Brazilian Journal of Development

Niveles de razonamiento frente a problemas binomiales

Levels of reasoning faced with binomial problems

DOI:10.34117/bjdv5n6-079

Recebimento dos originais: 11/03/2019
Aceitação para publicação: 15/04/2019

Álvaro Toledo San Martín
Magíster en Estadística por la Pontificia Universidad Católica de Chile
Institución: Departamento de Matemáticas y Física, Universidad Bernardo O'Higgins
Dirección: Avenida Viel 1497, Santiago, Región Metropolitana, Chile
E-mail: alvaro.toledo@ubo.cl

Daniel Montenegro Tobar
Licenciado en Matemáticas por la Pontificia Universidad Católica de Chile
Institución: Facultad de Ciencias, Universidad Mayor
Dirección: Avenida Manuel Montt 367, Providencia, Región Metropolitana, Chile
E-mail: daniel.montenegro@mayor.cl

Inés Vicencio Pardo
Magíster en Estadística por la Pontificia Universidad Católica de Chile
Institución: Departamento de Matemáticas y Física, Universidad Bernardo O'Higgins
Dirección: Avenida Viel 1497, Santiago, Región Metropolitana, Chile
E-mail: ines.vicencio@ubo.cl

RESUMEN

Este estudio explora los diferentes tipos de razonamientos que tienen profesores de enseñanza media (secundaria) de establecimientos educacionales chilenos frente a problemas de distribución binomial. Se presentan los resultados del análisis de las respuestas de 63 profesores respecto a dos problemas de distribución binomial (con y sin equiprobabilidad). Para el análisis, se utiliza una jerarquización hipotética basada en la taxonomía SOLO (Structure of Observed Learning Outcome) considerando los elementos necesarios para la resolución de problemas binomiales. Dentro de las conclusiones del estudio, la definición clásica de probabilidad, el uso de diagramas de árbol, la regla del producto, la combinatoria y la fórmula de la distribución binomial son indicadores de transición entre niveles de razonamiento. Se presentará además una secuencia de estructura de razonamiento derivada de los resultados de la taxonomía

Palabras clave: Taxonomía SOLO, razonamiento probabilístico, Binomial.

ABSTRACT

This work explores the different types of reasoning that teachers of secondary education of Chilean establishments have about binomial distribution problems. It presents the results of the analysis of the responses of 63 teachers regarding two problems of binomial distribution (with and without equiprobability). For the analysis, a hypothetical hierarchy based on the SOLO taxonomy is used considering the necessary elements for solving binomial problems.

Within the conclusions, the classical definition of probability, the use of tree diagrams, the product rule, the combinatorial and the binomial distribution formula are transition indicators between levels of reasoning. A sequence of reasoning structure derived from the results of the taxonomy will also be presented.

Keywords: SOLO taxonomy, probabilistic reasoning, Binomial.

1 INTRODUCCIÓN

Dentro de las bases curriculares definidas por el Ministerio de Educación de Chile el tópico de variable aleatoria discreta está considerado dentro del eje de Datos y Azar para alumnos desde 2do Medio (MINEDUC[1], 2013). Específicamente, se destaca el concepto de distribución Binomial como modelo de probabilidad discreto, estableciendo explícitamente la necesidad de la construcción inicial del concepto en base a tablas de frecuencias asociadas a experimentos aleatorios de este tipo (lanzamiento de una moneda equilibrada, extracción de esferas de una urna, etc.), luego, resolución de problemas en base a la distribución Binomial y la profundización respecto al valor esperado y varianza.

Los docentes que imparten clases en la enseñanza media en Chile tienen una formación de pregrado que incluyen cursos de probabilidad y estadística cuyos programas contienen los modelos de probabilidad discreta, en particular al modelo binomial, el que se espera puedan transmitir a sus estudiantes en sus clases.

Estudios realizados respecto de las dificultades que presentan los estudiantes al entender el concepto de la distribución binomial, muestran que en la mayoría de los casos debido a sesgos cognitivos, por ejemplo, en Van Dooren, De Bock, Depaepe, Janssens y Verschaffel (2003) donde se estudia la presencia del sesgo de linealidad cuando estudiantes de Bachillerato se enfrentan a problemas binomiales cuyos enunciados aparentan ser proporcionales. Por otra parte, Fischbein y Schnarch (1997) también destacan la ilusión de linealidad, además de la suposición de equiprobabilidad, representatividad, disponibilidad, entre otras, al igual que en Batanero y Sánchez (2005). Estudios comparativos entre estudiantes de bachillerato y profesores de secundaria en formación se observan en Mayén, Salazar y Sánchez (2013) en donde la conclusión principal indica que es fundamental el conocimiento de la combinatoria y la regla del producto para la solución de problemas binomiales.

Esta investigación se centra en determinar si es que estos tipos de sesgos de razonamiento observados en los estudios mencionados anteriormente se dan en profesores de

[1] Ministerio de Educación, Chile

enseñanza media (secundaria) chilenos. Para ello, se explorará el pensamiento de los profesores frente a problemas binomiales (problema con y sin equiprobabilidad) y se determinará los elementos de conocimiento que utilizan para resolverlos presentando un cuadro donde se resuma la gama de razonamientos en los distintos niveles propuestos.

A continuación, se presentan antecedentes sobre la taxonomía SOLO para jerarquizar y obtener niveles de razonamiento, el marco conceptual, la metodología de estudio y las conclusiones obtenidas.

2 ANTECEDENTES

La taxonomía SOLO se ha utilizado en la mayoría de los estudios de jerarquización resultantes del análisis o evaluación de la comprensión de conceptos estadísticos o probabilísticos. Se destacan las propuestas de enseñanzas en las que se destaca el uso de la distribución binomial (Gross, 2000; Chalikias, 2009) y a la investigación empírica sobre el aprendizaje de la distribución binomial que se observan por ejemplo en Van Dooren et al. (2003), Abrahamson (2009a, 2009b, 2009c) y Maxara y Biehler (2010). En cambio, siguiendo la línea de este estudio, se observa que en Landín y Sánchez (2010) se propone una jerarquización hipotética basada en este método aplicada en deducir niveles de razonamiento frente a problemas binomiales en estudiantes de Bachillerato. En Sánchez y Landín (2011) se describe un proceso para mejorar la fiabilidad de la jerarquía de razonamiento frente a problemas binomiales, la cual, es aplicada en estudiantes de Bachillerato nuevamente en Landín (2013).

3 MARCO CONCEPTUAL

El razonamiento de estudiantes frente a una tarea refleja la comprensión conceptual que han alcanzado y se expresa en el uso de elementos de conocimiento relacionados con la tarea y con el (o los) concepto (s) en cuestión (Mayén et al, 2013).

La taxonomía SOLO presentada por Biggs y Collis (1982) se utilizó para definir una jerarquía que permite describir tipos de razonamiento que se pueden observar frente al cálculo de probabilidades asociado a un modelo binomial. Estos tipos de razonamientos se reflejan en 5 niveles de abstracción o modos de funcionamiento que pueden ser distinguidos para describir el desarrollo de un individuo: sensoriomotor, icónico, simbólico-concreto, formal y post-formal (Biggs y Collis, 1991). Dentro de cada modo, las respuestas llegan a ser crecientemente complejas y este crecimiento puede ser descrito en términos de niveles; los niveles de SOLO son: uniestructural (U) cuando la respuesta incluye sólo un componente relevante del concepto o tarea, multiestructural (M) cuando incluye dos o más componentes no relacionados o con relaciones espurias y relacional (R) cuando incluye muchos componentes con relaciones genuinas entre ellas. Existe un nivel adicional denominado preestructural (P) que precede al uniestructural y otro denominado abstracto extendido (A) posterior al relacional.

En este estudio se consideró una jerarquización hipotética basada en la taxonomía SOLO considerando los distintos tipos de razonamientos observados en las respuestas de los profesores a las preguntas sobre distribución binomial.

4 METODOLOGÍA

En el estudio participaron 63 profesores de matemáticas de Educación Media de distintos colegios de la Región Metropolitana en la ciudad de Santiago de Chile.

El instrumento utilizado corresponde a los problemas 10 y 11 de un cuestionario de 11 problemas de probabilidad, ambos ejercicios están asociados a la aplicación de la distribución Binomial. El problema 10 es un caso equiprobable y el problema 11 es no equiprobable. Ambos problemas corresponden a una aplicación directa de la fórmula de la distribución Binomial: $X \sim Bin(n, p)$. En el problema 10 los valores de los parámetros de la distribución son respectivamente $n=5$ y $p=1/2$ (caso equiprobable) y en el problema 11 los valores son $n=3$ y $p=5/8$ (caso no equiprobable). A continuación, se presentan los problemas:

Se lanza una moneda equilibrada en 5 oportunidades. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 caras?

Una urna contiene 5 esferas azules y 3 esferas rojas, suponga que se extraen 3 esferas con reposición. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos esferas azules?

Los problemas se aplicaron a los profesores en presencia de los jefes de Unidad Técnico Profesional (UTP) y el investigador. El proceso de análisis de las respuestas es de tipo cualitativo y cíclico; consiste en una revisión sistemática de todas las respuestas para formar un sistema de categorías hasta clasificarlas en los diferentes niveles jerárquicos de la taxonomía SOLO *(preestructural, uniestructural, multiestructural, relacional y abstracto extendido)* esto en función de los elementos de conocimiento que se exponen y de la precisión en su presentación, se considera en particular, la definición clásica de probabilidad, el uso de diagramas de árbol, la regla del producto, la combinatoria y la fórmula de la distribución binomial. Se obtuvo jerarquías de cada problema, en la que se incluyen subcategorías para cada nivel de razonamiento.

5 RESULTADOS

A continuación, se presentan los resultados del análisis de las respuestas de los problemas de probabilidad binomial en los casos equiprobable y no equiprobable mediante una tabla de jerarquía derivada de la revisión sistemática de los cuestionarios, se incluye además ejemplos para uno de los niveles observados y una tabla de frecuencias donde se presentas la frecuencias y porcentajes de respuesta en cada uno de los niveles.

5.1 RESULTADOS DEL ANÁLISIS DEL PROBLEMA 10 (CASO EQUIPROBABLE).

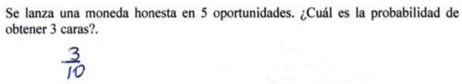
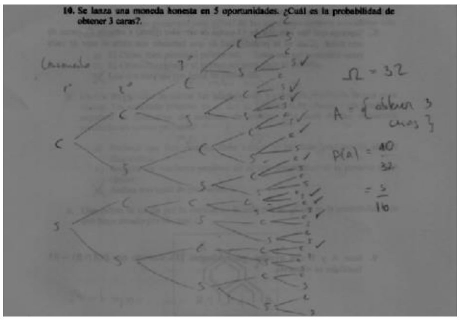
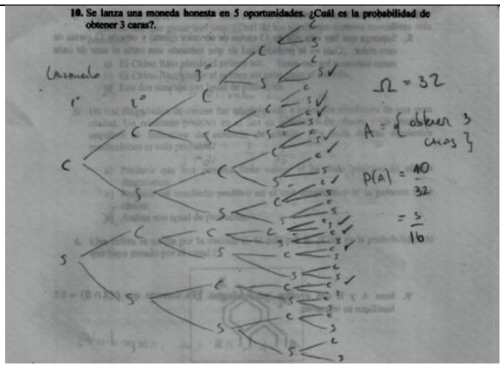
Los resultados por categoría de este problema se presentan en la Tabla 1 que incluye el nivel jerárquico de la taxonomía SOLO y las subcategorías que lo forman, así como la descripción de la respuesta típica escrita acerca de elementos de conocimiento encontrados.

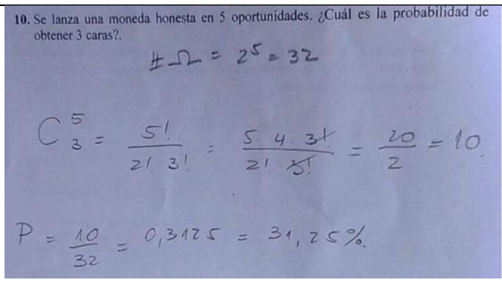
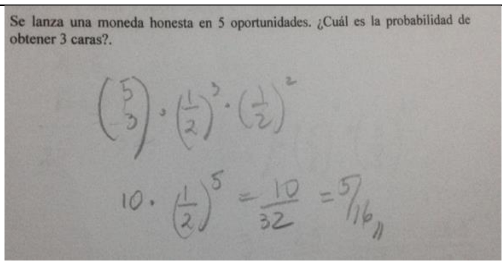
Tabla 1. Jerarquía obtenida de la pregunta 10.

Niveles SOLO y Subcategorías	**Descripción de respuestas típicas**
Preestructural	
P1	Respuestas no relacionadas con la situación o con errores conceptuales.
Uniestructural	
U1	Realiza un diagrama de árbol inadecuado o incompleto.
U2	Realiza un diagrama de árbol completo, cuenta casos favorables desde el árbol y calcula probabilidad pedida.
Relacional	
R1	Utiliza combinatoria, la regla de Laplace o técnicas de conteo para determinar la probabilidad.
R2	Utiliza la fórmula Binomial pero no identifica la distribución, no define variable aleatoria ni utiliza notación de probabilidad.

Se presentan en la tabla 2 ejemplos de respuestas para cada uno de los niveles observados en la Tabla 1.

Tabla 2. Ejemplos de respuestas para la pregunta 10.

Subcategorías	Respuesta	Descripción
P1		Respuesta no relacionada con la situación.
U1		Dibuja diagramas de árbol inadecuados, luego determina de forma incorrecta los casos favorables, aunque obtiene de forma correcta los casos totales.
U2		Realiza un diagrama de árbol del cual extrae una lista completa de los casos posibles y obtiene correctamente el número de casos favorables. Determina la probabilidad mediante Laplace.

R1	 10. Se lanza una moneda honesta en 5 oportunidades. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 caras?. $\#\Omega = 2^5 = 32$ $C^5_3 = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{2!\,\cancel{3!}} = \frac{20}{2} = 10$ $P = \frac{10}{32} = 0{,}3125 = 31{,}25\%$	Obtiene el número de casos totales mediante regla de conteo. Calcula el número de casos favorables mediante combinatoria, luego obtiene la probabilidad pedida mediante Laplace.
R2	 Se lanza una moneda honesta en 5 oportunidades. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 caras?. $\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$ $10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{32} = 5/16$	Utiliza la fórmula binomial, pero no se evidencia definición de la variable aleatoria del problema, ni la identificación de los parámetros de la distribución, tampoco se observa uso formal de notación de probabilidad.

A continuación, se presentan la tabla de frecuencias para las respuestas observadas en el estudio para cada nivel descrito en la Tabla 1.

Tabla 3. Frecuencia y porcentaje de respuestas por nivel de razonamiento

		Profesores (n=63)	
		Frec.	*%*
Preestructural	P1: Respuestas no relacionadas con la situación	5	7.94%
Uniestructural	U1: Realiza un diagrama de árbol inadecuado o incompleto.	3	4.76%
	U2: Realiza un diagrama de árbol completo, cuenta casos favorables desde el árbol y calcula la probabilidad pedida.	43	68.25%

Relacional	R1: Utiliza combinatoria, la regla de Laplace o técnicas de conteo para determinar la probabilidad.	7	11.11%
	R2: Utiliza la fórmula Binomial, pero, no identifica la distribución, no define variable aleatoria ni utiliza notación de probabilidad.	5	7.94%

5.2 RESULTADOS DEL ANÁLISIS DEL PROBLEMA 11 (CASO NO EQUIPROBABLE).

Los resultados por categoría de este problema se presentan en la Tabla 4 que incluye el nivel jerárquico de la taxonomía SOLO y las subcategorías que lo forman, así como la descripción de la respuesta típica escrita acerca de elementos de conocimiento encontrados.

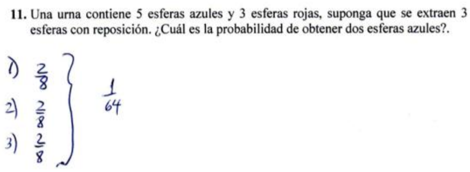
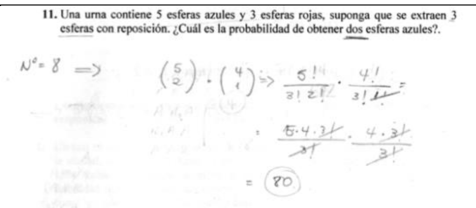
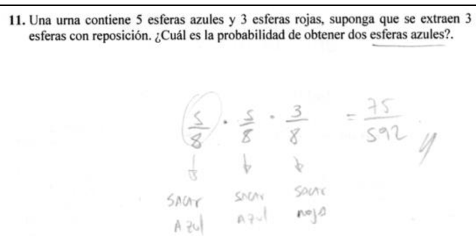
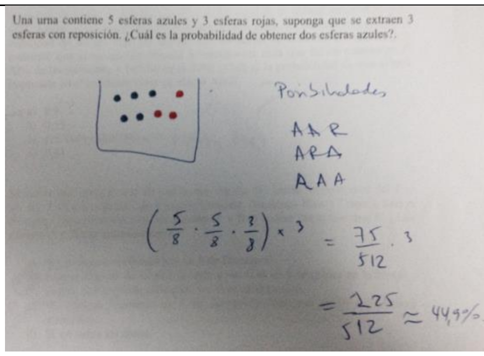
Tabla 4. Jerarquía obtenida de la pregunta 11.

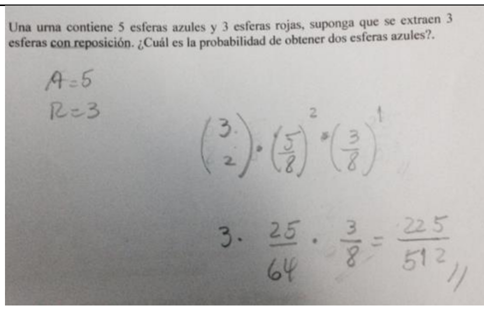
Niveles SOLO y Subcategorías	**Descripción de respuestas típicas**
Preestructural	
P1	Respuestas no relacionadas con la situación o con errores conceptuales.
P2	Utiliza elementos de combinatoria, pero de forma incorrecta.
Multiestructural	
M1	Utiliza la regla de la multiplicación, pero no considera las combinaciones posibles.
Relacional	
R1	Combinatoria, regla de Laplace, técnica de conteo.
R2	Formula binomial pero no identifica la distribución, no definición de variable aleatoria

Se presentan en la Tabla 5 ejemplos de respuestas para cada uno de los niveles observados en la Tabla 4.

Brazilian Journal of Development

Tabla 5. Ejemplos de respuestas para la pregunta 11.

Subcategorías	**Respuesta**	**Descripción**
P1		Respuesta no relacionada con la situación.
P2		Utiliza elementos de combinatoria, exhibiendo un conocimiento pertinente, pero de forma incorrecta.
M1		Aplica la regla del producto considerando las probabilidades de obtener 2 éxitos y 1 fracaso, pero no determina las combinaciones existentes.
R1		Aplica la regla del producto considerando las probabilidades de obtener 2 éxitos y 1 fracaso. Determina mediante representaciones las combinaciones posibles y multiplica este valor por el resultado anterior.

R2		Utiliza la fórmula binomial, pero no se evidencia definición de la variable aleatoria del problema, ni la identificación de los parámetros de la distribución, tampoco se observa uso formal de notación de probabilidad.

A continuación, se presentan la tabla de frecuencias para las respuestas observadas en el estudio para cada nivel descrito en la Tabla 4.

Tabla 6. Frecuencia y porcentaje de respuestas por nivel de razonamiento.

		Profesores (n=63)	
		Frec.	*%*
Preestructural	P1: Respuestas incorrectas	6	9.52%
	P2: Utiliza elementos de combinatoria, exhibiendo un conocimiento pertinente, pero de forma incorrecta	12	19.05%
Multiestructural	M1: Utiliza la regla de la multiplicación, pero no considera las combinaciones posibles.	16	25.39%
Relacional	R1: Utiliza combinatoria, la regla de Laplace o técnicas de conteo para determinar la probabilidad.	20	31.75%
	R2: Utiliza la fórmula Binomial, pero, no identifica la distribución, no define variable aleatoria ni utiliza notación de probabilidad.	9	14.29%

6 CONCLUSIONES

El desempeño en la resolución de problemas binomiales está basado en una serie de conceptos los cuales definieron las jerarquías mencionadas durante el análisis. La definición clásica de probabilidad, el uso de diagrama de árbol, la regla multiplicativa, la fórmula de combinatoria y el conocimiento de la fórmula binomial son elementos de transición entre niveles. Respecto al problema binomial equiprobable se observó que la mayoría de los docentes (68,25%) recurre al diagrama de árbol para su solución, determinando del mismo la probabilidad pedida (no se observa asignación de probabilidades en el diagrama, ni uso de regla multiplicativa u otro concepto de cálculo de probabilidad), en cambio, en el problema binomial no equiprobable en ningún caso se intentó solucionar el problema de forma gráfica, sino que, siempre se intentó encontrar la solución mediante métodos de conteo o combinatorial. Consecuencia de esto es que no se observa el nivel multiestructural en el primer problema, ni el uniestructural en el segundo. Finalmente, no se observa uso de lenguaje formal en la resolución de los problemas, no hay definición de eventos ni notación algebraica para los cálculos, si bien se usa la fórmula binomial ésta no se enuncia ni se define la variable aleatoria correspondiente, menos se enuncian explícitamente los parámetros de ésta.

REFERENCIAS

Abrahamson, D. (2009a). Embodied design: constructing means for constructing meaning. *Educational Studies in Mathematics*, 70 (1), pp. 27-47.

Abrahamson, D. (2009b). Orchestrating semiotic leaps from tacit to cultural quantitative reasoning –the case of anticipating experimental outcomes of a cuasi-binomial random generator. *Cognition and Instruction*, 27 (3), pp. 175-224.

Abrahamson, D. (2009c). A student’s synthesis of tacita and mathematical knowledge as a researcher’s lens on bridging learning theory. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4 (3), pp.195-226.

Batanero, C. y Sánchez, E. (2005). What is the nature of high school student’s conceptions and misconceptions about probability? En G. A. Jones (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, pp. 241-266. New York: Springer.

Biggs, J. y Collis, K. (1982). *Evaluating the quality of learning. The SOLO taxonomy.* Capítulo 2, pp. 17-31. New York: Academic Press Inc.

Biggs, J. B. y Collis, K. F. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligence behavior. En H. A. Rowe (Ed.), *Intelligence: Reconceptualization and measurement*, pp. 57-76. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Chalikias, Miltiadis (2009). The binomial distribution in shooting. *Teaching Statistics*, 31

(3), pp. 87-89.

Fischbein, E. y Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28 (1), 96-105.

Gross, J. (2000). Sharing teaching ideas: A bernoulli investigation. *Mathematics Teacher*, 93 (9), pp. 756.

Landín, P. R. y Sánchez, E. (2010). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a tareas de distribución binomial. *Educação Matemática Pesquisa*, *12*(3).

Landín, P. R. (2013). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato sobre problemas binomiales. En J.M. Contreras, G. R. Cañadas, M.M. Gea y P. Arteaga (Eds), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, pp. 425-431. Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Maxara, C. y Biehler, R. (2010). Students‟ understanding and reasoning about sample size and the law of large numbers after a computer-intensive introductory course on stochastics. En C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS 8, July, 2010. Ljubljana, Slovenia). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Mayén, S., Salazar, A. y Sánchez, E. (2013). Niveles de razonamiento frente a problemas binomiales. En J.M. Contreras, G. R. Cañadas, M.M. Gea y P. Arteaga (Eds), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, pp. 409-416. Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

MINEDUC (2013). Instrumentos curriculares para implementación 2016: Bases Curriculares 7º básico a 2º medio, Bases Curriculares Técnico Profesional y Programas de Estudio. Ministerio de Educación, Chile.

Sánchez, E. y Landín, P. (2011). Fiabilidad de una jerarquía para evaluar el razonamiento probabilístico acerca de la distribución binomial. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.), Investigación en Educación Matemática XV, Ciudad Real, España.

Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2003). The illusion of linearity: expanding the evidence towards probabilistic reasoning. Educational.