

Um Estudo sobre o Controle por Realimentação de Estado com Alocação de Polos em um Pêndulo Furuta**A Study on Control using State Feedback with Pole Placement in a Furuta Pendulum**

DOI:10.34117/bjdv6n6-253

Recebimento dos originais: 29/05/2020

Aceitação para publicação: 30/06/2020

Ricardo Breganon

Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade de São Paulo

Instituição: Instituto Federal do Paraná, Campus Jacarezinho

Endereço: Av. Dr. Tito, 801, Jardim Panorama - Jacarezinho, Paraná, Brasil, CEP: 86400-000

E-mail: ricardo.breganon@ifpr.edu.br

Uiliam Nelson Lendzion Tomaz Alves

Doutor em Engenharia Elétrica pela Universidade Estadual Paulista

Instituição: Instituto Federal do Paraná, Campus Jacarezinho

Endereço: Av. Dr. Tito, 801, Jardim Panorama - Jacarezinho, Paraná, Brasil, CEP: 86400-000

E-mail: uiliam.alves@ifpr.edu.br

Luiz Eduardo Pivovar

Graduado em Engenharia Mecânica pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Instituição: Instituto Federal do Paraná, Campus Jacarezinho

Endereço: Av. Dr. Tito, 801, Jardim Panorama - Jacarezinho, Paraná, Brasil, CEP: 86400-000

E-mail: luiz.pivovar@ifpr.edu.br

João Paulo Lima Silva de Almeida

Doutor em Engenharia Elétrica e Inf. Industrial pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Instituição: Instituto Federal do Paraná, Campus Jacarezinho

Endereço: Av. Dr. Tito, 801, Jardim Panorama - Jacarezinho, Paraná, Brasil, CEP: 86400-000

E-mail: joao.almeida@ifpr.edu.br

Fernando Sabino Fontequê Ribeiro

Mestre em Engenharia Mecânica pela Universidade Estadual Paulista

Instituição: Instituto Federal do Paraná, Campus Jacarezinho

Endereço: Av. Dr. Tito, 801, Jardim Panorama - Jacarezinho, Paraná, Brasil, CEP: 86400-000

E-mail: fernando.ribeiro@ifpr.edu.br

Gustavo Vendrame Barbara

Graduado em Engenharia Elétrica pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Instituição: Instituto Federal do Paraná, Campus Jacarezinho

Endereço: Av. Dr. Tito, 801, Jardim Panorama - Jacarezinho, Paraná, Brasil, CEP: 86400-000

E-mail: gustavo.barbara@ifpr.edu.br

Marcio Mendonça

Doutor em Engenharia Elétrica e Inf. Industrial pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Instituição: Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Cornélio Procópio
Endereço: Av. Alberto Carazzai, 1640, Cornélio Procópio, Paraná, Brasil, CEP: 86300-000
E-mail: mendonca@utfpr.edu.br

RESUMO

Este trabalho apresenta o projeto de um controlador por alocação de polos aplicado aos modelos linear e não linear de um pêndulo invertido rotacional (pêndulo Furuta). O controlador foi projetado a partir do modelo linearizado de um pêndulo invertido rotacional em torno de um ponto de operação e tem por finalidade estabilizar o pêndulo na posição vertical invertida. O controlador projetado foi testado nos modelos linear e não linear do sistema por meio de simulações que consideram três condições iniciais distintas, a fim de verificar a eficiência do controlador nas situações propostas. Os resultados apresentados neste trabalho são promissores e indicam que a estratégia de controle utilizada é uma opção válida para este tipo de aplicação.

Palavras-chave: Pêndulo Furuta, Modelo linear, Modelo não linear, Alocação de polos.

ABSTRACT

This paper presents the design of a pole placement controller applied on linear and non-linear models of a rotary inverted pendulum (Furuta pendulum). The controller was designed from the linearized model of a rotational inverted pendulum around an operating point, aiming to stabilize it at the inverted vertical position. The designed controller was tested in the linear and non-linear models of the plant by means of simulations which consider three distinct initial conditions, in order to verify the efficiency of the controller under the proposed situations. The results presented in this work are promising and they indicate the control strategy is a valid option for that type of application.

Keywords: Furuta Pendulum, Linear model, Non-linear model, Pole placement.

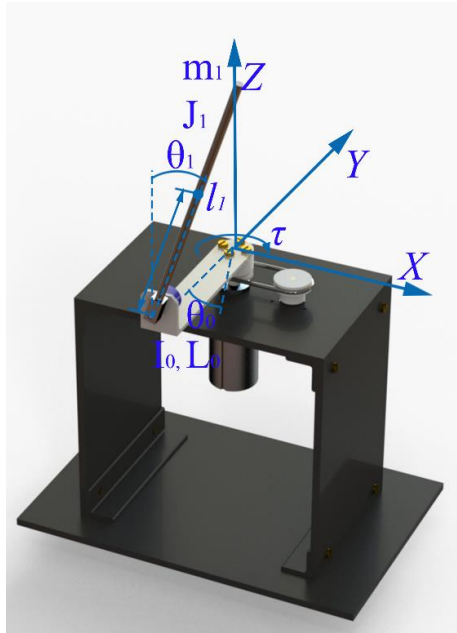
1 INTRODUÇÃO

Sistemas não lineares são interessantes aos estudos de diferentes técnicas de controle, utilizadas com o objetivo de estabilizá-los em um determinado ponto de operação. O pêndulo Furuta é um sistema físico não linear e com ponto de operação instável, geralmente considerado como uma ferramenta didática para o estudo de teorias de controle moderno de cursos de Engenharia e áreas afins. O interesse didático neste sistema tem sua origem no fato que as características do pêndulo Furuta se assemelham a características de outros sistemas das indústrias militares, espacial, como também na área da robótica móvel (AKHTARUZZAMAN, SHAFIE, 2010).

O sistema de pêndulo invertido mencionado possui dois graus de liberdade e é composto por um motor DC, conectado a uma das extremidade de um braço rotacional (plano horizontal), cuja posição no plano é determinada pelo ângulo θ_0 , enquanto que, na outra extremidade do braço, um potenciômetro conecta um pêndulo, cuja movimentação ocorre no plano vertical, com posição dada pelo ângulo θ_1 . Um exemplo estrutural de um pêndulo Furuta é apresentado na Figura 1. Para estabilização do pêndulo invertido é necessário aplicar um torque (ação de controle) gerado pelo

motor, que proporciona o movimento horizontal do braço (FURUTA et al., 1992; ASTROM, FURUTA, 2000; FURKA et al., 2019).

Figura 1 - Pêndulo Furuta.



Fonte: Elaborado pelos Autores.

Uma das técnicas que podem ser utilizadas na estabilização do pêndulo Furuta consiste na realimentação de estado com alocação de polos. Em seguida, são destacados os principais trabalhos que abordam a estratégia mencionada em aplicações correlatas e que foram utilizados como bases de investigação: Lan, Minrui (2011) utiliza esta técnica de controle para o estabilizar um sistema de pêndulo invertido paralelo duplo; um lançador de míssil é abordado por (BELKACEM et al., 2016); um pêndulo invertido linear é apresentado em (MALVIYA et al., 2011); e, por fim, um absorvedor de vibrações é apresentado por (ABDELAZIZ, VALASEK, 2004).

Outras técnicas de controle também podem ser utilizadas para estabilizar o pêndulo na posição invertida, tais como: no trabalho de (SIRISHA, JUNGHARE, 2014; OLIVARES, ALBERTOS, 2013) é apresentado um controlador PID e um controlador LQR (SIRISHA, JUNGHARE, 2014); enquanto um controlador ótimo de trajetória é apresentado em (ISMAIL, LIU, 2017); um controlador Fuzzy PID é abordado em (HAMZA et al., 2017); além de (PIVOVAR et al., 2020) utilizar um controle seguidor de referência.

Neste trabalho é apresentada uma metodologia de controle por alocação de polos testada nos modelos linear e não linear de um pêndulo Furuta. com o objetivo de estabilizar a haste (pêndulo) na posição invertida. Resultados de simulação do controlador projetado são apresentados, a fim de validar a estratégia frente aos modelos linear e não linear da planta.

O restante do artigo é organizado como segue. A Seção 2 apresenta os modelos linear e não linear considerados para representar a dinâmica do pêndulo Furuta. A estratégia de controle por alocação de polos é descrita na Seção 3. Em seguida, são apresentados os resultados e discussões, na Seção 4. Por fim, na Seção 5, são expostas as conclusões do trabalho.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA NÃO LINEAR E LINEAR DO PÊNDULO FURUTA

A modelagem matemática do pêndulo Furuta é obtida através das equações de Euler – Lagrange (GUSMÁN et al, 2016; AGARANA, AKINLABI, 2019):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_0} - \frac{\partial L}{\partial \theta_0} = \tau \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0,$$

em que τ representa o torque aplicado pelo motor no braço, e a Lagrangeana L é definida em (2).

$$L = E_C - E_P \quad (2)$$

$$E_C = E_0 + E_1,$$

sendo E_C a energia cinética total do sistema e E_P a energia potencial do sistema (GUSMÁN et al, 2016). A energia cinética total é dada pela soma da energia cinética do braço, E_0 , e a energia cinética da haste do pêndulo, E_1 , e depende das velocidades dos centros de massa da haste do pêndulo, m_1 , e do braço, m_0 , conforme apresentado em (3). Já, a energia potencial do sistema é dada por (4), em seguida.

$$E_0 = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}_0^2,$$

$$E_1 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 [(L_0 \dot{\theta}_0)^2 + (l_1 \dot{\theta}_0)^2 \sin^2(\theta_1) + (l_1 \dot{\theta}_1)^2] \quad (3)$$

$$+ 2\dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 L_0 l_1 \cos(\theta_1),$$

$$E_P = m_1 g l_1 (\cos(\theta_1)). \quad (4)$$

Usando (3) e (4), a Lagrangeana L é obtida de acordo com (2), e o uso de (1) resulta na dinâmica dada em (5), representando o modelo não linear do pêndulo Furuta, devido a inclusão de funções trigonométricas e da relação entre as velocidades angulares $\dot{\theta}_0$ e $\dot{\theta}_1$ (GUSMÁN et al, 2016).

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + g(q) = F$$

$$M(q) = \begin{bmatrix} I_0 + m_1(L_0^2 + l_1^2 \sin^2(\theta_1(t))) & m_1 l_1 L_0 \cos(\theta_1(t)) \\ m_1 l_1 L_0 \cos(\theta_1(t)) & I_1 + m_1 l_1^2 \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{11}(q, \dot{q}) & C_{12}(q, \dot{q}) \\ C_{21}(q, \dot{q}) & 0 \end{bmatrix}, g(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_1 l_1 g \sin(\theta_1(t)) \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_{11}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1(t) \sin(2\theta_1(t)),$$

$$C_{12}(q, \dot{q}) = -m_1 l_1 L_0 \dot{\theta}_1(t) \sin(\theta_1(t)) + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_0(t) \sin(2\theta_1(t)),$$

$$C_{21}(q, \dot{q}) = -\frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_0(t) \sin(2\theta_1(t)).$$

Para desenvolver o modelo em espaço de estados, o vetor de estado é definido em (6).

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 \\ \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

sendo θ_0 e θ_1 as posições angulares do braço e da haste do pêndulo, respectivamente, e $\dot{\theta}_0$ e $\dot{\theta}_1$ as respectivas velocidades angulares. Para equilibrar a haste do pêndulo na posição invertida, $\theta_1 = 0$, utilizando o modelo linear, é necessário iniciar a posição da haste próxima dessa configuração, ou seja, θ_1 deverá apresentar uma variação inicial pequena, em torno de 0 (GUSMÁN et al, 2016).

Isolando \ddot{q} em (5), encontra-se

$$\ddot{q} = M^{-1}(x_1, x_3)[-C(x_1, x_2, x_3, x_4)[x_2, x_4]^T - g(x_1, x_3) + F]$$

$$= \begin{bmatrix} \omega_1(x_1, x_2, x_3, x_4, \tau) \\ \omega_2(x_1, x_2, x_3, x_4, \tau) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Com o vetor de estado dado em (6), a partir de (7) obtém-se a correspondente equação de estado:

$$\dot{x} = f(x, u),$$

$$f(x, u) = \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \\ f_3(x, u) \\ f_4(x, u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \omega_1(x_1, x_2, x_3, x_4, u) \\ x_4 \\ \omega_2(x_1, x_2, x_3, x_4, u) \end{bmatrix}, \quad u = \tau. \quad (8)$$

A partir da dinâmica em (8), considera-se sua aproximação linear em torno do par de pontos de operação (x^*, u^*) , de tal modo que

$$x^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0^* \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u^* = 0, \quad f(x^*, u^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Neste caso o ângulo inicial do braço é $x_1^* = \theta_0^*$, o que significa que essa variável pode ser escolhida arbitrariamente, diferentemente da variável $x_3^* = \theta_1^* = 0$, que implica na haste do pêndulo próxima da posição invertido.

Dada a dinâmica (8) e o ponto de operação (9), o modelo linear em espaço de estados é dado por (10), na qual A é a matriz de estado, B a matriz de entrada, ambas representadas na equação (11) (OGATA, 2010).

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad (10)$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3(x, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3(x, u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3(x, u)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3(x, u)}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4(x, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4(x, u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4(x, u)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4(x, u)}{\partial x_4} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3(x, u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_4(x, u)}{\partial u} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

As equações (5)-(11) definem o procedimento para se encontrar o modelo linear do pêndulo invertido rotacional, resultando em

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-gm_1^2 l_1^2 L_0}{I_0(J_1 + m_1 l_1^2) + J_1 m_1 L_0^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(I_0 + m_1 L_0^2)m_1 l_1 g}{I_0(J_1 + m_1 l_1^2) + J_1 m_1 L_0^2} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{J_1 + m_1 l_1^2}{I_0(J_1 + m_1 l_1^2) + J_1 m_1 L_0^2} \\ 0 \\ \frac{-m_1 l_1 L_0}{I_0(J_1 + m_1 l_1^2) + J_1 m_1 L_0^2} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Para os cálculos do modelo são necessários os parâmetros físicos da planta, que foram considerados conforme Tabela 1, sendo baseados no protótipo existente no laboratório de automação industrial do Instituto Federal do Paraná, Jacarezinho (PIVOVAR et al., 2020).

Tabela 1. Parâmetros do pêndulo invertido rotacional.

Símbolo	Descrição	Valor	Unidade
g	Aceleração da gravidade	9,81	m/s ²
l_1	Distância da extremidade até o centro de massa do pêndulo	0,145	m
L_0	Distância do centro do braço até o pêndulo	0,150	m
m_1	Massa da haste do pêndulo	0,0248	kg
m_0	Massa do braço	0,155	kg
J_1	Momento de inércia do pêndulo	0,00017385	kg m ²
I_0	Momento de inércia do braço	0,0012	kg m ²

Fonte: Elaborado pelos Autores.

Substituindo os dados da Tabela 1 nas matrizes dadas em (12), tem-se o modelo linear do pêndulo invertido Furuta em torno do ponto de operação (9) dado por (10), em que as matrizes A , B e C são

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20,8703 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 66,9295 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 762,5775 \\ 0 \\ -591,6167 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

sendo C escolhida de modo que a saída y em (10) seja o vetor composto pelos ângulos θ_0 e θ_1 .

É importante destacar que o modelo é linearizado em torno de um ponto de operação onde $\theta_1 = 0$, que é considerado a posição invertida da haste do pêndulo na vertical, isso significa que levar o pêndulo de $\theta_1 = \pi$ para $\theta_1 = 0$ é uma tarefa que não pode ser garantida com um controlador projetado com base no modelo linear. Portanto esse problema é resolvido usando um controlador

projetado através do modelo não linear da planta, conforme apresentado em (5) (GUSMÁN et al, 2016).

3 CONTROLE POR ALOCAÇÃO DE POLOS APLICADO AO PÊNDULO FURUTA

Neste trabalho, o projeto de controlador por alocação de polos é considerado para a estabilização do pêndulo Furuta, que se inicia com a determinação dos polos de malha fechada desejados. Para isso, admite-se que todas as variáveis de estado são mensuráveis e que estão disponíveis para realimentação ou, então, requer a inclusão de um observador de estado no sistema de controle. Como requisito para ter polos de malha fechada nas posições desejadas, é necessário que o sistema seja de estado completamente controlável (OGATA, 2010). Neste sentido, considerando o sistema de controle dado pela equação (10), utiliza-se o sinal de controle definido por (14):

$$u = -Kx, \quad (14)$$

sendo $u \in \mathfrak{R}$ e K uma matriz de ganho para a realimentação de estado (OGATA, 2010). Substituindo (14) em (10), resulta-se na dinâmica de malha fechada

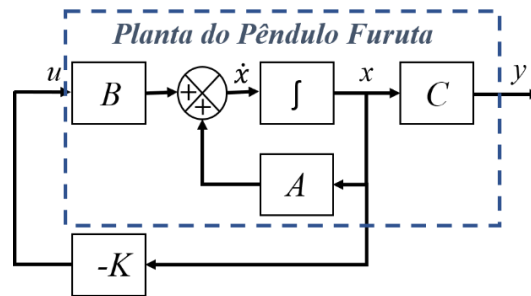
$$\dot{x} = (A - BK)x. \quad (15)$$

A solução de (15) é encontrada como sendo

$$x(t) = e^{(A-BK)t}x(0), \quad (16)$$

na qual $x(0)$ representa o estado inicial do sistema. A estabilidade e a característica da resposta temporal do sistema em malha fechada são determinadas pelos autovalores da matriz $A - BK$. Se a matriz K for escolhida corretamente, a matriz $A - BK$ poderá conduzir para uma resposta assintoticamente estável do sistema em malha fechada e, para todo $x(0) \neq 0$, é possível fazer $x(t)$ tender a 0, à medida que t tender a infinito (OGATA, 2010). O diagrama do sistema de controle por alocação de polos é apresentado na Figura 2.

Figura 2 - Sistema de controle de malha fechada com alocação de polos



Fonte: Adaptado de Ogata (2010)

Para a determinação da matriz de ganho de realimentação de estado K será utilizado a fórmula de Ackermann (OGATA, 2010). Suponha que os polos desejados de malha fechada estejam em $s = u_1, s = u_2, \dots, s = u_n$. Defina $\tilde{A} = A - BK$, conseqüentemente a equação (17) apresenta a equação característica desejada.

$$\begin{aligned} |sI - A + BK| &= |sI - \tilde{A}| = (s - u_1)(s - u_2) \dots (s - u_n) \\ &= s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

O teorema de Cayley-Hamilton estabelece que \tilde{A} satisfaz sua própria equação característica, no caso (17), assim,

$$\phi(\tilde{A}) = \tilde{A}^n + \alpha_1 \tilde{A}^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \tilde{A} + \alpha_n I = 0. \quad (18)$$

Calculando a função definida em (18) para a matriz A , do sistema em malha aberta, segue que

$$\phi(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n I \neq 0. \quad (19)$$

Agora, considere as seguintes identidades,

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= A - BK \\ \tilde{A}^2 &= (A - BK)^2 = A(A - BK) - BK\tilde{A} = A^2 - ABK - BK\tilde{A} \\ \tilde{A}^3 &= (A - BK)^3 = (A - BK)(A - BK)^2 \\ &= A(A^2 - ABK - BK\tilde{A}) - BK\tilde{A}^2 = A^3 - A^2BK - ABK\tilde{A} - BK\tilde{A}^2 \\ &\vdots \\ \tilde{A}^{n-1} &= (A - BK)^{n-1} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
&= A^{n-1} - A^{n-2}BK - A^{n-3}BK\tilde{A} - A^{n-4}BK\tilde{A}^2 - \dots - BK\tilde{A}^{n-1} \\
\tilde{A}^n &= (A - BK)^n = (A - BK)(A - BK)^{n-1} \\
&= A(A^{n-1} - A^{n-2}BK - A^{n-3}BK\tilde{A} - A^{n-4}BK\tilde{A}^2 - \dots - BK\tilde{A}^{n-1}) \\
&\quad - BK\tilde{A}^n \\
&= A^n - A^{n-1}BK - A^{n-2}BK\tilde{A} - A^{n-3}BK\tilde{A}^2 - \dots - ABK\tilde{A}^{n-1} - BK\tilde{A}^n
\end{aligned}$$

Substituindo (20) em (18), encontra-se

$$\begin{aligned}
\Phi(\tilde{A}) &= \tilde{A}^n + \alpha_1 \tilde{A}^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \tilde{A} + \alpha_n I \\
&= (A^n - A^{n-1}BK - A^{n-2}BK\tilde{A} - A^{n-3}BK\tilde{A}^2 - \dots - ABK\tilde{A}^{n-2} - BK\tilde{A}^{n-1}) + \\
&\quad + \alpha_1 (A^{n-1} - A^{n-2}BK - A^{n-3}BK\tilde{A} - A^{n-4}BK\tilde{A}^2 - \dots - BK\tilde{A}^{n-2}) + \dots \\
&\quad + \alpha_{n-3} (A^3 - A^2BK - ABK\tilde{A} - BK\tilde{A}^2) + \alpha_{n-2} (A^2 - ABK - BK\tilde{A}) \\
&\quad + \alpha_{n-1} (A - BK) + \alpha_n I \\
&= A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \alpha_{n-3} A^3 + \alpha_{n-2} A^2 + \alpha_{n-1} A + \alpha_n I \\
&\quad - BK(\tilde{A}^{n-1} + \alpha_1 \tilde{A}^{n-2} + \dots + \alpha_{n-3} \tilde{A}^2 + \alpha_{n-2} \tilde{A} + \alpha_{n-1} I) \\
&\quad - ABK(\tilde{A}^{n-2} + \alpha_1 \tilde{A}^{n-3} + \dots + \alpha_{n-3} \tilde{A} + \alpha_{n-2} I) \\
&\quad - A^2 BK(\tilde{A}^{n-3} + \alpha_1 \tilde{A}^{n-4} + \dots + \alpha_{n-3} I) + \dots - A^{n-3} BK(\tilde{A}^2 + \alpha_1 \tilde{A} + \alpha_2 I) \\
&\quad - A^{n-2} BK(\tilde{A} + \alpha_1 I) - A^{n-1} BK.
\end{aligned} \tag{21}$$

Usando (19) e notação matricial, (21) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\Phi(\tilde{A}) &= \Phi(A) - [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-3}B \quad A^{n-2}B \quad A^{n-1}B] \\
&\quad \times \begin{bmatrix} K(\tilde{A}^{n-1} + \alpha_1 \tilde{A}^{n-2} + \dots + \alpha_{n-3} \tilde{A}^2 + \alpha_{n-2} \tilde{A} + \alpha_{n-1} I) \\ K(\tilde{A}^{n-2} + \alpha_1 \tilde{A}^{n-3} + \dots + \alpha_{n-3} \tilde{A} + \alpha_{n-2} I) \\ K(\tilde{A}^{n-3} + \alpha_1 \tilde{A}^{n-4} + \dots + \alpha_{n-3} I) \\ \vdots \\ K(\tilde{A}^2 + \alpha_1 \tilde{A} + \alpha_2 I) \\ K(\tilde{A} + \alpha_1 I) \\ K \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

e assim

$$\Phi(A) = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-3}B \quad A^{n-2}B \quad A^{n-1}B] \tag{22}$$

$$\times \begin{bmatrix} K(\tilde{A}^n + \alpha_1 \tilde{A}^{n-1} + \dots + \alpha_{n-3} \tilde{A}^2 + \alpha_{n-2} K \tilde{A} + \alpha_{n-1} I) \\ K(\tilde{A}^{n-1} + \alpha_1 \tilde{A}^{n-2} + \dots + \alpha_{n-3} \tilde{A} + \alpha_{n-2} I) \\ K(\tilde{A}^{n-1} + \alpha_1 \tilde{A}^{n-2} + \dots + \alpha_{n-3} I) \\ \vdots \\ K(\tilde{A}^2 + \alpha_1 \tilde{A} + \alpha_2 I) \\ K(\tilde{A} + \alpha_1 I) \\ K \end{bmatrix}.$$

Sendo o sistema de estado controlável, existe a inversa da matriz de controlabilidade $[B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-3}B \ A^{n-2}B \ A^{n-1}B]$ e, ao considerar este fato, a partir de (22),

$$[B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-3}B \ A^{n-2}B \ A^{n-1}B]^{-1} \times \emptyset(A) = \begin{bmatrix} K(\tilde{A}^n + \alpha_1 \tilde{A}^{n-1} + \dots + \alpha_{n-3} \tilde{A}^2 + \alpha_{n-2} K \tilde{A} + \alpha_{n-1} I) \\ K(\tilde{A}^{n-1} + \alpha_1 \tilde{A}^{n-2} + \dots + \alpha_{n-3} \tilde{A} + \alpha_{n-2} I) \\ K(\tilde{A}^{n-1} + \alpha_1 \tilde{A}^{n-2} + \dots + \alpha_{n-3} I) \\ \vdots \\ K(\tilde{A}^2 + \alpha_1 \tilde{A} + \alpha_2 I) \\ K(\tilde{A} + \alpha_1 I) \\ K \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Observa-se que a matriz de ganhos K , da lei de controle (14), aparece na última linha em (23). Então, multiplicando (23) por $[0 \ \dots \ 0 \ 1]$, obtém-se a fórmula de Ackerman para a obtenção da matriz de ganhos (OGATA, 2010):

$$K = [0 \ \dots \ 0 \ 1] [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-3}B \ A^{n-2}B \ A^{n-1}B]^{-1} \emptyset(A). \quad (24)$$

Aplicando essa metodologia ao modelo do pêndulo Furuta descritos em (10) e (13), com polos definidos por $u_1 = -6$, $u_2 = -7$, $u_3 = -8$ e $u_4 = -9$, escolhidos arbitrariamente para a estabilização do pêndulo, encontra-se:

$$\begin{aligned} |sI - A + BK| &= (s + 6)(s + 7)(s + 8)(s + 9) \\ &= s^4 + 30s^3 + 335s^2 + 1650s + 3024 \\ \emptyset(A) &= A^4 + 30A^3 + 335A^2 + 1650A + 3024I. \end{aligned} \quad (25)$$

Usando (24) e (25), com $n = 4$, encontra-se

$$\begin{aligned}
 K &= [0 \ 0 \ 0 \ 1][B \ AB \ A^2B \ A^3B]^{-1}\phi(A) \\
 &= [-0,0198 \ -0,0108 \ -0,2098 \ -0,0244],
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

sendo a matriz de ganho K dada em (26) utilizada para estabilizar o pêndulo na posição invertida em todas as simulações descritas neste trabalho.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

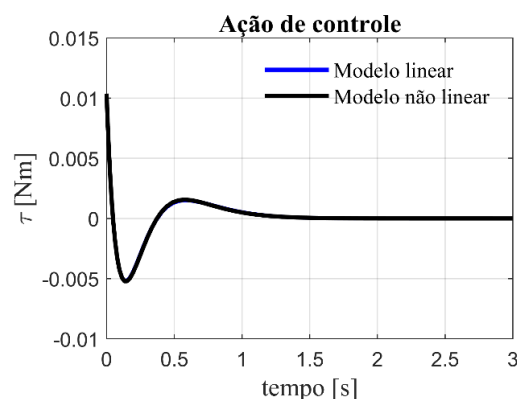
Para verificar se o controle com realimentação de estado para a alocação de polos é capaz de estabilizar os modelos linear e não linear do pêndulo invertido rotacional, simulações considerando três condições iniciais foram realizadas e são descritas a seguir.

Os seguintes indicadores de desempenho são considerados: (i) tempo de acomodação, o qual representa o tempo até a saída do sistema atingir o equilíbrio; (ii) o sobressinal, que é o máximo valor atingido pela saída, acima da referência; (iii) o subsinal, sendo o valor mínimo negativo alcançado pela saída, abaixo da referência que neste trabalho é igual a zero; e (iv) índice ITAE, definido como $\int_0^{\infty} t |e(t)| dt$, sendo $e(t)$ o erro entre a saída do sistema e a referência nula.

A primeira condição inicial simulada admitida foi $x(0) = [\pi/6 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. Nesta condição, a haste do pêndulo já está estabilizada na posição invertida, na vertical, e apenas o braço do sistema está fora do seu ponto de operação, com um erro de posição de $\pi/6$ rad.

Na Figura 3 é apresentado o sinal de controle (torque do motor), responsável por gerar o movimento angular do braço do sistema para sua estabilização e, na Figura 4, a evolução temporal das variáveis de estado obtidas durante as simulações.

Figura 3 - Sinais de controle para o sistema pêndulo invertido em simulação considerando seu modelo linear e não linear com condição inicial $x(0) = [\pi/6 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.



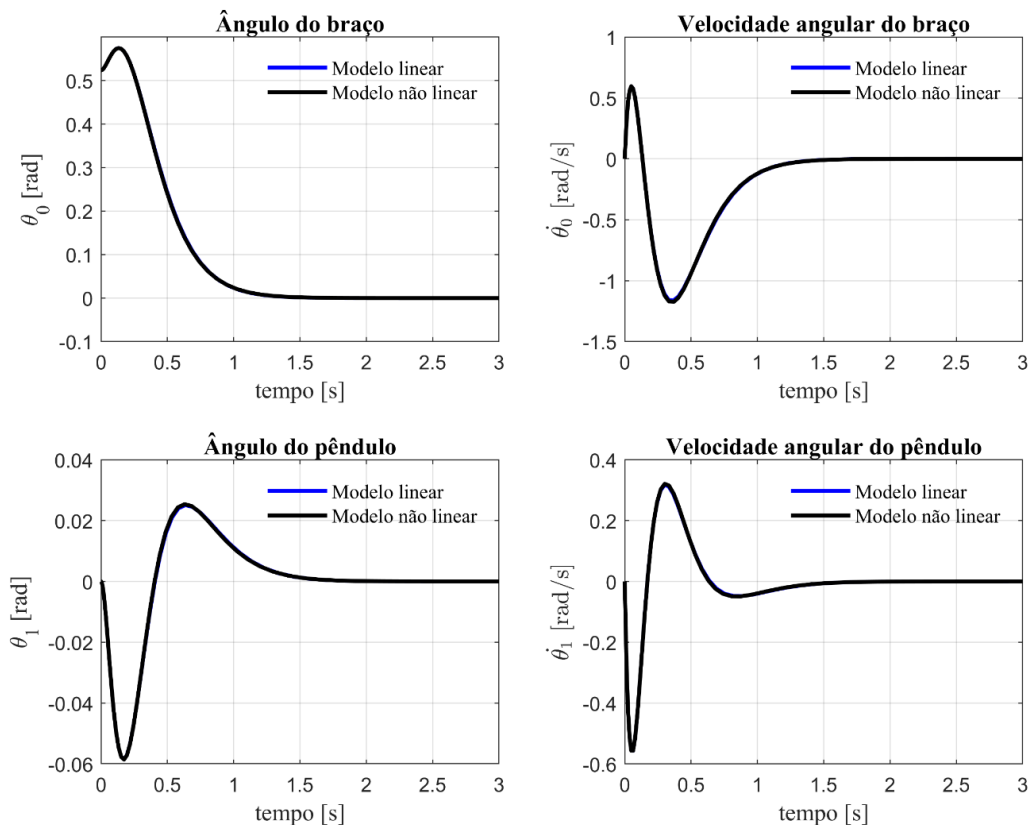
Fonte: Elaborado pelos Autores

Outro fato verificado nas Figuras 3 e 4 é que, na primeira condição considerada, tanto o modelo linear quanto o não linear apresentaram características de respostas muito próximas, o que

pode ser explicado pelo ponto de equilíbrio (9) para o qual o modelo linear foi obtido, que considera uma condição arbitrária θ_1^* para a posição angular do braço. Também é possível observar que o erro de posição do sistema tendeu a zero considerando ambos os modelos, mostrando que o controlador é capaz de estabilizar o pêndulo na condição inicial requerida.

A Tabela 2 apresenta as características de desempenho dos modelos linear e não linear em malha fechada com $x(0) = [\pi/6 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. A partir dos dados presentes nesta tabela é possível verificar, assim como a partir das Figuras 3 e 4, que o desempenho do controlador foi similar tanto no controle do modelo linear quanto do modelo não linear do sistema.

Figura 4 - Variáveis de estado do sistema pêndulo invertido em simulação considerando seu modelo linear e não linear com condição inicial $x(0) = [\pi/6 \ 0 \ 0 \ 0]^T$



Fonte: Elaborado pelos Autores

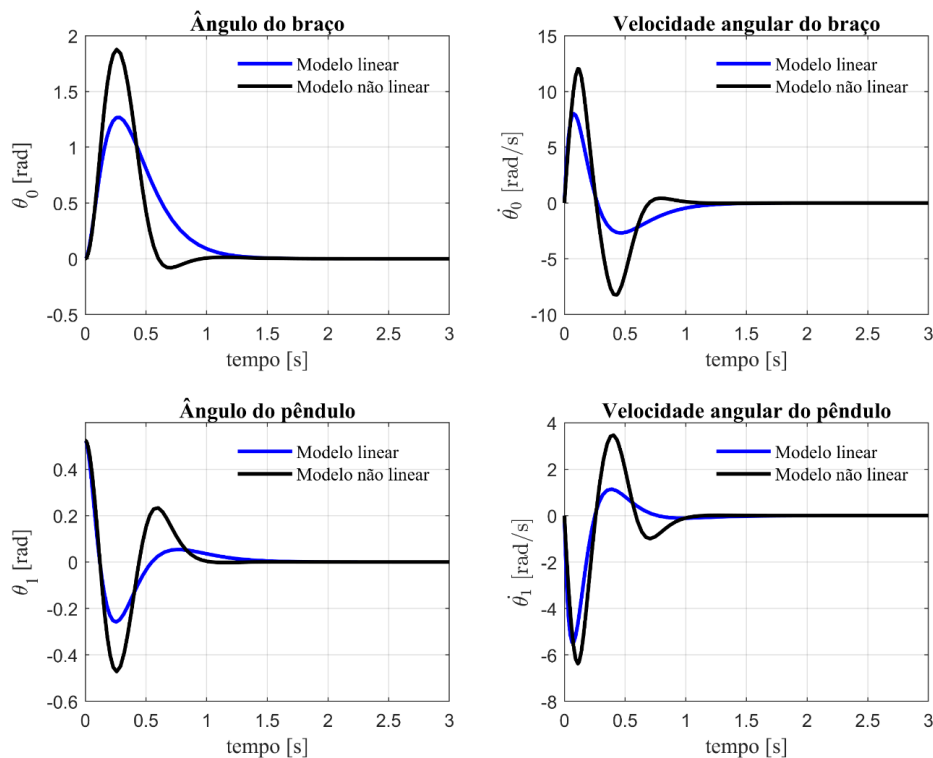
Tabela 2. Características de desempenho obtidas em simulação para a condição $x(0) = [\pi/6 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

	Modelo linear		Modelo não linear	
	θ_0	θ_1	θ_0	θ_1
Tempo de acomodação	1,8	2,3	1,8	2,3
ITAE	0,08869	0,01348	0,08842	0,01346
Sobressinal	0,575	0,02511	0,575	0,02539
Subsinal	0	-0,05855	0	-0,05855

Fonte: Elaborado pelos Autores

No segundo conjunto de simulações admitiu-se a condição inicial $x(0) = [0 \ 0 \ \pi/6 \ 0]^T$, ou seja, apenas a posição da haste do pêndulo difere de sua posição de equilíbrio. Diferente da primeira simulação, a condição inicial não coincide com o ponto de equilíbrio e, assim, as respostas provenientes do modelo linear e do modelo não linear são diferentes, conforme apresentadas nas Figuras 5 e 6. Observa-se na Figura 5 que há uma maior oscilação na resposta do modelo não linear, mas, ainda assim, o controlador foi capaz de estabilizar o pêndulo invertido na posição desejada.

Figura 5 - Variáveis de estado do sistema pêndulo invertido em simulação considerando seu modelo linear e não linear com condição inicial $x(0) = [0 \ 0 \ \pi/6 \ 0]^T$

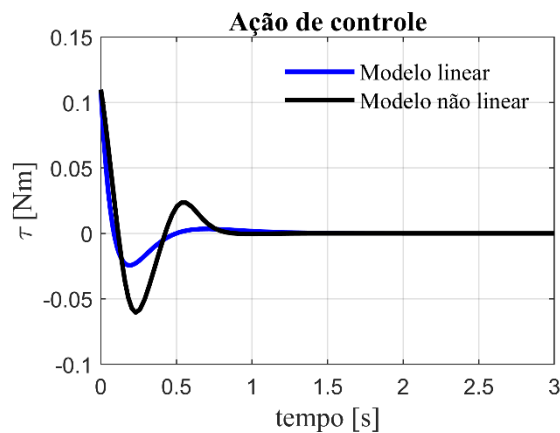


Fonte: Elaborado pelos Autores

Na resposta do modelo não linear (Figura 5), mesmo apresentando um sobressinal maior, constata-se um tempo menor para se atingir a estabilização, quando comparado com o modelo linear. Na Figura 6 é apresentado o torque necessário para movimentar o conjunto do pêndulo Furuta até seu ponto de equilíbrio.

A Tabela 3 apresenta o valor dos indicadores adotados na comparação entre as respostas com o modelo linear e não linear do pêndulo Furuta, para a condição inicial $x(0) = [0 \ 0 \ \pi/6 \ 0]^T$, em malha fechada com o controlador projetado. Observe que a maior oscilação observada nas Figuras 5 e 6 refletem os valores de sobressinal e subsinal da Tabela 3. Como a estabilização no modelo não linear ocorreu em menor tempo, o critério ITAE é menor para o modelo não linear com relação ao ângulo do braço, θ_0 , mas não para o ângulo da haste, θ_1 .

Figura 6 - Sinais de controle para o sistema pêndulo invertido em simulação considerando seu modelo linear e não linear com condição inicial $x(0) = [0 \ 0 \ \pi/6 \ 0]^T$



Fonte: Elaborado pelos Autores

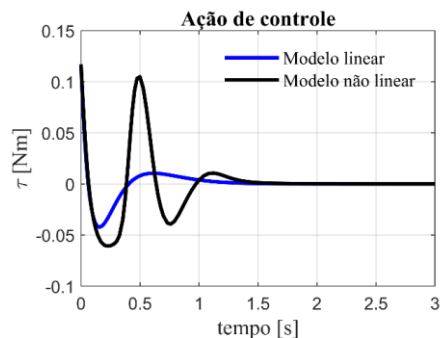
Tabela 3. Características de desempenho obtidas em simulação para a condição $x(0) = [0 \ 0 \ \pi/6 \ 0]^T$

	Modelo linear		Modelo não linear	
	θ_0	θ_1	θ_0	θ_1
Tempo de acomodação	2,3	2,1	2,1	1,5
ITAE	0,2669	0,04634	0,1849	0,06874
Sobressinal	1,267	0,0525	1,876	0,233
Subsinal	0	-0,258	-0,081	-0,472

Fonte: Elaborado pelos Autores

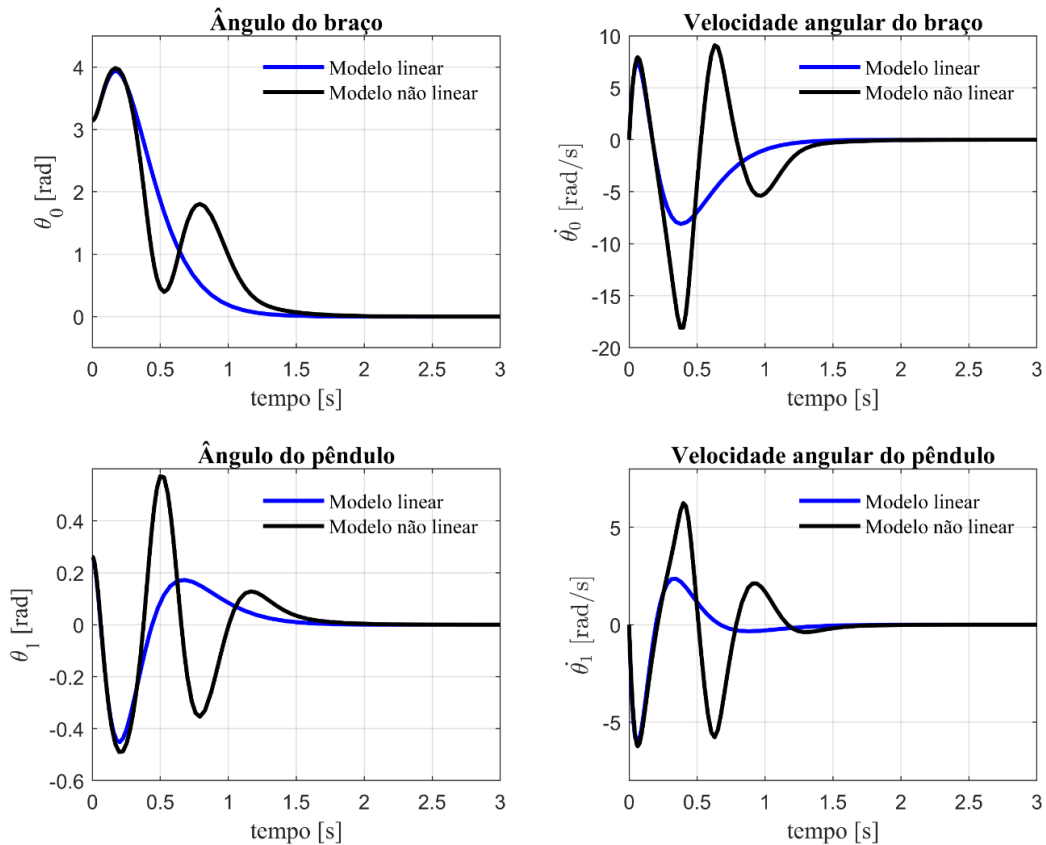
No terceiro conjunto de simulações foram consideradas as posições angulares iniciais não nulas: $x(0) = [\pi \ 0 \ \pi/12 \ 0]^T$. Na Figura 7 é apresentada a ação de controle, torque do motor, obtidos nas simulações em malha fechada dos modelos considerados e na Figura 8 são apresentadas a evolução temporal das variáveis de estado dos sistemas para esta condição inicial.

Figura 7 - Sinais de controle para o sistema pêndulo invertido em simulação considerando seu modelo linear e não linear com condição inicial $x(0) = [\pi \ 0 \ \pi/12 \ 0]^T$



Fonte: Elaborado pelos Autores

Figura 8 - Variáveis de estado do sistema pêndulo invertido em simulação considerando seu modelo linear e não linear com condição inicial $x(0) = [\pi \ 0 \ \pi/12 \ 0]^T$



Fonte: Elaborado pelos Autores

Os indicadores de desempenho para a comparação entre as respostas considerando os modelos linear e não linear são descritas na Tabela 4. Para essa condição inicial, o sistema não linear apresentou um tempo maior para sua estabilização quando comparado às simulações anteriores, além de possuir maiores valores de sobressinal e subsinal, o que refletiu nos maiores valores de ITAE.

Tabela 4. Características de desempenho obtidas em simulação para a condição $x(0) = [\pi \ 0 \ \pi/12 \ 0]^T$

	Modelo linear		Modelo não linear	
	θ_0	θ_1	θ_0	θ_1
Tempo de acomodação	1,6	1,9	2,2	2,5
ITAE	0,6656	0,1003	0,9935	0,1994
Sobressinal	3,934	0,1725	3,982	0,5719
Subsinal	0	-0,4518	0	-0,4902

Fonte: Elaborado pelos Autores

Apesar dos resultados deste conjunto de simulações mostrarem uma resposta mais oscilatória para o modelo não linear (Figuras 7 e 8 e Tabela 4), o controlador foi capaz de estabilizar ambos os modelos considerados também para essa condição inicial, mostrando-se adequado para a aplicação.

5 CONCLUSÕES

Este trabalho apresenta uma estratégia de controle por realimentação de estado para a alocação de polos aplicada aos modelos linear e não linear de um pêndulo invertido rotacional, conhecido na literatura da área como pêndulo Furuta.

A partir dos resultados de simulação apresentados, para ambos os modelos linear e não linear, conclui-se que o projeto do controlador por realimentação de estado e alocação de polos foi satisfatório no controle do pêndulo Furuta, no sentido de levar o pêndulo a um ponto de estabilização nas três situações distintas consideradas. Respostas menos oscilatórias foram obtidos nas simulações com o modelo linear do sistema, quando comparadas com as respostas do modelo não linear, principalmente nas condições iniciais em que o ângulo do pêndulo foi diferente de zero, ou seja, o pêndulo não se encontrava inicialmente na posição vertical.

Embora as respostas obtidas do modelo não linear serem mais oscilatórias, este é o modelo que mais se aproxima de uma planta real de um pêndulo invertido, dado que são consideradas relações mais complexas entre as variáveis de estado do que aquelas contempladas no modelo linear. Dessa forma, pode-se concluir que os resultados obtidos são promissores e que o controlador projetado, dados os ajustes necessários, pode ser implementado em um protótipo real, o qual será considerado em etapas para trabalhos futuros.

AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer ao Instituto Federal do Paraná pelo suporte no desenvolvimento desse trabalho.

REFERÊNCIAS

ABDELAZIZ, T. H. S.; VALASEK, M. Pole placement for SISO linear system by state derivative feedback, **IEE Proc. Control Theory Appl**, p. 377-385, 2004.

AGARANA, M. C.; AKINLABI, E. T. Lagrangian-Laplace Dynamic Mechanical Analysis and Modeling of Inverted Pendulum, **2nd International Conference on Sustainable Materials Processing and Manufacturing**, Procedia Manufacturing, Elsevier, p. 711-718, 2019.

AKHTARUZZAMAN, M.; SHAFIE, A. Modeling and Control of a Rotary Inverted Pendulum Using Various Methods, Comparative Assessment and Result Analysis, **Proceedings of the 2010 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation**, p. 1342-1347, 2010.

ASTROM, K. J.; FURUTA, K. Swinging up a pendulum by energy control, **Automatica**, Elsevier, p. 287-295, 2000.

BELKACEM, B.; ABDELHAKIM, D.; BACHIR, N.; KAMEL, H. 2-DOF Block Pole Placement Control Application To: Have Dash-IIBTT Missile, **International Journal of Information Technology, Modeling and Computing**, p. 17-34, 2016.

FURKA, M.; KLAUCO, M.; KVASNICA, M. Stabilization of Furuta Pendulum using Nonlinear MPC, **Research Papers Faculty of Materials Science and Technology in Trnava, SCIENDO**, vol. 27, n. 45, Bratislava, p. 42-48, 2019.

FURUTA, K.; YAMAKITA, M.; KOBAYASHI, S. Swing-up control of inverted pendulum using pseudo-state feedback, **Journal of Systems and Control Engineering**, p. 263-269, 1992.

GUZMÁN, V. M. H.; CRUZ, M. A.; ORTIGOZA, R. S. Linear State Feedback Regulation of a Furuta Pendulum: Design Based on Differential Flatness and Root Locus, **Special Section on Innovations In Electrical and Computer Engineering Education**, vol. 4, p. 8721-8736, 2016.

HAMZA, M. F.; YAP, H. J.; CHOUDHURY, I. A. Cuckoo search algorithm-based design of internal Type-2 Fuzzy PID Controller for Furuta pendulum system, **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, p. 134-151, 2017.

ISMAIL, J.; LIU, S. Efficient Planning of Optimal Trajectory for a Furuta Double Pendulum using Discrete Mechanics and Optimal Control, **IFAC Papers Online Conference**, Elsevier, p. 10456-10461, 2017.

LAN, Y.; MINRUI, F. Design of State-feedback Controller by Pole Placement for a Coupled set of Inverted Pendulums, **The Tenth International Conference on Electronic Measurement & Instruments**, p. 69-74, 2011.

MALVIYA, S.; HOTE Y. V.; KISHAN, P. K. V.; MALHOTRA, S. Analysis of Pole Placement Problem in Control Systems using State Derivative Feedback, **Springer-Verlag Berlin Heidelberg**, p. 750-754, 2011.

OGATA, K. **Modern Control Engineering**, 5 ed, São Paulo, Pearson Prentice Hall, 2010.

OLIVARES, M.; ALBERTOS, P. Linear control of the flywheel inverted pendulum, **ISA Transactions**, Elsevier, p. 1-8, 2013.

PIVOVAR, L. E.; BREGANON, R.; ALVES, U. N. L. T.; RIBEIRO, F. S. F.; BARBARA, G. V.; ALMEIDA, J. P. L. S.; MENDONÇA, M. A Tracking System Control Approach Applied on a Rotary Inverted Pendulum Model, **International Journal of Engineering Research and Application**, 2020.

SIRISHA, V.; JUNGHARE, A. A comparative study of controllers for stabilizing a Rotary Inverted Pendulum, **International Journal of Chaos, Control, Modelling and Simulation**, vol. 3, n. 1/2, p. 1-13, 2014.