

# SIMULACIÓN DE FLUJO LAMINAR PARA ESTIMAR LA TORTUOSIDAD EN LA ALFOMBRA DE SIERPINSKI

Jorge A. Briones-Carrillo<sup>1,\*</sup>, Carlos G. Aguilar-Madera<sup>1</sup>, Víctor Matías-Pérez<sup>1</sup>, Erik C. Herrera-Hernández<sup>2</sup>, Roberto Soto-Villalobos<sup>1</sup> & Valente Flores-Cano<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Universidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ciencias de la Tierra, Ex Hacienda de Guadalupe, C.P. 67700, Linares, México

<sup>2</sup> Universidad Autónoma de San Luis Potosí, Centro de Investigación y Estudios de Posgrado, Facultad de Ciencias Químicas, Av. Dr. Manuel Nava 6, Zona Universitaria, 78210, San Luis Potosí, México

\* [jorge.brionescr@uanl.edu.mx](mailto:jorge.brionescr@uanl.edu.mx)

## Resumen

Este trabajo se centra en la simulación numérica de flujo laminar para estimar la tortuosidad en una estructura geométrica fractal denominada *alfombra de Sierpinski*, a menudo usada para simular medios porosos sintéticos. La tortuosidad se describe como la medida de las formas irregulares o sinuosidad de los caminos, y es un parámetro muy importante para las Ciencias de la Tierra desde la Geología hasta la Ingeniería Petrolera, por su gran variedad de aplicaciones. En este estudio, se utiliza el software Comsol Multiphysics para resolver las ecuaciones que gobiernan el flujo laminar lo que permite analizar el movimiento de los fluidos a través de la alfombra de Sierpinski. Los resultados permiten obtener información valiosa sobre la eficiencia de un fluido para transportarse a través de una estructura fractal, lo que puede ser relevante en diversas áreas de investigación. Esta metodología da estimaciones de la tortuosidad comparables a las que se obtienen con otras metodologías de la literatura.

## Palabras clave

Tortuosidad, CFD, medios porosos, escala de poro

## Abstract

This paper focuses on the numerical simulation of laminar flow to estimate the tortuosity in a fractal geometric structure called Sierpinski mat, often used to simulate synthetic porous media. Tortuosity is described as the measure of irregular shapes or sinuosity of paths, and is a very important parameter for Earth Sciences from Geology to Petroleum Engineering, because of its wide variety of applications. In this study, Comsol Multiphysics software is used to solve the equations governing laminar flow, which allows analyzing the movement of fluids through the Sierpinski carpet. The results allow obtaining valuable information about the efficiency of a fluid to transport through a fractal structure, which can be relevant in several research areas. This methodology gives tortuosity estimates comparable to those obtained with other methodologies in the literature.

---

Briones-Carrillo, J., Aguilar-Madera, C.G., Matías-Pérez, V., Herrera-Hernández, E.C., Soto-Villalobos, R. & Flores-Cano, V. (2023): Simulación de flujo laminar para estimar la tortuosidad en la alfombra de Sierpinski. – en: Montalvo Arrieta, J.C., Ramírez Fernández, J.A., Aguilar-Madera, C.G., Jenchen, U., Salinas Jasso, J.A., Velasco-Tapia, F. & Navarro-de León, I. (eds.): Número especial en conmemoración del 90° Aniversario de la Universidad Autónoma de Nuevo León y del 40° Aniversario de la Facultad de Ciencias de la Tierra. – Actas de la Facultad de Ciencias de la Tierra, UANL, Linares, **9** (2023): 9-13.

## Keywords

Tortuosity, CFD, porous media, pore scale

## Nomenclatura

### Alfabeto romano

- $L$  Longitud recta de la muestra (m)
- $L_e$  Trayectoria del flujo (m)
- $p$  Presión (Pa)
- $t$  Temperatura (K)
- $\mathbf{u}$  Velocidad (m/s)

### Alfabeto griego

- $\mu$  Viscosidad (cP)
- $r$  Tortuosidad (adimensional)
- $\rho$  Densidad (kg/m<sup>3</sup>)

## Introducción

La tortuosidad es una propiedad geométrica de gran importancia en los medios porosos y se define como un parámetro que describe el alargamiento medio de las vías de flujo de partículas microscópicas con respecto al flujo libre, descrito por primera vez por Carman (1937). Existe una conexión entre la porosidad y la tortuosidad (Elijabbar-Latief & Fauzi, 2012), ya que los poros proporcionan trayectorias que aumentan la dificultad del transporte de los fluidos, lo que resulta en una mayor tortuosidad en los medios porosos.

La alfombra de Sierpinski es un fractal que puede utilizarse para representar un medio poroso de manera conceptual. A medida que iterativamente se añaden partes de la alfombra, se asemeja como disminuye la porosidad dejando menos espacio para el flujo en un material. Cada vez que se añade una iteración se crea un área porosa distinta dentro de la alfombra que permite ilustrar como la porosidad permite que los fluidos fluyan a través de espacios interconectados.

En general la estimación de la tortuosidad ha sido estudiada por su gran importancia en los medios porosos (Ebrahimi-Khabbazi et al., 2015). Por ejemplo, Jian-Hua & Bo-Ming (2011) definen la tortuosidad como:

$$\tau = \frac{L_e}{L} \quad (1)$$

Donde  $r$  es la tortuosidad,  $L_e$  representa la trayectoria del flujo y  $L$  la longitud recta de la muestra. Basado en el seguimiento de trayectorias rectas en la alfombra de Sierpinski,

Jian-Hua & Bo-Ming (2011) proponen la siguiente ecuación en función de la iteración:

$$\tau_n = \left(\frac{19}{18}\right)^n \quad (2)$$

Donde  $n=0, 1, 2 \dots$  representa las etapas de la alfombra de Sierpinski.

El objetivo de este trabajo es implementar una metodología donde se estima la tortuosidad a través de la simulación 2D de un fluido newtoniano e incompresible a través de la alfombra de Sierpinski en condiciones de flujo laminar. Como fluido se utiliza el agua debido a sus propiedades conocidas (viscosidad, densidad, tensión superficial, etc.) y su capacidad para penetrar y moverse a través de materiales porosos.

## Materiales y métodos

El marco teórico incluye la ecuación de Navier-Stokes en estado transitorio:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla \cdot \left[ -p\mathbf{I} + \mu (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \right] \quad (3)$$

Acompañada de la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4)$$

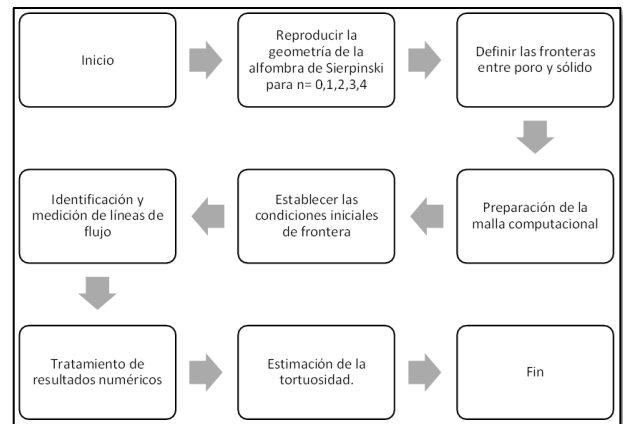


Figura 1: Diagrama de flujo general para la estimación de la tortuosidad en la alfombra de Sierpinski.

En estas ecuaciones  $\rho$  es la densidad másica del fluido,  $\mathbf{u}$  representa el vector del campo de la velocidad del fluido,  $p$  es la presión,  $t$  es el tiempo, y  $\mu$  es la viscosidad del fluido. Las ecuaciones de Navier-Stokes y de continuidad se resuelven para

el fluido presente en los poros a través del tiempo hasta alcanzar el estado estacionario.

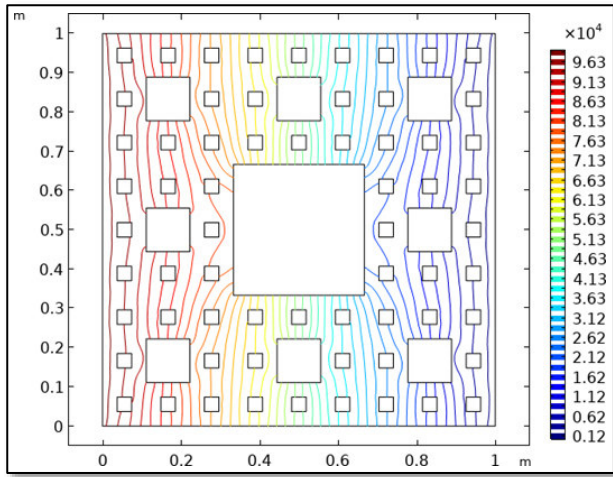


Figura 2: Distribución de la presión (Pa) en la alfombra de Sierpinski con 3 iteraciones.

En general, la metodología consiste en reproducir en Comsol Multiphysics la geometría de Sierpinski, donde eventualmente se resuelve numéricamente el modelo antes establecido. Una vez que se ha resuelto el modelo matemático, se procede a identificar y medir las distancias de las líneas de flujo a través del medio poroso, tal como se muestra en la Figura 1.

Para resolver la Ecuación (3) se necesitan ciertas condiciones iniciales para los parámetros de  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $p$ ,  $t$  y  $\mu$ . Para la configuración de estos parámetros se hizo un estudio previo de convergencia hasta llegar al estado estacionario, tomando como valor de la presión 1 Pa en la cara de entrada, formando un gradiente de presión con 0 Pa a la salida, ver Figura 2. Para la variable de velocidad se tomó como valor base 0 m/s, temperatura de 293.15 K, y viscosidad de 1 cP. El modelo matemático se resuelve en la alfombra de Sierpinski para  $n = 1, 2$  y 3 iteraciones que representan al medio poroso utilizando técnicas de elemento finito, ver Figura 3. En dicha figura también se presenta la malla computacional utilizada para resolver el modelo. El área de la geometría es de  $1\text{m}^2$ . Se realizó un análisis de independencia de la malla para que el modelo genere resultados consistentes en un tiempo de cómputo tolerable. El modelo matemático se resuelve en la alfombra de Sierpinski para  $n = 1, 2$  y 3 iteraciones que representan al medio poroso utilizando técnicas de elemento finito, ver Figura 3. En dicha figura también se presenta la malla computacional utilizada para resolver el modelo. El área de la geometría es de  $1\text{m}^2$ . Se realizó un análisis de independencia de la malla para que el modelo genere resultados consistentes en un tiempo de cómputo tolerable.

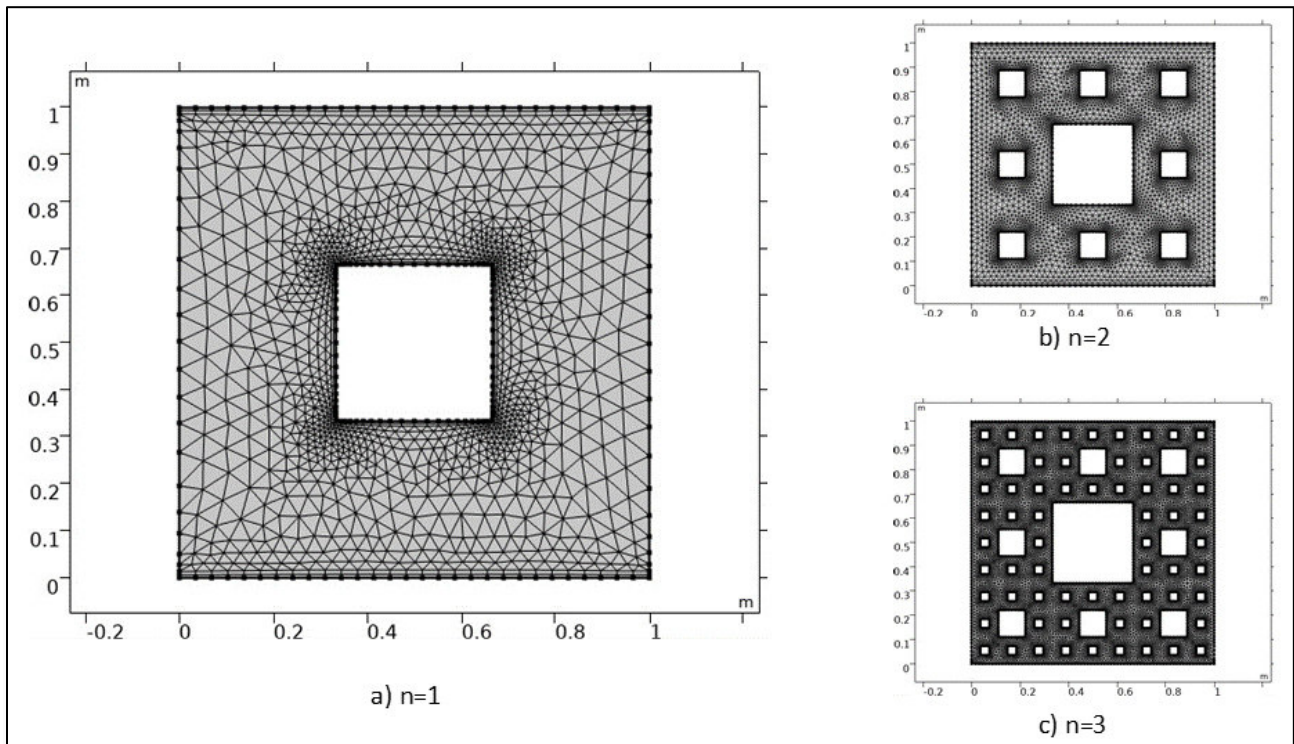


Figura 3: Geometría de Sierpinski, el área porosa está representada por una malla computacional empleada para la solución numérica del modelo matemático. Los elementos triangulares totales son 2466, 8218, y 19436 para la iteración a)  $n = 1$ , b)  $n = 2$  y c)  $n = 3$ , respectivamente.

## Resultados

La Figura 4 muestra la solución numérica del perfil de velocidad en los poros cuando se alcanza el estado estacionario. La escala de colores representa la magnitud de la velocidad, donde el rojo indica una velocidad más alta y el azul una velocidad más baja.

La Figura 5 ilustra las trayectorias que sigue el fluido, y se nota cómo se crean canales de flujo preferenciales, lo cual está fuertemente influenciado por la cantidad de obstáculos en el camino, la topografía de los poros, así como por la presión y la velocidad del flujo. Además, se observa una velocidad más alta en las fronteras superior e inferior, lo cual puede atribuirse a una menor cantidad de obstáculos y una trayectoria de flujo menos sinuosa en comparación con el resto de la geometría de Sierpinski. Este fenómeno resalta la influencia significativa de la topología en la dinámica del flujo, donde la simplicidad de la estructura Sierpinski juega un papel fundamental en la aceleración del flujo en estas áreas específicas.

Los resultados de las simulaciones de flujo para estimar la tortuosidad realizados mediante esta metodología en la alfombra de Sierpinski muestran una notable similitud con datos previamente publicados, ver Figura 6. Esto indica una

consistencia y validez en los resultados obtenidos a través de este enfoque. Estas observaciones refuerzan la confiabilidad de la metodología utilizada y sugieren que los modelos y simulaciones aplicados en esta investigación son coherentes con los hallazgos reportados en investigaciones previas. Esta concordancia entre los resultados obtenidos y los datos previamente publicados respalda la efectividad y precisión de la metodología en el estudio de flujos y la estimación de la tortuosidad en la alfombra de Sierpinski.

Se observa que en la primera y segunda iteración los valores estimados de tortuosidad se parecen muchos a los encontrados en la literatura, sin embargo, a partir de la tercera iteración, la diferencia entre ellos se incrementa debido a la cantidad de obstáculos cada vez más pequeños. Esto se puede explicar debido a que en canales más angostos la influencia de la presión y la velocidad es más significativa. En canales más angostos, estos obstáculos más pequeños ejercen una influencia más significativa en la dinámica del flujo, lo que, a su vez, se traduce en una tortuosidad más acentuada, como se ilustra en la Figura 6. Este fenómeno resalta la importancia de considerar tanto la escala como la complejidad de la geometría al analizar y predecir el comportamiento del flujo en sistemas fractales como el que estamos estudiando.

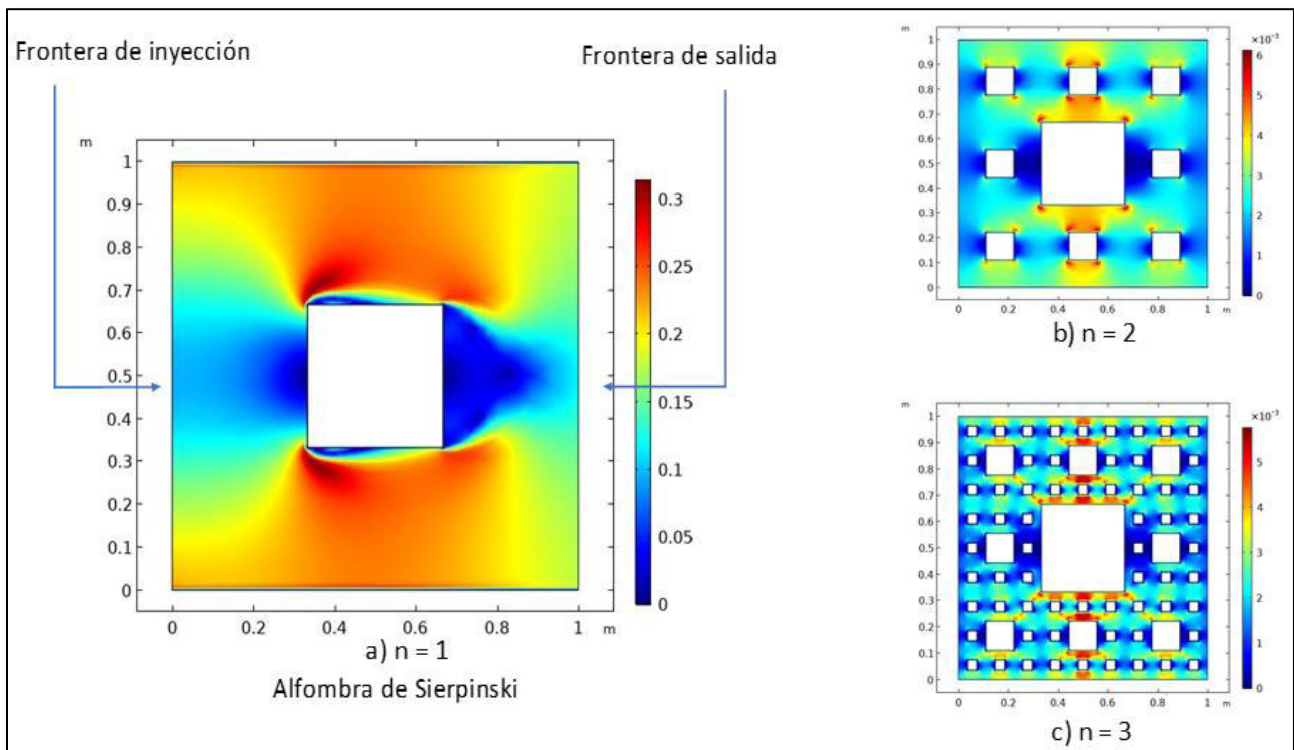


Figura 4: Distribución de velocidad (m/s) en los poros en la alfombra de Sierpinski.

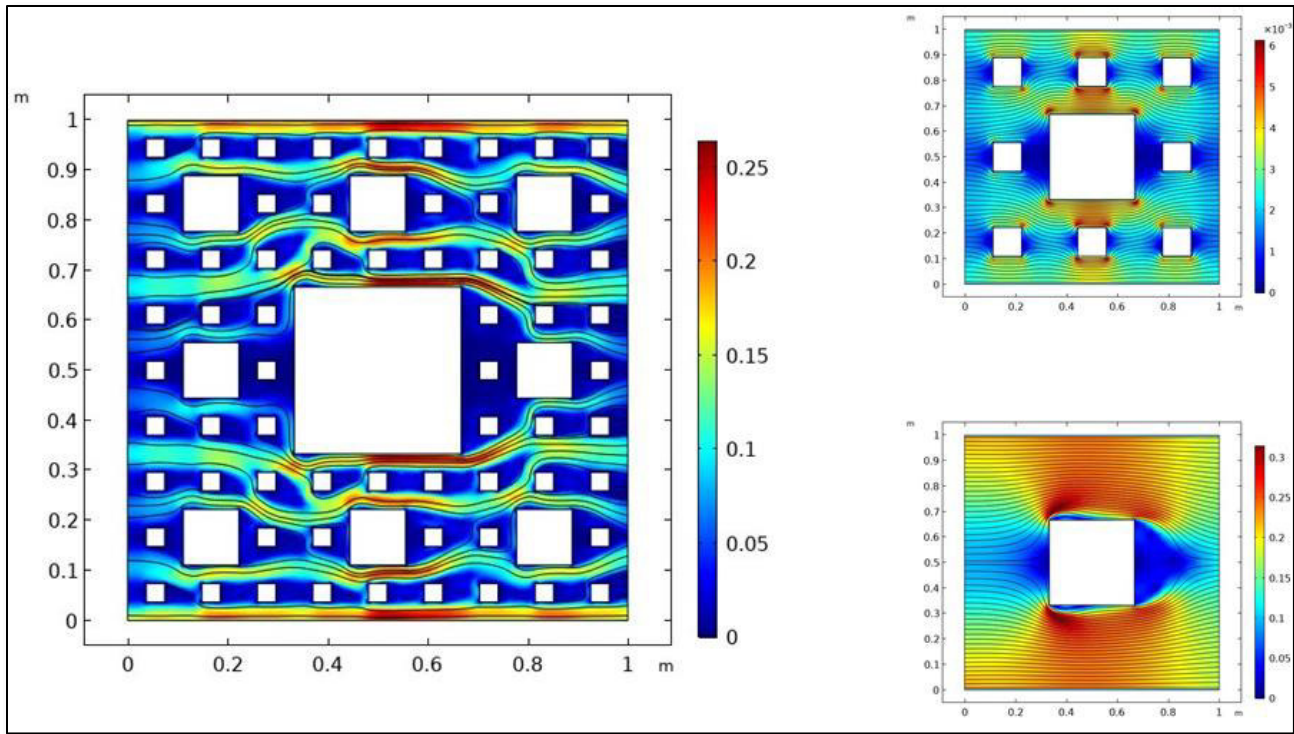


Figura 4: Trayectorias del fluido a través de la estructura geométrica de la alfombra de Sierpinski.

## Conclusiones

En este trabajo se propone una metodología para calcular la tortuosidad en la alfombra de Sierpinski, que toma como premisa el flujo laminar de un fluido newtoniano e incompresible. La metodología propuesta reproduce de manera natural el comportamiento en que los fluidos se desplazan a través de un medio poroso con estructuras complejas, en comparación con un enfoque anterior que simplifica el flujo mediante líneas rectas. Con ello se establece una mayor precisión y aplicabilidad de la metodología propuesta para comprender el comportamiento del flujo en la estructura de Sierpinski y otros entornos similares, al considerar la sinuosidad natural de las trayectorias del fluido y reflejar de manera más realista la tortuosidad en dichos medios.

## Referencias

- Carman, P.C. (1937): Fluid flow through granular beds. - Trans. Inst. Chem. Eng. Lond., **15**: 150-166.
- Elijabbar-Latief, F.D. & Fauzi, U. (2012): Kozeny–Carman and empirical formula for the permeability of computer rock models. – International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences, **50**: 117-123.
- Ebrahimi-Khabbazi, A., Hinebaugh, J. & Bazylak A. (2015): Analytical tortuosity–porosity correlations for Sierpinski

carpet fractal geometries. – Chaos, Solitons & Fractals, **78**: 124-133.

- Jian-Hua, L.I. & Bo-Ming, Y.U. (2011): Tortuosity of Flow Paths through a Sierpinski Carpet. – Chinese Physics Letters, **50**(3): 03471-1:9.

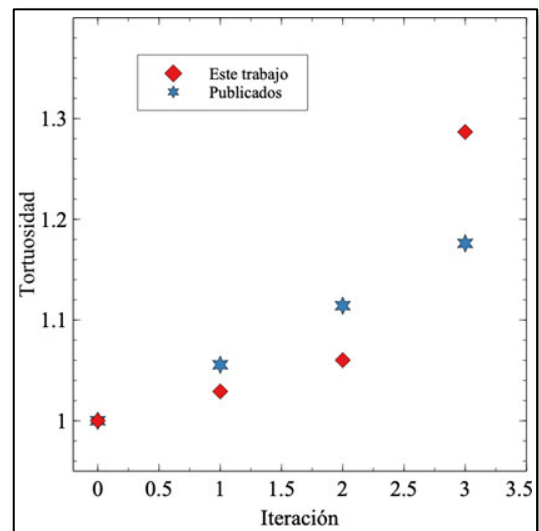


Figura 6: Estimación numérica de la tortuosidad por simulación de flujo laminar en la alfombra de Sierpinski, y su comparación con una metodología de la literatura (Jian-Hua & Bo-Ming, 2011).