantitative approach, documented and bibliographical, anchored in the exploration of the respective mathematical models, through the historical recognition of its construction and the consequent simulation of probable population scenarios of Santa Rosa in a near future. The results showed a greater proximity of the population variation of the municipality with the Gompertz Model, inducing to believe in the existence of an inhibition rate of the state variable proportional to the respective logarithm. Although the growth rate of the Santa Rosa population has been considerable in the recent past, it is expected to remain positive, but at lower rates, tending to the stability of a certain sustainable limit.

**Keywords:** population dynamics, differential equations, mathematical models, Malthus, Verhulst, Gompertz.

## 1 INTRODUÇÃO

O histórico populacional do município de Santa Rosa, localizado na região noroeste do Rio Grande do Sul, evidencia a habitação primitiva por indígenas do grupo Tapes, o qual sofreu um sistema de redução para catequização por jesuítas e espanhóis a partir de 1626. Integrando o território dos Sete Povos das Missões, o município pertenceu, sucessivamente, a Porto Alegre, Rio Pardo e Santo Ângelo, tendo sua emancipação política no ano de 1931. Apesar disso, o processo de colonização só foi significativo a partir de 1915, quando entrou em execução um vasto plano de loteamento de terras para assentar os nacionais que já habitavam a região. Desde então, a população local tem buscado o desenvolvimento aliado ao seu crescimento demográfico e econômico (SANTA ROSA, 2018).

Objetivando investigar como tem ocorrido a variação populacional do município em função do tempo e projetar previsões demográficas futuras, o presente estudo utilizará dados estatísticos dos últimos 50 anos para explorar modelos matemáticos que descrevem dinâmicas populacionais por meio de Equações Diferenciais: Malthus, Verhulst e Gompertz. Desta forma, o trabalho abordará inicialmente o contexto de construção dos referidos modelos a serem utilizados e, em seguida, os utilizará na simulação de cenários populacionais futuros do município de Santa Rosa.

## 2 MATERIAL E MÉTODOS

Ao descrever pela primeira vez a dinâmica populacional em linguagem matemática, Thomas Robert Malthus, em 1798, partiu do pressuposto de que a variação populacional ( $dP$ ) em relação ao tempo ( $dT$ ) é proporcional ao seu tamanho ( $P$ ) em cada instante. Desta forma, assumiu-se que existia um coeficiente  $k$ , de crescimento ( $k > 0$ ) ou decréscimo ( $k < 0$ ), calculado a partir da diferença entre a taxa de natalidade e de mortalidade de determinada população, isto é:

$$\frac{dP}{dt} = k P \quad (1)$$

Considerando  $P_0$  a população inicial, a solução analítica desta equação será:

$$P(t) = P_0 e^{kt} \quad (2)$$

Por utilizar uma função exponencial (2), o pesquisador defendia a ideia de que o crescimento da população humana ocorria em progressão geométrica, enquanto os meios de sobrevivência cresceriam em progressão aritmética (BASSANEZI, 2009). Assumia-se, assim, que o modelo de Malthus era incoerente a partir de determinado ponto, visto que no momento que os recursos não fossem mais suficientes para atender toda população, a tendência seria aumentar o número de mortes e, conseqüentemente, a função da população (2) decresceria até estabilizar-se com a função linear que representa os meios de sobrevivência.

Esse problema do modelo malthusiano só foi resolvido em 1837, quando Pierre François Verhulst aprimorou-o acrescentando um fator limitante. O matemático supôs que a população deveria crescer até um limite máximo sustentável  $L$ , e, em seguida, tendia a se estabilizar, assim representando matematicamente:

$$\frac{dP}{dt} = k P \left(1 - \frac{P}{L}\right) \quad (3)$$

Tendo a referida Equação Diferencial a seguinte solução analítica:

$$P(t) = \frac{P_0 L}{(L - P_0) e^{-kt} + P_0} \quad (4)$$

No mesmo século, o matemático inglês Benjamin Gompertz propôs um modelo com princípios semelhantes, porém utilizando como limitador uma taxa de inibição da variável de estado proporcional ao respectivo logaritmo:

$$\frac{dP}{dt} = k P \ln\left(\frac{L}{P}\right) \quad (5)$$

Tendo por solução analítica:

$$P(t) = L e^{e^{-kt} \ln\left(\frac{P_0}{L}\right)} \quad (6)$$

Cada um dos modelos apresentados será utilizado no presente trabalho a fim de verificar qual o que melhor se adequa às especificidades da população santa-rosense e, conseqüentemente, apresenta projeções mais prováveis de serem concretizadas no futuro. Os dados estatísticos utilizados basearam-se em documentos oficiais, principalmente relativos aos relatórios dos censos demográficos realizados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

### 3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para a projeção das funções exploradas, foi utilizada a taxa de crescimento,  $k$ , baseada na primeira década analisada, e o limite da população sendo 300.000. Portanto:

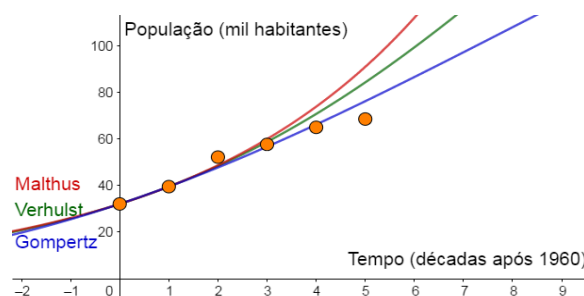
Tabela 1. Histórico populacional do município de Santa Rosa nas últimas cinco décadas

Ano	População conforme censo	População calculada via Malthus	Erro via (%)	População calculada via Verhulst	Erro via (%)	População calculada via Gompertz	Erro via (%)
1960	32.112	32.112	0	32.112	0	32.112	0
1970	39.550	39.550	0	39.550	0	39.550	0
1980	52.231	48.711	6,7	48.400	7,3	47.774	8,5
1990	57.692	59.994	4,0	58.782	1,9	56.700	1,7
2000	65.016	73.890	13,6	70.766	8,8	66.228	1,9
2010	68.587	91.005	32,7	84.339	23,0	76.245	11,2
$\Sigma$	315.188	345.262	57,0	333.949	41,0	318.609	23,3

Dados históricos extraídos de CARDIM (1962), RIO GRANDE DO SUL (1984) e IBGE (s. a.).

Referente à tabela 1, convém salientar que no ano de 1960 não foram consideradas as populações dos distritos de Campina e Cândido Godói, desmembrados do município em 1963, e no ano de 1990 foi utilizada a estimativa preliminar do IBGE para o período que antecedeu o censo da década, realizado no ano seguinte. A figura 1 apresenta a comparação gráfica dos dados reais com as simulações realizadas:

Figura 1. Comparação dos modelos matemáticos utilizados com os dados reais



Como o modelo de Gompertz apresenta maior aproximação com os dados estatísticos reais, conclui-se que a função mais aceitável, dentre as estudadas, do crescimento da população de Santa Rosa em função das décadas, partindo de 1960 ( $t = 0$ ), é:

$$P(t) = 300.000 e^{-0,097870666t \ln\left(\frac{32.112}{300.000}\right)} \quad (7)$$

#### 4 CONCLUSÕES

Com os resultados obtidos, pode-se analisar a utilização dos modelos de Malthus, Verhulst e Gompertz na dinâmica populacional santa-rosense, ficando nítida uma maior aproximação dos dados históricos com este último, induzindo a crer na existência de um fator de inibição da variável de estado proporcional ao respectivo logaritmo. Embora a taxa de crescimento da população do município tenha sido considerável em um passado recente, a previsão é que ela continue sendo positiva, porém em taxas menores, tendendo à estabilidade de um determinado limite sustentável.

Como sugestões de estudos que avancem com os resultados obtidos pela presente pesquisa, está a investigação acerca de fatores inibidores ao crescimento populacional, de aproximações do limite populacional sustentável de Santa Rosa e das consequências da respectiva dinâmica populacional em seus diversos setores.

#### REFERÊNCIAS

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2009. 392p.

CARDIM, F. P. Santa Rosa – Rio Grande do Sul. **Coleção Monografias: Série B**, Rio de Janeiro, vol. 1, n. 28, 1962. 6p.

IBGE. **Censos Demográficos**. Disponível em: <<https://www.ibge.gov.br/>>. Acesso em 13 jul. 2018

RIO GRANDE DO SUL. Secretaria de Coordenação e Planejamento. **De Província de São Pedro a Estado do Rio Grande do Sul: Censos do RS: 1960-1980**. Porto Alegre: Fundação de Economia e Estatística, 1984. 150 p.

SANTA ROSA. **História do Município**. Disponível em <<http://www.santarosa.rs.gov.br/municipio.php>>. Acesso em 29 jul. 2018.