

**Proposta de Sequência Didática para o Ensino de Funções de Duas Variáveis Utilizando o Geogebra Mobile****Proposal of Didactic Sequence for Teaching of Functions of Two Variables Using Mobile Geogebra**

DOI:10.34117/bjdv6n2-291

Recebimento dos originais: 30/12/2019

Aceitação para publicação: 27/02/2020

**Davi Ferreira de Lima Silva**

Graduando em Engenharia Civil pela Universidade Federal Rural do Semi-Árido

Endereço: BR 226, KM 405 - São Geraldo, Pau dos Ferros - RN, Brasil.

E-mail: davi\_tali@hotmail.com

**Murilo Carvalho Feitosa**

Graduando em Ciência e Tecnologia pela Universidade Federal Rural do Semi-Árido

Endereço: BR 226, KM 405 - São Geraldo, Pau dos Ferros - RN, Brasil

E-mail: murilocfeitosa@gmail.com

**Adelmo Arthur de Aquino**

Graduação em Ciência e Tecnologia pela Universidade Federal Rural do Semi-Árido

Mestrando em Ensino pela Universidade Estadual do Rio Grande do Norte

Endereço: BR 405, KM 3 - Arizona, Pau dos Ferros - RN, Brasil

E-mail: artur-aquino1@hotmail.com

**Kaliane Morais de Lucena Martins**

Graduação em Matemática (Licenciatura) pela Universidade Estadual Vale do Acaraú

Mestranda em Ensino pela Universidade Estadual do Rio Grande do Norte

Endereço: BR 405, KM 3 - Arizona, Pau dos Ferros - RN, Brasil

E-mail: k-kaliane@hotmail.com

**Pedro Ivan Moreira Bezerra**

Graduando em Ciência e Tecnologia pela Universidade Federal Rural do Semi-Árido

Endereço: BR 226, KM 405 - São Geraldo, Pau dos Ferros - RN, Brasil

E-mail: pedroivanmb02@gmail.com

**Otávio Paulino Lavor**

Doutorado em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Professor adjunto na Universidade Federal Rural do Semi-Árido

Endereço: BR 226, KM 405 - São Geraldo, Pau dos Ferros - RN, Brasil

E-mail: otavio.lavor@ufersa.edu.br

**RESUMO**

As funções de várias variáveis são aplicadas em diversos problemas da matemática e de outras áreas e por essa razão, seu entendimento é fundamental para a progressão a outros conteúdos. Diante disso, propõe-se uma sequência didática para o ensino de funções de duas variáveis em que o GeoGebra é utilizado na versão mobile. Nesta sequência, os conteúdos de domínio, imagem e curvas de nível são apresentados de forma algébrica e geométrica com o auxílio do gráfico da função que é plotado no aplicativo. O roteiro apresentado ilustra um exemplo detalhando todas as fases e interações feita no aplicativo, mostrando que o GeoGebra é uma ferramenta didática que pode contribuir na visualização e compreensão dos conceitos de funções.

**Palavras-Chave:** Tecnologia Móvel. Interação. Prática docente.

**ABSTRACT**

The functions of various variables are applied to various problems in mathematics and other areas and for this reason, their understanding is essential for progression to other contents. Therefore, it is proposed a didactic sequence for teaching of functions of two variables in which GeoGebra is used in the mobile version. In this sequence, the contents of domain, image and level curves are presented in algebraic and geometric form with the aid of the graph of the function that is plotted in the app. The presented script illustrates an example detailing all the phases and interactions made in the app, showing that GeoGebra is a didactic tool that can contribute to the visualization and understanding of the concepts of functions.

**keywords:** Mobile Technology. Interaction. Teaching practice.

**1 INTRODUÇÃO**

O cálculo diferencial e integral teve seu desenvolvimento motivado por problemas de diversas áreas do conhecimento. O entendimento de diversos fenômenos passa inicialmente pela compreensão do cálculo em uma e em várias variáveis e, para esse entendimento ser satisfatório, a prática docente precisa rever metodologias e tomar iniciativas que gerem motivação e uma participação efetiva dos aprendizes.

Embora existam diversas pesquisas relacionadas ao ensino de cálculo, estas pesquisas e práticas estão concentradas em cálculo de uma variável. Lima, Bianchini e Gomes (2017) afirmam que o estudo de funções de uma variável real já foi objeto, de pelo menos, uma pesquisa, sendo a maior atenção voltada à derivada. Então os autores, destacam que há um número reduzido de investigações referentes aos conceitos de cálculo associados às funções de duas ou mais variáveis reais.

E na busca por iniciativas que favoreçam o ensino de cálculo de várias variáveis, esta proposta pensa nas tecnologias de fácil acesso e que sejam gratuitas para serem aplicadas em sala de aula, pois espera-se que esse tipo de atividade desperte uma interação entre os conteúdos e o aprendiz.

Segundo da Silva (2019), o uso das tecnologias digitais mostra-se a cada vez mais importante, visto que computadores, *laptops*, *smartphones* e *tablets* fazem parte dos utensílios a serem carregados diariamente pela maioria das pessoas.

Então, como essas tecnologias estão inseridas no dia-a-dia dos alunos, propõe-se a inserção do GeoGebra nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral III. Neste caso, a tecnologia entra como agente facilitador visto que Abar e Alencar (2013) que diz que a ideia é que o professor utilize o GeoGebra não apenas como mais um recurso tecnológico, mas como um recurso que colabore no desenvolvimento de conceitos matemáticos, uma vez que, o software sozinho não faz matemática. Ou seja, o recurso não substitui em momento algum, a função do professor que vivenciar resultados satisfatórios em suas práticas.

Diante do exposto, surge a indagação em relação ao ensino de cálculo, e em especial as a visualização e interpretação de funções de duas variáveis. Questiona-se como este conteúdo pode ser compreendido e se é possível a inserção de tecnologias móveis em aulas de cálculo.

## **2 MATERIAIS E MÉTODOS**

A pesquisa consiste na construção de uma sequência didática no ensino de integrais múltiplas, pois Dolz e Schneuwly (2004) defendem que as sequências didáticas são instrumentos que podem nortear os professores na condução das aulas e no planejamento das intervenções.

A sequência é proposta para uma turma de Cálculo Diferencial e Integral III, disciplina em que são estudadas as funções de várias variáveis. A sequência didática proposta consiste das seguintes fases: apresentação de conceitos de funções de duas variáveis, apresentação e uso de aplicativo móvel; atividades com o uso do aplicativo.

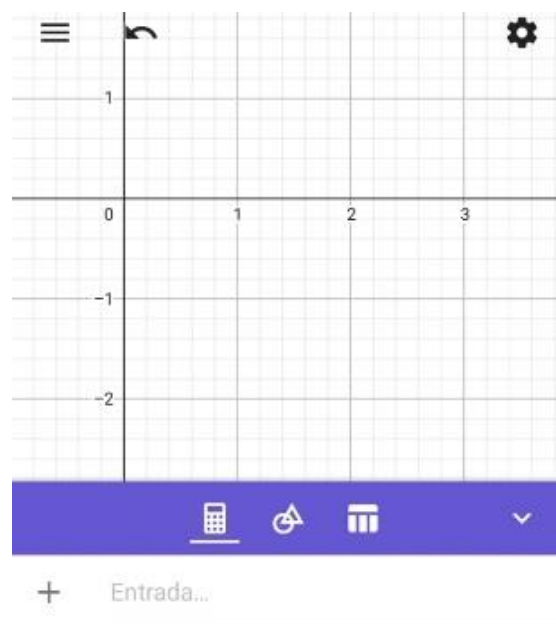
Como a turma possui conhecimentos de função de uma variável, por já terem cursado Cálculo Diferencial e Integral I e II, apresenta-se os conteúdos de funções de duas variáveis, destacando os domínios, imagens e gráficos.

Para visualização e compreensão dos conceitos, insere-se a fase de utilização de recursos tecnológicos, onde destaca-se o GeoGebra que tem sido utilizado em diversos

conteúdos. O Geogebra que tem sido utilizado por Riccardi e Fusco (2019) para trabalhar o ensino e aprendizagem em geometria analítica e cálculo vetorial, enquanto que Domingues, Sturion e Carvalho (2019) fazem uma investigação da função composta. Fonseca e Henriques (2019) utiliza para o teorema do valor intermediário e Diógenes (2019) faz uma intervenção nas aulas de geometria diferencial de curvas. Como pode-se ver, este recurso tem auxiliado os processos em diferentes contextos e níveis de ensino.

Levando em consideração que é mais viável trabalhar com os discentes em sala de aula sem a necessidade de reserva de laboratório, apresenta-se o GeoGebra na versão para dispositivos móveis. O aplicativo é oferecido por *International GeoGebra institute*, lançado desde 06 de dezembro de 2015 na *Play Store*. A figura 1 mostra a tela inicial ao abrir o aplicativo na versão em duas dimensões.

Figura 1 - Tela inicial do GeoGebra 2D

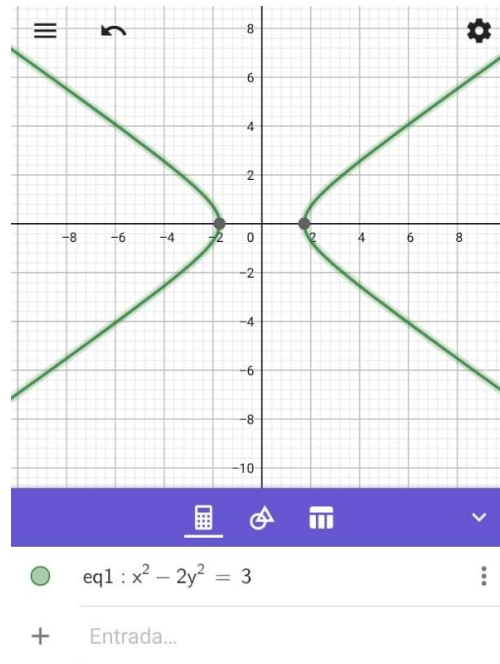


Fonte: Autores (2020)

Na tela inicial, tem-se o plano cartesiano e a opção de entrada, local onde é digitada a função a ser estudada.

A figura 2 mostra um exemplo de gráfico plotado no Geogebra 2D.

Figura 2- Elipse no GeoGebra 2D

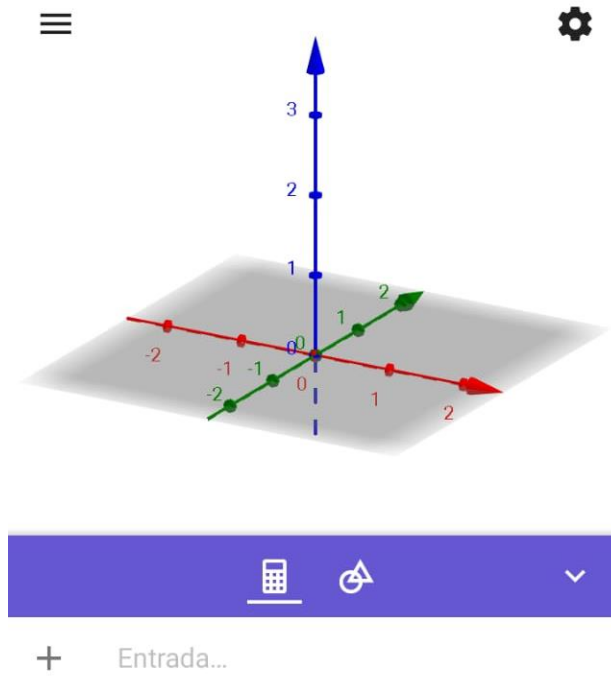


Fonte: Autores (2020)

Neste exemplo, tem-se uma hipérbole com focos sobre o eixo x. Neste exemplo, pode-se acrescentar outros gráficos na opção mais (+).

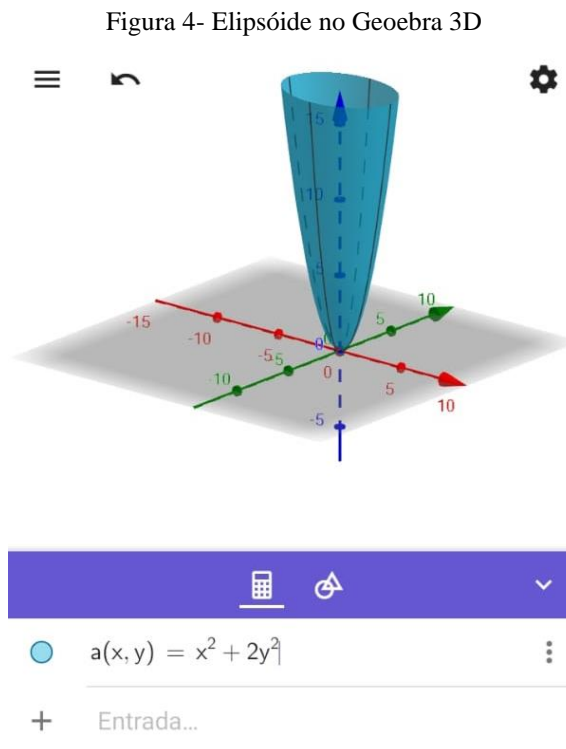
Na figura 3, tem-se a tela inicial da versão em três dimensões.

Figura 3-Tela inicial do GeoGebra 3D



Fonte: Autores (2020)

Assim como anteriormente, tem-se o sistema de coordenadas com a opção de entrada. A figura 4 mostra um exemplo de gráfico plotado, que é um parabolóide elíptico.



Fontes: Autores (2020)

Uma vez apresentado o Geogebra 2D e 3D, sugere-se a atividades de fixação com intuito de gerar apropriação dos conceitos de funções de duas variáveis. A seção seguinte mostra exemplos de atividades a serem trabalhadas.

### 3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A primeira fase da sequência didática aqui proposta consiste na apresentação do conteúdo de funções de duas variáveis. Neste momento, torna-se interessante explicar tal conteúdo levando em consideração o conhecimento que o discente já tem de funções de uma variável, pois segundo Ausubel (1980), a aprendizagem significativa só ocorre quando o material a ser aprendido é ancorado em conceitos relevantes já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz.

Então, destaca-se aqui que um exercício de função de uma variável possa ser estendido a duas variáveis. Exemplo: ao comprar pães, tem-se uma função de uma variável em que o valor final é dependente da quantidade de pães. No entanto ao comprar, pães e ovos, terá uma

função de duas variáveis em que o valor final depende da quantidade de pães e também da quantidade de ovos. Exemplos desta natureza envolve o cotidiano do discente e também os conteúdos já aprendidos.

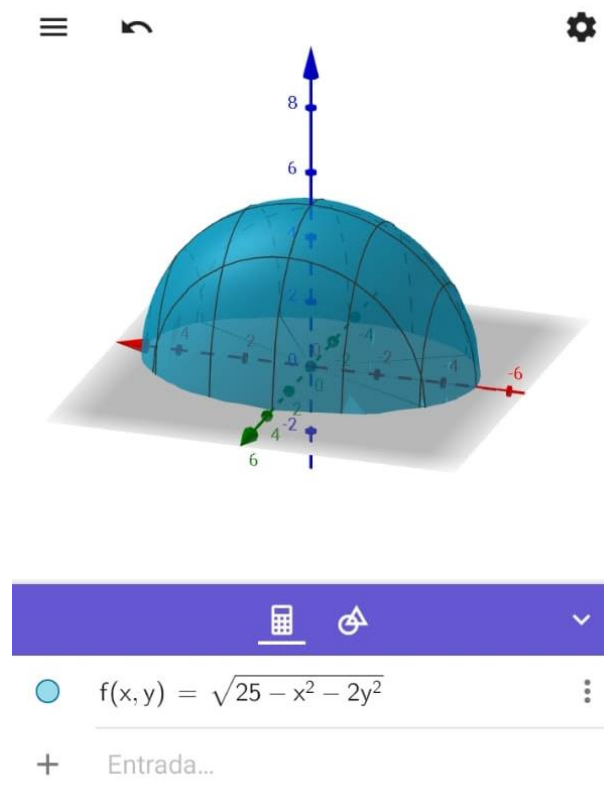
Na fase de apresentação do GeoGebra, fica reforçado que tal aplicativo irá contribuir na visualização de gráficos contribuindo para a compreensão de domínio, imagens e curvas de nível.

Dentre diversas funções a serem estudados, escolhe a função  $f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - 2y^2}$ . O domínio desta função é o conjunto dos pontos tais que  $25 - x^2 - 2y^2 \geq 0$ , pois a raiz quadrada só é possível para números reais não negativos. A imagem é o conjunto  $[0, 5]$  e as curvas de níveis são obtidas tomando  $f(x,y) = C$ , onde  $C \in [0, 5]$ .

Aqui, é preciso observar que o parágrafo acima pode não ser suficiente ao ensinar funções de várias variáveis. Então, propõe-se que cada detalhe seja observado e trabalhado no gráfico, pois o GeoGebra permite a interação do estudante com o ambiente.

A figura 5 mostra o gráfico desta função.

Figura 5- Gráfico da função.

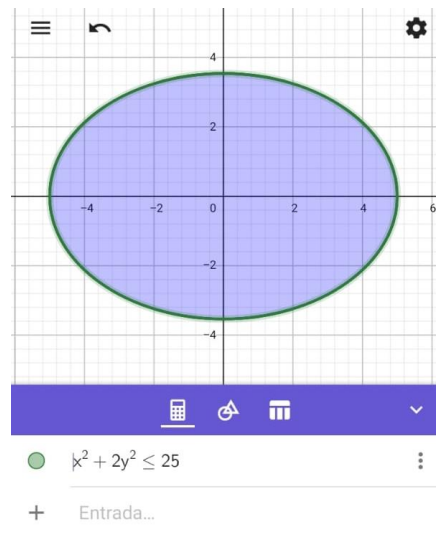


Fonte: Autores (2020).





Figura 7- Domínio da função.

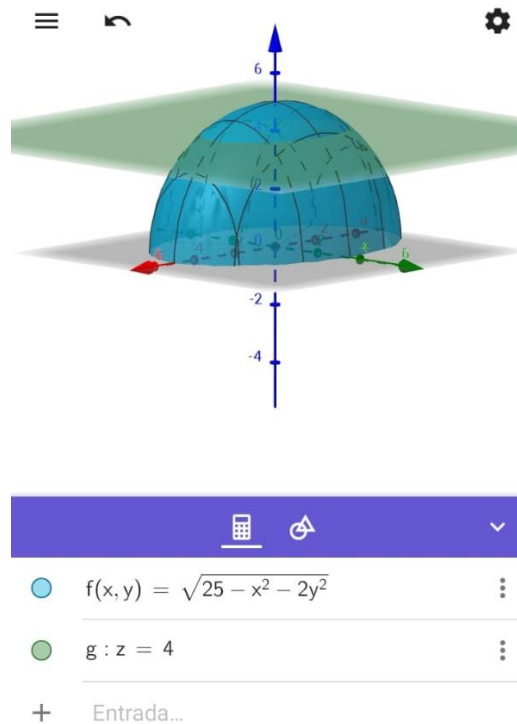


Fonte: Autores (2020).

A imagem é formada por todos os pontos  $z$  tais que  $z = \sqrt{25 - x^2 - 2y^2}$ . No gráfico da figura 5 fica notório que menor valor para  $z$  é 0 e o maior valor é 5. Observa-se ainda que para qualquer valor  $z$  entre 0 e 5, há  $(x, y)$  que satisfaça que  $z = \sqrt{25 - x^2 - 2y^2}$ .

As curvas de níveis podem ser obtidas algebricamente fazendo  $f(x, y) = C$ , como citado acima. No entanto, a visualização geométrica favorece o entendimento ao plotar  $z = C$  juntamente com o gráfico da função. Por exemplo, ao tomar  $C = 4$ , tem a figura 8.

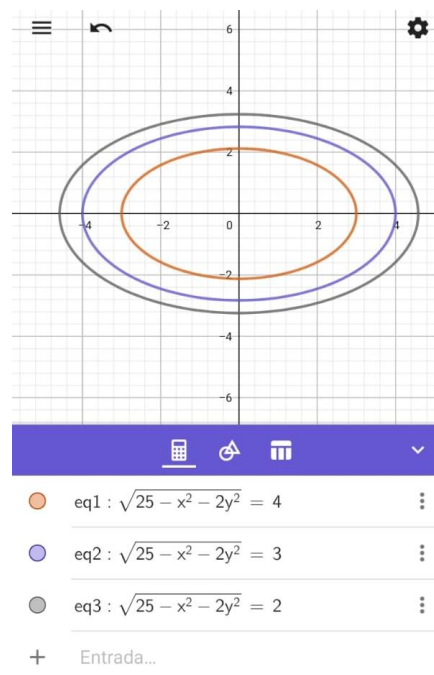
Figura 8- Obtendo curvas de nível.



Fonte: Autores (2020).

A curva de nível é a interseção do gráfico da função com o plano  $z = 4$ , que é a elipse  $x^2 + 2y^2 = 9$ . A figura 9 mostra esta e outras curvas de níveis no plano cartesiano.

Figura 9- Exemplos de curvas de nível.



Fonte: Autores (2020).

Aqui fica apresentado um exemplo de função de duas variáveis que pode ser abordado de forma algébrica e geométrica. Outros exemplos podem ser trabalhados usando o mesmo roteiro.

#### **4 CONSIDERAÇÕES FINAIS**

O ensino de matemática precisa passar por intervenções e inovações a fim de produzir uma apropriação adequada de mais diversos conceitos. No caso de funções de várias variáveis, este trabalho propôs uma sequência didática que trabalhe a apresentação dos conteúdos levando em consideração os conteúdos anteriores e o contexto ao qual o aluno está inserido. Dentro de um contexto tecnológico, foi proposto que o professor trabalhe as funções de forma algébrica e geométrica utilizando o software GeoGebra na versão Mobile, visto que vários estudantes já possuem smartphones e o aplicativo está disponível para baixar de forma gratuita.

Ao apresentar um exemplo a ser trabalhado, destacou-se cada fase e operação a ser feita utilizando o aplicativo de forma motivadora e interativa, pois acredita-se que quando a participação é efetiva, aumenta-se as chances de aprendizagem satisfatória. Então, espera-se que o modelo aqui exposto possa replicado e multiplicado por docentes de Cálculo Diferencial e Integral III, além de despertar o público para uma educação matemática mediada por tecnologias.

#### **REFERÊNCIAS**

ABAR, C. A. A. P.; ALENCAR, S. V. **A Gênese Instrumental na Interação com o GeoGebra: uma proposta para a formação continuada de professores de Matemática.** Bolema. Rio Claro, v. 27, n. 46, p. 349-365, 2013.

AUSUBEL, D.P.; NOVAK, J.D. HANASIAN, H. **Psicologia Educacional.** 2 ed. Rio de Janeiro: Editora Interamericana, 1980.

DA SILVA, P. F. **O uso das Tecnologias Digitais como Ferramentas Cognitivas.** RENOTE - Revista Novas Tecnologias na Educação. Porto Alegre, v. 17, n. 2, p. 76-86, 2019. Disponível em:

<https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/96588>. Acesso em 30 de novembro de 2019.

DIÓGENES, R. **Geometria diferencial de curvas planas com Geogebra**. Professor de Matemática Online, Rio de Janeiro, v. 7, n. 2, p. 226-233, 2019. Disponível em: [http://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/16/2019/10/art18\\_vol7\\_2019\\_SBM\\_PMO-final.pdf](http://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/16/2019/10/art18_vol7_2019_SBM_PMO-final.pdf). Acesso em 30 de novembro de 2019.

DOLZ, J.; SCHNEUWLY, B. **Gêneros e progressão em expressão oral e escrita. Elementos para reflexões sobre uma experiência suíça (francófona)**. In: Gêneros Oraís e escritos na escola. Mercado de Letras, Campinas, 2004.

DOMINGUES, M. A. F. G; STURION, L; CARVALHO, A. A. **Investigando função composta com o software Geogebra**. Revista de Ensino de Ciências e Matemática (REnCiMa), v. 10, n. 3, p. 132-147, 2019. Disponível em: <http://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/1985/1134>. Acesso em 21 de janeiro de 2020.

FONSECA, V. G.; HENRIQUES, A. C. C. B. **Aprendizagem do teorema do valor intermediário numa abordagem exploratória com o geogebra**. Revista Intersaberes, v. 14, n. 31, p. 129-144, 2019. Disponível em: <https://www.uninter.com/intersaberes/index.php/revista/article/view/129/414347>. Acesso em 21 de janeiro de 2020.

LIMA, G. L.; BIANCHINI, B. L.; GOMES, E. **Cálculo e análise: Mapeamento das Pesquisas do GT04 – Educação Matemática no Ensino Superior**. Vidya, Santa Maria, v. 37, n.2, p. 317-334, 2017. Disponível em: <https://www.periodicos.unifra.br/index.php/VIDYA/article/download/2009/1946>. Acesso em 30 de dezembro de 2019.

ZICCARDI, L. R. N.; FUSCO, C. A. S. **Aprendizagem Significativa de Matemática em um Curso Superior de Engenharia Utilizando o Geogebra**. Ensino da Matemática em Debate,

## ***Brazilian Journal of Development***

São Paulo, v. 6, n. 2, p. 84-95, 2019. Disponível em:  
<https://revistas.pucsp.br/emd/article/view/42204>. Acesso em 02 de dezembro de 2019.