

DEFORMATIONS DE VARIETES HOLOMORPHES

ADELINA FABIANO - JACQUES GUENOT

(pres. dalla Prof. Gaetana Restuccia)

1 Introduction

Soit X une variété holomorphe et soit M un fibré vectoriel holomorphe de base X . Pour tout couple d'entiers (p, q) , nous désignerons par $\Omega_X^{p,q}$ le fibré des formes différentielles de bidegré (p, q) sur X et par $\mathcal{E}^{p,q}(X; M)$ l'espace des formes différentielles de classe \mathcal{C}^∞ de bidegré (p, q) à coefficients dans M , c'est à dire l'espace $\mathcal{C}^\infty(X; M \otimes \Omega_X^{p,q})$. Remarquons que pour tout entier p , le fibré vectoriel $\Omega_X^{p,0}$ est holomorphe. Nous désignerons alors par $\mathcal{O}^p(X; M)$ l'espace des formes différentielles holomorphes de degré p à coefficients dans M , c'est à dire l'espace $\mathcal{O}(X; M \otimes \Omega_X^{p,0})$.

Rappelons que l'opérateur de Cauchy-Riemann $\bar{\partial}_X$ fournit un complexe d'espaces de Fréchet et d'applications linéaires continues

$$\dots \rightarrow \mathcal{E}^{0,q}(X; M) \xrightarrow{\bar{\partial}_X} \mathcal{E}^{0,q+1}(X; M) \rightarrow \dots$$

dont les groupes de cohomologie $\mathbb{H}^p(X, M)$ s'identifient canoniquement aux groupes de cohomologie de la variété X à coefficients dans le faisceau \mathcal{O}_M des sections holomorphes de M . En particulier, si la variété X est supposée compacte, ces groupes de cohomologie sont des espaces vectoriels topologiques séparés de dimension finie.

Soit π une submersion holomorphe propre d'une variété holomorphe X de dimension $m+n$ dans un polydisque S de centre l'origine dans \mathbb{C}^m , et soit M un fibré vectoriel holomorphe sur X .

Pour tout point s de S , la fibre $X(s)$ de π en s est une sous-variété holomorphe compacte de codimension m dans X et la restriction $M(s)$ de M à $X(s)$ est un fibré vectoriel holomorphe sur $X(s)$.

L'opérateur de Cauchy-Riemann $\bar{\partial}_{X(s)}$ fournit alors un complexe d'espaces de Fréchet et d'applications linéaires continues

$$\dots \rightarrow \mathcal{E}^{0,q}(X(s); M(s)) \xrightarrow{\bar{\partial}_{X(s)}} \mathcal{E}^{0,q+1}(X(s); M(s)) \rightarrow \dots$$

Le but de ce travail est de fournir la démonstration la plus élémentaire possible du théorème suivant. Nous aurons malheureusement besoin de la théorie des *complexes différentiels elliptiques*. Les auteurs espèrent pouvoir éliminer cet inconvénient dans un prochain travail sur la *parametrix*.

THÉORÈME 1.1. *Après restriction éventuelle du polydisque S , il est possible de trouver un complexe*

$$\dots \rightarrow V^q \xrightarrow{u_q} V^{q+1} \dots$$

de fibrés vectoriels holomorphes sur S , qui ait les propriétés suivantes:

(1) *Pour tout point s de S , le complexe*

$$\dots \rightarrow V^q(s) \xrightarrow{u_q(s)} V^{q+1}(s) \dots$$

est quasi-isomorphe⁽¹⁾ au complexe

$$\dots \rightarrow \mathcal{E}^{0,q}(X(s); M(s)) \xrightarrow{\bar{\partial}_{X(s)}} \mathcal{E}^{0,q+1}(X(s); M(s)) \rightarrow \dots$$

(2) Le complexe

$$\dots \rightarrow \mathcal{O}(S; V^q) \xrightarrow{u_q} (S; V^{q+1}) \rightarrow \dots$$

est quasi-isomorphe au complexe

$$\dots \rightarrow \mathcal{E}^{0,q}(X; M) \xrightarrow{\bar{\partial}_X} \mathcal{E}^{0,q+1}(X; M) \rightarrow \dots$$

COROLLAIRE 1.1. (Théorème de semi-continuité) *Pour tout couple d'entiers (p, q), l'ensemble*

$$\{s \in S \mid \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{H}^p(X(s); M(s)) \geq q\}$$

est un sous-ensemble analytique de S.

COROLLAIRE 1.2. *La caractéristique d'Euler-Poincaré du complexe*

$$\dots \rightarrow \mathcal{E}^{0,q}(X(s); M(s)) \xrightarrow{\bar{\partial}_{X(s)}} \mathcal{E}^{0,q+1}(X(s); M(s)) \rightarrow \dots$$

est localement constante.

COROLLAIRE 1.3. (Théorème des images directes) *Désignons par \mathcal{O}_M le faisceau des sections holomorphes de M. Pour tout entier p, le faisceau $R^p \pi \mathcal{O}_M$ est cohérent.*

Dans [5], Schneider donne une démonstration (moins élémentaire) d'un résultat plus général et dans [4] Hubbard donne une démonstration (incomplète) du même résultat.

Pour simplifier les notations, nous supposons que le fibré vectoriel M est le fibré vectoriel produit de rang 1 sur X .

⁽¹⁾ Deux complexes sont quasi-isomorphes s'ils ont des groupes de cohomologie isomorphes.

Tous les résultats que nous avons en vue étant de nature locale par rapport à S , nous nous permettrons, sans trop de cérémonie, de restreindre ce polydisque chaque fois que le besoin s'en fera sentir.

Nous dirons qu'une carte ϕ de X est *adaptée* si l'image par π de son domaine U coïncide avec S et si l'application partielle (ϕ_1, \dots, ϕ_m) coïncide avec $\pi|_U$. Puisque π est une submersion propre, on peut supposer, en restreignant au besoin S , qu'il existe un atlas de X formé de cartes adaptées.

Au numéro 3, nous imposerons des conditions supplémentaires pour qu'une carte soit adaptée.

Soit ϕ une carte adaptée de domaine U . L'application

$$h = (\phi_{m+1}, \dots, \phi_{m+n})$$

de U dans \mathbb{C}^n est holomorphe et pour tout point s de S sa restriction $h(s)$ à l'ensemble

$$U(s) = U \cap X(s)$$

est une carte de la variété $X(s)$. En particulier, pour tout entier r , les différentielles de la forme⁽²⁾

$$d\bar{\phi}_l = d\bar{\phi}_{l(1)} \wedge \dots \wedge d\bar{\phi}_{l(r)} \quad \text{avec } l \in S(r; m+n)$$

constituent une base du fibré vectoriel $\Omega_X^{0,r}|_U$ et les différentielles de la forme

$$d\overline{h(s)}_k = d\overline{h(s)}_{k(1)} \wedge \dots \wedge d\overline{h(s)}_{k(r)} \quad \text{avec } k \in S(r; n)$$

une base du fibré vectoriel $\Omega_{X(s)}^{0,r}|_{U(s)}$.

Nous introduirons systématiquement les notations suivantes pour les fonctions coordonnées d'une carte adaptée:

$$s_\mu = \pi_\mu \quad \text{pour } \mu = 1, \dots, m \quad \text{et } z_\nu = \phi_{m+\nu} \quad \text{pour } \nu = 1, \dots, n.$$

⁽²⁾ Pour tout couple d'entiers (p, q) nous indiquerons par $S(p, q)$ l'ensemble des applications strictement croissantes de l'ensemble $\{1, \dots, p\}$ dans l'ensemble $\{1, \dots, q\}$.

Les différentielles de la forme

$$d\bar{s}_j \wedge d\bar{z}_k \text{ avec } j \in S(p; m) \text{ et } k \in S(q; n) \text{ et } p + q = r$$

constituent donc une base du fibré vectoriel $\Omega_X^{0,r}|_U$.

2 Différentielles relatives

La submersion π induit un épimorphisme

$$\nu : T_X \rightarrow \pi^*(T_S)$$

de fibrés vectoriels holomorphes de base X , où l'on désigne par T_X et T_S le fibré tangent à X et à S respectivement. Le noyau T_π de cet épimorphisme est un sous-fibré vectoriel holomorphe de T_X et, pour tout point s de S , le fibré vectoriel $T_\pi(s)$ s'identifie canoniquement au fibré tangent $T_{X(s)}$.

Pour tout couple d'entiers (p, q) , avec $p+q = r$, le passage à l'algèbre de Grassmann fournit un morphisme

$$\nu_p^r : \pi^*(\Omega_S^{0,p}) \otimes \Omega_X^{0,q} \rightarrow \Omega_X^{0,r}$$

de fibrés vectoriels différentiels de base X .

LEMME 2.1. *L'image F_p^r du morphisme ν_p^r est un sous-fibré vectoriel différentiel de $\Omega_X^{0,r}$.*

Démonstration. Soit ϕ une carte adaptée et soit U son domaine.

Les différentielles de la forme

$$d\bar{\phi}_l \text{ avec } l \in S(r; m+n) \text{ et } l(p) \leq m$$

constituent une base de $F_p^r|_U$, ce qui démontre l'assertion. \square

On obtient ainsi une filtration du fibré vectoriel différentiel $\Omega_X^{0,r}$ par des sous-fibrés vectoriels

$$(*) \quad \Omega_X^{0,r} = F_0^r \supset \cdots \supset F_p^r \supset F_{p+1}^r \supset \cdots$$

Nous désignerons par $G^{p,q}$ le fibré vectoriel quotient F_p^r / F_{p+1}^r . Remarquons que F_p^r (resp. $G^{p,q}$) est nul si $p > m$ ou si $r > m + n$ (resp. si $p > m$ ou si $q > n$).

Remarque 2.1. La filtration (*) est compatible avec le produit extérieur de l'algèbre de Grassman. Par passage aux quotients, les fibres du fibré vectoriel

$$G = \bigoplus_{p,q} G^{p,q}$$

sont donc canoniquement munies d'une structure d'algèbre bigraduée, anticommutative dans un sens que le lecteur précisera aisément.

Par passage aux sections, la filtration (*) induit une filtration $\mathcal{E}^{0,r}(X) = \mathcal{C}^\infty(X; F_0^r) \supset \cdots \supset \mathcal{C}^\infty(X; F_p^r) \supset \mathcal{C}^\infty(X; F_{p+1}^r) \supset \cdots$

compatible avec l'opérateur de Cauchy-Riemann $\bar{\partial}_X$. En remarquant que l'espace quotient $\mathcal{C}^\infty(X; F_p^r) / \mathcal{C}^\infty(X; F_{p+1}^r)$ s'identifie canoniquement à l'espace $\mathcal{C}^\infty(X; G^{p,q})$, on en déduit pour tout entier p un complexe

$$\cdots \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X; G^{p,q}) \xrightarrow{\bar{\partial}_\pi} \mathcal{C}^\infty(X; G^{p,q+1}) \rightarrow \cdots$$

L'opérateur $\bar{\partial}_\pi$ possède des propriétés formelles analogues à celles de l'opérateur de Cauchy-Riemann $\bar{\partial}_X$.

Examinons ce qui se passe dans le domaine U d'une carte adaptée ϕ . Pour $v = 1, \dots, n$, nous désignerons par $\bar{\theta}_v$ la classe de la forme différentielle $d\bar{z}_v$ dans $\mathcal{C}^\infty(U; G^{0,1})$. Il résulte immédiatement des définitions que les sections de la forme

$$d\bar{s}_j \wedge \bar{\theta}_k \quad \text{avec} \quad j \in S(p; m) \quad \text{et} \quad k \in S(q; n)$$

constituent une base de $G^{p,q}|_U$.

Tout élément α de $\mathcal{C}^\infty(U; G^{p,q})$ s'écrit donc d'une manière et d'une seule

$$\alpha = \sum_{\substack{j \in S(p;m) \\ k \in S(q;n)}} a_{jk} d\bar{s}_j \wedge \bar{\theta}_k$$

où les a_{jk} sont des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur U , et l'on a

$$\bar{\partial}_\pi \alpha = \sum_{\substack{j \in S(p;m) \\ k \in S(q;n)}} \left(\sum_{1 \leq v \leq n} \frac{\partial a_{jk}}{\partial \bar{z}_v} \bar{\theta}_v \right) \wedge d\bar{s}_j \wedge \bar{\theta}_k.$$

Remarque 2.2. Il n'y a pas de manière canonique d'identifier les sections de $G^{p,q}$, appelées parfois *différentielles relatives* de X sur S , à des différentielles usuelles sur X . Remarquons cependant que pour tout point s de S , l'injection canonique ι_s de $X(s)$ dans X induit un épimorphisme

$$\iota_s^* : \Omega_X^{0,r}(s) \rightarrow \Omega_{X(s)}^{0,r}$$

de fibrés vectoriels différentiels de base $X(s)$ dont le noyau coïncide $F_1^r(s)$.

On en déduit un isomorphisme canonique de $G^{0,r}(s)$ sur $\Omega_{X(s)}^{0,r}$ au moyen duquel on identifie ces deux fibrés. Ceci signifie que, dans la carte adaptée ϕ , on identifie les sections $\bar{\theta}(s)$ aux différentielles $\overline{dh}(s)$.

Remarquons en passant que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(X; G^{0,r}) & \xrightarrow{\bar{\partial}_\pi} & \mathcal{C}^\infty(X; G^{0,r+1}) \\ \iota_s^* \downarrow & & \downarrow \iota_s^* \\ \mathcal{E}^{0,r}(X(s)) & \xrightarrow{\bar{\partial}_{X(s)}} & \mathcal{E}^{0,r+1}(X(s)) \end{array}$$

est commutatif.

Remarque 2.3. La contemplation du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi^*(\Omega_S^{0,p}) \otimes \pi^*(\Omega_S^{0,1}) \otimes \Omega_X^{0,q-1} & \xrightarrow{1 \otimes v_1} & \pi^*(\Omega_S^{0,p}) \otimes \Omega_X^{0,q} \\ \wedge \otimes 1 \downarrow & & \downarrow v_p^r \\ \pi^*(\Omega_S^{0,p+1}) \otimes \Omega_X^{0,q-1} & \xrightarrow{v_{p+1}^r} & F_p^r \end{array}$$

montre que ν_p^r induit par passage aux quotients un morphisme canonique

$$\pi^*(\Omega_S^{0,p+1}) \otimes G^{0,q} \rightarrow G^{p,q}$$

dont on vérifie aisément que c'est un isomorphisme. On s'en sert pour identifier ces deux fibrés.

3 Introduction d'une trivialisatation

Désignons par Y la fibre $X(0)$. L'extension d'un fameux théorème d'Ehresmann [1] montre qu'il existe un difféomorphisme Φ de classe \mathcal{C}^∞ de $S \times Y$ sur X , holomorphe par rapport à S (i.e. tel que pour tout point y de Y l'application partielle $\Phi(\cdot, y)$ de S dans X soit holomorphe), qui commute avec les projections (i.e. qui vérifie la relation $\pi \circ \Phi = pr_1$) et tel que l'application partielle $\Phi(0, \cdot)$ coïncide avec l'inclusion canonique de Y dans X .

On choisit une fois pour toutes un tel difféomorphisme et l'on s'en sert pour identifier les variétés *différentielles* sous-jacentes à $S \times Y$ et à X et, pour tout point s de S , les variétés *différentielles* sous-jacentes à Y et à $X(s)$.



La projection naturelle pr_2 de $S \times Y$ dans Y est holomorphe pour la structure produit mais non en général pour la structure de X . On observera cependant que les fibres de cette projection sont des sous-variétés holomorphes de X et de $S \times Y$.

Soit ϕ une carte adaptée dont le domaine U soit de la forme $S \times V$ où V est un ensemble ouvert de Y (quitte à restreindre S , on peut trouver un atlas de X formé de cartes adaptées qui vérifient cette ultérieure condition). Comme observé

au numéro 1, l'application

$$h = (\phi_{m+1}, \dots, \phi_{m+n})$$

de U dans \mathbb{C}^n est holomorphe et, pour tout point s de S , l'application partielle $h(s, \cdot)$ est une carte de domaine V dans la variété $X(s)$. On définit donc une carte ψ de la variété produit $S \times Y$, ayant encore U comme domaine, en posant

$$\psi(s, y) = (s, h(0, y)).$$

Le changement de carte γ de ψ dans ϕ (on respectera l'ordre) s'écrit donc

$$\begin{aligned} \gamma(\zeta_1, \dots, \zeta_{m+n}) &= (\zeta_1, \dots, \zeta_m, u_1(\zeta_1, \dots, \zeta_{m+n}), \dots \\ &\dots, u_n(\zeta_1, \dots, \zeta_{m+n})) \end{aligned}$$

où $u = (u_1, \dots, u_n)$ est une application de classe \mathcal{C}^∞ de $\psi(U)$ dans \mathbb{C}^n . Les hypothèses faites sur le difféomorphisme Φ qui nous a servi à identifier les variétés $S \times Y$ et X impliquent que u est en fait holomorphe par rapport aux variables ζ_1, \dots, ζ_m (mais non en général par rapport aux variables $\zeta_{m+1}, \dots, \zeta_{m+n}$).

Remarquons que l'on a

$$u(0, \dots, 0, \zeta_{m+1}, \dots, \zeta_{m+n}) = (\zeta_{m+1}, \dots, \zeta_{m+n}).$$

En particulier, la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \zeta_{m+1}} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial \zeta_{m+n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial \zeta_{m+1}} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial \zeta_{m+n}} \end{pmatrix}$$

est inversible au voisinage de l'ensemble

$$\psi(U) \cap \{(\zeta_1, \dots, \zeta_{m+n}) \in \mathbb{C}^{m+n} \mid \zeta_1 = \dots = \zeta_m = 0\}.$$

Quitte à restreindre nouvellement S , on peut supposer (ce que nous ferons) qu'il existe un atlas de X formé de cartes adaptées pour lesquelles la matrice ci-dessus soit inversible en tout point de $\psi(U)$.

Conservons les notations précédentes. Nous indiquerons systématiquement les fonctions coordonnées de la carte ψ de la manière suivante

$$\begin{cases} t_\mu = \psi_\mu & \text{pour } \mu = 1, \dots, m \\ w_\nu = \psi_{m+\nu} & \text{pour } \nu = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Le changement de carte γ de ψ dans ϕ s'écrit donc

$$s = t \quad \text{et} \quad z = u(t, w).$$

Nous poserons encore

$$A = \frac{\partial h}{\partial w} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \zeta_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial \zeta_{m+n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial \zeta_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial \zeta_{m+n}} \end{pmatrix} \circ \psi$$

$$B = \frac{\partial h}{\partial \bar{w}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \bar{\zeta}_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial \bar{\zeta}_{m+n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial \bar{\zeta}_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial \bar{\zeta}_{m+n}} \end{pmatrix} \circ \psi$$

$$C = \frac{\partial h}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \zeta_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial \zeta_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial \zeta_1} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial \zeta_m} \end{pmatrix} \circ \psi.$$

Remarquons que ces matrices sont holomorphes par rapport à S et que A est inversible en tout point de U .

On vérifie aisément que l'on a (on utilise des notations matricielles, assimilant les différentielles à des vecteurs colonnes)

$$ds = dt \quad dz = Adw + Bd\bar{w} + Cdt$$

$$d\bar{s} = d\bar{t} \quad d\bar{z} = \bar{B}d\bar{w} + \bar{A}d\bar{w} + \bar{C}d\bar{t}$$

et (on utilise des notations matricielles, assimilant les dérivées à des vecteurs lignes)

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial z}C \quad \frac{\partial}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial s}A + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\bar{B}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial}{\partial \bar{s}} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\bar{C} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{w}} = \frac{\partial}{\partial z}B + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\bar{A}.$$

Pour trouver les formules réciproques des précédentes, on est amené à inverser la matrice

$$\begin{pmatrix} A & B \\ \bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}.$$

Posons à cet effet

$$D = A^{-1}B \quad \text{et} \quad E = 1 - D\bar{D}.$$

Remarquons que D est holomorphe par rapport à S et que E vérifie la relation

$$ED = D\bar{E}.$$

Un calcul élémentaire montre alors que l'on a

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & -D\bar{A}^{-1} \\ -\bar{D}A^{-1} & \bar{A}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ \bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \bar{E} \end{pmatrix}.$$

En particulier, la matrice E est inversible en tout point de U , et si l'on pose

$$J = (AE)^{-1},$$

on voit sans difficultés que l'on a

$$\begin{pmatrix} A & B \\ \bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} J & -D\bar{J} \\ -\bar{D}J & \bar{J} \end{pmatrix}.$$

On est alors conduit aux formules

$$dt = ds \quad dw = J(dz - Cds) - D\bar{J}(d\bar{z} - \bar{C}d\bar{s})$$

$$d\bar{t} = d\bar{s} \quad d\bar{w} = -\bar{D}J(dz - Cds) + \bar{J}(d\bar{z} - \bar{C}d\bar{s})$$

et

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{\partial}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \bar{D} \right) JC \quad \frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \bar{D} \right) J$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{s}} = \frac{\partial}{\partial \bar{t}} + \left(\frac{\partial}{\partial w} D - \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right) \bar{J}\bar{C} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = - \left(\frac{\partial}{\partial w} D - \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right) \bar{J}.$$

4 Le premier bicomplexe

Pour tout couple d'entiers (p, q) , avec $p+q = r$, on obtient un morphisme

$$\tilde{\Phi} : \pi^*(\Omega_S^{0,p}) \otimes pr_2^*(\Omega_Y^{0,q}) \rightarrow \Omega_{S \times Y}^r = \Omega_X^r \rightarrow \Omega_X^{0,r}$$

de fibrés vectoriels différentiels de base X en composant le produit extérieur dans l'algèbre de Grassmann avec la projection sur la composante de bidegré $(0, r)$.

Dans la carte adaptée ϕ , ce morphisme est caractérisé par les formules

$$\tilde{\Phi}(d\bar{t}) = d\bar{s} \quad \text{et} \quad \tilde{\Phi}(d\bar{w}) = \bar{J}(d\bar{z} - \bar{C}d\bar{s}).$$

Son image est donc contenue dans le fibré vectoriel F_p^r et l'on en déduit un morphisme

$$\Phi : \pi^*(\Omega_S^{0,p}) \otimes pr_2^*(\Omega_Y^{0,q}) \rightarrow G^{p,q}$$

caractérisé par les formules

$$\Phi(d\bar{t}) = d\bar{s} \quad \text{et} \quad \Phi(d\bar{w}) = \bar{\theta}.$$

On voit en particulier que Φ est un isomorphisme.

L'espace $\mathcal{C}^\infty(X; \pi^*(\Omega_S^{0,p}) \otimes pr_2^*(\Omega_Y^{0,q}))$ s'identifiant canoniquement à l'espace $\mathcal{E}^{0,p}(S; \mathcal{E}^{0,q}(Y))$, l'opérateur de Cauchy-Riemann $\bar{\partial}_S$ fournit pour tout entier q un complexe

$$\dots \rightarrow \mathcal{E}^{0,p}(S; E^{0,q}(Y)) \xrightarrow{\bar{\partial}_S} \mathcal{E}^{0,p+1}(S; \mathcal{E}^{0,q}(Y)) \dots$$

acyclique en degrés positifs (on rappelle que S est un polydisque).

En transportant l'opérateur $\bar{\partial}_\pi$ au moyen de l'isomorphisme Φ on obtient d'autre part, pour tout entier p , un complexe rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} \dots \rightarrow \mathcal{E}^{0,p}(S; \mathcal{E}^{0,q}(Y)) & \xrightarrow{\epsilon} & \mathcal{E}^{0,p}(S; \mathcal{E}^{0,q+1}(Y)) \dots \\ \Phi \downarrow & & \Phi \downarrow \\ \dots \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X; G^{p,q}) & \xrightarrow{\bar{\partial}_\pi} & \mathcal{C}^\infty(X; G^{p,q+1}) \dots \end{array}$$

LEMME 4.1. *Dans la carte adaptée ϕ l'opérateur ϵ est caractérisé par les propriétés suivantes:*

(1) *Pour toute fonctions f de classe C^∞ , on a*

$$\epsilon(f) = - \left(\frac{\partial f}{\partial w} D - \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \right) d\bar{w}.$$

(2) *On a*

$$\epsilon(d\bar{t}) = 0 \quad \text{et} \quad \epsilon(d\bar{w}) = 0.$$

Démonstration. La première assertion et la première égalité de la deuxième résultent immédiatement des définitions et des formules du numéro précédent.

Pour démontrer la deuxième égalité de la deuxième assertion, on remarque tout d'abord que sur toute variété holomorphe,

la composante de bidegré (O, r) d'une différentielle d -fermée de degré r est $\bar{\partial}$ -fermée. En particulier, pour tout point s de S , la composante de bidegré $(0, 1)$ de la différentielle $d\bar{w}$ dans l'ensemble ouvert V de la variété holomorphe $X(s)$, qui n'est autre que la différentielle

$$(J\bar{\theta})(s) = \bar{J}(s)d\bar{h}(s)$$

est $\bar{\partial}_{X(s)}$ -fermée, ce qui démontre l'assertion. \square

Remarque 4.1. On encourage vivement le lecteur à vérifier par le calcul que l'on a

$$\frac{\partial \bar{J}_{jk}}{\partial \bar{z}_k} = \frac{\partial \bar{J}_{je}}{\partial \bar{z}_k} \quad \text{pour } j, k, l = 1, \dots, n.$$

PROPOSITION 4.1. *Le module bigradué*

$$\bigoplus_{p,q} \mathcal{E}^{0,p}(S; \mathcal{E}^{0,q}(Y))$$

muni des différentielles $\bar{\partial}_S$ et ϵ est un bicomplexe $\bar{\partial}_S$ -acyclique en degrés positifs.

Démonstration. Il suffit de vérifier la relation

$$\epsilon \bar{\partial}_S + \bar{\partial}_S \epsilon = 0.$$

La question étant locale, on se place dans la carte adaptée ϕ . Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ , on a (lemme (4.1))

$$\begin{aligned} (\epsilon \bar{\partial}_S)(f) &= \sum_{1 \leq j \leq m} \epsilon \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{t}_j} \right) \wedge d\bar{t}_j \\ &= - \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k, l \leq n}} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial \bar{t}_j} D_{lk} - \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{w}_k \partial \bar{t}_j} \right) d\bar{w}_k \wedge d\bar{t}_j \end{aligned}$$

et, puisque D est holomorphe par rapport à S ,

$$(\bar{\partial}_S \epsilon)(f) = - \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k, l \leq n}} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{t}_j \partial w_l} D_{lk} - \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{t}_j \partial \bar{w}_k} \right) d\bar{t}_j \wedge d\bar{w}_k$$

ce qui démontre l'assertion dans ce cas. Compte tenu des relations du lemme (4.1), le cas général est alors immédiat. \square

COROLLAIRE 4.1. *L'inclusion canonique du complexe*

$$\dots \rightarrow \mathcal{O}(S; \mathcal{E}^{0,q}(Y)) \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{O}(S; \mathcal{E}^{0,q+1}(Y)) \rightarrow \dots$$

dans le complexe total associé au bicomplexe de la proposition (4.1) est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. L'assertion résulte immédiatement de la proposition (4.1) et des propriétés formelles des bicomplexes. \square

5 Le deuxième bicomplexe

On peut aussi transporter l'opérateur $\bar{\partial}_S$ au moyen de l'isomorphisme Φ . On obtient alors pour tout entier q un complexe rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \dots \rightarrow \mathcal{E}^{0,p}(S; \mathcal{E}^{0,q}(Y)) & \xrightarrow{\bar{\partial}_S} & \mathcal{E}^{0,p+1}(S; \mathcal{E}^{0,q}(Y)) & \rightarrow & \dots \\ & \phi \downarrow & & \phi \downarrow & \\ \dots \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X; G^{p,q}) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{C}^\infty(X; G^{p+1,q}) & \rightarrow & \dots \end{array}$$

LEMME 5.1. *Dans la carte adaptée ϕ , l'opérateur δ est caractérisé par les propriétés suivantes:*

(1) *Pour toute fonction f de classe \mathcal{C}^∞ , on a*

$$\delta(f) = \sum_{1 \leq j \leq m} \frac{\partial f}{\partial \bar{t}_j} d\bar{s}_j.$$

(2) *On a $\delta(d\bar{s}) = 0$.*

(3) Pour $k = 1, \dots, n$, on a

$$\delta(\bar{\theta}_k) = - \sum_{1 \leq j \leq m} \bar{\partial}_\pi \bar{C}_{kj} \wedge d\bar{s}_j.$$

Démonstration. Les deux premières assertions résultent immédiatement des définitions. Pour démontrer la troisième, on commence par remarquer que l'on a (on rappelle que la matrice D est holomorphe par rapport à S)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{t}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{t}} (1 - \bar{D}D) = - \frac{\partial \bar{D}}{\partial \bar{t}} D = - \frac{\partial(\bar{A}^{-1}\bar{B})}{\partial \bar{t}} D \\ &= \bar{A}^{-1} \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{t}} \bar{D} - \frac{\partial \bar{B}}{\partial \bar{t}} \right) D \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{A}\bar{E})}{\partial \bar{t}} &= \frac{\partial(\bar{A})}{\partial \bar{t}} \bar{E} + \bar{A} \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{t}} \\ &= \frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{t}} \bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{t}} \bar{D}D - \frac{\partial \bar{B}}{\partial \bar{t}} D = \frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial \bar{B}}{\partial \bar{t}} D. \end{aligned}$$

Remontant à la définition de A et B , on en déduit que l'on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{A}\bar{E})_{kl}}{\partial \bar{t}_j} &= \frac{\partial \bar{A}_{kl}}{\partial \bar{t}_j} - \sum_{1 \leq v \leq n} \frac{\partial \bar{B}_{kv}}{\partial \bar{t}_j} D_{vl} \\ &= \frac{\partial \bar{C}_{kj}}{\partial \bar{w}_l} - \sum_{1 \leq v \leq n} \frac{\partial \bar{C}_{kj}}{\partial w_v} D_{vl} = \sum_{1 \leq v \leq n} \frac{\partial \bar{C}_{kj}}{\partial \bar{z}_v} (\bar{A}\bar{E})_{vl} \end{aligned}$$

pour $j = 1, \dots, m$ et $k, l = 1, \dots, n$ (la dernière égalité résulte

des formules du numéro 3). Ceci implique que l'on a

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_S(\phi^{-1}(\bar{\theta}_k)) &= \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq l \leq n}} \frac{\partial(\bar{A}\bar{E})_{kl}}{\partial \bar{t}_j} d\bar{t}_j \wedge d\bar{w}_l \\ &= \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq l, v \leq n}} \frac{\partial \bar{C}_{kj}}{\partial \bar{z}_v} (\bar{A}\bar{E})_{vl} d\bar{t}_j \wedge d\bar{w}_l \\ &= - \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq v \leq n}} \frac{\partial \bar{C}_{kj}}{\partial \bar{z}_v} \phi^{-1}(\bar{\theta}_v) \wedge d\bar{t}_j, \end{aligned}$$

d'où l'assertion.

Par composition de l'isomorphisme Φ^{-1} et du morphisme $\tilde{\Phi}$ défini au numéro précédent, on obtient pour tout couple d'entiers (p, q) avec $p + q = r$ un morphisme

$$\Psi : G^{p,q} \rightarrow \Omega_X^{0,r}$$

de fibrés vectoriels différentiels de base X . Dans la carte adaptée ϕ , ce morphisme est caractérisé par les formules

$$\Psi(d\bar{s}) = d\bar{s} \quad \text{et} \quad \Psi(\bar{\theta}) = d\bar{z} - \bar{C}d\bar{s}.$$

Ceci implique en particulier que le morphisme somme

$$\Psi : \bigoplus_{p+q=r} G^{p,q} \rightarrow \Omega_X^{0,r}$$

est un isomorphisme (et la filtration de $\Omega_X^{0,r}$ par les sous-fibrés F_p^r associée à une graduation!).

THÉORÈME 5.1. *Le module bigradué*

$$\bigoplus_{p,q} \mathcal{C}^\infty(X; G^{p,q})$$

muni des différentielles δ et $\bar{\partial}_\pi$ est un bicomplexe δ -acyclique en degrés positifs. A travers l'isomorphisme Ψ , la différentielle

totale de ce bicomplexe s'identifie à l'opérateur de Cauchy-Riemann $\bar{\partial}_X$.

Démonstration. La première partie du théorème résulte immédiatement de la proposition (4.1). Il suffit donc de démontrer que l'on a

$$\Psi(\delta + \bar{\partial}_\pi) = \bar{\partial}_X \Psi.$$

La question étant locale, on peut se placer dans la carte adaptée ϕ .

Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ , on a (lemme (5.1))

$$\begin{aligned} (\Psi(\delta + \bar{\partial}_\pi))(f) &= \Psi \left(\sum_{1 \leq j \leq m} \frac{\partial f}{\partial \bar{t}_j} d\bar{s}_j + \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} \bar{\theta}_k \right) \\ &= \sum_{1 \leq j \leq m} \frac{\partial f}{\partial \bar{t}_j} d\bar{s}_j + \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k - \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq n}} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} \bar{C}_{kj} d\bar{s}_j \\ &= \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq n}} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{t}_j} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} \bar{C}_{kj} \right) d\bar{s}_j + \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \\ &= \sum_{1 \leq j \leq m} \frac{\partial f}{\partial \bar{s}_j} d\bar{s}_j + \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k = \bar{\partial}_X f \end{aligned}$$

ce qui démontre l'assertion dans ce cas.

Puisque l'on a

$$\delta(d\bar{s}) = 0 \quad \bar{\partial}_\pi(d\bar{s}) = 0 \quad \bar{\partial}_X(d\bar{s}) = 0,$$

un simple exercice d'algèbre linéaire montre qu'il suffit de vérifier l'assertion pour les sections $\bar{\theta}_k$ avec $k = 1, \dots, n$.

Or on a (lemme (5.1))

$$\begin{aligned} (\Psi(\delta + \bar{\partial}_\pi))(\bar{\theta}_k) &= -\Psi \left(\sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq l \leq n}} \frac{\partial \bar{C}_{kj}}{\partial \bar{z}_l} \bar{\theta}_l \wedge d\bar{s}_j \right) \\ &= - \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq l \leq n}} \frac{\partial \bar{C}_{kj}}{\partial \bar{z}_l} d\bar{z}_l \wedge d\bar{s}_j + \sum_{\substack{1 \leq j, \mu \leq m \\ 1 \leq l \leq n}} \frac{\partial \bar{C}_{kj}}{\partial \bar{z}_l} \bar{C}_{l\mu} d\bar{s}_\mu \wedge d\bar{s}_j, \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_X(\Psi(\bar{\theta}_k)) &= \bar{\partial}_X(d\bar{z}_k - \sum_{1 \leq j \leq m} \bar{C}_{kj} d\bar{s}_j) \\ &= - \sum_{\substack{1 \leq j, \mu \leq m \\ 1 \leq l \leq n}} \frac{\partial \bar{C}_{kj}}{\partial \bar{s}_\mu} d\bar{s}_\mu \wedge d\bar{s}_j - \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq l \leq n}} \frac{\partial \bar{C}_{kj}}{\partial \bar{z}_l} d\bar{z}_l \wedge d\bar{s}_j \\ &= - \sum_{\substack{1 \leq j, \mu \leq m \\ 1 \leq l \leq n}} \frac{\partial \bar{C}_{kj}}{\partial \bar{t}_\mu} d\bar{s}_\mu \wedge d\bar{s}_j + \sum_{\substack{1 \leq j, \mu \leq m \\ 1 \leq l \leq n}} \frac{\partial \bar{C}_{kj}}{\partial \bar{z}_l} \bar{C}_{l\mu} d\bar{s}_\mu \wedge d\bar{s}_j \\ &\quad - \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq l \leq n}} \frac{\partial \bar{C}_{kj}}{\partial \bar{z}_l} d\bar{z}_l \wedge d\bar{s}_j. \end{aligned}$$

Le premier terme de la dernière expression est nul puisque l'on a par définition même de \bar{C}

$$\frac{\partial \bar{C}_{kj}}{\partial \bar{t}_\mu} = \frac{\partial}{\partial \bar{t}_\mu} \left(\frac{\partial \bar{h}_k}{\partial \bar{t}_j} \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{t}_j} \left(\frac{\partial \bar{h}_k}{\partial \bar{t}_\mu} \right) = \frac{\partial \bar{C}_{k\mu}}{\partial \bar{t}_j}$$

ce qui achève la démonstration du théorème. □

COROLLAIRE 5.1 *La composition des isomorphismes Φ et Ψ fournit un quasi-isomorphisme de complexes*

$$\begin{array}{ccccc} \dots & \rightarrow & \mathcal{O}(S; \mathcal{E}^{0,q}(Y)) & \xrightarrow{\epsilon} & \mathcal{O}(S; \mathcal{E}^{0,q+1}(Y)) & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \rightarrow & \mathcal{E}^{0,q}(X) & \xrightarrow{\bar{\partial}_X} & \mathcal{E}^{0,q+1}(X) & \rightarrow & \dots \end{array}$$

En particulier, les groupes de cohomologie $\mathbb{H}^q(X; \mathcal{O})$ sont nuls pour $q > n$.

6 Le complexe relatif

Pour tout point s de S , le morphisme Φ induit un isomorphisme $\Phi(s)$ de $\Omega_Y^{0,q}$ sur $G^{0,q}(s) = \Omega_{X(s)}^{0,q}$ et il existe un complexe rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & \mathcal{E}^{0,q}(Y) & \xrightarrow{\epsilon(s)} & \mathcal{E}^{0,q+1}(Y) & \rightarrow & \dots \\ & & \Phi(s) \downarrow & & \Phi(s) \downarrow & & \\ \dots & \rightarrow & \mathcal{E}^{0,q}(X(s)) & \xrightarrow{\bar{\partial}_{X(s)}} & \mathcal{E}^{0,q+1}(X(s)) & \rightarrow & \dots \end{array}$$

LEMME 6.1. La famille de complexes

$$\dots \rightarrow \mathcal{E}^{0,q}(Y) \xrightarrow{\epsilon(s)} \mathcal{E}^{0,q+1}(Y) \rightarrow \dots$$

est une famille holomorphe de complexes différentiels elliptiques sur Y paramétrée par S .

Le complexe obtenu par application du foncteur $\mathcal{O}(S; \)$ coïncide avec le complexe

$$\dots \rightarrow \mathcal{O}(S; \mathcal{E}^{0,q}(Y)) \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{O}(S; \mathcal{E}^{0,q+1}(Y)) \rightarrow \dots$$

du numéro précédent.

Démonstration. L'assertion résulte des définitions. On observera en particulier que, dans la carte adaptée ϕ , l'opérateur $\epsilon(s)$ associe à la différentielle

$$\omega = \sum_{k \in S(q;n)} a_k d\bar{w}_k,$$

où les a_k sont des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur V , la différentielle

$$\epsilon(s)(\omega) = - \sum_{\substack{k \in S(q;n) \\ 1 \leq l, v \leq n}} \left(\frac{\partial a_k}{\partial w_v} D_{vl}(s) - \frac{\partial a_k}{\partial \bar{w}_l} \right) d\bar{w}_l \wedge d\bar{w}_k$$

et cette dernière est holomorphe par rapport à S . \square

La théorie générale des complexes différentiels elliptiques ([2] et [3]) et le théorème (5.1) fournissent alors le théorème (1.1).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D'Aprile M., Guenot J., *Sulla proprietà di banalità locale per le submersioni proprie*, B.U.M.I. (6) **5-A** (1986) - pp. 305-310.
- [2] Guenot J., *Complexes elliptiques dépendant analytiquement d'un paramètre*, C.R.A.S., t. **274**, 470-472, Paris (1972).
- [3] Guenot J., *Une formule de Lefschetz pour des complexes élliptiques dépendant d'un paramètre*, Thèse, Genève (1972).
- [4] Hubbard J., *Sur les sections analytiques de la courbe universelle de Teichmüller*, Mens. Amer. Math. Society **66**, Providence (1976).
- [5] Schneider M., *Halbstetigkeitssätze für relativ analytisch Räume*, Inventiones Math. **16**, (1972) 161-176.

*Département de Mathématiques
Université de la Calabre
87036 Arcavata di Rende (Italie)*

**NAVIGAZIONE ABERRAZIONALE
NEGLI INFINITI SPAZI
(FRA SOVRUMANI SILENZI)**

A. MAMMANO - M. SCIBILIA

Abstract

Considerations about the risks of life evolution on Earth due either to contradictory developments or to collision with asteroids lend to suppose a colonization of space, eventually beyond our solar system. The two strategies for interstellar travels, namely at low or at mild relativistic speed, may require different astronomical navigation systems. We propose, for the exploration at relativistic speed, an aberrational navigation system and find a converging mathematical solution starting from the approximate value supplied e.g. by the inertial navigator.

Prefazione.

Un recente studio del Prof. Attilio Ferrari (1994), ordinario di Astrofisica a Torino, mostra quanto critica sia la nostra evoluzione sul pianeta Terra. L'esplosione demografica, l'effetto serra e l'inquinamento pongono un limite stringente al progresso della civiltà tecnologica, dell'ordine dei mille anni.

Nel frattempo l'oceanografia biologica potrà alleviare le sofferenze dei miliardi di indigenti. È chiaro tuttavia che la spettacolare messa in orbita del primo satellite artificiale russo, seguita dalla conquista della Luna, dall'invio della sonda Giotto verso la Cometa di Halley e di altre costose sonde sui pianeti esterni del sistema solare, preludono al tentativo di emanciparci dalla Terra.

Progetti eseguibili di colonie spaziali attorno alla Terra con qualche migliaio di abitanti sono già definiti e attendono la disponibilità di spesa. Il Progetto di sbarco su Marte nei primi decenni del nuovo secolo (Chicarro et al., 1993), il progetto approvato dall'Ente Spaziale Europeo dell'atterraggio di una sonda sulla testa di una cometa e l'invio di una sonda sul satellite Titano (confrontabile alla Luna ma dotato di atmosfera), sono chiaro segno del tentativo di colonizzare i pianeti accessibili e gli asteroidi più promettenti, per salvarci dal collasso della vita sulla Terra che verrà causato dalle contraddizioni interne o dalle collisioni con gli asteroidi. Ma gli spiriti più intraprendenti non si accontentano nemmeno della colonizzazione del sistema solare; il pericolo rappresentato dall'evoluzione del Sole, che entro pochi miliardi di anni aumenterà di un centinaio di volte il suo diametro e la sua energia, per poi ridursi di diecimila volte, terminando la sua influenza sul destino dell'umanità, nella fase effimera di nana bianca (una stellina cento volte più piccola e più debole del Sole attuale) è molto remota per giustificare ora un'avventura interstellare.

La colonizzazione della galassia è invece preconizzata da grandi astrofisici fra cui J. S. Schklovskii (1980) in base all'aumento esponenziale della richiesta di energia dell'umanità e da M. Hack (1994) che prefigura l'uomo cibernetico destinato a popolare altri pianeti.

Schklovskii (1980) e il biofisico italiano S. Gaeta (1993), hanno mostrato come la vita, nell'espressione più elevata dell'autocoscienza, sia un fenomeno estremamente condizionato, impli-

cando una improbabile replica della configurazione di massa, distanza e inclinazioni di un sistema terra-luna attorno al sole di altri sistemi planetari, necessaria per lo sviluppo di una civiltà tecnologica.

Il finanziamento del progetto SETI (ricerca di segnali da eventuali civiltà extraterrestri), è stato prima negato e poi giustificato con la speranza che dall'etere ci vengano suggerite soluzioni ai nostri problemi, fra cui il debellamento delle malattie e l'eliminazione delle contraddizioni della nostra civiltà. Ma queste speranze sono mal riposte. Infatti, dagli studi di Tipler (1980) e Wesson (1990), il paradosso di Fermi, cioè il fatto che non si noti la presenza di colonizzatori galattici viene spiegato con l'estremamente bassa probabilità (10 EXP-20) che si formi una civiltà tecnologica, per cui entro il limite osservabile dell'Universo saremmo l'unica civiltà.

Dopo 12 mesi di esercizio, il progetto SETI è stato cancellato.

Lo scopo del progetto TOPS (Towards other planetary systems) della NASA (1993), mira alla scoperta di pianeti attorno ad altre stelle.

La ricerca finora condotta da Terra e dallo spazio (Murdocle et al., 1993 e Barbieri et al., 1993) aveva dato esito negativo, mentre si ha notizia di dischi protoplanetari attorno a stelle molto più grandi e di temperatura diversa dal nostro Sole. Dobbiamo augurarci che la ricerca conduca almeno alla scoperta di pianeti di tipo terrestre adatti ad ospitare organismi trasportati dalla nostra Terra e in particolare l'Uomo o suoi simili.

Il sistema planetario annunciato (cfr. A. Macchetto - 1995), con un pianeta della massa di Giove orbitante con un periodo di soli 4 giorni, contro le decine di anni di Giove e Saturno, non è confrontabile col nostro sistema solare.

L'ulteriore passo potrebbe essere rappresentato dal lancio di sonde interstellari verso questi bersagli (come previsto dalla NA-

SA nell'articolo "Voli interstellari" di G. Vulpetti (1985), che si prefigge di dirigere la stessa sonda su varie stelle bersaglio).

Dopo la fase esplorativa sono previste due strategie di colonizzazione: a bassa velocità, limitata ad oggetti vicini, con le spinte ottenibili attorno ai pianeti, fino a circa 100 Km/sec; e ad alta velocità, fino a qualche decimo della velocità della luce (Crawford 1989). In questo secondo caso si ipotizza la creazione di uomini cibernetici (Hack, 1994) o di robots autocoscienti, entro 100 anni, e di utilizzare materiali reperibili in loco, per esempio sugli asteroidi oggetto della colonizzazione (Tipler, 1980).

Dal punto di vista energetico, tuttavia, sarebbe preferibile se realizzabile, il teletrasporto delle caratteristiche rappresentative di un uomo per via informatica; cioè, misurando le correlazioni tra i parametri confrontabili che concorrono all'esistenza di un essere umano, dovrebbe essere possibile inviare a distanza tali caratteristiche a un ricevitore e ricostruire un essere identico all'originale, il quale originale, a seguito delle misurazioni, verrebbe a collassare (Sheffer, 1994). Per inciso si prospetta l'immortalità di qualche essere umano. Anche per il teletrasporto è tuttavia necessario inviare preventivamente sul luogo da colonizzare un ricevitore dotato di una poderosa antenna. È tuttavia da notare che la colonizzazione della Galassia richiederebbe cento milioni di anni.

La navigazione può essere condotta a velocità relativistiche, fra uno e quattro decimi della velocità della luce, consentita dai motori ad annichilazione (Vulpetti, 1985). Il superamento di tale limite è possibile solo dirigendo la sonda tangenzialmente ad un buco nero stellare rotante. La sonda emergerebbe dall'ergosfera di tali buchi neri con velocità maggiore di quella d'ingresso, a spese dell'energia rotante del buco nero. Per inciso, la periferia di un buco nero stellare offrirebbe la disponibilità di energia meccanica a basso costo e sarebbe pertanto un sito adatto alla colonizzazione.

Non è pensabile di controllare la rotta di tale sonda con messaggi radio.

Viene perciò proposto un metodo originale di navigazione interstellare fondato sul fenomeno dell'aberrazione cinematica per velocità relativistiche, trascurando, per semplificare, gli effetti differenziali dell'espansione cosmologica (per le basse velocità è in fase di studio una navigazione spaziale doppler che può assimilarsi al metodo delle circonferenze d'altezza in navigazione di superficie).

Per il lettore non specialista precisiamo che l'angolo osservabile fra due direzioni dipende dalla velocità dell'osservatore. Confrontando gli angoli di oggetti lontanissimi, misurabili da due osservatori a velocità diversa, è possibile risalire alla direzione e velocità del secondo osservatore rispetto al primo nel riferimento rappresentato da oggetti extragalattici (quasars).

La trattazione matematica qui sviluppata, può essere integrata dalla sintesi di una suggestiva serie di articoli sull'origine e sul destino cosmico dell'uomo operata da Scibilia (1994).

Ringraziamo le Dott. L. Puccio e G. Cusumano del laboratorio d'informatica del Dipartimento di Matematica di Messina per la cortese collaborazione, il dott. S. Cristiani e il p. i. Alberico Rigoni dell'Istituto di Astronomia dell'Università di Padova per averci gentilmente fornito il recente catalogo di 7000 quasars.

A. M. dedica questo lavoro alla moglie Laura Sartori e ai figli Fabio e Fabrizio.

M. S. dedica questo lavoro ai suoi genitori Maria e Giuseppe e a Giusy Chiodo e al Col. Giuseppe Viola.

Concludiamo questa prefazione parafrasando G. Leopardi: "... e il navigar m'è dolce in questo cielo, fra infiniti spazi e sovrumani silenzi".

1. Introduzione.

Il navigatore inerziale (Mammano 1992) che dà un'indicazione approssimata della direzione, deve essere controllato astronomicamente.

La nostra idea originale è di sfruttare a tal fine il fenomeno dell'aberrazione astronomica; essa andava verificata al fine di stabilire il grado di convergenza delle soluzioni matematiche attorno a una direzione prescelta, partendo da una posizione perturbata. A tale scopo partendo dell'aberrazione relativistica e dell'effetto Doppler relativistico e gravitazionale per ottenere quantitativamente lo spostamento di frequenza, si calcola l'effetto K della variazione di energia rilevata nelle bande spettrali della sonda rispetto all'osservatore a riposo nel sistema solare.

Vengono poi affrontati i processi matematici relativi ai cataloghi di quasar (chiamati anche QSO), sorgenti quasi stellari così lontane da poter trascurare l'effetto di parallasse e che pertanto semplificano la ricerca della direzione della sonda potendo fare ricorso al solo fenomeno dell'aberrazione astronomica, prescindendo dunque dalle distanze, del resto generalmente non note, degli oggetti di riferimento astronomico.

Infine viene sviluppato il metodo di navigazione aberrazionale e dedotte le equazioni di condizioni lineari tramite sviluppi in serie di Taylor al 1° ordine.

Partendo da un catalogo di posizioni di oggetti quasi stellari (quasars), osservati dalla Terra, abbiamo simulato il metodo di navigazione aberrazionale fra i quasars, per effetto di una velocità relativistica in una direzione prefissata, spostandone poi la rotta lungo la direzione (perturbata), di un altro quasar, e perturbando pure il modulo della velocità. Abbiamo così simulato vari errori sulla rotta e sul modulo della velocità. Abbiamo sviluppato le funzioni che presiedono all'ampiezza degli archi misurati fuori rotta, e ricavato con i minimi quadrati le correzioni

differenziali dei parametri direzionali e della velocità, iterando il procedimento fino alla migliore convergenza.

La complessità delle operazioni ha comportato la stesura di un programma in linguaggio $C++$ di migliaia di righe, dimostratosi molto efficace, con un errore di arrotondamento di $(6 \cdot 10^{-5})^\circ$ in α e δ , cioè $1''.6$ di errore in angolo e di 10^{-6} nella velocità percentuale in unità di quella della luce.

Da varie simulazioni risulta che la migliore convergenza si ottiene da quasars situati sul parallelo relativistico antiapicale, la cui latitudine è: $\text{sen}b = -\beta = -v/c$, dove v e c sono la velocità della sonda e della luce.

Si è tenuto conto della correzione K sulle magnitudini apparenti, causata dal redshift o dal blueshift, ai fini dell'identificazione.

Per ristrettezze temporali sono state usate solo cinque coppie di QSO a 30° tra loro, ottenendo una convergenza di $0^\circ.27$ e di 0.001 in β . Essa è sufficiente a individuare nel campo di 1° dei telescopi, la stella verso la quale l'astronave va diretta ai fini di circumnavigarla. Tuttavia ulteriori miglioramenti sono intuibili aumentando sia il numero delle coppie di quasars con lo stesso z (spostamento percentuale verso il rosso), sia imponendo una separazione tra i QSO di 90° per ogni coppia.

2. Aberrazione in relatività ristretta.

Consideriamo K e K' , due sistemi di riferimento con assi (x, y, z) e (x', y', z') , paralleli. K' abbia velocità V lungo l'asse x , relativamente a K . Le relazioni che legano gli angoli aberrati a quelli non aberrati, in relatività ristretta, sono le seguenti:

$$(1) \quad \text{sen}\theta_* = \frac{\text{sen}\theta'_*}{\left(1 + \frac{v}{c} \cos\theta'_*\right)} = \frac{\text{sen}\theta'_*}{(1 - \beta \cos\theta'_*)\gamma}$$

$$(2) \quad \cos \theta_* = \frac{\cos \theta'_* - \beta}{1 - \beta \cos \theta'_*}$$

$$(3) \quad \tan \frac{\theta'_*}{2} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \tan \frac{\theta_*}{2}$$

3. Trasformazione equatoriale delle coordinate relativistiche.

Per scopi di identificazione, è conveniente convertire prima le coordinate equatoriali, in un sistema sferico in quiete, nella momentanea posizione della nave spaziale, il cui polo è nella direzione del moto. In seguito, saranno convertite in un nuovo sistema sferico, con la stessa orientazione ma connesso con il sistema di riferimento in moto. Lo chiameremo “*sistema relativistico*” mentre il “*sistema apicale*”, è il sistema in quiete menzionato sopra.

La latitudine apicale b , sarà contata dal piano normale alla velocità, positiva, nella direzione del moto. La longitudine apicale, l , si conta dal piano contenente i paralleli di velocità e la direzione del polo nord equatoriale. Il problema sferico è mostrato nella Figura 1.

Il centro della sfera coincide con l'origine S del sistema in quiete; P è il polo equatoriale galattico, SV è la direzione del moto, e F un generico oggetto extragalattico. Si assuma per semplicità che le sue coordinate equatoriali, viste da S , siano uguali a quelle osservate dal sistema solare; si trascurano i piccoli effetti di parallasse.

Dalla Figura 1, si ottengono le coordinate apicali $(1, b)$:

$$(4) \quad \text{sen} b = \text{sen} \delta_v \text{sen} \delta + \cos \delta_v \cos \delta \cos(\alpha_v - \alpha)$$

$$(5) \quad \text{sen} l = \frac{\cos \delta \text{sen}(\alpha_v - \alpha)}{\cos b}$$

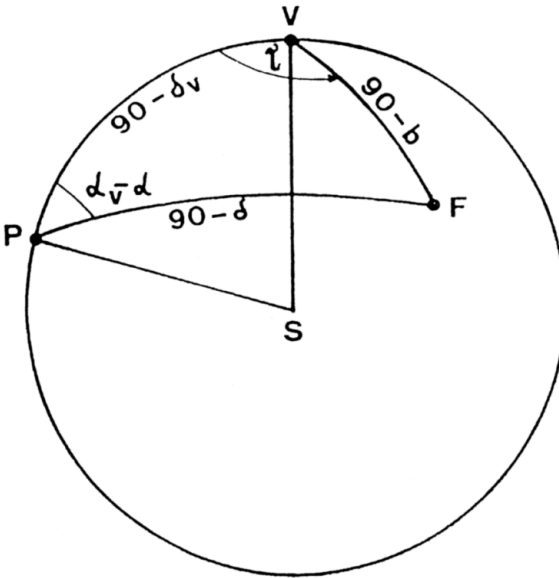


Figura 1

$$(6) \quad \cos l = \frac{(\operatorname{sen} \delta \cos \delta_v - \cos \delta \operatorname{sen} \delta_v \cos(\alpha_v - \alpha))}{\cos b}$$

Per ottenere le coordinate relativistiche, si osserva che la longitudine può essere contata dallo stesso piano dove hanno origine le longitudine apicali, così risulta che entrambe le longitudini, sono uguali. Come dato di fatto, l'aberrazione modifica solo le distanze angolari FV , nella Figura 1, mentre la longitudine 1, rimane inalterata. Nella Figura 2, la direzione di quiete di un oggetto M , è lungo SM ; SV è la direzione del moto, SP la parallela al polo equatoriale; SM' , la direzione aberrata, lungo la quale M è vista dai cosmonauti; N e N' , sono i punti rappresentativi di un altro oggetto N , osservato rispettivamente, nel sistema apicale e dalla nave spaziale.

Indicando con ϕ , la latitudine relativistica, si deduce:

$$(7) \quad \phi = 90^\circ - 2 \operatorname{arc} \tan \left(\sqrt{\frac{(1 - \beta)}{(1 + \beta)}} \tan \frac{1}{2} \beta \right)$$

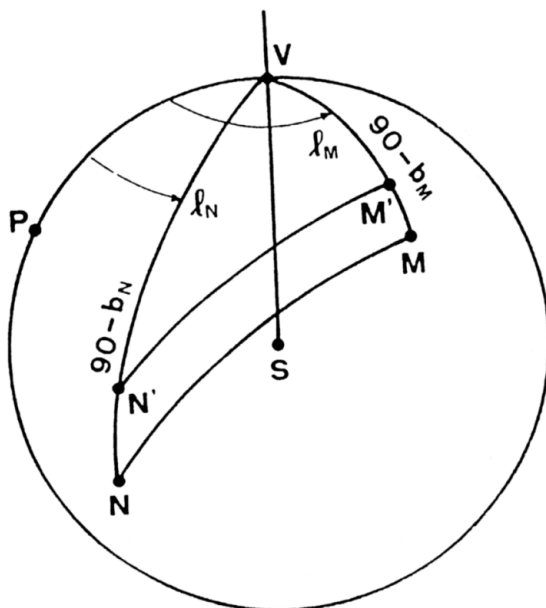


Figura 2

La longitudine relativistica, si ottiene dalla (5) e (6).

Le formule, dalle (4) alla (7), sono anche necessarie se intendiamo proiettare il cielo aberrato in un piano.

4. Correzione K per lo spostamento di frequenza.

Stando a Lang (1980):

$$m_{bol} - M_{bol} = m - M - K - A$$

dove m e M , sono le magnitudini apparenti e assolute osservate (per esempio m_V , M_V , m_B , M_B etc), A è l'assorbimento inter-

stellare, che trascuriamo, e K è la correzione:

$$K = K_1 + K_2 = 2.5 \log(1 + z) + 2.5 \log \frac{\int_0^\infty I(\lambda) s(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty I\left(\frac{\lambda}{1+z}\right) s(\lambda) d\lambda}$$

di cui la prima parte dipende dal moto, e la seconda dallo spostamento di frequenza.

$I(\lambda)$ è la distribuzione di energia in funzione di λ , per esempio, la distribuzione di energia di un corpo nero; $s(\lambda)$ è la risposta spettrale del rivelatore, per esempio fotometro con filtro B .

5. Coordinate apicali, equatore e paralleli relativistici.

Siano α_v, δ_v le coordinate topocentriche stazionarie del vettore velocità spaziale \bar{v} (modulo v). Esse si ricavano dalle coordinate di catalogo $\alpha_{v\oplus}, \delta_{v\oplus}$ applicando prima della partenza dell'astronave, precessione, aberrazione annua e subito dopo l'aberrazione interstellare. Per comodità operativa, supponiamo che coincidano con $\alpha_{v\oplus}, \delta_{v\oplus}$, cioè, suppongo di partire all'epoca di riferimento del catalogo.

Siano α_1, δ_1 , le coordinate equatoriali a riposo della stella più brillante ($\alpha_{CMi} = \text{Sirio}$). Calcoliamo le coordinate aberrate l_1, b_1 di Sirio. La direzione di v è approssimativamente individuata dalle coordinate a riposo α_2, δ_2 , di una stella brillante S_2 , prossima alla direzione di v .

Costruiamo un sistema di coordinate polari di vertice α_2, δ_2 . Si orienta la strumentazione di rilevazione in modo che l'asse polare strumentale coincida con α_2, δ_2 , e sia cioè puntato sulla stella S_2 . Il piano equatoriale strumentale si troverà a 90° dalla direzione OS_2 , fra l'astronave O e la stella S_2 . Si trasformano

le coordinate equatoriali in coordinate polari di polo S_2 , con formule analoghe alle apicali, in cui il modulo di velocità V_2 , sia quello nominale conseguibile a fine lancio (Figura 3).

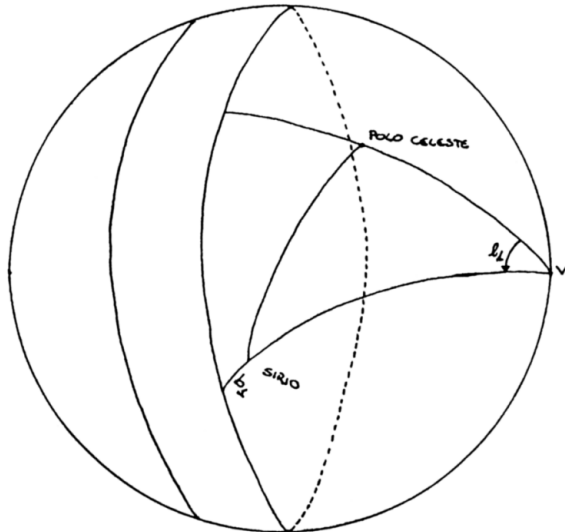


Figura 3

Si trasformino le coordinate del sistema $S_2(\alpha_2, \delta_2, v_2)$, nel riferimento polare $S_3(l_3, b_3, v_3)$.

In particolare si cerchino le coordinate apicali della stella più brillante del cielo, Sirio. Esse serviranno a semplificarne l'identificazione in cielo. Basterà posizionare la coordinata b_3 , di Sirio e ruotare attorno al polo v_3 fino a incontrare la stella Sirio nel campo di vista.

Siano l, b , le coordinate apicali, nel riferimento S_3 originatesi nel piano passante per Sirio. Bisogna successivamente identificare il *QSO* più brillante, 3C273, per utilizzarlo in seguito, qualora la stella Sirio non fosse più l'oggetto più brillante del cielo. A tale scopo, nota la longitudine l_Q , del *QSO* 3C273, e la sua latitudine b_Q , si posiziona lo strumento con la coordinata

b_Q , si punta su Sirio e lo si fa poi ruotare dell'angolo l_Q-l Sirio, fino a che appaia nel campo visuale il *QSO 3C273*, che a riposo era di magnitudine 12, e del quale bisognerà ricalcolare il cambiamento degli indici di colore, da $U - B$, $B - V$ solari, in $U' - B'$ e $B' - V'$, funzioni dello spostamento di lunghezze d'onda per via del fattore K .

Al fine di individuare altri *QSO*, che serviranno a precisare direzione, moto e velocità dell'astronave, conviene fare ricorso alla proprietà della conservazione degli archi, fra oggetti a riposo e loro immagini relativistiche (Mammano, 1980). Tale proprietà dice che, un oggetto R , localizzato a riposo sul parallelo relativistico, nel semispazio non contenente il verso della velocità, viene spostato dall'aberrazione, sull'equatore relativistico nel punto Q_1 , in cui il piano ROV , taglia tale equatore. Un punto Q_1 , a riposo sull'equatore relativistico, viene a sua volta spostato dall'aberrazione in un punto R_2 , del parallelo relativistico nel semispazio di v , ed è: $R_1 \hat{O} Q_1 = Q_1 \hat{O} R_2$, cioè, l'arco aberrato, visto dall'astronave O , mantiene la sua lunghezza (Figura 4).

Per individuare i *QSO* a riposo, conviene utilizzare questa proprietà che vale, rigorosamente solo per i *QSO* che si trovano sui paralleli ed equatore relativistici.

Il primo passo da svolgere è quello di trasformare le coordinate del catalogo, da equatoriali (cioè ascensione retta e declinazione), in apicali non aberrate, quindi per un osservatore in quiete.

Viene fissata la direzione di partenza e la velocità dell'astronave. Consideriamo la Figura 5, utilizzata per ricavare le formule che esprimono il passaggio da un sistema di riferimento di polo P (equatoriale), in uno di polo V . B , rappresenta il *QSO* di cui conosciamo le coordinate nel sistema di riferimento di polo P .

Dalle formulazioni di Gauss sui triangoli sferici è possibile

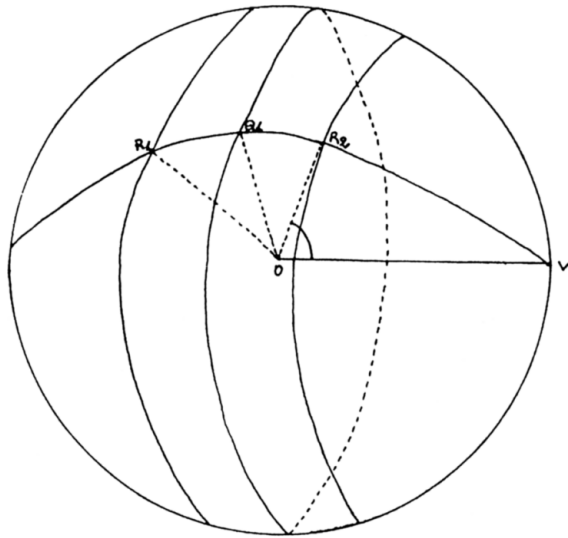


Figura 4

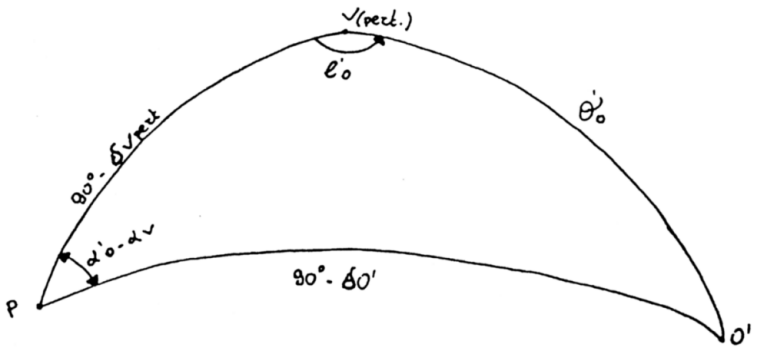


Figura 5

ricavare l'arco θ :

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos(90^\circ - \delta_V) \cos(90^\circ - \delta_B) + \\ &+ \sin(90^\circ - \delta_V) \sin(90^\circ - \delta_B) \cos(\alpha_V - \alpha_B) \end{aligned}$$

Ricaviamo ora l con la formula dei seni, di Gauss:

$$\frac{\text{sen}l}{\text{sen}(90^\circ - \delta_B)} = \frac{\text{sen}(\alpha_V - \alpha_B)}{\text{sen}\theta}.$$

Da quest'ultima ricaviamo $\text{sen}l$ e quindi l :

$$\text{sen}l = \frac{\text{sen}(\alpha_V - \alpha_B)}{\text{sen}\theta} \text{sen}(90^\circ - \delta_B)$$

Dato che il seno comporta ambiguità di angolo, dobbiamo ricavare l anche con il coseno. Utilizziamo la prima formula di Gauss:

$$\cos(90^\circ - \delta_B) = \cos(90^\circ - \delta_V) \cos\theta + \text{sen}(90^\circ - \delta_V) \text{sen}\theta \cos l$$

da cui si ricava, per formula inversa $\cos l$:

$$\cos l = \frac{\text{sen}\delta_B - \text{sen}\delta_V \cos\theta}{\cos\delta_V \text{sen}\theta}$$

Tramite controllo del valore del $\text{sen}l$ e $\cos l$, otteniamo l'angolo diedro l . Svolgiamo questo procedimento per tutti i QSO del catalogo. Otteniamo quindi le nuove coordinate dei QSO , nel sistema di riferimento apicale, non aberrato (l, θ).

Bisogna ora calcolare le stesse coordinate nel sistema di riferimento apicale aberrato, per un osservatore in movimento con velocità β ; la velocità da noi scelta è una velocità relativistica e quindi lo spostamento degli oggetti nella direzione del moto è di gran lunga superiore rispetto a quella che si osserva sulla Terra.

Per questo compito vengono utilizzate le formule già trattate in precedenza, e cioè:

$$\text{sen}\theta' = \frac{\text{sen}\theta}{\gamma(1 + \beta \cos\theta)}$$

dove γ il fattore di Lorentz, pari a:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Per il controllo dell'angolo, utilizziamo anche il coseno:

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta + \beta}{1 + \beta \cos \theta}.$$

A questo punto, dopo aver calcolato le coordinate apicali aberrate di tutti i *QSO* del catalogo, bisogna correggere la magnitudine, a causa dello spostamento di frequenza dovuto alla velocità β ; tramite la correzione K . Anche questo passo deve essere svolto per tutti i *QSO* del catalogo.

Una volta svolti tutti questi passaggi, possiamo creare un file, contenente i due cataloghi delle posizioni dei *QSO* nei due sistemi, apicale non aberrato, per un osservatore in quiete, e apicale aberrato, per un osservatore in movimento con velocità β .

6. Inversione del problema: dagli archi misurati aberrati ricavare direzione e modulo di velocità.

Una prima fase è conclusa, inizia ora la fase di simulazione. Ammettiamo che la direzione iniziale seguita dall'astronave sia alterata; nella simulazione introduciamo una direzione che chiamiamo perturbata, che è quella seguita effettivamente dall'astronave. Scegliamo questa direzione molto prossima a quella effettiva, al fine di testare il grado di precisione dell'algoritmo. Cominciamo con uno scarto di circa 2° , nella direzione e di 0.02 in modulo, partendo da $\beta = 0.1$ iniziale.

Rieseguiamo tutti i calcoli precedenti, e quindi le ricostruzioni dei due cataloghi per la direzione perturbata, creiamo un

altro file contenente questi risultati e passiamo quindi ad una nuova fase di calcolo, la scelta dei QSO da osservare per il controllo della direzione e del modulo della velocità.

Assume particolare rilevanza, per il grado di precisione ottenibile, la scelta strategica delle coppie.

Seguendo quanto detto in precedenza per la proiezione bisterografica, la scelta dei QSO può convenientemente cadere sull'equatore apicale e sul parallelo antiapicale.

La precisione attuale dei cataloghi è dell'ordine di $\sigma = 0''.002$ (satellite Hipparcos). L'errore ammissibile è minore o uguale a 3σ , cioè $0''.006$. Non è a priori da supporre che necessariamente il grado di convergenza realizzi questa precisione.

Se l'astronave viaggiasse a $0.1 c$, un punto B , per esempio, dell'equatore apicale o relativistico, si sposterebbe in B' e un punto F in F' . L'arco BB' è tale che: $\cos BB' = 0.1$, cioè: $BB' \cong 6^\circ$. L'angolo diedro E' , non cambia sostanzialmente, quindi, $E' \cong E$. E , è l'angolo, ottenuto come differenza della coordinata l dei due QSO , nel sistema di riferimento apicale non aberrato.

Siccome si possono misurare solo archi, la precisione è condizionata dalla differenza Δ , fra arco non aberrato BF e arco aberrato $B'F'$.

7. Strategie per la scelta dei quasars di rotta.

La Figura 6, mostra una delle strategie possibili, cioè, vanno confrontati archi BC non aberrati, dell'equatore relativistico, con i rispettivi archi aberrati $B'C'$, e, analogamente, AD del parallelo antiapicale con $A'D'$ sull'equatore relativistico. Gli angoli diedri individuati dagli archi BC e $B'C'$, indicati con E_{BC} , è bene siano prossimi tra loro, per i punti sull'equatore relativistico e uguali agli angoli diedri E_{AD} , sui punti del parallelo

antiapicale.

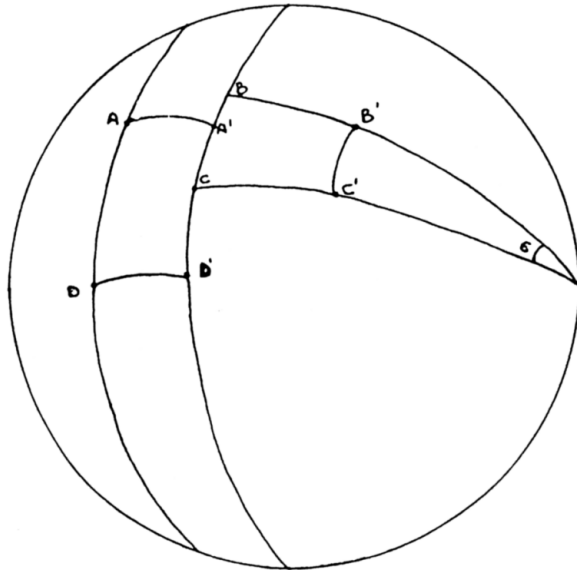


Figura 6

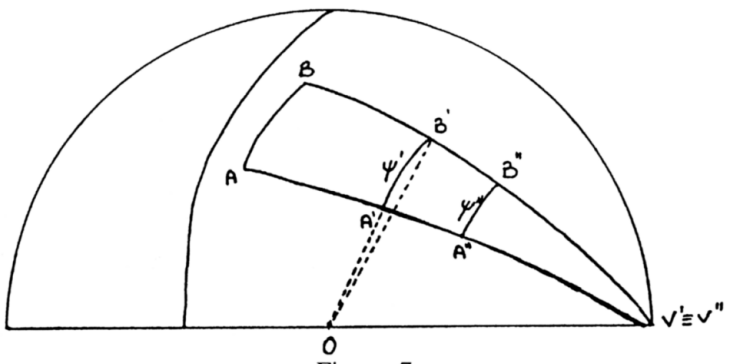


Figura 7

8. Metodo rigoroso.

Consideriamo la Figura 7. Siano β' e β'' due velocità nella stessa direzione. Siano θ'_A, θ'_B le posizioni aberrate per β' e θ''_A, θ''_B , quelle aberrate per β'' . L'arco fra punti aberrati $B'OA'$, sia ψ' . E analogamente sia ψ'' l'arco $B''OA''$ dove O è l'osservatore (astronave).

Siano $l'_A = l''_A = l_A$ e $l'_B = l''_B = l_B$, le longitudini di A e B . Si ha quindi:

$$\begin{aligned} \cos \psi' &= \cos \theta'_A \cos \theta'_B + \text{sen} \theta'_A \text{sen} \theta'_B \cos(l'_A - l'_B) = \\ &= \frac{(\cos \theta_A + \beta')}{1 + \beta' \cos \theta_A} \frac{(\cos \theta_B + \beta')}{1 + \beta' \cos \theta_B} + \\ &+ \frac{\text{sen} \theta_A \sqrt{1 - \beta'^2}}{1 + \beta' \cos \theta_A} \frac{\text{sen} \theta_B \sqrt{1 - \beta'^2}}{1 + \beta' \cos \theta_B} \cos(l'_A - l'_B) \end{aligned}$$

e analogamente per ψ'' .

Ponendo:

$$l''_A - l''_B = l'_A - l'_B$$

$$\begin{aligned} &\cos \psi'(1 + \beta' \cos \theta_A + \beta' \cos \theta_B + \beta'^2 \cos \theta_A \cos \theta_B) \\ &= \frac{\cos \psi'' + \beta''(\cos \theta_A + \cos \theta_B) \cos \psi'' + \beta''^2(\cos \theta_A \cos \theta_B \cos \psi'' - 1)}{\text{sen} \theta_A \text{sen} \theta_B (1 - \beta''^2)} \\ &+ \frac{\cos \theta_A \cos \theta_B - \beta''^2(\cos \theta_B \cos \theta_A)}{\text{sen} \theta_A \text{sen} \theta_B (1 - \beta''^2)} \end{aligned}$$

Segue:

$$\begin{aligned}
 (1 - \beta''^2)[\cos \psi' + \beta' \cos \psi' (\cos \theta_A + \cos \theta_B) - \beta' (\cos \theta_B + \cos \theta_A) \\
 + \beta'^2 (\cos \theta_A \cos \theta_B \cos \psi' - 1) - \cos \theta_A \cos \theta_B] \\
 = \cos \psi'' + \beta'' (\cos \psi'' - 1) (\cos \theta_A + \cos \theta_B) \\
 + \beta''^2 (\cos \theta_A \cos \theta_B \cos \psi'' - 1) - \cos \theta_A \cos \theta_B + \beta'^2 K
 \end{aligned}$$

Dove con K indichiamo la quantità:

$$\begin{aligned}
 \cos \psi'' + \beta'' (\cos \theta_A + \cos \theta_B) (\cos \psi'' - 1) + \\
 + \beta''^2 (\cos \theta_A \cos \theta_B \cos \psi'' - 1)
 \end{aligned}$$

Raccogliendo β' e β'^2 :

$$\begin{aligned}
 \cos \psi' (1 - \beta''^2) + \beta' \{ (\cos \theta_A + \cos \theta_B) (\cos \psi' - 1) \\
 - \beta''^2 (\cos \theta_A + \cos \theta_B) (\cos \psi' - 1) \} \\
 + \beta'^2 [(\cos \theta_A \cos \theta_B \cos \psi' - 1) - \beta''^2 (\cos \theta_A \cos \theta_B \cos \psi' - 1)] \\
 - \beta''^2 \cos \theta_A \cos \theta_B = K - K \beta'^2 \\
 \cos \psi' - \beta''^2 \cos \psi' - \beta''^2 \cos \theta_A \cos \theta_B - K + K \beta'^2 \\
 + \beta' \{ (\cos \theta_A + \cos \theta_B) (\cos \psi' - 1) - \beta''^2 (\cos \theta_A + \cos \theta_B) (\cos \psi' - 1) \} \\
 + r \beta'^2 = 0
 \end{aligned}$$

Avendo posto:

$$\begin{aligned}
 (\cos \theta_A \cos \theta_B \cos \psi' - 1) - \beta''^2 (\cos \theta_A \cos \theta_B \cos \psi' - 1) = \\
 = (\cos \theta_A \cos \theta_B \cos \psi' - 1) (1 - \beta''^2) = r
 \end{aligned}$$

Poniamo ancora:

$$\begin{aligned}
 c &= \cos \psi' - \beta''^2 [\cos \psi'^2 - \cos \theta_A \cos \theta_B] - K \\
 (8) \quad b &= (\cos \theta_A + \cos \theta_B)(\cos \psi' - 1)(1 - \beta''^2) \\
 a &= K + r
 \end{aligned}$$

Si ottiene l'equazione di 2° grado in β' :

$$a\beta'^2 + b\beta' + c = 0$$

che si risolve per ottenere β' in funzione di β'' , ψ' , ψ'' , θ_A , θ_B .

La simulazione si ottiene fissando preliminarmente la direzione $\alpha_Q = \alpha_V$ e $\delta_Q = \delta_V$, cioè facendo coincidere perturbato e direzione originaria della velocità V . Si calcolano con β' gli archi θ'_A , θ'_B e l'angolo $\psi' = B'OA'$, per la coppia (B, A) con polo (α_V, δ_V) . Poi si calcolano gli archi θ''_A, θ''_B con β'' , e si ricava l'angolo $\psi'' = B''OA''$, sempre per la coppia a riposo (B, A) . Si scrive la (8) e la si risolve, ottenendo un valore β'_{BA} .

Analogamente si fa per le altre coppie (C, D) , (E, F) , ... etc, ottenendo $\beta'_{CD}, \beta'_{EF}, \dots$ etc., e il loro valor medio.

9. Equazioni di condizione lineari sovrabbondanti.

Partiamo dai 10 *QSO* scelti dal catalogo con direzione e modulo di velocità non perturbati, scelti sull'equatore.

Calcoliamo, analogamente alla Figura 8, tramite la prima formula di Gauss l'arco ψ e ψ' :

$$\begin{aligned}
 \cos \psi'_1 &= \frac{\cos \theta_{A_1} + \frac{v_1}{c}}{1 + \frac{v_1}{c} \cos \theta_{A_1}} \cdot \frac{\cos \theta_{B_1} + \frac{v_1}{c}}{1 + \frac{v_1}{c} \cos \theta_{B_1}} \\
 \cos E'_1 &= \frac{\frac{\cos \theta_{A_1} + \frac{v_1}{c}}{1 + \frac{v_1}{c} \cos \theta_{A_1}}}{\frac{\text{sen} \theta_{A_1}}{\gamma_1 \left(1 + \frac{v_1}{c} \cos \theta_{A_1}\right)}} \cdot \frac{\frac{\cos \theta_{B_1} + \frac{v_1}{c}}{1 + \frac{v_1}{c} \cos \theta_{B_1}}}{\frac{\text{sen} \theta_{B_1}}{\gamma_1 \left(1 + \frac{v_1}{c} \cos \theta_{B_1}\right)}} \\
 &= \cos E_1 = \cos(l_{B_1} - l_{A_1})
 \end{aligned}$$

Consideriamo ora gli stessi 10 *QSO* scelti però dal catalogo con direzione e modulo di velocità perturbati, nelle stesse condizioni precedenti ricaviamo:

$$\begin{aligned} \cos E'_2 &= \frac{\cos \psi'_2 - \frac{\cos \theta_{A_2} + \frac{v_2}{c}}{1 + \frac{v_2}{c} \cos \theta_{A_2}} \cdot \frac{\cos \theta_{B_2} + \frac{v_2}{c}}{1 + \frac{v_2}{c} \cos \theta_{B_2}}}{\frac{\text{sen} \theta_{A_2}}{\gamma_2 \left(1 + \frac{v_2}{c} \cos \theta_{A_2}\right)} \cdot \frac{\text{sen} \theta_{B_2}}{\gamma_2 \left(1 + \frac{v_2}{c} \cos \theta_{B_2}\right)}} \\ &= \cos E_2 = \cos(l_{B_2} - l_{A_2}) \end{aligned}$$

Applicando le formule dell'aberrazione relativistica seguenti otteniamo:

$$\begin{aligned} \cos E'_{per} &= \frac{\cos \psi'_2 - \frac{\cos \theta_{A_{per}} + \frac{v_{per}}{c}}{1 + \frac{v_{per}}{c} \cos \theta_{A_{per}}} \cdot \frac{\cos \theta_{B_{per}} + \frac{v_{per}}{c}}{1 + \frac{v_{per}}{c} \cos \theta_{B_{per}}}}{\frac{\text{sen} \theta_{A_{per}}}{\gamma_{per} \left(1 + \frac{v_{per}}{c} \cos \theta_{A_{per}}\right)} \cdot \frac{\text{sen} \theta_{B_{per}}}{\gamma_{per} \left(1 + \frac{v_{per}}{c} \cos \theta_{B_{per}}\right)}} \\ &= \frac{\cos \psi'_2 - \frac{\cos \theta_{A_{per}} + \beta_{per}}{1 + \beta_{per} \cos \theta_{A_{per}}} \cdot \frac{\cos \theta_{B_{per}} + \beta_{per}}{1 + \beta_{per} \cos \theta_{B_{per}}}}{\frac{\text{sen} \theta_{A_{per}}}{\gamma_{per} \left(1 + \beta_{per} \cos \theta_{A_{per}}\right)} \cdot \frac{\text{sen} \theta_{B_{per}}}{\gamma_{per} \left(1 + \beta_{per} \cos \theta_{B_{per}}\right)}} \\ &= f(\psi', \theta_A, \theta_B, \beta) \end{aligned}$$

Inoltre, dalla formula dei seni di Gauss, otteniamo:

$$\frac{\text{sen} E_{per}}{\text{sen} \psi_{per}} = \frac{\text{sen} \lambda_{per}}{\text{sen} \theta_{B_{per}}}$$

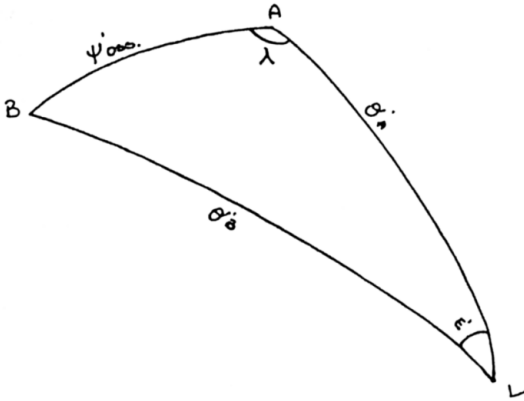


Figura 8

da cui:

$$\operatorname{sen} E_{per} = \frac{\operatorname{sen} \lambda_{per}}{\operatorname{sen} \theta_{B_{per}}} \operatorname{sen} \psi_{per} = g(\lambda, \theta_B, \psi)$$

Svolgiamo questi calcoli per tutti i QSO scelti sull'equatore e per tutti quelli scelti sul parallelo antiapicale.

Per costruire il sistema per i minimi quadrati ricaviamo $\cos E_{per}$, $\sin E_{per}$ e sviluppiamo in serie arrestandoci al 1° ordine:

$$\cos E_{per} = \cos E'_{per} = f(\beta, \theta_A, \theta_B, \psi') = \cos(l_{B_{per}} - l_{A_{per}})$$

$$\begin{aligned} &\cong f(\beta_{per}, \theta_{A_{per}}, \theta_{B_{per}}, \psi'_{per}) + \left(\frac{\partial f}{\partial \beta} \right)_{per} \Delta \beta \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial \theta_A} \right)_{per} \Delta \theta_A + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta_B} \right)_{per} \Delta \theta_B + \left(\frac{\partial f}{\partial \psi'} \right)_{per} \Delta \psi' \end{aligned}$$

$$\cos E_{per} = \varphi(\theta_A, \theta_B, \lambda, \psi) = \cos(l_{B_{per}} - l_{A_{per}})$$

$$\cong \varphi(\theta_{A_{per}}, \theta_{B_{per}}, \lambda_{per}, \psi_{per}) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_A} \right)_{per} \Delta \theta_A$$

$$+ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_B} \right)_{per} \Delta \theta_B + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right)_{per} \Delta \lambda_{per} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right)_{per} \Delta \psi, \text{ dove } \Delta \psi = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{sen} E_{per} &= \cos(l_{B_{per}} - l_{A_{per}}) \cong g(\lambda_{per}, \psi_{per}, \theta_{B_{per}}) + \\ &+ \left(\frac{\partial g}{\partial \theta_B} \right)_{per} \Delta \theta_B + \left(\frac{\partial g}{\partial \lambda} \right)_{per} \Delta \lambda + \left(\frac{\partial g}{\partial \psi} \right)_{per} \Delta \psi, \text{ dove } \Delta \psi = 0. \end{aligned}$$

Sommando queste tre equazioni m. a. m., otteniamo:

$$\begin{aligned} 2 \cos(l_{B_{per}} - l_{A_{per}}) + \text{sen} E_{per} &\cong (f_0 + \varphi_0 + g_0) + \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial \beta} \right)_{per} \Delta \beta + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta_A} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_B} \right)_{per} \Delta \theta_A + \left(\frac{\partial f}{\partial \psi'} \right)_{per} \Delta \psi' + \\ &\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta_B} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_A} \right)_{per} \Delta \theta_B + \\ &+ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \frac{\partial g}{\partial \lambda} \right)_{per} \Delta \lambda + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \psi} + \frac{\partial g}{\partial \psi} \right)_{per} \Delta \psi, \text{ dove } \Delta \psi \cong 0. \end{aligned}$$

Per formulare il sistema dei minimi quadrati, poniamo:

$$a = \frac{\partial f}{\partial \beta}$$

$$b = \frac{\partial f}{\partial \theta_A} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_A}$$

$$c = \frac{\partial f}{\partial \theta_B} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_B} + \frac{\partial g}{\partial \theta_B}$$

$$d = \frac{\partial g}{\partial \lambda} + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}$$

$$e = \frac{\partial f}{\partial \psi'_1}$$

$$\begin{aligned}
 x &= \Delta\beta \\
 y &= \Delta\theta_A \\
 z &= \Delta\theta_B \\
 w &= \Delta\lambda_A \\
 t &= \Delta\psi'.
 \end{aligned}$$

Lo svolgimento delle derivate parziali è stato effettuato col programma Mathematica 2.0 per Windows.

Costruiamo quindi una generica equazione del tipo:

$$\begin{aligned}
 a\Delta\beta + b\Delta\theta_A + c\Delta\theta_B + d\Delta\lambda_A + e\Delta\psi' = r = 2 \cos(l_{B_{per}} - l_{A_{per}}) + \\
 + \text{sen}(l_{B_{per}} - l_{A_{per}}) - f_0 - \varphi_0 - g_0.
 \end{aligned}$$

É chiaro che ci vogliono almeno cinque coppie di *QSO* per ottenere una soluzione del sistema di equazioni nelle cinque incognite $\Delta\beta, \Delta\theta_A, \Delta\theta_B, \Delta\lambda_A, \Delta\psi'$. Volendo usare più di cinque coppie di *QSO*, si ottiene un sistema sovrabbondante che si può risolvere con i minimi quadrati.

Il sistema di *n* equazioni, corrispondenti agli *n* *QSO* sull'equatore relativistico è il seguente:

$$a_{1-2}x + b_{1-2}y + c_{1-2}z + d_{1-2}w + e_{1-2}t = r_{1-2}$$

$$a_{3-4}x + b_{3-4}y + c_{3-4}z + d_{3-4}z + d_{3-4}w + e_{3-4}t = r_{3-4}$$

$$a_{7-8}x + b_{7-8}y + c_{7-8}z + d_{7-8}w + e_{7-8}t = r_{7-8}$$

$$a_{9-10}x + b_{9-10}y + c_{9-10}z + d_{9-10}w + e_{9-10}t = r_{9-10}$$

$$a_{11-12}x + b_{11-12}y + c_{11-12}z + d_{11-12}w + e_{11-12}t = r_{11-12}$$

.....

.....

dove con i numeri 1-2, 3-4, 5-6,... indichiamo il primo e il secondo *QSO* dell'equatore relativistico, il terzo e il quarto, il quinto e il sesto e così via. Passando il termine e dalla parte di *r* si ottiene:

$$\begin{aligned}
 a_{1-2}x + b_{1-2}y + c_{1-2}z + d_{1-2}w &= r_{1-2} - e_{1-2}t \\
 \dots\dots\dots & \\
 \dots\dots\dots &
 \end{aligned}$$

10. Risoluzione del sistema di equazioni lineari sovrabbondanti e calcolo della nuova direzione di velocità.

Applichiamo i minimi quadrati al sistema precedente e otteniamo le quantità:

$$\Delta\beta, \Delta\theta_A, \Delta\theta_B, \Delta\lambda, \Delta\psi'.$$

Conosciuti questi termini, che corrispondono alle soluzioni (x_0, y_0, z_0, x_0) del sistema, riconsideriamo le *n* equazioni e calcoliamo gli *n* valori (*v*₁, *v*₂, *v*₃, *v*₄, *v*₅, etc.) delle differenze tra polinomio e termine noto:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= a_{1-2}x + b_{1-2}y + c_{1-2}z + d_{1-2}w + e_{1-2}t - r_{1-2} \\
 v_2 &= a_{3-4}x + b_{3-4}y + c_{3-4}z + d_{3-4}w + e_{3-4}t - r_{3-4} \\
 v_3 &= a_{5-6}x + b_{5-6}y + c_{5-6}z + d_{5-6}w + e_{5-6}t - r_{5-6} \\
 v_4 &= a_{7-8}x + b_{7-8}y + c_{7-8}z + d_{7-8}w + e_{7-8}t - r_{7-8} \\
 v_5 &= a_{9-10}x + b_{9-10}y + c_{9-10}z + d_{9-10}w + e_{9-10}t - r_{9-10} \\
 v_6 &= a_{11-12}x + b_{11-12}y + c_{11-12}z + d_{11-12}w + e_{11-12}t - r_{11-12} \\
 v_7 &= \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Calcoliamo l'errore sull'unità di peso:

$$\mu_{V_{per}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 v_i^2}{n-1}}$$

Questo ci servirà da confronto per stabilire quando arrestare il procedimento iterativo; precisamente quando l'errore sull'errore: $\mu_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\mu}{\sqrt{n}}$, risulta superiore alla differenza fra μ dell'iterazione attuale e μ dell'iterazione precedente.

Ricaviamo le seguenti quantità:

$$\lambda_V = \lambda_{AB} + \Delta\lambda_V$$

$$\theta_{V_{per}A_{per}} = \theta_{AV} + \Delta\theta_V$$

$$\frac{\text{sen}K}{\text{sen}\theta_{V_{per}B_{per}}} = \frac{\text{sen}\Delta\lambda_V}{\text{sen}\theta_V}$$

Il valore θ sarà quello di θ_V , il valore 1, sarà invece:

$$l_V = l_A - K$$

Svolgiamo questi passaggi per tutte le coppie ed otteniamo 5 serie di coordinate (l, θ) .

11. Ricerca della direzione ottimale col metodo di Legendre.

Bisogna ricavare la direzione ottimale che emerge dalle cinque coordinate ricavate alla fine del capitolo precedente. Non è il caso di fare una media aritmetica. Queste posizioni, vanno associate a tre a tre, perchè l'algoritmo di Legendre da noi applicato (vedi Mammano, 1978), utilizza tre posizioni sferiche, le trasforma in posizioni nel piano tangente, per ricavarne una ottimale

nel triangolo piano corrispondente. Il criterio di scelta è il seguente: il primo, secondo e terzo QSO , il secondo, il terzo e il quarto QSO , il terzo, il quarto e il quinto QSO e infine il quarto, il quinto e il primo QSO .

Ognuna di queste quattro terne, ci fornirà una posizione ottimale. Sviluppiamo quindi altre tre terne con i risultati ottenuti: la prima posizione con la seconda e la terza, la seconda con la terza e la quarta, la terza con la quarta e la prima. In questo passaggio riduciamo le posizioni ottimali a tre. Sviluppiamo un ulteriore passaggio, associando cioè tra loro una sola volta i risultati precedenti, ed otteniamo il valore ottimale finale.

Lo sviluppo matematico è il seguente. Consideriamo la Figura 9. Q sia il punto ottimale e α' è l'angolo piano $V_3V_1Q_1$.

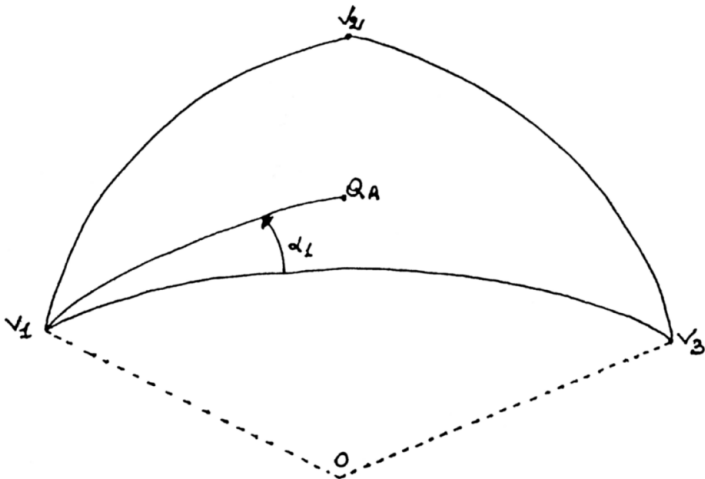


Figura 9

L'eccesso sferico, ε è circa uguale all'area triangolare tratteggiata diviso il quadrato del raggio sferico (che è uno) (Figura 10).

α è l'angolo diedro fra il piano V_1OV_3 , e il piano V_1OQ_1 .

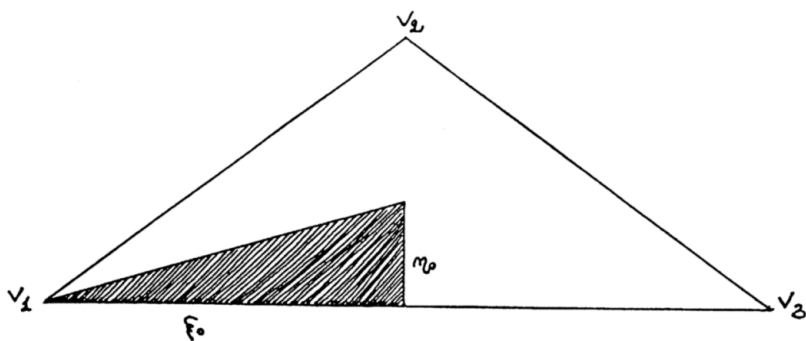


Figura 10

Le coordinate sferiche di Q_1 , rispetto al piano che passa per V_1 e V_3 (e per O), sono dunque:

$$\alpha = \alpha' + \frac{1}{3}\varepsilon$$

$$v_1 = V_1 \hat{O} Q_1$$

Siano ora note le coordinate di V_1, V_2, V_3 , rispetto al QSO perturbato V . Vogliamo calcolare le coordinate sferiche di Q_1 con origine V e piano delle longitudini l , contate dal piano dal quale si contano le altre longitudini dei QSO .

Bisogna passare dalle coordinate di Q_1 , nel sistema V_1V_3 , in quelle di origine V (Figura 11).

Calcoliamo le quantità :

$$\cos V_1V_2 = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_2 \cos(l_2 - l_1)$$

$$\cos V_2V_3 = \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \text{sen} \theta_2 \text{sen} \theta_3 \cos(l_3 - l_2)$$

$$\cos V_1V_3 = \cos \theta_1 \cos \theta_3 + \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_3 \cos(l_3 - l_1)$$

Una volta calcolati gli archi V_1V_2, V_2V_3, V_1V_3 , ricaviamo

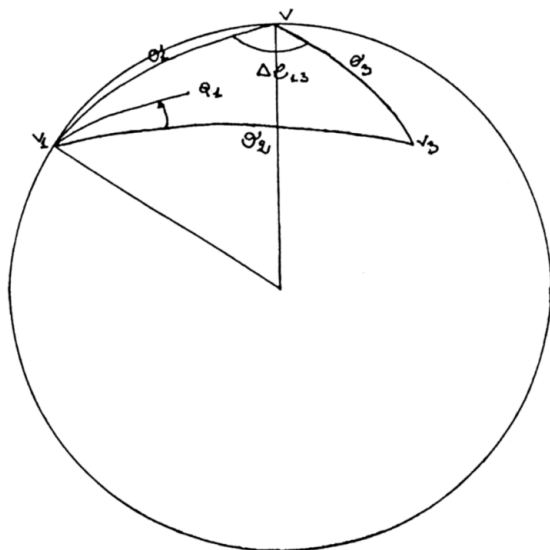


Figura 11

gli angoli diedri A, B, C dalle formule seguenti:

$$\cos V_2 V_3 = \cos V_1 V_2 \cos V_1 V_3 + \operatorname{sen} V_1 V_2 \operatorname{sen} V_1 V_3 \cos A$$

$$\cos V_1 V_2 = \cos V_2 V_3 \cos V_1 V_3 + \operatorname{sen} V_2 V_3 \operatorname{sen} V_1 V_3 \cos B$$

$$\cos V_1 V_3 = \cos V_1 V_2 \cos V_2 V_3 + \operatorname{sen} V_1 V_2 \operatorname{sen} V_2 V_3 \cos C$$

e, infatti:

$$\cos A = \frac{\cos V_2 V_3 - \cos V_1 V_2 \cos V_1 V_3}{\operatorname{sen} V_1 V_2 \operatorname{sen} V_1 V_3}$$

$$\cos B = \frac{\cos V_1 V_2 - \cos V_2 V_3 \cos V_1 V_3}{\operatorname{sen} V_2 V_3 \operatorname{sen} V_1 V_3}$$

$$\cos C = \frac{\cos V_1 V_3 - \cos V_1 V_2 \cos V_2 V_3}{\operatorname{sen} V_1 V_2 \operatorname{sen} V_2 V_3}$$

Conosciamo ora A, B, C . Indichiamo per comodità, gli archi del triangolo sferico con le lettere a, b, c , in corrispondenza agli

angoli diedri omonimi e i lati del triangolo piano con a', b', c' , corrispondenti ai precedenti. Nel triangolo piano corrispondente a quello sferico, gli archi corrisponderanno ai lati:

$$a' = a, b' = b, c' = c$$

$$\varepsilon = (A + B + C - 180^\circ)$$

mentre gli angoli diedri, nel triangolo piano assumeranno il valore:

$$A' = A - \frac{\varepsilon}{3}$$

$$B' = B - \frac{\varepsilon}{3}$$

$$C' = C - \frac{\varepsilon}{3}$$

Gli elementi del triangolo piano sono rappresentati nella Figura 12.

$$V_1 = (0, 0)$$

$$V_2 = (b' \cos A', b' \sin A')$$

$$V_3 = (c', 0)$$

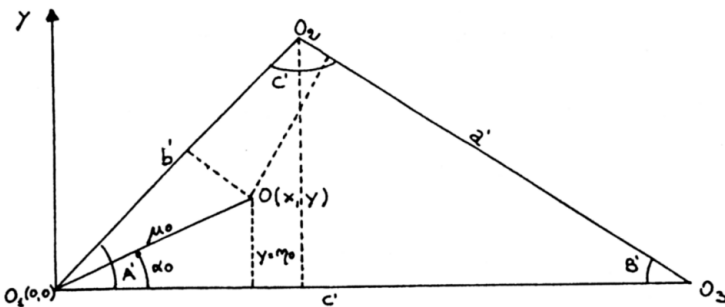


Figura 12

Poniamo (ξ, η) , il punto che soddisfa l'ultima condizione di quadratura. Le equazioni dei lati b' , a' , c' , sono (Mammano, 1978):

$$(9) \quad \begin{cases} x \operatorname{sen} A' - y \cos A' = 0 \\ x b' \operatorname{sen} A' - y (b' \cos A' - c') - c' b' \operatorname{sen} A' = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Le distanze dal punto O sono:

$$d_a = \frac{\xi \operatorname{sen} A' - \eta \cos A'}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 A' + \cos^2 A'}}$$

$$d_b = \frac{\xi b' \operatorname{sen} A' - \eta (b' \cos A' - c') - \operatorname{sen} A' (c' b')}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 A' b'^2 + (b' \cos A' - c')^2}}$$

Poniamo:

$$e = \frac{\operatorname{sen} A'}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 A' + \cos^2 A'}}$$

$$f = \frac{-\cos A'}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 A' + \cos^2 A'}}$$

$$g = \frac{b' \operatorname{sen} A'}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 A' b'^2 + (b' \cos A' - c')^2}}$$

$$h = \frac{-(b' \cos A' - c')}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 A' b'^2 + (b' \cos A' - c')^2}}$$

$$i = \frac{-\operatorname{sen} A' (c' b')}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 A' b'^2 + (b' \cos A' - c')^2}}$$

Le equazioni 9, sono riscritte, per convenienza, nella forma:

$$(d_a)^2 = (e\xi + f\eta)^2$$

$$(d_b)^2 = (g\xi + h\eta + l)^2$$

$$(d_c)^2 = (\eta)^2$$

Poniamo:

$$s = s(\xi, \eta) = d_a^2 + d_b^2 + d_c^2$$

Quindi per ricavare (ξ, η) si deve risolvere il seguente sistema di 2 equazioni in 2 incognite:

$$\frac{\partial s}{\partial \xi} = 2((e\xi + f\eta)e + (g\xi + h\eta + l)g) = 0$$

$$\frac{\partial s}{\partial \eta} = 2((e\xi + f\eta)f + (g\xi + h\eta + l)h + \eta) = 0$$

L'eccesso sferico è:

$$\varepsilon' = \frac{\text{area_triangolo}}{(\text{raggio_sfera})^2} \cong \frac{x_0 y_0}{2}.$$

La lunghezza sferica e l'angolo di posizione di O rispetto V_1 , sono allora:

$$\mu_0 = \sqrt{(x_0^2 + y_0^2)}$$

$$\alpha_0 = \alpha' + \frac{\varepsilon'}{3} = \arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right) + \frac{x_0 y_0}{6}.$$

Le coordinate (λ_0, β_0) , sono dedotte come segue (Figura 13):

$$\text{sen}\beta_0 = \text{sen}\beta_1 \cos \mu_0 + \cos \beta_1 \text{sen}\mu_0 \cos(QV_1 V_3 + \alpha_0)$$

$$\text{sen}\Delta\lambda_0 = \frac{\text{sen}(QV_1 V_3 + \alpha_0)}{\cos \beta_0} \text{sen}\mu_0$$

$\lambda_0 = \lambda_1 \pm \Delta\lambda_0$ (+ : se $(\lambda_2 - \lambda_1) > 0$; - : nel caso contrario).

Consideriamo la Figura 14, calcoliamo quindi prima l'angolo diedro VV_1Q_1 :

$$V\hat{V}_1Q_1 = V\hat{V}_1V_3 - \alpha$$

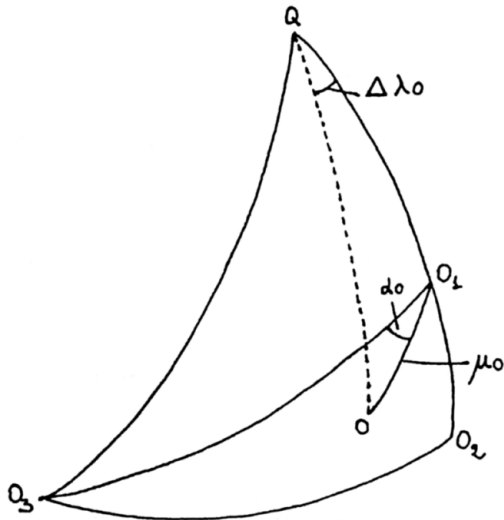


Figura 13

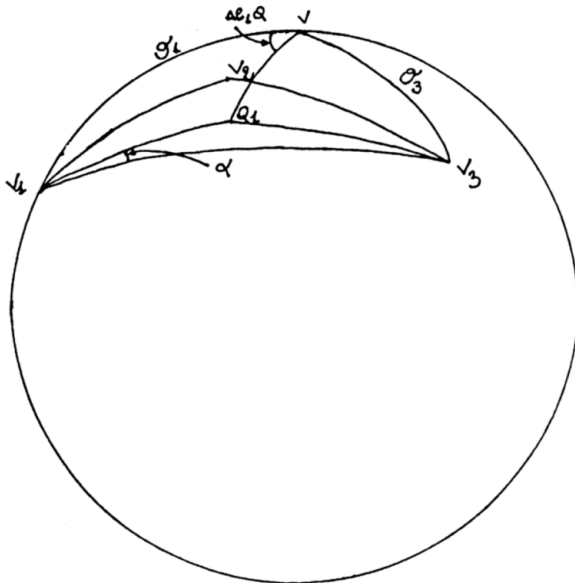


Figura 14

Allora, nel triangolo VV_1Q_1 , conosciamo tre elementi, e precisamente \hat{V}_1 , v_1 , θ_3 . Segue (Figura 13):

$$\cos \theta_{Q_1} = \cos \theta_3 \cos v_1 + \text{sen} \theta_3 \text{sen} v_1 \cos \hat{V}_1$$

$$\frac{\text{sen} \Delta l_{1Q}}{\text{sen} v_1} = \frac{\text{sen} \hat{V}_1}{\text{sen} \theta_{Q_1}}$$

$$\text{sen} v_1 \cos \hat{V}_1 = \cos \theta_{Q_1} \text{sen} \theta_3 - \text{sen} \theta_{Q_1} \cos \theta_3 \cos \Delta l_{1Q}$$

Ottenuta la differenza di longitudine:

$$\Delta l_{1Q} = l_{Q_1} - l_{V_1}$$

si ricava facilmente la longitudine di Q_1 , con:

$$l_{Q_1} = L_{V_1} + \Delta l_{1Q}.$$

La coordinata polare, di polo V di Q , è ovviamente θ_{Q_1} .

Analogamente, per ogni altra combinazione di triangoli piani, per esempio, V_3 , V_4 , V_5 , si ottengono le coordinate di Q_2 , rispetto a V_3 , V_5 , e per le trasformazioni viste, si ricavano le coordinate θ_{Q_2} e l_{Q_2} di origine V . Analogamente, per un altro triangolo, si ottengono le coordinate di Q_3 , nel riferimento V e si procede allora con lo stesso schema per ottenere il punto ottimale. Otterremo quindi un punto finale, chiamato (θ_{eq}, l_{eq}) . Rie-seguendo tutti i calcoli per i 10 QSO sul parallelo antiapicale, otteniamo, dopo i minimi quadrati e Legendre, un altro punto ottimale, chiamato (θ_{par}, l_{par}) . Avendo i due punti ottimali si prende provvisoriamente la loro media e si ottiene la direzione presumibilmente seguita dall'astronave:

$$\theta_{finale} = \frac{\theta_{eq} + \theta_{par}}{2}$$

$$l_{finale} = \frac{l_{eq} + l_{par}}{2}.$$

Si può anche iterare separatamente le soluzioni per i quasar equatoriali e, sempre separatamente, quelle per i quasar del parallelo antiapicale e confrontare le due soluzioni; l'eventuale assunzione dei valori medi finali delle due iterazioni distinte è soggetta a giudizio critico. Risulta che le coppie sull'antiapicale danno risultati più vicini alle condizioni iniziali di direzione e modulo della velocità.

12. Risultati di simulazione di sonde interstellari relativistiche.

I risultati delle simulazioni sono stati ottenuti con una serie di programmi scritti in Turbo C++ (M. Scibilia, 1993-1994).

- È stato scelto un quasar V con $\alpha_V \cong 185^\circ$ ($184^\circ.71572$) e $\delta_V \cong 30^\circ$ ($30^\circ.453889$), numero catalogo 848, sono state calcolate le coordinate apicali non aberrate e aberrate per $\beta = 0.100$. Si è proceduto alla convergenza scegliendo un quasar perturbato Q coincidente col quasar vero V e usando $\beta = 0.100$. Sono stati utilizzati quasar del parallelo antiapicale e separatamente per l'equatore relativistico. Si ottengono le coordinate α_0, δ_0 e la velocità perturbata β_0 del punto ottimizzato (o), $\alpha_0 = 184^\circ.715608 \pm 0^\circ.000026$, $\delta_0 = 30^\circ.453830 \pm 0^\circ.000023$ e $\beta_0 = 0.099999 \pm 0.000001$ (M. Scibilia, Navigazione Aberrazionale Relativistica, Vol. II, pag. Simulazione I - 49 e pag. Simulazione I - 52, 1994).
- È stato scelto V coincidente col precedente e un altro quasar Q_1 , a circa 2° ($\alpha_Q \cong 186^\circ.48408$ e $\delta_Q \cong 31^\circ.753661$, numero catalogo 864) da V , con $\beta_{per} = 0.102$, utilizzando solo i QSO dell'equatore relativistico. È stata applicata la convergenza e si è trovato l'ottimizzato seguente: $\alpha_0 = 184^\circ.70 \pm 0^\circ.80$, $\delta_0 = 32^\circ.58 \pm 0.36$ e $\beta_0 = 0.138 \pm 0.038$ (M. Scibilia, Navigazione Aberrazionale Relativistica, Vol.

II, pag. Simulazione II - 26 e pag. Simulazione II - 30, 1994).

Poichè gli errori della 2^a simulazione sono piuttosto elevati, è giocoforza ricorrere a una migliore distribuzione delle longitudini dei quasars, per esempio a coppie di quasars a distanza di 90° fra loro.

REFERENCES

- Barbieri et al., *National meeting on bioastronomy* Rome 1993.
- Borland *Turbo C++ 3.0* Guida all'uso, 1992.
- Chicarro A., Scoon G., Coradini M., *Marsnet - A Network of Station on the Surface of Mars* (ESA Journal 1993, Vol. 17).
- Crawford I. A., *Interstellar travel: a review for astronomers* Q. Jl. R. Astr. S., **31**, (1990) 377.
- Ferrari A., *Giornale di Astronomia*, 1994.
- Gaeta F. S., *Il problema della vita e le nuove cosmologie* (Le scienze umane nella cultura e nella società odierne - Edizioni Studium Roma - 1993).
- Hack M., *Alla ricerca della morale per una nuova biologia* - Corriere della Sera pg. 30, 20 Novembre 1994.
- Lang K. R., *Astrophysical Formulae* (ed. Springer, Berlino, 1980).
- Macchetto D., *I misteri del nuovo mondo* La Repubblica, 08.10.1995, pg-23.
- Mammano A., *Celestial Space Navigation with Cosextant* (Istituto Universitario Navale di Napoli, 1978). Atti del convegno in onore di G. Simeon.
- Mammano A., Scibilia M., *Appunti del corso di Astronomia*, Università di Messina.
- Mammano A., *Bistereographic projection for relativistic navigation* (Unpublished manuscript - 1980).
- Mammano A., *Storia e analisi della navigazione astronomica e spaziale* (ed. Acc. Peloritana dei Pericolanti, 1992).
- Murdoch J., Kaylene A., Hearnshaw J. B., Clark M., *A search for substellar companions to southern solar-type stars* (The Astrophysical Journal, 413: 349-363, 1993 August 10).

- NASA *A Report by the Solar System Exploration Division* Tops: Toward Other Planetary Systems (1993).
- Schklowskii J., *L'Astronomia*, 1980.
- Scibilia M., *Navigazione aberrazionale relativistica*, Dipartimento di Matematica, Università di Messina, 1994.
- Sheffer L. K., *Machine Intelligence, the cost of interstellar travels and the Fermi paradox* Q. Jl. R. Astr. S., **35**, 1994 157.
- Tipler F. J., *Extraterrestrial intelligent beings do not exist* (Dept. of Mathematics, University of Berkely, USA) - Q. Jl. R. Astr. S., **24**, 1980 267; *Physics today* (1980).
- Vulpetti G., *Voli interstellari* (l'Astronomia n. 47, settembre 1985).
- Wesson P., *Cosmology, Extraterrestrial intelligence and a resolution for the Fermi-Hart paradox* Q. Jl. R. Astr. Soc., **31**, 1990 161.

*Dipartimento di Matematica
Università di Messina - 98100 Messina*

**APPROSSIMAZIONE GALILEIANA DELLE EQUAZIONI
DI MINKOWSKI E DELLE LEGGI
DI TRASFORMAZIONE DELLE GRANDEZZE**

CRUPI VINCENZO

(pres. dal socio ordinario S. Giambò)

Riassunto

In questo lavoro si costruisce un'approssimazione galileiana delle equazioni di Minkowski che governano i processi elettromagnetici nei corpi conduttori in moto. Si stabilisce anche l'opportuna approssimazione delle leggi di trasformazione delle grandezze.

Abstract

In this paper it is pointed out which approximation of the Minkowski's equations of electrodynamics of moving conductors is left unchanged by Galileo's transformations. Moreover, the particular approximation of the transformation laws for the field variables is established.

Consideriamo un corpo conduttore animato da moto traslatori rettilineo uniforme con velocità v rispetto ad un riferimento inerziale Σ, t .

Nel riferimento inerziale Σ, t le equazioni di Minkowski

sono:

$$(I) \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{B}} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E} \\ \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{J} = c \operatorname{rot} H \end{cases}$$

$$(II) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \end{cases}$$

$$(III) \quad \begin{cases} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{E} = \mu \left(\mathbf{H} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{D} \right) \\ \mathbf{D} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{H} = \varepsilon \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \right) \end{cases}$$

$$(IV) \quad \begin{cases} \mathbf{J} = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \right) \\ \rho = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \mathbf{E} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c}, \end{cases}$$

dove \mathbf{E} indica l'intensità del campo elettrico, \mathbf{B} l'induzione magnetica, \mathbf{H} l'intensità del campo magnetico, \mathbf{D} l'eccitazione elettrica, \mathbf{J} la densità di corrente di conduzione, ρ la densità di carica spaziale, ε la costante dielettrica, μ la permeabilità magnetica, σ la conducibilità elettrica del conduttore, c la velocità invariante della luce nel vuoto, v il modulo di \mathbf{v} .

Risolvendo rispetto ad \mathbf{H} e \mathbf{D} , le equazioni materiali (III)

sono riconducibili alle

$$(V) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c^2\mu \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \{ \mathbf{v} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) + c\mathbf{v} \wedge \mathbf{E} \} \\ \mathbf{D} = \frac{\varepsilon\mu - \frac{v^2}{c^2}}{\mu \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \mathbf{E} - \frac{(\varepsilon\mu - 1)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})}{c^2\mu \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \mathbf{v} + \\ + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c\mu \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}. \end{array} \right.$$

È noto anche che le leggi di trasformazione - nel passaggio dal riferimento inerziale Σ', t' (in cui il conduttore è in quiete) al riferimento, pure inerziale, Σ, t rispetto a cui il conduttore è animato da moto traslatorio rettilineo uniforme - delle grandezze $\mathbf{B}, \mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{D}, \mathbf{J}$ e ρ sono:

$$(VI) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B}' = \gamma \left(\mathbf{B} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{E} \right) - \frac{\gamma - 1}{v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{v} \\ \mathbf{E}' = \gamma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \right) - \frac{\gamma - 1}{v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{v} \end{array} \right.$$

$$(VII) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H}' = \gamma \left(\mathbf{H} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{D} \right) - \frac{\gamma - 1}{v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}) \mathbf{v} \\ \mathbf{D}' = \gamma \left(\mathbf{D} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{H} \right) - \frac{\gamma - 1}{v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{D}) \mathbf{v} \end{array} \right.$$

$$(VIII) \quad \begin{cases} \mathbf{J}' = \mathbf{J} - \gamma \rho \mathbf{v} + (\gamma - 1) \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v} \\ \rho' = \gamma \left(\rho - \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right) \end{cases}$$

dove

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

e \mathbf{v} è la velocità di Σ' rispetto a Σ .

1. Nell'ipotesi che il modulo della velocità sia molto piccola rispetto a c (velocità della luce nel vuoto), cioè

$$(1) \quad \frac{v^2}{c^2} \ll 1$$

$$(2) \quad \gamma \cong 1.$$

Tenendo conto di (1) le equazioni materiali (V) si riducono alle

$$(3) \quad \begin{cases} \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c\mu} \mathbf{v} \wedge \mathbf{E} \\ \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c\mu} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}. \end{cases}$$

Per giustificare le (3), osserviamo che le (V), con riguardo alle sole dimensioni e tenendo conto che $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$, si possono riscrivere nelle

$$(4) \quad \begin{cases} |\mathbf{H}| = \frac{|\mathbf{B}|}{\mu} + \left(1 + \varepsilon\mu - 1\right) \frac{v^2}{c^2} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c\mu} v |\mathbf{E}| \\ |\mathbf{D}| = \varepsilon \left(1 + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c\mu} \frac{v^2}{c^2}\right) |\mathbf{E}| + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c\mu} v |\mathbf{B}|, \end{cases}$$

e queste, essendo trascurabili rispetto all'unità

$$(\varepsilon\mu - 1) \frac{v^2}{c^2}$$

$$\frac{\varepsilon\mu - 1}{\varepsilon\mu} \frac{v^2}{c^2},$$

si possono ricondurre alle

$$(5) \quad \begin{cases} |\mathbf{H}| = \frac{|\mathbf{B}|}{\mu} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c\mu} v|\mathbf{E}| \\ |\mathbf{D}| = \varepsilon|\mathbf{E}| + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c\mu} v|\mathbf{B}|. \end{cases}$$

Le (5) ci consentono di riguardare le formole (3) come l'aspetto che assumono le (V) con l'approssimazione $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$.

Ponendo per brevità

$$(6) \quad \lambda = \frac{\varepsilon\mu - 1}{\mu},$$

alle (3) si può dare la forma

$$(7) \quad \begin{cases} \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} + \frac{\lambda}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{E} \\ \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + \frac{\lambda}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}. \end{cases}$$

Nella medesima approssimazione $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$, le espressioni di \mathbf{J} e ρ , fornite dalle (IV), si particolarizzano nelle

$$(IV') \quad \begin{cases} \mathbf{J} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \right) \\ \rho = \sigma \mathbf{E} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c^2}. \end{cases}$$

Per ciò che riguarda le leggi di trasformazione delle grandezze nel passaggio dal riferimento Σ', t' a Σ, t , si trova che nell'approssimazione $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$, quindi $\gamma = 1$, esse si specializzano nelle

$$(8) \quad \begin{cases} \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{E} \\ \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \end{cases}$$

$$(9) \quad \begin{cases} \mathbf{H}' = \mathbf{H} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{D} \\ \mathbf{D}' = \mathbf{D} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{H} \end{cases}$$

$$(10) \quad \begin{cases} \mathbf{J}' = \mathbf{J} - \rho \mathbf{v} \\ \rho' = \rho - \mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{J}}{c^2}. \end{cases}$$

Infine, notiamo che nella stessa approssimazione, $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$, cioè $\gamma = 1$, la trasformazione generale di Lorentz

$$(11) \quad \begin{cases} \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \left[(\gamma - 1) \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{v^2} - \gamma t \right] \mathbf{v} \\ t' = \gamma \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right) \end{cases}$$

si particolarizza nella

$$(12) \quad \begin{cases} \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t \\ t' = t - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c^2}. \end{cases}$$

2. Ulteriori approssimazioni possono essere ottenute adottando come unità di misura delle durate temporali e delle lunghezze

una durata temporale T ed una lunghezza L tali che

$$(13) \quad LT^{-1} = v$$

essendo v il modulo della velocità del conduttore rispetto al riferimento osservazione Σ, t , cioè la velocità di traslazione di Σ' rispetto a Σ .

i_1) Tenendo presenti le due ipotesi

$$\frac{v^2}{c^2} \ll 1, \quad LT^{-1} = v,$$

mediante considerazioni dimensionali, si può dimostrare che

$$(14) \quad \frac{1}{2} |\mathbf{v} \wedge \mathbf{E}| \text{ è trascurabile rispetto a } |\mathbf{B}|.$$

Infatti

$$(15) \quad |\mathbf{B}| - \frac{1}{c} |\mathbf{v} \wedge \mathbf{E}| \cong |\mathbf{B}| - \frac{v}{c} |\mathbf{E}|.$$

Inoltre dalla (I)₁, cioè dalla

$$\dot{\mathbf{B}} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}$$

segue

$$|\mathbf{B}| T^{-1} = c |\mathbf{E}| L^{-1}$$

da cui, tenendo conto dell'ipotesi $LT^{-1} = v$, segue

$$(16) \quad |\mathbf{E}| = \frac{v}{c} |\mathbf{B}|.$$

Inserendo questa espressione di $|\mathbf{E}|$ nel secondo membro della (15) si ottiene

$$|\mathbf{B}| - \frac{1}{c} |\mathbf{v} \wedge \mathbf{E}| \cong |\mathbf{B}| \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

che, dopo l'ipotesi $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$, è riconducibile alla

$$(17) \quad |\mathbf{B}| - \frac{1}{c} |\mathbf{v} \wedge \mathbf{E}| \cong |\mathbf{B}|,$$

e questa appunto ci consente di affermare che il termine $\frac{1}{c} |\mathbf{v} \wedge \mathbf{E}|$ è trascurabile rispetto a \mathbf{B} .

$i_2)$ I termini $\frac{1}{c} |\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}|$ ed $|\mathbf{E}|$ sono dello stesso ordine.

Osserviamo che

$$(18) \quad \frac{1}{c} |\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}| \cong \frac{v}{c} |\mathbf{B}|,$$

oppure, dopo la (16)

$$(19) \quad \frac{1}{c} |\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}| \cong \frac{v}{c} |\mathbf{E}|.$$

E questa dimostra l'asserto.

$i_3)$ Il termine $\frac{1}{c} |\mathbf{v} \wedge \mathbf{D}|$ è trascurabile rispetto ad \mathbf{H} .

Premettiamo che, dopo la (17), la $(7)_1$ si riduce alla

$$(20) \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}.$$

Inoltre, dalla $(7)_2$ si ottiene

$$|\mathbf{D}| \cong \varepsilon |\mathbf{E}| + \frac{\varepsilon \mu - 1}{c \mu} v |\mathbf{B}|,$$

e questa, dopo la (16), è riconducibile alla

$$(21) \quad |\mathbf{D}| = \frac{v}{c} \frac{2\varepsilon \mu - 1}{\mu} |\mathbf{B}|.$$

Tenendo conto della (20) e della (21), si ottiene che

$$|\mathbf{H}| - \frac{1}{c} |\mathbf{v} \wedge \mathbf{D}| = \left[1 - (2\varepsilon \mu - 1) \frac{v^2}{c^2} \right] \frac{|\mathbf{B}|}{\mu}.$$

E da questa, trascurando il termine in v^2/c^2 rispetto all'unità, si deduce

$$(22) \quad |\mathbf{H}| - \frac{1}{c} |\mathbf{v} \wedge \mathbf{D}| \cong \frac{|\mathbf{B}|}{\mu},$$

oppure, dopo la (20)

$$(23) \quad |\mathbf{H}| - \frac{1}{2} |\mathbf{v} \wedge \mathbf{D}| \cong |\mathbf{H}|.$$

E questa dimostra l'asserto, cioè che $\frac{1}{c} |\mathbf{v} \wedge \mathbf{D}|$ è trascurabile rispetto ad \mathbf{H} .

i_4) La quantità $\frac{1}{c} |\mathbf{v} \wedge \mathbf{H}|$ e $|\mathbf{D}|$ sono dello stesso ordine.

Dopo la (20), la (21) è riconducibile alla

$$|\mathbf{D}| \cong (2\varepsilon\mu - 1) \frac{v}{c} |\mathbf{H}|$$

oppure

$$(24) \quad |\mathbf{D}| \cong (2\varepsilon\mu - 1) \frac{1}{c} |\mathbf{v} \wedge \mathbf{H}|,$$

e questa dimostra l'asserto.

i_5) La densità di corrente di convezione $|\eta\mathbf{v}|$ è trascurabile rispetto alla densità di corrente di conduzione $|\mathbf{J}|$.

Consideriamo le due equazioni (I)₂ e (II)₂

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{J} = c \operatorname{rot} \mathbf{H} \\ \operatorname{div} \mathbf{D} = \eta. \end{cases}$$

E queste, avendo riguardo alle dimensioni, conducono alle

$$(25) \quad \begin{cases} |D|T^{-1} + |J| = c|\mathbf{H}|L^{-1} \\ |D|L^{-1} = \eta, \end{cases}$$

da cui, eliminando $|\mathbf{D}|$, si ottiene

$$(26) \quad \eta v + |\mathbf{J}| = c|\mathbf{H}|L^{-1},$$

dove si è tenuto conto dell'assunzione $LT^{-1} = v$. Inoltre, invocando la (21) e la (20), la prima delle (25) può essere scritta nella forma

$$(2\varepsilon\mu - 1)\frac{v}{c}|\mathbf{H}|T^{-1} + |\mathbf{J}| = c|\mathbf{H}|L^{-1}$$

da cui

$$|\mathbf{J}| = c|\mathbf{H}|L^{-1} \left[1 - (2\varepsilon\mu - 1)\frac{v^2}{c^2} \right].$$

Da quest'ultima, trascurando il termine in v^2/c^2 rispetto all'unità, si ottiene

$$(27) \quad |\mathbf{J}| \cong c|\mathbf{H}|L^{-1}.$$

Dopo quest'ultima, la (26) si può ricondurre alla

$$(28) \quad |\eta\mathbf{v}| + |J| \cong |J|.$$

E questa appunto, dimostra che $|\eta\mathbf{v}|$ è trascurabile rispetto a $|J|$.

*i*₆) Le quantità $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{J}/c^2|$ ed η sono dello stesso ordine.

Infatti, dopo la (27)

$$(29) \quad |\mathbf{v} \cdot \mathbf{J}/c^2| = \frac{v}{c}|\mathbf{H}|L^{-1}$$

Dalla (25)₂, dopo la (24), si ottiene

$$(30) \quad \eta = (2\varepsilon\mu - 1)\frac{v}{c}|\mathbf{H}|L^{-1}.$$

Dal confronto di (29) e (30), resta dimostrato l'asserto.

i_7) La quantità $|\dot{\mathbf{D}}|$ è trascurabile rispetto a $|\mathbf{J}|$. Infatti dopo le (24) e (27), si ha

$$|\dot{\mathbf{D}}| + |\mathbf{J}| = (2\varepsilon\mu - 1)\frac{v}{c}|\mathbf{H}|T^{-1} + c|\mathbf{H}|L^{-1},$$

da cui

$$|\dot{\mathbf{D}}| + |\mathbf{J}| = c|\mathbf{H}|L^{-1} \left[1 + (2\varepsilon\mu - 1)\frac{v^2}{c^2} \right].$$

Da quest'ultima, trascurando il termine in v^2/c^2 rispetto all'unità e tenendo presente la (27), si ottiene

$$(31) \quad |\dot{\mathbf{D}}| + |\mathbf{J}| \cong |\mathbf{J}|,$$

e questa dimostra, appunto, che $|\dot{\mathbf{D}}|$ è trascurabile rispetto a $|\mathbf{J}|$.

i_8) Dimostreremo, infine, che la quantità $\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c^2}$, che figura nella (12)₂, è trascurabile rispetto a t . Infatti, badando alle dimensioni, si ha

$$|t| - |\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}/c^2| = T - \frac{vL}{c^2},$$

da cui

$$|t| - |\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}/c^2| = T(1 - v^2/c^2).$$

E questa, trascurando il termine in v^2/c^2 rispetto all'unità, conduce a

$$(32) \quad |t| - |\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}/c^2| \cong T,$$

e questa dimostra l'asserto.

3. Dopo i risultati ottenuti nel n. 2 tenendo conto delle due ipotesi $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$, $LT^{-1} = v$, il sistema di Minkowski assume la seguente forma approssimata:

$$(33) \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{B}} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E} \\ \mathbf{J} = c \operatorname{rot} \mathbf{H} \end{cases}$$

$$(34) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \end{cases}$$

$$(35) \quad \begin{cases} \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \frac{\lambda}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \end{cases}$$

$$(36) \quad \begin{cases} \mathbf{J} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \right) \\ \rho = \sigma \mathbf{E} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c^2} \end{cases}$$

dove

$$\lambda = \frac{\varepsilon \mu - 1}{\mu}.$$

Le leggi di trasformazione delle grandezze nel passaggio dal riferimento Σ', t' al riferimento Σ, t si specializzano nelle

$$(37) \quad \begin{cases} \mathbf{B} = \mathbf{B}' \\ \mathbf{E} = \mathbf{E}' - \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}' \end{cases}$$

$$(38) \quad \begin{cases} \mathbf{H} = \mathbf{H}' \\ \mathbf{D} = \mathbf{D}' - \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{H}' \end{cases}$$

$$(39) \quad \begin{cases} \mathbf{J} = \mathbf{J}' \\ \rho = \rho' + \mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{J}'}{c^2}; \end{cases}$$

e la trasformazione generale di Lorentz si particolarizza in quella di Galileo, cioè nella

$$(40) \quad \begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v}t' \\ t = t'. \end{cases}$$

Ebbene si dimostra che sia le equazioni differenziali (33) e (34) che le equazioni costitutive (35) e (36) sono invarianti per

trasformazioni di Galileo, subordinatamente alle leggi di trasformazioni per le grandezze date da (37) (38) e (39).

Le dimostrazioni analitiche saranno oggetto di un prossimo lavoro.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Fock V., *The theory of space time and gravitation*, Pergamon Press, London (1959).
- [2] Cattaneo C., *Introduzione alla teoria della gravitazione*, Eredi Virgilio Veschi, Roma (1960-61).
- [3] Carini G., *Lezioni di Istituzioni di Fisica Matematica*, Mediterranean Press, Commenda di Rende (1989).
- [4] Ferraro V. C., *Corso C.I.M.E.*, (1956).
- [5] Crupi G., *Elementi di teorie relativistiche einsteiniane*, Acc. Pel. dei Pericolanti, cl. di Sc. F.M.N., Vol. LXXIII - Supplemento N. 1, (1995), Me.

NON-LINEAR BREAKING OF WAVES IN POLARIZABLE DIELECTRIC MEDIA

FIAMMETTA CONFORTO

Abstract

The propagation of weak discontinuities in a polarizable medium, when dielectric relaxation phenomena are taken into account, is considered.

The fundamental transport equations governing the growth and the decay of discontinuities associated to the waves have been obtained and solved.

Moreover a criterion for the "breakdown" of weak discontinuities is given.

1. Introduction.

In some previous papers [1-10] various problems concerning dielectric relaxation phenomena were analyzed.

In particular, in [10], a phenomenological theory for a polarizable fluid system with neutral molecules is proposed, using the methods of Extended Irreversible Thermodynamics.

In this treatment, a transport equation for the polarization generalizing the well-established Debye's law for dielectric relaxation, is proposed.

More precisely, it's assumed that the polarization vector \mathbf{P} can be represented by a sum of a reversible part $\mathbf{P}^{(0)}$ and an irreversible part $\mathbf{P}^{(1)}$, which is connected with dielectric after-effects:

$$(1.1) \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}^{(0)} + \mathbf{P}^{(1)},$$

with

$$(1.2) \quad \mathbf{P}^{(0)} = k\mathbf{E},$$

being k the electric susceptibility and \mathbf{E} the electric field vector evaluated in a frame, R_C , co-moving with the generic element of the fluid.

Then, in absence of other dissipative effects, the specific free energy, F , can be assumed to be a function of the absolute temperature T of the fluid, the density ρ , the electric field \mathbf{E} and the polarization vector $\mathbf{P}^{(1)}$:

$$(1.3) \quad F = F(T, \rho, \mathbf{E}, \mathbf{P}^{(1)}),$$

and, with the Extended Irreversible Thermodynamics procedures, the following phenomenological equation for dielectric relaxation (valid in R_C) yields:

$$(1.4) \quad \tau \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{P} - k\mathbf{E}) + (\mathbf{P} - k\mathbf{E}) = -k_D \tau \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

where τ is the Debye's relaxation time and k_D is the Debye's susceptibility.

In what follows, k and k_D are assumed to be functions of E^2 :

$$(1.5) \quad k = k(E^2), \quad k_D = k_D(E^2).$$

Moreover, the Maxwell's equations in the case of a polarizable fluid system with neutral molecules, in the co-moving frame

R_C , are:

$$(1.6) \quad \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \wedge \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0,$$

$$(1.7) \quad \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \wedge \mathbf{H} = -\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = 0,$$

being \mathbf{H} the magnetic field vector, ε_0 the dielectric constant and μ_0 the magnetic permeability, both in vacuum.

Therefore, putting together equations (1.6) and (1.7) with equation (1.4), a complete system governing the evolution of the fields \mathbf{H} , \mathbf{E} and \mathbf{P} is obtained.

In the present paper, we combine the singular surface theory [11] and the ray theory [12-14] to study the propagation of weak discontinuities in the above-defined medium.

More precisely, we derive the fundamental differential equations for the growth of weak discontinuities associated to the waves put on evidence.

Furthermore, we discuss the solution of these equations and find a criterion for the "blow-up" of the associated discontinuities.

2. Discontinuities.

Using a system of orthogonal cartesian coordinates (x_i) for the space (in R_C), taking into account relations (1.5), the system of equations (1.6), (1.7) and (1.4) may be written as follows:

$$(2.1) \quad \mu_0 \frac{\partial H_i}{\partial t} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial H_i}{\partial x_i} = 0,$$

$$(2.2) \quad \varepsilon_0 \frac{\partial E_i}{\partial t} + \frac{\partial P_i}{\partial t} - \varepsilon_{ijk} \frac{\partial H_k}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} (\varepsilon_0 E_i + P_i) = 0,$$

$$(2.3) \quad \tau \frac{\partial P_i}{\partial t} - \tau \{h\delta_{ij} + 2k'E_i E_j\} \frac{\partial E_j}{\partial t} + P_i - kE_i = 0$$

where we set

$$(2.4) \quad h = k - k_D, \quad k' = \frac{dk}{dE^2}.$$

Let's consider now a surface $\Sigma(t)$ across which the field vectors \mathbf{H} , \mathbf{E} and \mathbf{P} are continuous, whereas their derivatives may be discontinuous.

Square brackets are used to denote the jump across the surface.

We use the following notations for jumps:

$$(2.5) \quad \left[\frac{\partial H_i}{\partial x_j} \right] n_j = \gamma_i, \quad \left[\frac{\partial E_i}{\partial x_j} \right] n_j = \omega_i, \quad \left[\frac{\partial P_i}{\partial x_j} \right] n_j = \pi_i.$$

Using the first order compatibility conditions [11], equations (2.1)-(2.3) become:

$$(2.6) \quad \mu_0 \lambda \gamma_i - \varepsilon_{ijk} n_j \omega_k = 0, \quad \gamma_n = 0,$$

$$(2.7) \quad \varepsilon_0 \lambda \omega_i + \lambda \pi_i + \varepsilon_{ijk} n_j \gamma_k = 0, \quad \varepsilon_0 \omega_n + \pi_n = 0,$$

$$(2.8) \quad \lambda(\pi_i - h\omega_i - 2k'E_i E_k \omega_k) = 0,$$

where

$$(2.9) \quad \gamma_n = \gamma_i n_i, \quad \omega_n = \omega_i n_i, \quad \pi_n = \pi_i n_i,$$

being \mathbf{n} the unit normal vector to $\Sigma(t)$ and λ the normal forward speed of $\Sigma(t)$.

We can employ equations (2.6) and (2.8) into (2.7) in order to eliminate γ_i and π_i ; then we get the following linear homogeneous system for ω_i :

$$(2.10) \quad (A_{ij} - \xi \delta_{ij}) \omega_j = 0,$$

where

$$(2.11) \quad A_{ij} = n_i n_j + 2\mu_0 \lambda^2 k' E_i E_j$$

and

$$(2.12) \quad \xi = 1 - (\varepsilon_0 + h)\mu_0 \lambda^2.$$

Non-trivial solutions require that the determinant of coefficients of the above homogeneous system vanishes:

$$(2.13) \quad \det(A_{ij} - \xi \delta_{ij}) = 0.$$

This can be simplified as:

$$(2.14) \quad \xi \{ \xi^2 - (1 + 2\mu_0 \lambda^2 k' E^2) \xi + 2\mu_0 \lambda^2 k' (E^2 - E_n^2) \} = 0$$

(where we set $E_n = E_i n_i$) which implies, besides the trivial solution $\lambda = 0$, also the following solutions:

$$(2.15) \quad \lambda_1^2 = \frac{1}{(\varepsilon_0 + h)\mu_0} \Leftrightarrow \xi = 0,$$

$$(2.16) \quad \lambda_2^2 = \frac{\varepsilon_0 + h + 2k' E_n^2}{(\varepsilon_0 + h + 2k' E^2)(\varepsilon_0 + h)\mu_0}.$$

In what follows we'll examine the waves $\Sigma_1(t)$ and $\Sigma_2(t)$ which propagate with the velocities λ_1 and λ_2 given, respectively, by (2.15) and (2.16).

Using equations (2.6), (2.7) and (2.8), the discontinuities associated to the wave $\Sigma_1(t)$ can be expressed as follows:

$$(2.17) \quad \gamma_i = \frac{1}{\mu_0 \lambda_1} \varepsilon_{ijk} n_j \omega_k, \quad \gamma_n = 0,$$

$$(2.18) \quad \pi_i = h \omega_i,$$

$$(2.19) \quad \omega_n = 0, \quad \omega_i E_i = 0.$$

While the discontinuities associated to the wave $\Sigma_2(t)$ (general case in which $k' \neq 0$, \mathbf{n} isn't parallel to \mathbf{E} , $\mathbf{E}^{(t)} \neq \mathbf{0}$) are given by:

$$(2.20) \quad \omega_i = \left\{ n_i - \frac{\varepsilon_0 + h + 2k' E_n^2}{2k' E^{(t)2} E_n} E_i^{(t)} \right\} \psi,$$

$$(2.21) \quad \gamma_i = \frac{1}{\mu_0 \lambda_2} \varepsilon_{ijk} n_j \omega_k, \quad \gamma_n = 0,$$

$$(2.22) \quad \pi_i = h \omega_i + 2k' E_i (\mathbf{E} \cdot \mathbf{w}),$$

with

$$(2.23) \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{w} = -\frac{(\varepsilon_0 + h) \omega_n}{2k' E_n},$$

and where we set $E_i^{(t)} = E_i - E_n n_i$, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{w} = E_k \omega_k$, $\psi = \omega_n$.

3. Growth equations.

Let's now derive the growth equations of weak discontinuities associated to the waves $\Sigma_1(t)$ and $\Sigma_2(t)$.

For sake of simplicity, let's assume that the state following the waves is uniform and constant, i.e. \mathbf{H} , \mathbf{E} and \mathbf{P} are constant.

We now use the following notations:

$$(3.1) \quad \left[\frac{\partial^2 H_i}{\partial x_j \partial x_k} \right] n_j n_k = \gamma_i^*,$$

$$(3.2) \quad \left[\frac{\partial^2 E_i}{\partial x_j \partial x_k} \right] n_j n_k = \omega_i^*,$$

$$(3.3) \quad \left[\frac{\partial^2 P_i}{\partial x_j \partial x_k} \right] n_j n_k = \pi_i^*.$$

We differentiate equations (2.1)-(2.3) with respect to x_r and multiply them by n_r .

Using the first and second order compatibility conditions [11-13], we get:

$$(3.4) \quad \mu_0 \lambda \gamma_i^* - \varepsilon_{ijk} n_j \omega_k^* = f_i, \quad \gamma_n^* = -a^{\alpha\beta} \gamma_{i,\alpha} x_{i\beta},$$

$$(3.5) \quad \varepsilon_0 \lambda \omega_i^* + \lambda \pi_i^* + \varepsilon_{ijk} n_j \gamma_k^* = g_i,$$

$$(3.6) \quad \varepsilon_0 \omega_n^* + \pi_n^* = -a^{\alpha\beta} (\varepsilon_0 \omega_i + \pi_i)_{,\alpha} x_{i\beta},$$

$$(3.7) \quad \tau \lambda (\pi_i^* - h \omega_i^* - 2k' E_i E_k \omega_k^*) = l_i,$$

where

$$(3.8) \quad f_i = \mu_0 \frac{\delta \omega_i}{\delta t} + \varepsilon_{ijk} a^{\alpha\beta} \omega_{k,\alpha} x_{j\beta};$$

$$(3.8) \quad g_i = \varepsilon_0 \frac{\delta \omega_i}{\delta t} + \frac{\delta \pi_i}{\delta t} - \varepsilon_{ijk} a^{\alpha\beta} \gamma_{k,\alpha} x_{j\beta};$$

$$(3.9) \quad l_i = 2\tau h' E_k \left\{ \lambda \left(\frac{\partial E_k}{\partial x_j} \right)_0 n_j \omega_i - \left(\frac{\partial E_i}{\partial t} \right)_0 \omega_k \right\} +$$

$$+ 2\tau k' E_k \left\{ \lambda \left(\frac{\partial E_i}{\partial x_j} \right)_0 n_j \omega_k - \left(\frac{\partial E_k}{\partial t} \right)_0 \omega_i \right\} +$$

$$+ 2\tau k' E_i \left\{ \lambda \left(\frac{\partial E_k}{\partial x_j} \right)_0 n_j \omega_k - \left(\frac{\partial E_k}{\partial t} \right)_0 \omega_k \right\} +$$

$$+ 4\tau k'' E_i E_k E_r \left\{ \lambda \left(\frac{\partial E_r}{\partial x_j} \right)_0 n_j \omega_k - \left(\frac{\partial E_k}{\partial t} \right)_0 \omega_r \right\} +$$

$$+ 2\tau \lambda [h' E_k \omega_k \omega_i + k' E_k \omega_k \omega_i + k' E_i \omega^2 +$$

$$+ 2k'' E_i (E_k \omega_k)^2].$$

Here $\frac{\delta}{\delta t}$ denotes the differentiation along the normal to the surfaces $\Sigma_1(t)$ or $\Sigma_2(t)$; a comma followed by a greek index ($\alpha = 1, 2$) denotes the covariant derivative with respect to a curvilinear coordinates system defined on the surfaces; $a^{\alpha\beta}$ are the components of the first fundamental form of the generic surface $\Sigma(t)$.

Relations (3.4)-(3.6) are the equations for ω_i^* , γ_i^* and π_i^* , just like equations (2.6)-(2.8) are for ω_i , γ_i and π_i . The system of equations (3.4)-(3.6) is now non-homogeneous and its determinant of coefficients vanishes, since system (2.6)-(2.8) is assumed to have non-trivial solutions.

If we eliminate γ_i^* and π_i^* from (3.5), using (3.4) and (3.6), we get again:

$$(3.10) \quad -\tau(A_{ij} - \xi\delta_{ij})\omega_j^* = F_i,$$

where

$$(3.11) \quad F_i = \tau\varepsilon_{ijk}n_j f_k - \tau\mu_0\lambda g_i + \mu_0\lambda l_i.$$

Taking into account the symmetry of the matrix $A_{ij} - \xi\delta_{ij}$ and employing equation (2.10), we get the following two scalar equations:

$$(3.12) \quad F_i^{(1)}\omega_i = 0$$

and

$$(3.13) \quad F_i^{(2)}\omega_i = 0$$

describing, respectively, the propagation of the discontinuities associated to the waves $\Sigma_1(t)$ and $\Sigma_2(t)$, across the wave surfaces, as the surfaces move.

Moreover, in $F_i^{(1)}$ (respectively, in $F_i^{(2)}$) the involved quantities are referred to the wave $\Sigma_1(t)$ (respectively, $\Sigma_2(t)$) whose normal speed is λ_1 (respectively, λ_2).

By virtue of relations (2.17)-(2.19), equation (3.12) can be written as follows:

$$(3.14) \quad \omega_i \frac{\delta \omega_i}{\delta t} - \omega_i \omega_i \left(\frac{1}{2} \lambda b_{\alpha}^{(1)\alpha} - Q_1 \right) = 0,$$

where $b_{\alpha\beta}^{(1)}$ are the components of the second fundamental form of the surface $\Sigma_1(t)$ and

$$(3.15) \quad Q_1 = \mu_0 \lambda_1^2 E_k \left\{ k' \left(\frac{\partial E_k}{\partial t} \right)_0 - h' \lambda_1 \left(\frac{\partial E_k}{\partial x_j} \right)_0 n_j \right\},$$

from which, denoting by Ω the modulus of \mathbf{w} , i.e.:

$$(3.16) \quad \Omega = |\mathbf{w}|,$$

we obtain the following equation for Ω :

$$(3.17) \quad \frac{1}{\Omega} \frac{\delta \Omega}{\delta t} - \frac{1}{2} \lambda_1 b_{\alpha}^{(1)\alpha} + Q_1 = 0,$$

and, taking into account that in the present case the following relation holds:

$$(3.18) \quad \lambda_1 b_{\alpha}^{(1)\alpha} = \frac{\delta}{\delta t} \log b_1 \quad (b_1 = \det (b_{\alpha}^{(1)\alpha})),$$

equation (3.17) can also be written as follows:

$$(3.19) \quad \frac{\delta \Omega}{\delta t} + \Omega \frac{\delta}{\delta t} \log \theta_1 = -Q_1 \Omega \quad (\theta_1 = b_1^{-\frac{1}{2}});$$

integrating equation (3.19), we obtain:

$$(3.20) \quad \Omega(t) = \Omega_0 \theta_1^{(0)} \exp \left(- \int_0^t Q_1 dt \right),$$

with $\Omega = \Omega_0$ and $\theta_1 = \theta_1^{(0)}$ at the time $t = 0$.

We want to transform now equation (3.13) which describes the discontinuities associated to the wave $\Sigma_2(t)$.

By virtue of relations (2.20)-(2.22), equation (3.13) can be written as follows:

$$(3.21) \quad \frac{d\psi}{dt} - \frac{1}{2} (\lambda_2 b_{\alpha}^{(2)\alpha} - \Lambda_{,\alpha}^{(2)\alpha}) \psi + Q_2 \psi + Q_3 \psi^2 = 0,$$

where $\frac{d}{dt}$ denotes the ray derivative $\frac{\partial}{\partial t} + \Lambda_i^{(2)} \frac{\partial}{\partial x_i}$, being $\Lambda_i^{(2)}$ the components of the ray velocity associated to the wave $\Sigma_2(t)$, while $\Lambda_{\alpha}^{(2)} = \Lambda_i^{(2)} x_{i\alpha}$ and $b_{\alpha\beta}^{(2)}$ are the components of the second fundamental form of the surface $\Sigma_2(t)$ and where we set:

$$(3.22) \quad \begin{aligned} Q_2 = & \mu_0 \lambda_2^2 E_k \left\{ k' \left(\frac{\partial E_k}{\partial t} \right)_0 - h' \lambda_2 \left(\frac{\partial E_k}{\partial x_j} \right)_0 n_j \right\} \cdot \\ & \cdot (1 + A^\alpha A_\alpha) + (n_k - E^\alpha x_{k\alpha}) \left\{ (h' + k') \left(\frac{\partial E_k}{\partial t} \right)_0 + \right. \\ & \left. - 2\lambda_2 k' \left(\frac{\partial E_k}{\partial x_j} \right)_0 n_j \right\} \frac{\varepsilon_0 + h}{2k' E_n} + \\ & - 2k'' E_k \left\{ \left(\frac{\partial E_k}{\partial t} \right)_0 + \lambda_2 \left(\frac{\partial E_k}{\partial x_j} \right)_0 n_j \right\} \left(\frac{\varepsilon_0 + h}{2k' E_n} \right)^2 \end{aligned}$$

and

$$(3.23) \quad \begin{aligned} Q_3 = & - \frac{\lambda_2^2 (\varepsilon_0 + h)}{2k' E_n} \{ (h' + 2k') \cdot \\ & \cdot \left[1 + \left(\frac{\varepsilon_0 + h + 2k' E_n^2}{2k' E_n} \right)^2 \frac{1}{E^{(t)2}} \right] + \frac{k'' (\varepsilon_0 + h)^2}{2(k' E_n)^2} \}, \end{aligned}$$

having denoted by:

$$(3.24) \quad A^\alpha = \frac{\varepsilon_0 + h + 2k' E_n^2}{2k' E_n E^{(t)2}} E^\alpha$$

and

$$(3.25) \quad E^\alpha = a^{\alpha\beta} E_\beta, \quad E_\beta = E_i x_{i\beta}.$$

Finally, recalling the following result:

$$(3.26) \quad \lambda_2 b_\alpha^{(2)\alpha} - \Lambda_{,\alpha}^{(2)\alpha} = \frac{d}{dt} \log b_2 \quad (b_2 = \det(b_\alpha^{(2)\alpha})),$$

equation (3.21) can be also written as:

$$(3.27) \quad \frac{d\psi}{dt} + \psi \frac{d}{dt} \log \theta_2 + Q_2 \psi + Q_3 \psi^2 = 0 \quad (\theta_2 = b_2^{-\frac{1}{2}}).$$

This equation can be integrated to obtain:

$$(3.28) \quad \psi(t) = \psi_0 \theta_2^{-1} \exp \left(- \int_0^t Q_2 dt \right) \left\{ \theta_0 + \psi_0 \int_0^t \theta_2^{-1} Q_3 dt \right\}^{-1}$$

where $\psi = \psi_0$ and $\theta = \theta_0$ at the time $t = 0$.

Therefore we have the following condition:

$$(3.29) \quad \int_0^{t_c} \theta_2^{-1} Q_3 dt = - \frac{\theta_0}{\psi_0}$$

for the break-down at a finite time t_c .

Acknowledgements.

This work was supported by C.N.R. through G.N.F.M. and by M.U.R.S.T. through Fondi 40% and 60%.

REFERENCES

- [1] Kluitenberg G.A., *On dielectric and magnetic relaxation phenomena and non-equilibrium thermodynamics*, Physica, **68**, (1973), 75.
- [2] Kluitenberg G.A., *On dielectric and magnetic relaxation phenomena and vectorial internal degrees of freedom in thermodynamics*, Physica, **87A** (1977), 302.

- [3] Kluitenberg G.A., *On vectorial internal variables and dielectric and magnetic relaxation phenomena*, Physica, **109A** (1981), 91.
- [4] Restuccia L., Kluitenberg G.A., *On some generalizations of the Debye equation for dielectric relaxation*, Physica, **154A** (1988), 157.
- [5] Ciancio V., *On the generalized Debye equation for media with dielectric relaxation phenomena described by vectorial internal variables*, J. Non-Equilib. Thermodyn., **14** (1989), 239.
- [6] Ciancio V., Kluitenberg G.A., *On electromagnetic waves in isotropic media with dielectric relaxation*, Acta Physica Hungarica, **66**, 1-4 (1989), 251.
- [7] Ciancio V., Restuccia L., Kluitenberg G.A., *A thermodynamic derivation of equations for dielectric relaxation phenomena in anisotropic polarizable media*, J. Non-Equilib. Thermodyn., **1** (1990), 41.
- [8] Del Castillo L.F., Garcia-Colin L.S., *Thermodynamics basis for dielectric relaxation in complex materials*, Phys. Rev. B, **33**, 7 (1986), 4944.
- [9] Kranys M., *Non-stationary thermodynamics of polarizable and magnetizable dissipative fluid media*, J. Phys. A: Math. Gen., **13**, (1980), 1075.
- [10] Conforto F., Giambò S., *An extended irreversible thermodynamic description of thermal, viscous and dielectric phenomena in fluid systems*, J. Non-Equil. Thermodyn., **21** (1996), 1.
- [11] Thomas T.Y., *Extended compatibility conditions for the study of surfaces of discontinuity in mechanics*, J. Math. and Mech., **6**, (1957), 141.
- [12] Boillat G., *La propagation des ondes*, Gauthier-Villars, Paris, 1965.
- [13] Nariboli G.A., *On some aspects of wave propagation*, J. Math. Phys. Sci., **2, 3**, (1968), 294.
- [14] Elcrat A.R., *On the propagation of sonic discontinuities in the unsteady flow of a perfect gas*, Int. J. Engn. Sci., **15**, (1977), 29.

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Messina
Contrada Papardo, Salita Sperone, 31
98166 Villaggio Sant'Agata Messina Italy