

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Corso di laurea in Astronomia

**LA STRUTTURA E LA CINEMATICA DELLA
VIA LATTEA**

Tesi di laurea

Presentato da:
Beatrice Gibellini

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa Marcella Brusa

Anno accademico 2022-2023

*Ai miei genitori, che non hanno mai smesso di credere in me;
A mia sorella Isabella, che mi ha aiutata quando più ne avevo bisogno;
Ai miei più cari amici, per avermi sostenuta nelle mie scelte e guidata lungo
cammino;
A me stessa, per l' impegno costante e per non aver mai mollato le mie passioni.
Grazie di cuore.*

Sommario

Il soggetto di questo breve elaborato sono le galassie, in particolare la nostra: la Via Lattea. Nel primo capitolo, dopo una breve descrizione storica, si è cercato di fornire una panoramica generale sulla classificazione morfologica delle galassie, introdotta da E. Hubble. Nel secondo capitolo è stata descritta la struttura interna della Via Lattea nelle sue macro-regioni caratteristiche: bulge, disco e alone galattico. Nell'ultimo capitolo, sono state introdotte nozioni di tipo cinematico, partendo dalla teoria di densità dell'onda, per spiegare la presenza dei bracci a spirale nelle galassie come la nostra; sono state poi ricavate le costanti di Oort per oggetti orbitanti nei pressi del Sistema Solare ed infine sono state analizzate le curve di rotazione di alcuni modelli esemplari al fine di caratterizzare l'andamento della velocità per la Via Lattea nello specifico.

Indice

1	Classificazione delle galassie	1
1.1	Cenni storici	1
1.2	Classificazione di Hubble	2
1.2.1	Galassie Ellittiche	3
1.2.2	Galassie a Spirale	4
1.2.3	Galassie Lenticolari ed Irregolari	5
2	Struttura della Via Lattea	7
2.1	Centro galattico	8
2.2	Disco galattico	8
2.3	Alone galattico	9
3	Cinematica della Via Lattea	10
3.1	Teoria di densità dell'onda	10
3.2	Costanti di Oort	11
3.3	Concetto di curva di rotazione	14
3.3.1	Curva di rotazione di una sfera omogenea	14
3.3.2	Curva di rotazione di un disco	14
3.3.3	Curva Kepleriana	15
3.4	Curva di rotazione della Via Lattea	15
	Indice	

Capitolo 1

Classificazione delle galassie

1.1 Cenni storici

La storia dell'essere umano porta con sé innumerevoli domande riguardanti il contesto cosmico in cui viviamo: ogni civiltà antica ha sviluppato una propria cosmogonia che si è progressivamente trasformata di pari passo con l'evoluzione umana. Già fisici pluralisti quali **Democrito** e **Anassagora** avevano intuito la possibilità che la Via Lattea fosse formata da una moltitudine di stelle molto distanti da noi, così come fece l'astronomo persiano **A.R. Al-Biruni**, mezzo secolo più tardi. Tuttavia per trattazioni più scientifiche fu necessario aspettare diversi secoli: **Galileo Galilei**, padre dell'osservazione astronomica, confermò la presenza di tantissime deboli stelle; **Immanuel Kant**, un secolo e mezzo più tardi, riprendendo un testo dell'astronomo inglese **Thomas Wright**, intuì che la Via Lattea fosse un sistema stellare vastissimo, in rotazione e legato dalla forza di gravità. Egli speculò anche la possibilità di considerare oggetti che apparivano diffusi come separati dalla Via Lattea, aprendo così le porte ad un universo multi-galattico. Seguì **William Herschel** che per primo fornì una prova quantitativa, seppur grezza, della Via Lattea come sistema stellare, contando le stelle osservabili in 638 zone diverse del cielo¹. Rimaneva comunque un problema essenziale capire se la Via Lattea rappresentasse la totalità dell'universo oppure uno dei possibili sistemi stellari, questione che fu estremamente dibattuta da **Harlow Shapley** e **Harber Curtis** nei primi anni venti del novecento. Harlow riuscì a stimare la distanza di diversi ammassi globulari², notando che la loro concentrazione non era distribuita in maniera isotropa, bensì puntava in direzione della costellazione del Sagittario, dove egli ipotizzò potesse trovarsi il centro galattico. Egli credeva, inoltre, che le nebulose a spirale³, come la Grande nebulosa di Andromeda, fossero contenute all'interno della Nostra Galassia; Curtis, d'altro canto, determinando la magnitudine apparente di stelle novae all'interno di Andromeda, si rese conto che esse erano troppo poco intense per essere contenute nella Via Lattea e quindi divenne un sostenitore dell'idea degli "Universi Isola"⁴, dove oggetti come Andromeda rimaneva esterni alla Galassia. La discussione si concluse nei successivi quindici anni grazie ad Edwin Hubble che, servendosi del telescopio Hooker appena costruito sul monte Wilson, riuscì a risolvere le parti esterne di alcune nebulose a spirale grazie alla presenza di stelle variabili. Esse permisero all'astrofisico statunitense di misurare la distanza delle nebulose in cui erano contenute, rivelandosi troppo distanti per essere considerate parte della Via Lattea. Nel 1926 Hubble costruì una

vera e propria classificazione morfologica di galassie raccolte in vari cataloghi, che fu perfezionata in seguito nel 1936.

1.2 Classificazione di Hubble

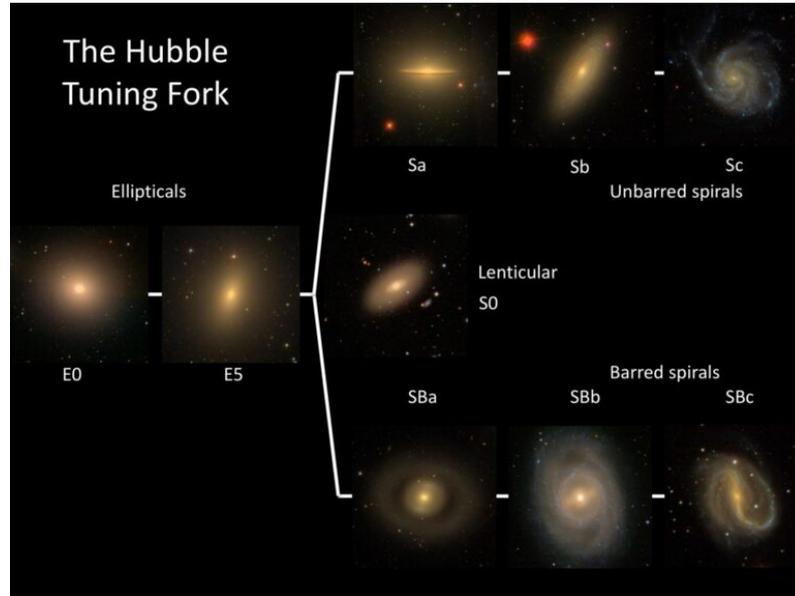


Figura 1.1: In questa immagine viene mostrato il Diagramma a Diapason, ideato da Edwin Hubble. Crediti: Karen Masters, Sloan Digital Sky Survey.

Una volta appurata la natura multi-galattica dell'universo, il fisico statunitense Edwin P. Hubble (1889-1953) raccolse da diversi cataloghi le galassie allora sconosciute e nel 1936 pubblicò la versione più aggiornata di classificazione delle galassie. Tale classificazione è ancora oggi ritenuta straordinariamente valida perché capace di creare un collegamento tra la morfologia e le proprietà intrinseche delle galassie quali la presenza di gas o il tipo di popolazione stellare.

Hubble divise il mondo delle galassie in due principali tipologie: le galassie **Ellittiche** E_n e le galassie a **Spirale** S . In un secondo momento furono aggiunte le galassie **Lenticolari** S_0 , come punto di incontro tra le galassie ellittiche e quelle a spirale, e le galassie **Irregolari** che rappresentano le possibili deviazioni dalle morfologie principali.

¹Herschel, nel suo calcolo, assunse che le stelle avessero la stessa magnitudine assoluta, densità numerica costante, che non ci fosse nulla di frapposto ad oscurarle e che si riuscisse a vedere il bordo della Via Lattea.

²Gli ammassi globulari in questione contenevano RR Lyrae, stelle variabili tramite cui se misurata la luminosità apparente l , conosciuta la luminosità assoluta L , è possibile calcolare la distanza tramite la relazione $L = 4\pi d^2 l$.

³Le nebulose a spirale furono scoperte da William Parsons, astronomo irlandese e Conte di Larosse, grazie al telescopio Hooker, che egli stesso costruì.

⁴La teoria degli Universi Isola sosteneva che le nebulose osservate fossero sistemi stellari simili alla nostra galassia.

1.2.1 Galassie Ellittiche



Figura 1.2: La figura mostra un campo di galassie lontane, osservato dal Telescopio Spaziale "Hubble" il 4 marzo 1994. La galassia più grande in alto a sinistra è la galassia ellittica NGC 4881, nell'ammasso di galassie di Coma. Si possono notare anche molte galassie a Spirale.

Le galassie ellittiche, anche dette "Early type Galaxies" ⁵, sono caratterizzate da una forma ellissoidale identificata da E_n , dove n varia tra 0 a 7 ed indica il grado di ellitticità, definito come $n = 10(1 - b/a)$, con a e b rispettivamente asse minore ed asse maggiore isofotale⁶. All'aumentare di n , aumenta anche lo schiacciamento, quindi la classificazione prevede in partenza galassie con schiacciamento pari a zero e forma sferica, fino a galassie ellissoidali con schiacciamento pari a sette, massimo valore fin'ora riscontrato.

Questo tipo di galassie sono ricche di stelle di Popolazione II, poco metalliche e vecchissime, con età tra 10-12 miliardi di anni, infatti si tratta perlopiù di nane rosse, giganti rosse e stelle in stadio di vita avanzato. Inoltre, non contengono gas freddo⁷ in quantità tali da permettere la formazione stellare.

Le dimensioni tipiche variano su un intervallo ampio: si parte da galassie ellittiche nane con dimensioni tipiche di mezzo kpc ⁸, con masse di circa $10^7 M_\odot$ ⁹ e si arriva a galassie giganti dalle dimensioni di centinaia di kpc , con masse fino a $10^{13} M_\odot$. Conseguentemente, anche l'intervallo di luminosità sarà piuttosto esteso, da 10^5 a $10^{13} L_\odot$ ¹⁰. La misurazione della luminosità di questi oggetti è stata possibile grazie alla coppia di coniugi **De Vacouleurs**, tramite la legge empirica:

$$I(R) = I_0 \exp \left[- \left(\frac{R}{R_e} \right)^{1/4} \right], \quad (1.1)$$

funzione di I_0 , brillantezza al centro della galassia e di R_e , raggio in corrispondenza del quale si ha metà della luminosità¹¹.

1.2.2 Galassie a Spirale

Le galassie a spirale, o "Late type Galaxies", hanno una classica forma a disco e la struttura presenta tre principali suddivisioni: il bulge, il disco e l'alone. Mentre l'alone ed il bulge sono composti da stelle di Popolazione II, il disco è densamente popolato di stelle di tipo I e da bracci di H neutro che si avvolgono attorno al centro galattico, rendendo possibile una continua formazione stellare. Le galassie a spirale non sono tutte uguali, bensì si differenziano per grandezza del bulge, avvolgimento dei bracci e caratteristiche del disco; in particolare, le galassie a spirale vengono siglate con S e ne esistono essenzialmente di tre tipologie: S_a , S_b ed S_c .

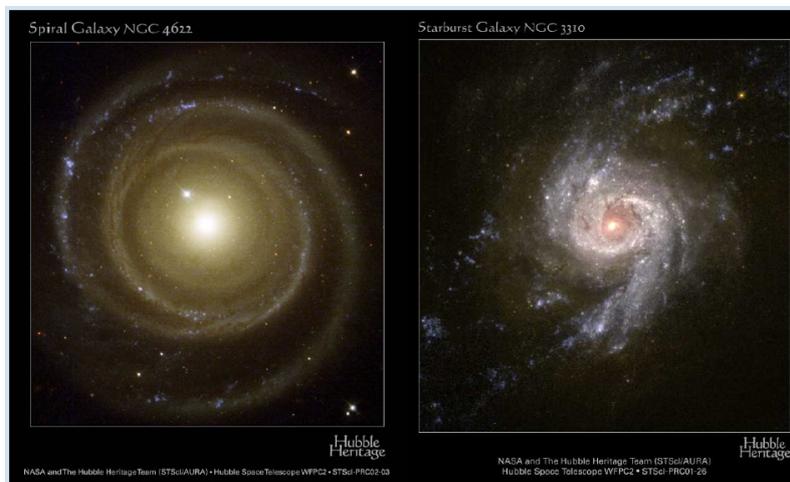


Figura 1.3: *Questi sono due esempi di galassie a spirale: a sinistra viene mostrata NGC 4622, una galassia di tipo S_a , mentre a destra NGC 3310, una galassia a metà tra S_b ed S_c . Crediti: Space Telescope Science Institute.*

Le S_a sono caratterizzate da un rapporto bulge-disco molto grande, bracci piuttosto arrotolati e scarse quantità di gas freddo; via via verso le S_c il bulge diventa progressivamente più piccolo rispetto al disco, i bracci si distendono e le quantità di gas aumentano. Esistono, inoltre, le spirali barrate: SB_a , SB_b , SB_c , che si differenziano da quelle normali per la tipica forma allungata del bulge.

⁵Hubble credeva erroneamente che le galassie ellittiche fossero precorritrici delle galassie a spirale.

⁶Le curve isofotali sono linee che collegano i punti di uguale luminosità

⁷Per gas freddo si intende una fase del mezzo interstellare (ISM) chiamata Cold Neutral Medium (CNM), composto da nubi di gas atomico neutro a temperature di $10 - 20K$ e densità tipiche di $100 - 100\text{particelle}/\text{cm}^3$

⁸Il parsec, pc , è un'unità di misura astronomica che indica la distanza alla quale una stella mostra una parallasse di un secondo d'arco quando osservata dalla Terra, e vale 3.086×10^{16} metri.

⁹Una massa solare, M_\odot , vale $1.989 \times 10^{30}kg$.

¹⁰Una luminosità solare, L_\odot , vale $3.828 \times 10^{33}erg/s$.

¹¹La generalizzazione di questa basilare relazione viene fornita dalla legge di Sèrsic



Figura 1.4: *La figura mostra NGC 1365, anche detta "La Grande Spirale Barrata" per via delle sue dimensioni enormi. Questa immagine combina le osservazioni effettuate attraverso tre diversi filtri (B, V, R) con il telescopio danese da 1,5 metri presso l'Osservatorio dell'ESO La Silla in Cile.*

A differenza di quanto accade nelle galassie ellittiche, il CNM e le polveri presenti in ingenti quantità creano un effetto di estinzione sulla luminosità e l'attrazione gravitazionale esercitata da queste componenti è capace di deviare l'orbita delle stelle presenti. Le dimensioni oscillano tra i 5 e i 100 kpc , la massa ha un intervallo compreso tra 10^9 e $10^{12} M_{\odot}$ e la luminosità, che decresce bruscamente con il raggio, copre un range tra 10^8 e $10^{11} L_{\odot}$. La luminosità in un certo punto r del disco visto faced-on¹² segue un andamento esponenziale secondo la **Legge dei dischi di Freeman**:

$$I(R) = I_0 \exp\left(-\frac{R}{R_i}\right), \quad (1.2)$$

dove I_0 è la luminosità al centro ed R_i è la lunghezza di scala del disco¹³.

1.2.3 Galassie Lenticolari ed Irregolari

Si discostano dalle due macro categorie le galassie lenticolari, $S0$, e le galassie irregolari, Irr. Le galassie lenticolari conservano la forma a disco delle galassie a spirale ma sono popolate da stelle di tipo II come le ellittiche e non contengono gas freddo, escludendo la possibilità di avere formazione stellare.

¹²Il bulge è assimilabile ad una galassia ellittica, pertanto la luminosità è descrivibile tramite la relazione vista in precedenza per le galassie E . Inoltre, per le galassie a spirale edge-on si utilizza una legge simile considerando però lo spessore del disco.

¹³La lunghezza di scala è una misura della dimensione del disco e fornisce un'indicazione di quanto rapidamente la luminosità diminuisce con la distanza dal centro della galassia.



Figura 1.5: *La galassia lenticolare NGC 4886, ripresa dal telescopio spaziale Hubble, contiene principalmente stelle vecchie e nessun braccio a spirale. Crediti: ESA/Hubble e NASA.*

Le galassie irregolari vengono suddivise in galassie Irr I, che mantengono una struttura, una parvenza di bracci e aggregati di stelle calde di classe O e B¹⁴, e galassie Irr II, che invece non sono morfologicamente rappresentative in quanto perdono ogni tipo di simmetria.

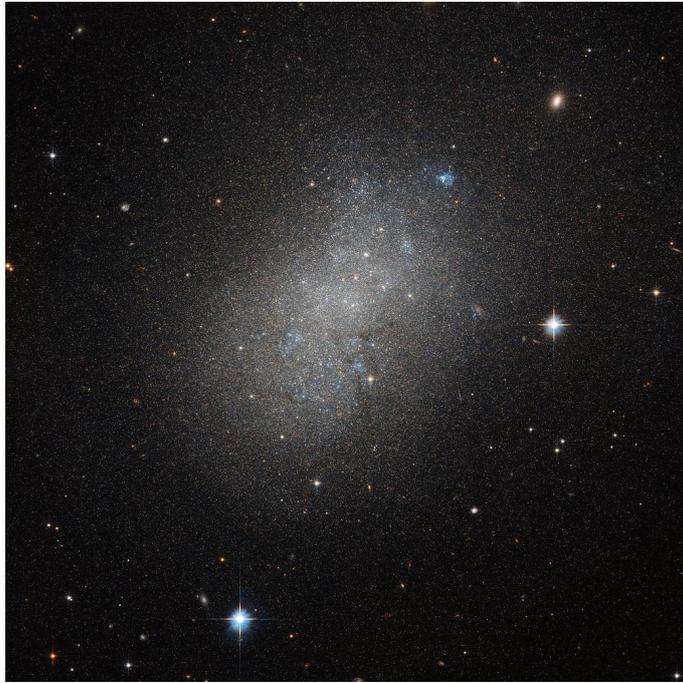


Figura 1.6: *In figura viene mostrata NGC 5264, una galassia nana irregolare catturata dal telescopio spaziale Hubble. Crediti: ESA/Hubble e NASA.*

¹⁴Le stelle di classe O e B sono stelle appartenenti alla sequenza principale della classificazione di Harvard e sono estremamente calde, luminose, massive e caratterizzate da tempi di vita brevi.

Capitolo 2

Struttura della Via Lattea

Nonostante sia piuttosto complicato conoscere il vero aspetto della Via Lattea, visto il nostro punto di vista interno, oggi sappiamo, grazie al vasto campione di galassie osservate, che la nostra galassia appartiene alle SB_{bc} , ossia una via di mezzo tra spirale barrata di tipo b e c. La Via Lattea è composta da qualche centinaia di miliardi di stelle, tra cui il Sole, posto circa a $8kpc$ dal centro galattico. Si ritiene che il diametro totale sia circa $50kpc$ e la massa $10^{10} M_{\odot}$.

La sua struttura presenta tre principali regioni:

- Il **centro galattico**: rappresenta la zona centrale delle galassie a spirale e presenta la particolarità di essere molto simile ad una galassia ellittica per forma e composizione.
- Il **disco galattico**: si divide in disco sottile e disco spesso, rispettivamente composti da stelle giovani per uno spessore di $1kpc$ e stelle più vecchie per uno spessore di $350pc$.
- L'**alone**: si tratta del guscio che racchiude l'intero disco e si compone di stelle di Popolazione II e ammassi globulari.

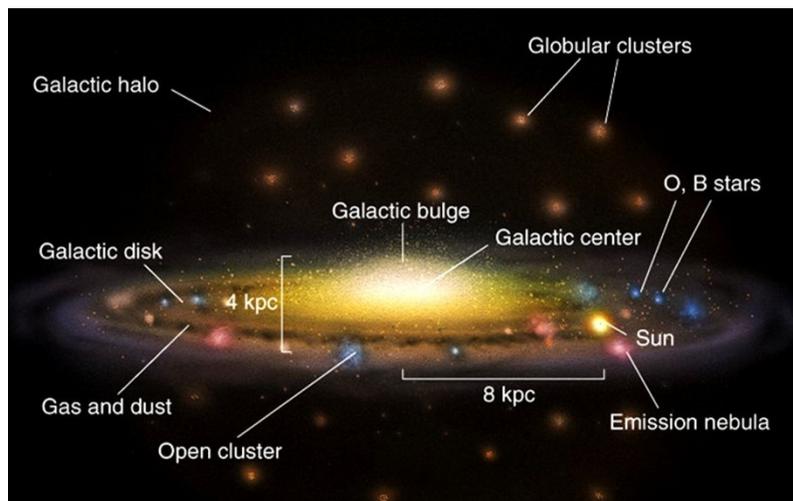


Figura 2.1: *Rappresentazione artistica della struttura della Via Lattea.*

2.1 Centro galattico

Il centro galattico è una zona della galassia quasi a sé stante e si compone del **bulge** e del **nucleo galattico** vero e proprio, il buco nero **Sagittarius A***¹, recentemente fotografato dall'EHT². A causa della forte estinzione provocata da materia e polveri, che rende inefficiente l'osservazione nel visibile, è necessario guardare alle lunghezze d'onda infrarosse per ottenere informazioni utili: Sgr A*³ ha una massa $4 \times 10^6 M_{\odot}$ ed intorno ad esso è situato un disco di accrescimento⁴, da cui si rilevano emissioni IR per bremsstrahlung e radio⁵. Il nucleo è circondato da un rigonfiamento, detto bulge, composto da stelle vecchie di qualche miliardo di anni, appartenenti alla Popolazione II ma piuttosto metalliche, forse dovuto al fatto che siano state a "cuocere" in prossimità di zone ad alta formazione stellare. Il bulge contiene inoltre HIM, plasma che si trova a temperature di 10^7 - $10^8 K$ e che emette principalmente per bremsstrahlung relativistica nell'UV e nel soft X⁶. Infine, il centro galattico contribuisce complessivamente alla massa totale di un fattore $10^{10} M_{\odot}$ e rappresenta più del 20% della luminosità totale.

2.2 Disco galattico

Il disco della Via Lattea contiene la maggior parte delle stelle della galassia e si compone in realtà di due dischi, uno più denso e sottile di circa $350 pc$, chiamato *thin disk* ed uno più rarefatto e spesso $1 kpc$, chiamato *thick disk*. Il disco sottile è caratterizzato da "bracci" che spiraleggiano più o meno ravvicinati attorno al centro galattico: essi si compongono di idrogeno neutro HI e polveri, e sono i veri responsabili della formazione stellare nelle galassie a spirale. Inizialmente si pensava che la struttura a spirale delle galassie in questione fosse dovuta al campo magnetico, tuttavia è stato scoperto che il campo magnetico nel disco delle galassie a spirale è troppo debole per deformare la materia⁷, infatti la vera responsabile è l'interazione tra le orbite ed il campo gravitazionale delle stelle presenti. Le stelle nel disco sottile sono giovani, con età di qualche milione di anni e metallicità abbastanza elevata, mentre le stelle del disco più spesso sono più vecchie e meno metalliche. Ci si potrebbe chiedere come si spostano le stelle dalla zona di formazione al disco spesso. Ebbene, i bracci sono composti da gas e polveri, non da stelle, e vanno considerati come onde con velocità di rotazione diversa rispetto alle stelle: quando i bracci

¹Scoperto dagli astronomi A. Ghez e R. Genzel, premi nobel 2020.

²12 maggio 2022.

³Abbreviazione di Sagittarius A*.

⁴Il disco di accrescimento è composto da materia che spiraleggia molto velocemente verso il buco nero grazie al forte gradiente gravitazionale.

⁵L'emissione di bremsstrahlung è un processo di radiazione elettromagnetica che si verifica quando una particella carica viene accelerata a causa dell'interazione con altri carichi elettrici, come quelli presenti in un plasma. Nel contesto di un disco di accrescimento attorno a un buco nero, le particelle del disco si muovono su orbite ellittiche e interagiscono tra loro attraverso l'attrito. Questa interazione porta all'accelerazione delle particelle cariche e all'emissione di radiazione di bremsstrahlung.

⁶Tale radiazione viene però assorbita completamente, per questo visibile soltanto nell'IR e nel radio.

impattano le stelle del disco sottile, le riscaldano, aumentando la loro frequenza di epiciclo verticale⁸ e forzandole a spostarsi verso il disco spesso. Le stelle del disco hanno orbite quasi perfettamente circolari e si muovono attorno al centro galattico ad una velocità di circa 220Km/s . La luminosità complessiva del disco è circa $1.5 \times 10^{10} L_{\odot}$ e la sua massa si aggira attorno a $10^{10} M_{\odot}$.

2.3 Alone galattico

L'alone è il guscio che racchiude le strutture precedentemente citate ed è composto principalmente da ammassi globulari⁹ e stelle di Popolazione II, con età tipiche di 12 miliardi di anni e poverissime di metalli. Esso contiene anche materia oscura, che contribuisce alla dinamica e alla gravità della galassia; le orbite delle stelle sono piuttosto irregolari, più eccentriche di quelle del disco e possono essere retrograde¹⁰. Le stelle dell'alone sono pochissime rispetto a quelle del disco e sono distribuite sopra e sotto il piano galattico.

⁷Circa un milionesimo di quello terrestre.

⁸Le orbite delle stelle sono quasi perfettamente circolari, tuttavia la descrizione esatta è contenuta nella Teoria degli Epicicli; la frequenza di epiciclo verticale è la componente verticale della frequenza di epiciclo totale, cioè quanti spostamenti verticali compie una stella in un determinato lasso temporale.

⁹Gli ammassi globulari sono aggregati sferici di stelle molto antiche e scarsamente metalliche.

¹⁰Si intende un moto opposto in verso rispetto al moto generale della galassia.

Capitolo 3

Cinematica della Via Lattea

Le stelle ed il gas presente nel disco della Via Lattea, come di ogni galassia di tipo S , hanno, in buona approssimazione, orbite circolari con velocità angolari che dipendono dalla distanza dal centro galattico, cioè dall'asse di rotazione. In questi casi, si parla di **rotazione differenziale**, infatti oggetti più vicini al centro completano le loro orbite più velocemente di quanto facciano oggetti via via più distanti. La conseguenza principale di questo fenomeno è che gli oggetti distanti dall'asse di rotazione è come se rimanessero "indietro" rispetto agli oggetti più vicini, generando di fatto la tipica forma a spirale delle galassie S . Tuttavia solo dopo poche orbite i bracci generati dalla rotazione differenziale sarebbero talmente vicini da diventare indistinguibili, facendo perdere alla Galassia la sua forma tipica. Tale problema viene chiamato "**The winding problem**", problema che venne affrontato nella seconda metà del novecento da **Chia-Chiao Lin** e **Frank Shu** in quella che viene chiamata **Teoria di densità dell'onda**.

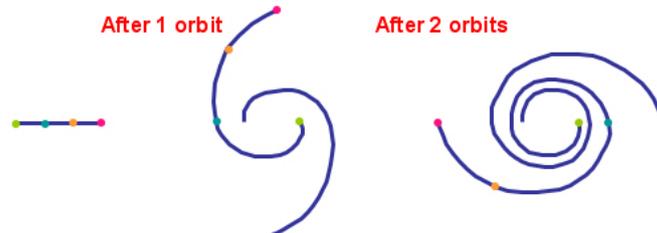


Figura 3.1: Immagine di 4 punti lungo una sezione del braccio a spirale. Se li tracciassimo nel corso di alcune rotazioni, il braccio a spirale che definiscono si avvolgerebbe fino a diventare non osservabile.

3.1 Teoria di densità dell'onda

Prima della teoria Lin-Shu, si pensava che la struttura dei bracci delle galassie a spirale fosse composta da materia. L'idea dei due astronomi era quella di trattare le spirali come **onde di densità quasi-stazionarie**, cioè zone del disco con densità maggiore che si muovono globalmente più lentamente rispetto a stelle, gas e polveri. Tali oggetti viaggiano attraverso le onde di densità: entrano nelle zone di maggio-

re densità a favore della formazione stellare ed escono successivamente in un ciclo perenne. La teoria prevede che sia proprio l' attrazione gravitazionale tra le stelle poste su diversi raggi a preservare la forma a spirale che conosciamo. La velocità angolare globale è identificata da ω_g e data una certa distanza dal centro, definita come raggio di corotazione, R_c , le stelle entro tale raggio avranno velocità maggiore, $\omega_s > \omega_g$, in corrispondenza del raggio uguale velocità, $\omega_s = \omega_g$, ed oltre il raggio velocità minore $\omega_s < \omega_g$.

La teoria di densità dell'onda spiegherebbe anche come mai oggetti giovani come stelle di Pop I siano ubicate all'interno dei bracci, infatti quando la nube molecolare incontra un'onda di densità rallenta la sua velocità, mentre la parte posteriore continua ad avanzare alla velocità iniziale, causando una forte compressione ed infine il collasso gravitazionale necessario alla formazione di nuove stelle. La materia impiega circa 10 milioni di anni ad attraversare un' onda, tempo di evoluzione tipico delle stelle molto calde e che spiega il motivo per cui tali oggetti siano identificabili proprio all'interno del disco sottile.

3.2 Costanti di Oort

Continuiamo la trattazione cinematica della nostra Galassia introducendo le **costanti di Oort**, indicatori cinematici proposti dall'astronomo olandese **J. Oort** nel 1927 che dimostrano non solo che la Via Lattea è in rotazione, ma anche che la rotazione è differenziale, come anticipato in precedenza. L'idea di fondo era quella di legare quantità osservabili alla velocità di rotazione del Sole attorno al centro galattico. Le costanti in gioco sono due:

- **A**: rappresenta il tasso di variazione della velocità radiale delle stelle rispetto alla distanza radiale dal centro galattico,
- **B**: indica il tasso di variazione della velocità tangenziale rispetto alla distanza radiale dal centro galattico

e sono definite come segue:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\omega'_0 R_0}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right)_{R_0}, \\ B &= \omega_0 + A = \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} \right)_{R_0}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

dove:

- ω_0 è la velocità angolare del Sole, quindi ω'_0 è la derivata prima di ω_0 fatta rispetto R_0 , distanza radiale del Sole dal centro galattico;
- $\frac{dv_r}{dr}$ è la variazione della componente perpendicolare della velocità della stella rispetto alla coordinata radiale;
- $\frac{dv_t}{dr}$ è la variazione della componente parallela della velocità della stella rispetto alla coordinata radiale.

A questo punto possiamo analizzare il processo matematico che ci porta a derivare le due costanti. Innanzitutto, definiamo le ipotesi iniziali che ci permettono di ricavare il moto assoluto a partire da quello relativo ed il sistema di riferimento di partenza:

- Il disco della galassia è infinitamente sottile, quindi le stelle orbitano su un piano $(x, y, 0)$ ¹.
- Le orbite sono assunte perfettamente circolari².

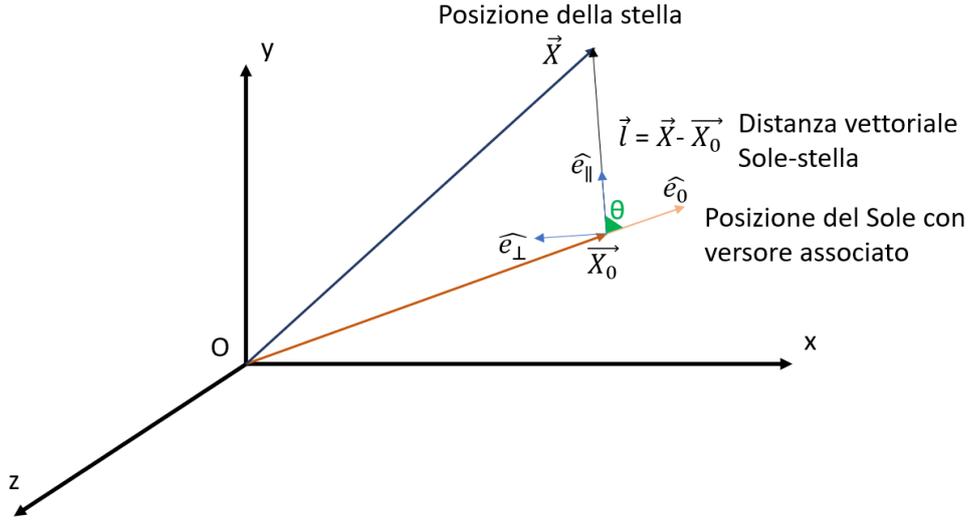


Figura 3.2: *Sistema di riferimento.*

Definiamo \vec{x}_0 la posizione vettoriale del Sole rispetto al centro galattico, \hat{e}_0 il versore dell'anticentro³, assunto $\hat{e}_0 = \frac{\vec{x}_0}{R_0}$ e \vec{x} la posizione di una stella rispetto O. Sia $R_0 = \|\vec{x}_0\|$ la lunghezza del vettore \vec{x} , cioè la distanza del Sole dal centro galattico, che sappiamo essere $8.5kpc$, $\vec{l} = \vec{x}_0 - \vec{x}$, vettore posizione relativa tra Sole e stella generica e θ l'angolo tra la direzione di \vec{l} e la direzione dell'anticentro. Poniamo sul Sole un riferimento ortonormale $(\hat{e}_\parallel, \hat{e}_\perp, \hat{e}_z)$, dove $\hat{e}_\parallel = \frac{\vec{l}}{\|\vec{l}\|}$ ed \hat{e}_z il versore lungo l'asse cartesiano z . Infine, definiamo il versore normale $\hat{e}_\perp = \hat{e}_z \wedge \hat{e}_\parallel$. Quanto vale la velocità \vec{v}_0 del Sole ad una distanza R_0 dal centro?

$$\vec{v}_0 = \omega_0 (R_0) \wedge \vec{x}_0, \quad (3.2)$$

dove ω_0 è la velocità angolare del Sole. Allora, anche quella della stella sarà:

$$\vec{v} = \omega (R) \wedge \vec{x}, \quad (3.3)$$

con ω velocità angolare della stella.

La velocità relativa, cioè come vediamo la velocità della stella dall'SdR del Sole, dipende dalle direzioni di \vec{v}_0 e \vec{v} e vale $\vec{V} = \vec{v} - \vec{v}_0$. E' utile scomporre tale velocità nella direzione perpendicolare⁴ e parallela⁵:

$$\begin{aligned} \vec{v}_\perp &= \vec{v} \cdot \hat{e}_\perp \\ \vec{v}_\parallel &= \vec{v} \cdot \hat{e}_\parallel \end{aligned} \quad (3.4)$$

Un altro modo per scrivere la velocità relativa è rappresentato dalla seguente espressione:

$$\vec{V} = \vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{\omega} \wedge \vec{l} + \Delta\vec{\omega} \wedge \vec{x}_0, \quad (3.5)$$

dove $\Delta\vec{\omega} = \vec{\omega} - \vec{\omega}_0$. Quindi le componenti della velocità in modulo si possono riscrivere nella forma:

$$\begin{aligned} v_{\perp} &= \omega l + \Delta\omega R_0 \cos(\theta) \\ v_{\parallel} &= \Delta\omega R_0 \sin(\theta) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Queste espressioni sono formule esatte e rappresentano la velocità relativa di una rotazione differenziale di un disco generico, pertanto possiamo chiederci cosa succede per $l \ll R_0$, cioè se consideriamo un campo di stelle vicino al Sole. Per realizzare tale condizione possiamo espandere $\omega(R)$ al primo ordine in Serie di Taylor⁶

$$\omega(R) \simeq \omega_0 + \omega'_0 l \cos(\theta) \quad (3.7)$$

Infine, riprendiamo le espressioni per i coefficienti di Oort

$$\begin{aligned} A &= \frac{\omega'_0 R_0}{2} \\ B &= \omega_0 + A, \end{aligned} \quad (3.8)$$

inseriamo A,B e l' approssimazione (3.7) nella (3.6) ed otteniamo:

$$\begin{aligned} v_{\perp} &= Bl + Al \cos(2\theta) \\ v_{\parallel} &= Al \sin(2\theta) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Le misurazioni delle velocità rispetto a θ confermano che le componenti della velocità seguano gli andamenti $\cos(2\theta)$ e $\sin(2\theta)$. Le costanti di Oort misurate sperimentalmente valgono $A \simeq 14.8 km/kpcs$ e $B \simeq -12.4 km/kpcs$.

Riprendendo le espressioni in termini di velocità circolare

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right)_{R_0} \\ B &= \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} \right)_{R_0}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

risulta evidente che

$$\begin{aligned} A &= \frac{v_0}{R_0} \\ B &= \left(\frac{dv}{dr} \right)_{R_0}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

quindi nel caso della Via Lattea:

$$v(R_{\odot}) = (B - A)(R_{\odot}) \simeq 250 km/kpcs \quad (3.12)$$

¹Il disco non è realmente infinitamente sottile.

²Sarebbero in realtà ad andamento epiciclico.

³Si riferisce al versore con direzione opposta al centro.

⁴La velocità perpendicolare si misura grazie all' effetto Doppler.

⁵La velocità parallela si misura con dei moti propri.

⁶ ω dipende dalla $\|x_0\|$ tramite R_0 , perciò l' espansione in serie di Taylor sarà a due variabili.

3.3 Concetto di curva di rotazione

In generale, la curva di rotazione di una galassia è una proprietà del campo gravitazionale ed infatti è definita come l'insieme delle velocità delle orbite circolari in funzione della distanza dal centro galattico. Dato un oggetto isolato che possiede un campo gravitazionale, se consideriamo un'orbita circolare attorno all'oggetto ad una distanza r , possiamo eguagliare l'accelerazione circolare con quella gravitazionale

$$\frac{v^2(r)}{r} = \frac{GM(r)}{r^2} \implies v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} \quad (3.13)$$

Al fine di determinare la curva di rotazione della nostra galassia, è utile dividere il problema in tre sotto-casi e poi generalizzarlo per la Via Lattea.

3.3.1 Curva di rotazione di una sfera omogenea

Per una distribuzione di densità a simmetria sferica vale il **Teorema dei gusci di Newton** che sostanzialmente afferma quanto segue:

Data una massa di prova all'interno di una distribuzione di densità $\rho(r)$, posta ad una distanza R dal centro, i contributi di attrazione gravitazionale riguardano gli strati a $r < R$ ⁷ ed esercitano un'attrazione come se la massa fosse posta in un punto al centro della distribuzione.

Data la densità $\rho(r) = \rho_0$, costante $\forall r$, essa è pari al rapporto massa su volume:

$$\rho_0 = \frac{M(r)}{V(r)} \implies M(r) = \iiint \rho_0 dV = \frac{4}{3}\pi\rho_0 r^3 \quad (3.14)$$

che sostituita nella (3.13)

$$v(r) = \sqrt{\frac{4\pi\rho_0 G}{3}} r, \quad (3.15)$$

dove si nota che la velocità va linearmente con il raggio.

3.3.2 Curva di rotazione di un disco

Per un disco il Teorema dei gusci di Newton non è più valido, pertanto sarà necessario considerare anche il contributo degli strati esterni ad una massa di prova posta all'interno del disco ad una distanza generica R dal centro.

Il calcolo della velocità circolare è molto più complesso ma è possibile dimostrare che la curva di rotazione all'interno del disco è essenzialmente piatta, pertanto la velocità è costante.

⁷I contributi esterni hanno risultante nulla.

3.3.3 Curva Kepleriana

Per un sistema di oggetti rotanti con massa m_i attorno ad una massa centrale M , tale che $M \gg m_i, \forall i$, allora la massa centrale sarà vista come puntiforme e si potrà assumere che $M(r) = \text{cost}$. Per la (3.13) la velocità avrà la seguente dipendenza dal raggio:

$$v(r) = \sqrt{GM}r^{-\frac{1}{2}} \quad (3.16)$$

3.4 Curva di rotazione della Via Lattea

Prendiamo ora in esame la Via Lattea e per comodità consideriamo separatamente il bulge, il disco e le regioni esterne al disco. La curva di rotazione di queste aree segue proprio gli andamenti delle curve di rotazione viste in precedenza, in particolare:

- Il **bulge** ha una curva di rotazione che corrisponde a quella studiata per una **sfera omogenea**, dove $v \propto r$.
- Il **disco**, come abbiamo visto, ha velocità $v = \text{cost}$ lungo tutto il raggio.
- Infine, **fuori dal disco**, l'andamento è quello della **curva kepleriana**, con $v \propto r^{-\frac{1}{2}}$.

Ci si aspetta quindi di vedere qualcosa di simile alla curva rossa mostrata in figura (3.3), invece, ciò che si osserva sperimentalmente è la curva bianca: la caduta kepleriana si ha ben oltre il raggio del disco di stelle. La presenza di HII nelle galassie a spirale, che continua a ruotare anche oltre il confine stellare, spiegherebbe solo in parte il plateau della curva osservata. L'ipotesi più accreditata è la presenza di *materia oscura*, materia non barionica⁸ che non interagisce elettromagneticamente ma che contribuisce in modo sostanziale alla forza di gravità.

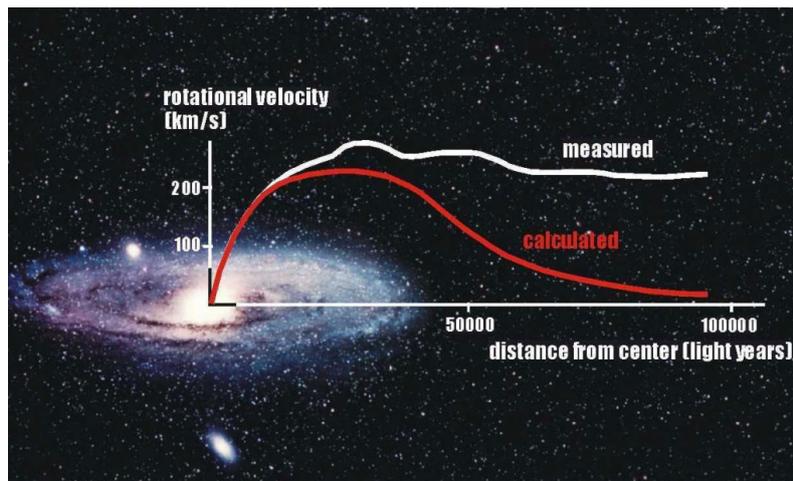


Figura 3.3: La figura mostra due curve di rotazione: quella rossa indica la curva attesa dalla legge di gravità, mentre la curva bianca quella osservata.

⁸La materia barionica è la materia ordinaria, composta da barioni, particelle sub atomiche

Bibliografia

1. Bradley W. Carroll and Dale A. Ostlie, *An Introduction to Modern Astrophysics*, Pearson New International Edition, 2nd ed., 2014
2. L. Ciotti, *Appunti di astrofisica extragalattica*, anno 2021/2022
3. <https://www.astronomy.ohio-state.edu/ryden.1/ast1627/notes29.html>
4. Hannu Karttunen, Pekka Kröger, Heikki Oja, Markku Poutanen, Karl Johan Donner, *Fundamental Astronomy*, Springer, 6th ed., 2017
5. <https://astronomy.swin.edu.au/cosmos/w/Winding+Problem>
6. Carla e Roberto Fanti, *Una finestra sull' Universo "Invisibile"*, 2012