Brazilian Journal of Development

Uma abordagem interdisciplinar para obtenção da melhor função aproximada para ajuste de dados

An interdisciplinary approach for best approaching data adjustment function

DOI:10.34117/bjdv5n9-233

Recebimento dos originais: 12/09/2019
Aceitação para publicação: 01/10/2019

Marcos Henrique Fernandes Marcone
Graduando em Bacharelado em Ciências e Tecnologia pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Instituição: Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Endereço: Campus Universitário Lagoa Nova, CEP 59078-970, Caixa Postal 1524, Natal-RN, Brasil
E-mail: marcosmarcone48@gmail.com

Fabiana Tristão de Santana
Doutora em Engenharia Elétrica e Computação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Instituição: Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Endereço: Campus Universitário Lagoa Nova, CEP 59078-970, Caixa Postal 1524, Natal-RN, Brasil
E-mail: fabianatsantana@gmail.com

Fágner Lemos de Santana
Doutor em Sistemas e Computação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Instituição: Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Endereço: Campus Universitário Lagoa Nova, CEP 59078-970, Caixa Postal 1524, Natal-RN, Brasil
E-mail: fagner@ccet.ufrn.br

RESUMO

Neste trabalho, importantes conceitos das Ciências Exatas, Computação e Engenharias atuam de forma interdisciplinar para obter a melhor solução aproximada para um experimento físico. O objetivo do trabalho é mostrar como diferentes teorias podem ser usadas para solucionar problemas nas Engenharias. Mais especificamente, serão utilizados aqui o método de Mínimos Quadrados (estudado na Álgebra Linear), as incertezas e operações intervalares (estudados na Matemática Intervalar) e a linguagem Python (estudada na computação) para resolver um sistema intervalar que fornece a melhor função aproximada que ajusta um conjunto de dados oriundos de um experimento físico, no qual um carro se deslocava com aceleração nula sob um trilho de ar horizontal. Ao fazer esse tipo de abordagem usando a Matemática Intervalar, busca-se inferir como as incertezas provenientes do experimento, assim como os erros gerados pelas representações e operações dos números em computadores, interferem no resultado obtido. Para isso, se fez necessário a utilização da biblioteca Python for Extended Scientific Computing (Python-XSC), a qual é baseada na estrutura da aritmética intervalar e fornece funções para a resolução de sistemas lineares intervalares. A aplicação do estudo feito se mostrou bastante

eficiente e de fácil utilização, além de estimular os estudantes de engenharia a buscarem soluções inovadoras através da interdisciplinaridade das teorias estudadas na área.

Palavras-chave: Aproximação de Funções. Matemática Intervalar. Mínimos Quadrados. Python. PYXSC.

ABSTRACT

In this work, important concepts from Exact Sciences, Computing and Engineering act in an interdisciplinary way to obtain the best approximate solution for a physical experiment. The aim of this paper is to show how different theories can be used to solve problems in engineering. More specifically, the Least Squares method (studied in Linear Algebra), the uncertainties and interval operations (studied in Interval Mathematics) and the Python language (studied in computation) will be used to solve an interval system that provides the best approximate function that adjusts a data set from a physical experiment in which a car was moving at zero acceleration under a horizontal air track. By doing this type of approach using Interval Mathematics, we seek to infer how the uncertainties arising from the experiment, as well as the errors generated by the representations and operations of computer numbers, interfere with the obtained result. For this, it was necessary to use the Python for Extended Scientific Computing (Python-XSC) library, which is based on the interval arithmetic structure and provides functions for the resolution of interval linear systems. The application of this study proved to be very efficient and easy to use, besides encouraging engineering students to seek innovative solutions through the interdisciplinarity of the theories studied in the area.

Keywords: Approximation of Functions. Interval Mathematics. Least Squares. Python PYXSC.

1. INTRODUÇÃO

As metodologias aplicadas no ensino de engenharia que utilizam simultaneamente diferentes conhecimentos, têm por objetivo contribuir com a formação dos estudantes e dar a eles a oportunidade de simular alguns desafios encontrados na prática de um engenheiro. Por exemplo, utilizar situações problema, segundo Araújo *et al.* (2016), é uma metodologia de ensino que proporciona melhor compreensão e fixação dos conteúdos estudados, além de tornar o aprendizado mais significativo.

Outro fator que reforça a necessidade de aplicações de metodologias inovadoras no ensino de engenharia é o atual mercado de trabalho, que tem exigido alta qualidade dos profissionais em engenharia. Além do conhecimento adquirido em sua formação, espera-se que o engenheiro seja capaz de buscar novos conhecimentos e maneiras para solucionar os problemas e situações inusitadas em sua prática de trabalho (PEREIRA; FREIRE; SEIXAS, 2003).

O uso da interdisciplinaridade na formação dos estudantes tem muitos papéis importantes, como, por exemplo, mostrar que conteúdos estudados em disciplinas diferentes podem ser usados simultaneamente na resolução de problemas, desenvolver a capacidade de trabalhar em equipe, simular problemas que são encontrados na prática de trabalho permitindo que haja uma análise crítica e sugestões criativas para solucioná-los, dentre outros.

Dentro do contexto da interdisciplinaridade, o objetivo deste trabalho foi reunir conceitos importantes de algumas disciplinas, como Álgebra Linear, Matemática Intervalar, Computação e Física para utilizar um módulo computacional de resolução de sistemas lineares com coeficientes intervalares, denominado *Python for Extended Scientific Computing (Python-XSC)*, e adotá-lo para encontrar a melhor função que ajusta dados, como aqueles obtidos de práticas experimentais.

Os resultados que serão apresentados aqui foram desenvolvidos em um projeto de iniciação científica, onde foi necessário o uso de diferentes teorias e um conhecimento aprofundado de programação. No entanto, será mostrado que a utilização da ferramenta já desenvolvida é fácil e proporciona excelentes resultados, principalmente em problemas reais, oriundos de experimentos, onde a análise estatística de erros é necessária.

Os dados numéricos oriundos de práticas experimentais trazem uma incerteza inerente do próprio processo de medição. Esses dados, geralmente associados a grandezas físicas, devem ser claramente interpretados e, muitas vezes, essas medidas ficam sujeitas a erros que não se pode eliminar (NAGASHIMA, 2019). É neste contexto que se vê uma grande utilidade para a Matemática Intervalar, que representando dados em forma de intervalos consegue incluir ao valor mais provável o máximo de informação com uma amplitude mínima, como ressaltam Hansen (1992) e Moore (1979).

Também existe uma grande diversidade de trabalhos utilizando a Matemática Intervalar na área da computação científica, pois nesse ambiente ela se torna um instrumento muito poderoso na análise e controle de erros oriundos da limitação do sistema de ponto flutuante (KEAFORT, 2013). Além disso, em geral, a Matemática Intervalar torna mais perceptível a influência dos erros de entrada e de representações numéricas feitas pelo computador no resultado obtido durante processo matemático-computacional (GRIGOLETTI *et al.*, 2006).

O trabalho está organizado da seguinte forma. Na Seção 2 serão apresentados importantes conceitos da Álgebra Linear utilizados para definir um método para obtenção da melhor solução aproximada para sistemas inconsistentes. Este método, conhecido por Mínimos Quadrados tem grandes aplicabilidades práticas. Na Seção 3 serão apresentadas as principais definições e funções da Matemática Intervalar usadas neste trabalho para o tratamento da incerteza. Além disso, nesta seção é apresentado o módulo Python for Extended Scientific Computing (Python-XSC) (GRIGOLETTI; DIMURO; BARBOZA, 2007), o qual é capaz de fornecer a solução de sistemas intervalares. Na Seção 4, é apresentado um experimento físico realizado em laboratório com o objetivo de obter a melhor função de ajuste de dados. O problema será modelado utilizando um sistema linear intervalar e será mostrado como o Python-XSC é utilizado para obtenção da função ótima. Por fim, serão feitas as considerações finais do trabalho.

2. APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES COM A ÁLGEBRA LINEAR

Muitos problemas experimentais, que lidam com análise de dados, têm por objetivo encontrar uma função aproximada que se ajusta a um conjunto de dados (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ com um erro mínimo.

Segundo a Álgebra Linear, para encontrar uma função $y = f(x)$ para este problema, deve-se supor que todos os pontos (x_n, y_n) satisfazem a função. Como existem n dados, este procedimento gera o sistema $A\vec{u} = \vec{w}$ de n equações com o número de variáveis correspondente aos coeficientes da função $y = f(x)$. Por exemplo, se a função for da forma $y = ax + b$, o sistema terá as variáveis a e b, ou se for $y = ax^2 + bx + c$, as variáveis do sistema serão a, b e c. Independente da função, o sistema será inconsistente pois, na verdade, os pontos não estão todos sobre a curva descrita pela função escolhida (KOLMAN; HILL, 2012).

A resolução deste problema utiliza o método clássico da Álgebra Linear conhecido por método dos Mínimos Quadrados que, utilizando projeções ortogonais, consiste em resolver a Equação (1), onde A é a matriz constituída pelos coeficientes das variáveis, A^T é a matriz transposta obtida de A, $\vec{u}$ é o vetor coluna constituído pelas variáveis e $\vec{w}$ é o vetor coluna constituído pelos termos independentes do sistema.

$$A^T A\vec{u} = A^T\vec{w} \tag{1}$$

Por exemplo, se $f(x) = ax + b$, a Equação (1) fornece os melhores valores para a e b, que é a melhor solução aproximada para $A\vec{u} = \vec{w}$ e, consequentemente, a melhor função $y = f(x)$ que irá ajustar os dados experimentais (ANTON, 2006).

No processo de obtenção dos dados experimentais pode acontecer alguma imprecisão numérica e, além disso, durante a realização dos cálculos computacionais erros numéricos de arredondamentos e truncamentos também podem surgir. Para tratar este aspecto da incerteza, comum no processo experimental, pode-se recorrer à Matemática Intervalar que fornece um meio de representar valores numéricos x na forma de intervalo $[x_1, x_2]$.

3. TRATAMENTO DE INCERTEZAS NA COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

A Matemática Intervalar é uma teoria matemática introduzida por Moore na década de 60 (MOORE, 1979) com objetivo fundamental de fazer o tratamento automático e assegurado de erros em computação científica, onde os parâmetros e dados iniciais são constituídos por algum tipo de erro, sendo assim categorizados como incertos (GRIGOLETTI *et al.*, 2006). Dentre os vários conceitos abordados pela Matemática Intervalar, esse artigo utiliza como base as concepções de intervalos de números reais e matrizes intervalares.

Um intervalo de reais ou simplesmente intervalo $[X]$ é definido como um conjunto não vazio de números reais $X = [x_1; x_2] = \{x \in R | x_1 \leq x \leq x_2\}$, em que x_1 é conhecido como o extremo inferior e x_2 é o extremo superior. O conjunto de todos os intervalos reais é denotado por IR. A aritmética mais comumente utilizada para operar com esses elementos foi introduzida por Moore e define para todos os intervalos $X = [x_1; x_2], Y = [y_1; y_2]$ as seguintes operações: $X + Y = [x_1 + y_1; x_2 + y_2]$; $X - Y = [x_1 - y_2; x_2 - y_1]$; $X \times Y = [\min(K), \max(K)]$, onde $K = \{x_1y_1, x_1y_2, x_2y_1, x_2y_2\}$; $X/Y = [\min(L), \max(L)]$, onde $L = \{x_1/y_1, x_{1/}y_2, x_2/y_1, x_2/y_2\}$, com 0 não pode pertencer ao intervalo Y (MOORE, 1979).

Uma matriz intervalar é uma matriz em que cada elemento é um intervalo. Mais especificamente, uma matriz intervalar de m linhas e n colunas é definida por $A^I = \left(A_{ij}\right)_{m \times n}$, onde $A_{ij} \in IR$ para todo $i = 1, \dots. m$ e $j = 1, \dots. n$, sendo o conjunto de todos esses elementos denotado por $IM_{m \times n}$. Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$ é uma matriz real, então $A \subset A^I$ quando $a_{ij} \in A_{ij}$, para todo $i = 1, \dots. m$ e $j = 1, \dots. n$ (HANSEN, 1992).

As operações de soma, subtração e multiplicação de matrizes intervalares são semelhantes às operações de matrizes reais, com a diferença que os cálculos realizados termo a termo utilizam a aritmética intervalar.

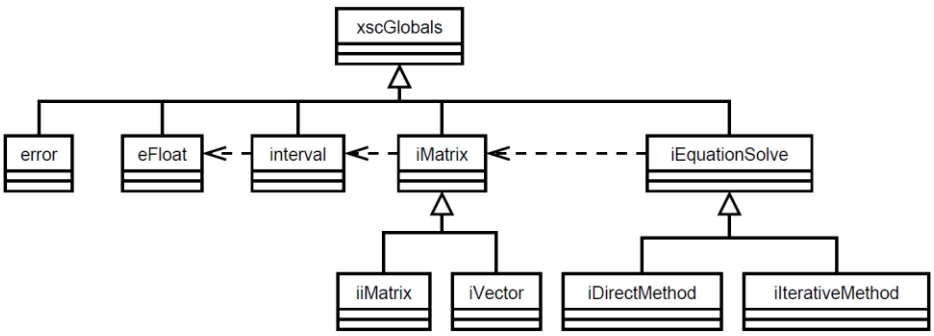
3.1 A BIBLIOTECA PYTHON FOR EXTENDED SCIENTIFIC COMPUTING (PYTHON-XSC)

Atualmente, existem várias bibliotecas para Matemática Intervalar implementadas nas mais diversas linguagens. Entretanto, segundo Dias (2002), estas bibliotecas, em geral, não possuem como objetivo serem utilizadas em práticas de ensino, muito menos são de fácil aprendizado para o desenvolvimento de aplicações. Assim como, os módulos mais conhecidos nessa área são pagos, como o Intlab (RUMP, 1999) (biblioteca de Matemática Intervalar para o Matlab), o que dificulta mais ainda o acesso.

Dentro desse contexto, foi desenvolvido o módulo Python for Extended Scientific Computing (Python-XSC) (GRIGOLETTI; DIMURO; BARBOZA, 2007). Este é um conjunto desenvolvido em Python, utilizando o paradigma da Programação Orientada a Objetos (POO), que implementa classes básicas para a manipulação de intervalos, segundo a teoria da Matemática Intervalar (MOORE,1966, 1979; ACIÓLY, 1991).

Na Figura 1, é apresentado a arquitetura do módulo Python-XSC, o qual é composto pelas seguintes classes: (*i*) xscGlobals, (*ii*) eFloat, (*iii*) interval, (*iv*) iMatrix, (*v*) iEquationSolve e (*vi*) erro.

Figura 1- Diagrama de classes da biblioteca Python-XSC



Fonte: (GRIGOLETTI; DIMURO; BARBOZA, 2007)

É importante ressaltar que o módulo Python-XSC é licenciado pela GPL, ou seja, tem o código aberto e é distribuído como software livre. Assim como, o Python-XSC é portável e multiplataforma, características estas herdadas da linguagem Python.

O Python-XSC, neste artigo, é utilizado para representar os intervalos, as matrizes intervalares e para resolver um sistema linear intervalar proveniente da aplicação do método dos mínimos quadrados com o objetivo de obter o melhor ajuste intervalar para a curva que descreve o movimento retilíneo uniforme.

4. APLICAÇÃO EM AJUSTE DE DADOS

A ferramenta computacional para resolução de sistemas intervalares, obtida com a interdisciplinaridade, particularmente a biblioteca Python-XSC, será usada para encontrar a

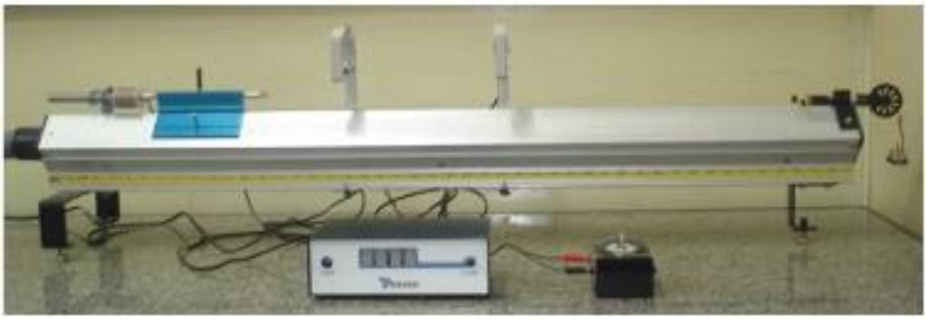
Brazilian Journal of Development

melhor função horária do espaço $X(T) = X_0 + V * T$ de um experimento físico com a presença de incertezas.

A prática experimental realizada no laboratório de Física foi feita considerando uma incerteza de 0,01 nas medidas de tempo e distância percorrida pelo carro dando origem ao conjunto de dados intervalares $([1{,}11; 1{,}13], [0{,}99; 1{,}01])$, $([0{,}94; 0{,}96], [0{,}89; 0{,}91])$, $([0{,}87; 0{,}89], [0{,}79; 0{,}81])$, $([0{,}83; 0{,}85], [0{,}69; 0{,}71])$, $([0{,}81; 0{,}83], [0{,}59; 0{,}61])$, $([0{,}62; 0{,}64], [0{,}49; 0{,}51])$, $([0{,}36; 0{,}38], [0{,}39; 0{,}41])$ e $([0{,}24; 0{,}26], [0{,}29; 0{,}31])$, do tipo $([t_1; t_2], [x_1; x_2])$.

A prática consistiu em analisar o movimento de um carro que se movia livremente com aceleração nula sobre um trilho de ar horizontal, como mostra a Figura 2, cuja posição em função do tempo é descrita pela função $x(t) = x_0 + vt$, onde x_0 é a posição do carro em $t = 0$ e v a velocidade do carro (JEWETT JR, 2012).

Figura 2- Deslocamento de carro em turbo de ar horizontal.



Fonte: (RIBEIRO, MOREIRA, SANTANA, 2018).

Ao considerar a presença da incerteza nos dados experimentais, os termos x, x_0, v e t serão expressos pelos intervalos $X = [x_1, x_2]$, $X_0 = [x_{01}, x_{02}]$, $V = [v_1, v_2]$ e $T = [t_1, t_2]$, respectivamente. Assim, a resolução do problema irá fornecer os melhores intervalos para a posição inicial X_0 e para a velocidade V e com eles a melhor função intervalar para o movimento será descrita pela Equação (2).

$$X(T) = X_0 + V * T \tag{2}$$

Para isso, os pares de dados $([t_1; t_2], [x_1; x_2])$ foram substituídos na Equação (2) dando origem ao sistema intervalar $A^I U^I = W^I$ da Equação (3), onde A^I é a matriz intervalar constituída pelos coeficientes das variáveis Ve X_0, U^I e W^I são vetores colunas intervalares constituídos pelas variáveis e pelos termos independentes do sistema, respectivamente.

$$\begin{bmatrix} [1{,}11; 1{,}13] & [1{,}00; 1{,}00] \\ [0{,}94; 0{,}96] & [1{,}00; 1{,}00] \\ [0{,}87; 0{,}89] & [1{,}00; 1{,}00] \\ [0{,}83; 0{,}85] & [1{,}00; 1{,}00] \\ [0{,}81; 0{,}83] & [1{,}00; 1{,}00] \\ [0{,}62; 0{,}64] & [1{,}00; 1{,}00] \\ [0{,}36; 0{,}38] & [1{,}00; 1{,}00] \\ [0{,}24; 0{,}26] & [1{,}00; 1{,}00] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ X_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0{,}99; 1{,}01] \\ [0{,}89; 0{,}91] \\ [0{,}79; 0{,}81] \\ [0{,}69; 0{,}71] \\ [0{,}59; 0{,}61] \\ [0{,}49; 0{,}51] \\ [0{,}39{,}0{,}41] \\ [0{,}29; 0{,}31] \end{bmatrix} \quad (3)$$

Estendendo a Equação (1) para o caso intervalar e considerando $(A^I)^T$ sendo a transposta A^I, obtém-se a Equação (4) que de acordo com a Álgebra Linear, mais especificamente o método de Mínimos Quadrados, fornece os valores de V e X_0, com os quais será definida a melhor função horária intervalar que caracterizará o movimento retilíneo uniforme descrito pelo carro.

$$(A^I)^T\, A^I\, U^I = (A^I)^T\, W^I \quad (4)$$

Aplicando na Equação (4) os métodos computacionais fornecidos pelo Python-XSC para o sistema $M^I X^I = N^I$, onde $M^I = (A^I)^T A^I$ e $N^I = (A^I)^T B^I$, a solução encontrada foi $U^I = \begin{bmatrix} X_0 \\ V \end{bmatrix}$, onde:

$$V = [0{,}002858791405526028; 1{,}5017688006391698] \quad (5)$$

$$X_0 = [-0{,}5392922200931132; 0{,}67292362330184462] \quad (6)$$

Das Equações (5) e (6), a melhor função que se ajusta aos dados do problema é:

$$\begin{aligned} X(T) = {} & [-0{,}5392922200931132; 0{,}67292362330184462] \\ & + [0{,}002858791405526028; 1{,}5017688006391698]T \end{aligned} \quad (7)$$

A solução dada na Equação (7) foi obtida, como mencionado anteriormente, pela biblioteca Python-XSC. A Figura 3, ilustra todo o processo para a obtenção dos coeficientes intervalares Para a reta que descreve o movimento retilíneo uniforme utilizando o processo de mínimos quadrados e as operações intervalares.

Figura 3 – Processo de obtenção dos coeficientes intervalares utilizando MMQ e Matemática Intervalar

```
from pyxsc import *
# Matriz A
A = imatrix([[[1.11 , 1.13], [1 , 1]],
[[0.94 , 0.96], [1 , 1]],
[[0.87 , 0.89], [1 , 1]],
[[0.83 , 0.85], [1 , 1]],
[[0.81 , 0.83], [1 , 1]],
[[0.62 , 0.64], [1 , 1]],
[[0.36 , 0.38], [1 , 1]],
[[0.24 , 0.26], [1 , 1]]])
# Matriz b
b = ivector([[0.99, 1.01],
[0.89, 0.91],
[0.79, 0.81],
[0.69, 0.71],
[0.59, 0.61],
[0.49, 0.51],
[0.39, 0.41],
[0.29, 0.31]])
#Tranposta de A
At = A.getTranspose()
# Aplicando o processo de mínimos quadrados
M = At*A
N = At*b
# Solucionando o sistema Mx=N
x = iIterativeMethod(M,N)
x.getXVector()
```

Fonte: Acervo dos autores

Primeiramente, para se utilizar a biblioteca Python-XSC é preciso importá-la (linha 1), feito esse passo, se torna possível utilizar todas as funções que são fornecidas pelo módulo. Em seguida, na linha 3, cria-se um objeto do tipo imatrix, que consiste em uma matriz intervalar, nesse caso é a matriz A que representa a matriz dos coeficientes intervalares na Equação (3). Logo após, na linha 12, gera-se um objeto do tipo ivector, que define um vetor intervalar, nesse exemplo é o vetor b que simboliza o vetor intervalar de termos independentes na Equação (3).

O próximo passo constitui o início da aplicação do método dos Mínimos Quadrados. Para isso, na linha 21, por meio do método getTranspose(), obtém-se a matriz transposta de A , a qual é atribuída a variável At. Em seguida, multiplica-se, usando a aritmética intervalar, a matriz At pela matriz A, gerando a matriz intervalar M, como também multiplica-se At com o vetor b para gerar a matriz N.

Por fim, na linha 26, obtém a solução do sistema $M^I X^I = N^I$ através da função iIterativeMethod(). Essa função possui como argumentos, respectivamente, uma matriz intervalar e um vetor intervalar, para assim resolver de forma iterativa e utilizando a Matemática Intervalar o sistema linear intervalar.

Este experimento físico apresentado aqui, juntamente com os dados numéricos, também foi analisado em (Ribeiro, Moreira e Santana, 2018), onde os autores aplicaram duas estratégias distintas para encontrar a função que melhor se ajustava aos dados. Na primeira, foi usado o software Pasco Capstone, o qual forneceu a solução da Equação (8).

$$X(T) = [-0.006, 0.7030] + [0.1400, 0.8890]T \tag{8}$$

Na segunda, o sistema intervalar foi desmembrado em dois sistemas, cada um contendo os dados das extremidades dos intervalos. Em seguida cada sistema, agora real, foram solucionados pelo método dos Mínimos Quadrados, e a solução obtida é a apresentada na Equação (9).

$$X(T) = [0.0650, 0.0691] + [0.7959, 0.7959]T \tag{9}$$

É importante ressaltar que tanto a solução fornecida pelo Pasco Capstone, quanto a obtida desmembrando o sistema intervalar em outros dois sistemas simples, estão contidas no intervalo calculado utilizando o módulo Python-XSC, isso demonstra a qualidade dessa biblioteca. Outro aspecto fundamental a ser destacado é o diâmetro da solução fornecida pelo módulo, para X_0 tem-se um diâmetro de 1,21221584339, enquanto V possui um diâmetro de 1,49891000923. Por serem diâmetros pequenos isso demonstra que os resultados são precisos e que os erros experimentais, assim como os erros gerados pela representação numérica em computadores não afetaram significativamente a solução encontrada.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desse artigo foi mostrar como diferentes teorias podem ser usadas para solucionar um problema de Engenharia. Para isso, foram utilizados importantes conceitos da Álgebra Linear, como o método dos Mínimos Quadrados, da Matemática Intervalar e da Computação para resolver um sistema intervalar que fornece a melhor função aproximada a qual ajusta um conjunto de dados oriundos de um experimento físico, no qual um carro se deslocava com aceleração igual a zero sob um trilho de ar horizontal.

Para que fosse possível aplicar os conceitos e as operações da Matemática Intervalar utilizou-se a biblioteca Python for Extended Scientific Computing (Python-XSC). Esse módulo, além de ser um *software* livre, possui muitas funções que permitem o uso, de forma simples, de várias características importantes da Matemática Intervalar.

Com este trabalho o estudante de Engenharia pôde aplicar simultaneamente teorias de áreas distintas e, com isso, perceber que um problema pode ser resolvido de diferentes formas. Além disso, foi possível aplicar importantes conhecimentos de programação e Álgebra Linear para a construção de algoritmos que tornam as soluções de problemas mais dinâmicas e precisas. Outro fator importante que pode ser destacado com o desenvolvimento do trabalho foi a utilização do laboratório e realização do experimento, com o qual foi possível ver na prática importantes teorias físicas e ao mesmo tempo perceber a necessidade de analisar com atenção as diversas imprecisões numéricas presentes nas etapas experimentais, desde a obtenção dos dados até os cálculos computacionais.

A abordagem desenvolvida apresentou resultados satisfatórios, pois foi possível controlar o efeito da incerteza e gerar intervalos com amplitudes pequenas. Dessa forma, em trabalhos futuros o método será aperfeiçoado por meio do desenvolvimento de uma interface gráfica para o Python-XSC, divulgado para uso na comunidade acadêmica e aplicado em outros experimentos que utilizem essa abordagem interdisciplinar contando com o suporte da Matemática Intervalar.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Universidade Federal do Rio Grande do Norte pelo incentivo ao desenvolvimento de pesquisas e apoio financeiro.

Brazilian Journal of Development

REFERÊNCIAS

ACIÓLY, B. M. **Fundamentação Computacional da Matemática Intervalar**. 1991. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS.

ANTON, Howard.; RORRES, Cris. **Álgebra linear com aplicações.** 8ª edição, Porto Alegre: Bookman, 2001.

ARAÚJO W. J. et al. **Aprendizagem por problemas no ensino de engenharia**. Re- Capítulo II Desafios da Educação em Engenharia 58 vista Docência Ensino Superior, v. 6, n. 1, p. 57-90, abr. 2016.

DIAS, A. M. **Ambiente de Técnicas Intervalares (ATI) Versão 2.0**. 2002. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) —Universidade Católica de Pelotas, Pelotas, RS. Monografia para obtenção do grau de Bacharel em Ciência da Computação.

GRIGOLETTI, Pablo Souza et al. Análise intervalar de circuitos elétricos. **Trends in Applied and Computational Mathematics**, v. 7, n. 2, p. 287-296, 2006.

GRIGOLETTI, Pablo Souza; DIMURO, Graçaliz Pereira; BARBOZA, Luciano Vitória. Módulo python para matemática intervalar. **Trends in Applied and Computational Mathematics**, v. 8, n. 1, p. 73-82, 2007.

HANSEN, E.R. Bounding the solution of interval linear equations. **SIAM Journalon Numeric Analysis**, v. 29, n. 5, p. 1493-1503, 1992.

JEWETT JR., John W.; SERWAY, Raymond A. **Física para cientistas e engenheiros - mecânica.** 8ª edição, São Paulo: Cengage Learning, v.1, 2012.

KEAFORT, R.B.; KREINOVICH, V. (Ed). **Applications of Interval Computations**. Springer Science & Business Media, 2013.

KOLMAN, Bernard; HILL, David. **Introdução à Álgebra Linear com Aplicações.** Rio de janeiro: LTC, 2012.

LAY, David. **Álgebra Linear e suas Aplicações**. 2ª edição, Rio de Janeiro: LTC, 1999.

LEON, Steven. **Algebra Linear com Aplicações**. 4ª edição, Rio de Janeiro: LTC, 1998.

MOORE, R. E. **Interval Analysis**. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1966.

MOORE, R. E. **Methods and Applications of Interval Analysis**. Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1979. xi + 190p.

NAGASHIMA, H. N. **Laboratório de Física I.** Disponível em: < http://www.feis.unesp.br/Home/departamentos/fisicaequimica/relacaodedocentes973>. Acesso em: 13 de mar. de 2019.

PEREIRA, M. A. A; FREIRE, J. E.; SEIXAS, J. A. A aprendizagem cooperativa no ensino de engenharia. **Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia**, Vol. 31. 2003.

RIBEIRO, E. C.; MOREIRA, A. B.; SANTANA, F. T.; Método de mínimos quadrados por diferentes abordagens aplicado no ajuste de dados experimentais e uso de softwares. V Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional, 2018, Maceió. **Anais**. Aracaju, 2018.

RUMP, S. M. Interval Computations with INTLAB. **Brazilian Electronic Journal on Mathematics of Computation (BEJMC)**, [S.l.], 1999.