МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.75, 517.927, 517.956.3

Э.А. Бакирова[1], Н.Б. Искакова[2]

[1]*Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы;*
[2]*Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы*
(E-mail: bakirova1974@mail.ru)

Об одном подходе к выбору начального приближения решения нелинейной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений

На основе метода параметризации исследуется нелинейная двухточечная краевая задача для систем нагруженных дифференциальных уравнений. Суть метода параметризации заключается в том, что рассматриваемая задача разбиением заданного интервала точками нагружения и введением дополнительных параметров сводится к эквивалентной нелинейной двухточечной краевой задаче с параметрами. Введение дополнительных параметров позволяет получить начальные условия для неизвестных функций на подынтервалах. При фиксированных значениях параметров решается задача Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Подставляя представление решения задачи Коши в краевые условия и условия непрерывности решения во внутренних точках разбиения интервала, построена система нелинейных алгебраических уравнений относительно введенных параметров. Построенные системы нелинейных алгебраических уравнений являются основой алгоритмов метода параметризации и позволяют найти «хорошие» начальные приближения к решению нелинейной двухточечной краевой задачи для систем нагруженных дифференциальных уравнений. Предложен один из способов к выбору «хорошего» начального приближения для нахождения решения нелинейной краевой задачи. Получены условия существования изолированного решения нелинейной двухточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений при достаточно малых шагах разбиения.

Ключевые слова: нелинейная краевая задача, нагруженное дифференциальное уравнение, численный метод, алгоритм.

Нагруженные дифференциальные уравнения часто возникают в приложениях как математическая модель процессов, где состояния в определенные моменты времени оказывают существенное влияние на свойства описываемого процесса в целом.

Вопросы разрешимости и построения приближенного решения краевых задач для этих уравнений различными методами исследованы многими авторами [1–3].

В работах [4–6] предложен численный метод решения систем линейных неавтономных обыкновенных нагруженных дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными интегральными условиями.

В работе [7] на основе метода параметризации [8] получены коэффициентные признаки однозначной разрешимости линейной двухточечной краевой задачи для систем нагруженных дифференциальных уравнений и построены алгоритмы нахождения решения этой задачи.

В настоящей работе рассматривается нелинейная краевая задача для нагруженных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, x(\theta_0), \quad x(\theta_1), \ldots, x(\theta_m)), \quad t \in (0, T), \quad x \in R^n, \tag{1}$$

$$g[x(0), \quad x(T)] = 0, \tag{2}$$

где $f : [0, T] \times R^n \to R^n$,$g : R^n \times R^n \to R^n$ — непрерывные функции.
Через $C([0, T], R^n)$ обозначим пространство непрерывных функций $x : [0, T] \to R^n$ с нормой

$$\|x\|_1 = \max_{t \in [0,T]} \|x(t)\|.$$

Задача (1), (2) исследуется методом параметризации [5].

Возьмем точки $\theta_0 = 0 < \theta_1 < \ldots < \theta_m < \theta_{m+1} = T$, и разбиение интервала $[0, T)$ на $m + 1$ подынтервалов $[0, T) = \bigcup_{r=1}^{m+1} [\theta_{r-1}, \theta_r)$ обозначим через Δ_{m+1}. Сужение функции $x(t)$ на r-ый интервал $[\theta_{r-1}, \theta_r)$ обозначим через $x_r(t)$. Задача (1), (2) эквивалентна нелинейной многоточечной краевой задаче $\frac{dx_r}{dt} = f(t, x_r, x_1(\theta_0),\ x_2(\theta_1), \ldots, x_{m+1}(\theta_m))$, $t \in [\theta_{r-1}, \theta_r)$, $r = \overline{1, m+1}$, $g[x_1(0), \lim\limits_{t \to T-0} x_{m+1}(t)] = 0$, $\lim\limits_{t \to \theta_s - 0} x_s(t) = x_{s+1}(\theta_s)$, $s = \overline{1, m}$, где последнее равенство является условием склеивания решения в точках нагружения.

Введя параметры $\lambda_r = x_r(\theta_{r-1})$ и на каждом r-ом интервале произведя замену функции $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$, получим нелинейную краевую задачу с параметрами:

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, u_r + \lambda_r, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m), \quad t \in [\theta_{r-1}, \theta_r); \tag{3}$$

$$u_r(\theta_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, m+1}; \tag{4}$$

$$g[\lambda_1, \lambda_{m+1} + \lim_{t \to T-0} u_{m+1}(t)] = 0; \tag{5}$$

$$\lambda_s + \lim_{t \to \theta_s - 0} u_s(t) - \lambda_{s+1} = 0, \quad s = \overline{1, m}. \tag{6}$$

Задачи (1), (2) и (3)–(6) эквивалентны. Если $x(t)$ — решение краевой задачи (1), (2), то пара $(\lambda,\ u[t])$, где $\lambda = (x_1(0), x_2(\theta_1), \ldots, x_{m+1}(\theta_m))$, $u[t] = (x_1(t) - x_1(0), x_2(t) - x_2(\theta_1), \ldots, x_{m+1}(t) - x_{m+1}(\theta_m))$, является решением задачи (3)–(6). И наоборот, если $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$ — решение задачи (3)–(6), то функция $\tilde{x}(t)$, определяемая равенствами $\tilde{x}(t) = \tilde{\lambda}_r + \tilde{u}_r(t), t \in (\theta_{r-1}, \theta_r)$, $r = \overline{1, m+1}$, $\tilde{x}(T) = \tilde{\lambda}_{m+1} + \lim\limits_{t \to T-0} \tilde{u}_{m+1}(t)$, будет решением задачи (1),(2).

При фиксированных значениях параметров λ_r задача Коши (3),(4) эквивалентна нелинейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$u_r(t) = \int_{\theta_{r-1}}^{t} f(\tau, \lambda_r + u_r(\tau), \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m+1}) d\tau, \quad t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \quad r = \overline{1, m+1}. \tag{7}$$

В уравнении (7) подставляя вместо $u_r(\tau)$ соответствующую правую часть и повторив этот процесс ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ раз, получим представление функций $u_r(t)$:

$$u_r(t) = \int_{\theta_{r-1}}^{t} f(\tau_1, \lambda_r + \int_{\theta_{r-1}}^{\tau_1} f(\tau_2, \lambda_r + \ldots +$$

$$+ \int_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_r + u_r(\tau_\nu), \lambda_1, \lambda_2, \ldots,\ \lambda_{m+1}) d\tau_\nu, \ldots)\, d\tau_2;$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots,\ \lambda_{m+1})\, d\tau_1;$$

$$t \in [\theta_{r-1}, \theta_r),\ r = \overline{1, m+1}.$$

Отсюда, определив $\lim\limits_{t \to \theta_r - 0} u_r(t)$, $r = \overline{1, m+1}$, и подставив их в (5), (6), получим систему нелинейных уравнений относительно $\lambda_r \in R^n$:

$$g[\lambda_1, \lambda_{m+1} + \int_{\theta_m}^{T} f(\tau_1, \lambda_{m+1} + \int_{\theta_m}^{\tau_1} f(\tau_2, \lambda_{m+1} + \ldots + \int_{\theta_m}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_{m+1} +$$
$$+ u_{m+1}(\tau_\nu), \lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1}) d\tau_\nu, \ldots) d\tau_2,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1}) d\tau_1] = 0; \tag{8}$$

$$\lambda_s + \int_{\theta_{s-1}}^{\theta_s} f(\tau_1, \lambda_s + \int_{\theta_{s-1}}^{\tau_1} f(\tau_2, \lambda_s + \ldots + \int_{\theta_{s-1}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_s +$$
$$+ u_s(\tau_\nu), \lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1}) d\tau_\nu, \ldots) d\tau_2,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1}) d\tau_1 - \lambda_{s+1} = 0,\ s = \overline{1, m}. \tag{9}$$

Систему (8), (9) запишем в виде

$$Q_\nu(\Delta_{m+1}; \lambda, u) = 0, \quad \lambda \in R^{n(m+1)}. \tag{10}$$

Таким образом, для нахождения решения $(\lambda, u[t])$ имеем замкнутую систему уравнений (8), (9).

Через $C([0,T], \Delta_{m+1}, R^{n(m+1)})$ обозначим пространство систем функций $u[t] = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_{m+1}(t))$, где функции $u_r : [\theta_{r-1}, \theta_r) \to R^n$ непрерывны и имеют конечные левосторонние пределы $\lim\limits_{t \to \theta_r - 0} u_r(t)$ при всех $r = \overline{1, m+1}$ с нормой

$$\|u[\cdot]\|_2 = \max_{r=\overline{1,m+1}} \sup_{t \in [\theta_{r-1}, \theta_r)} \|u_r(t)\|.$$

Условие A. Существует разбиение Δ_{m+1} такое, что система нелинейных уравнений $Q_\nu(\Delta_{m+1}; \lambda, 0) = 0$ имеет решение $\lambda^0 = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_{m+1}^0) \in R^{n(m+1)}$, задача Коши (3), (4) при $\lambda_r = \lambda_r^0,\ r = \overline{1, m+1},$ имеет решение $u_r^0(t)$, и система функций

$$u^0[t] = (u_1^{(0)}(t), u_2^0(t), \ldots, u_{m+1}^0(t)) \in C([0,T], \Delta_{m+1},\ R^{n(m+1)}).$$

По паре $(\lambda^{(0)},\ u^0[t]\,)$ определим кусочно-непрерывную на (0,T) функцию $x^0(t)$ равенствами

$$t \in (\theta_{r-1}, \theta_r); \quad x^{(0)}(t) = \lambda_r^{(0)} + u_r^{(0)}(t);$$

$$r = \overline{1, m+1}; \quad x^{(0)}(T) = \lambda_{m+1}^{(0)} + \lim_{t \to T-0} u_{m+1}^{(0)}(t).$$

Выберем числа $\rho_\lambda > 0,\ \rho_u > 0,\ \rho_x > 0$ и составим можества:

$$S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \ldots \lambda_{m+1}) \in R^{n(m+1)} :\ \left\| \lambda - \lambda^0 \right\| < \rho_\lambda \right\};$$

$$S(u^{(0)}[t], \rho_u) = \left\{\ u[t] \in C([0,T], \Delta_{m+1}, R^{n(m+1)}) :\ \left\| u - u^{(0)} \right\|_1 < \rho_u \right\};$$

$$S(x^{(0)}(t), \rho_x) = \left\{\ x(t) \in C([0,T], R^n) :\ \left\| x - x^{(0)} \right\| < \rho_x \right\};$$

$$G_1^0(\,\rho_x) = \left\{ (t,\, x, v_1, v_2, \ldots, v_{m+1}) : t \in [0,T],\ \left\| x - \lambda_r^{(0)} - u_r^{(0)}(t) \right\| < \rho_x\ ,\ t \in [\theta_{r-1}, \theta_r); \right.$$
$$r = \overline{1, m+1},\ \left\| x - \lambda_{m+1}^{(0)} - \lim_{t \to T-0} u_{m+1}^{(0)}(t) \right\| < \rho_x,\ t = T,\ \left\| v_1 - \lambda_1^{(0)} \right\| < \rho_x,\ \ \left\| v_2 - \lambda_2^{(0)} \right\| <$$
$$\left. < \rho_x,\ \ldots,\ \left\| v_{m+1} - \lambda_{m+1}^{(0)} \right\| < \rho_x \right\};$$

$$G_2^0(\,\rho_\lambda, \rho_x) = \left\{ (v, w) \in R^{2n} :\ \left\| v - \lambda_1^{(0)} \right\| < \rho_\lambda,\ \ \left\| w - \lambda_{m+1}^{(0)} - \lim_{t \to T-0} u_{m+1}^{(0)}(t) \right\| < \rho_x \right\}.$$

Условие B. Функции $f(t, x, v_1, v_2, \ldots, v_{m+1}),\ g(v, w)$ соответственно $G_1^0(\rho_x),\ G_2^0(\rho_\lambda, \rho_x)$ непрерывны, имеют непрерывные частные производные:

$$f'_x(t, x, v_1, v_2, \ldots, v_{m+1}),\ f'_{v_i}(t, x, v_1, v_2, \ldots, v_{m+1},)\ i = \overline{1, m+1},\, g'_v(v, w),\ g'_w(v, w)$$

и выполняются неравенства

$$\|f'_x(t,x,v_1,v_2,\ldots,v_{m+1})\| \le L(t), \left\|f'_{v_i}(t,x,v_1,v_2,\ldots,v_{m+1})\right\| \le L(t), i=\overline{1,m+1},$$

$$\|g'_v(v,w)\| \le L_1, \|g'_w(v,w)\| \le L_2,$$

где $L(t) \in C([0,T],\, R^n),\ L_1,\, L_2\ -\ const.$

Теорема 1. Пусть при заданных $\Delta_{m+1},\ \nu(\nu=1,2,\ldots),\ \rho_\lambda>0,\ \rho_u>0,\ \rho_x>0$ выполняются условия $A, B, (n(m+1)\times n(m+1))$ — матрица Якоби $\frac{\partial Q_\nu(\Delta_{m+1},\lambda,u)}{\partial\lambda}$ обратима для всех

$$(\lambda,u[t]) \in S(\lambda^{(0)},\rho_\lambda)\times S_h(u^{(0)}[t],\rho_u)$$

и имеют место неравенства

$$\left\|\left(\frac{\partial Q_\nu(\Delta_{m+1},\lambda,u)}{\partial\lambda}\right)^{-1}\right\| \le \gamma_\nu(\Delta_{m+1});$$

$$q_\nu\left(\Delta_{m+1}\right)=\gamma_\nu\left(\Delta_{m+1}\right)\max\left(L_2 h_{m+1},1\right)\max_{r=\overline{1,m+1}}\left\{\exp\left(\int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r}L\left(\tau\right)d\tau\right)-\sum_{i=0}^{\nu}\frac{1}{i!}\left(\int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r}L\left(\tau\right)d\tau\right)^i+\right.$$

$$\left.+\left(\exp\left(\int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r}L\left(\tau\right)d\tau\right)-\sum_{i=0}^{\nu-1}\frac{1}{i!}\left(\int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r}L\left(\tau\right)d\tau\right)^i\right)\sum_{j=1}^{m+1}\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j}\beta_j(t)dt<1;\right.$$

$$\frac{\gamma_\nu(\Delta_{m+1})}{1-q_\nu(\Delta_{m+1})}\left\|Q_\nu(\Delta_{m+1},\lambda^{(0)},u^{(0)})\right\|<\rho_\lambda;$$

$$\frac{\gamma_\nu(\Delta_{m+1})}{1-q_\nu(\Delta_{m+1})}\left\|Q_\nu(\Delta_{m+1},\lambda^{(0)},u^{(0)})\right\|;$$

$$\max_{r=\overline{1,m+1}}\left\{\exp\left(\int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r}L\left(\tau\right)d\tau\right)-\sum_{i=0}^{\nu}\frac{1}{i!}\left(\int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r}L\left(\tau\right)d\tau\right)^i+\right.$$

$$\left.+\left(\exp\left(\int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r}L\left(\tau\right)d\tau\right)-\sum_{i=0}^{\nu-1}\frac{1}{i!}\left(\int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r}L\left(\tau\right)d\tau\right)^i\right)\sum_{j=1}^{m+1}\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j}\beta_j(t)dt\right\}<\rho_u.$$

Тогда задача (3)–(6) в $S(\lambda^{(0)},\rho_\lambda)\times S_h(u^{(0)}[t],\rho_u)$ имеет изолированное решение и справедлива оценка:

$$\left\|\lambda^*-\lambda^{(0)}\right\| \le \frac{\gamma_\nu(\Delta_{m+1})}{1-q_\nu(\Delta_{m+1})}\left\|Q_\nu(\Delta_{m+1},\lambda^{(0)},u^{(0)})\right\|.$$

Одной из основных проблем при решении нелинейных краевых задач является выбор начального приближения. В данной работе предлагается один из подходов к выбору начального приближения решения задачи (1), (2), основанный на решении системы нелинейных алгебраических уравнений (10) при $u=0$, т.е. системы уравнений

$$Q_\nu(\Delta_{m+1};\lambda,0)=0,\quad \lambda\in R^{n(m+1)}. \tag{11}$$

Предположим, что при заданных Δ_{m+1} и $\nu\ \ (\nu=1,2,\ldots)$ система $Q_\nu(\Delta_{m+1};\lambda,0)=0$ имеет решение $\tilde\lambda=(\tilde\lambda_1,\tilde\lambda_2,\ldots,\tilde\lambda_{m+1})\in R^{n(m+1)}$.

Взяв точки $\theta_0=0<\frac{\theta_1}{2}<\theta_1<\frac{\theta_2+\theta_1}{2}<\ldots<\theta_m<\frac{\theta_{m+1}+\theta_m}{2}<\theta_{m+1}=T$ и обозначив полученное разбиение через Δ_{2m+2}, рассмотрим уравнение

$$Q_\nu(\Delta_{2m+2}; \lambda, 0) = 0, \quad \lambda \in R^{2n(m+1)}. \tag{12}$$

Чтобы решить уравнение (12), воспользуемся теоремой 1 из [9]. За начальное приближение решения уравнения (12) возьмем вектор $\hat{\lambda}^0 = (\hat{\lambda}_1^{(0)}, \hat{\lambda}_2^0, \ldots, \hat{\lambda}_{2m+2}^0) \in R^{2n(m+1)}$, где

$$\hat{\lambda}_1^{(0)} = \tilde{\lambda}_1, \;\; \hat{\lambda}_2^{(0)} = \tilde{\lambda}_1 + \int_0^{\frac{\theta_1}{2}} f(\tau_1, \tilde{\lambda}_1 + \int_0^{\tau_1} f(\tau_2, \tilde{\lambda}_1 + \ldots +$$

$$+ \int_0^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_{m+1}) d\tau_\nu, \ldots) d\tau_2, \tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_{m+1}) d\tau_1, \hat{\lambda}_3^{(0)} = \tilde{\lambda}_2,$$

$$\hat{\lambda}_4^{(0)} = \tilde{\lambda}_2 + \int_{\frac{\theta_1}{2}}^{\theta_1} f(\tau_1, \tilde{\lambda}_2 + \int_{\frac{\theta_1}{2}}^{\tau_1} f(\tau_2, \tilde{\lambda}_2 + \ldots +$$

$$+ \int_{\frac{\theta_1}{2}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_{m+1}) d\tau_\nu, \ldots) d\tau_2, \tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_{m+1}) d\tau_1,$$

$$\hat{\lambda}_5^{(0)} = \tilde{\lambda}_3, \;\; \hat{\lambda}_4^{(0)} = \tilde{\lambda}_3 + + \int_{\theta_1}^{\frac{\theta_2+\theta_1}{2}} f(\tau_1, \tilde{\lambda}_3 + \int_{\theta_1}^{\tau_1} f(\tau_2, \tilde{\lambda}_3 + \ldots +$$

$$+ \int_{\theta_1}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \tilde{\lambda}_3, \tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_{m+1}) d\tau_\nu, \ldots) d\tau_2, \tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_{m+1}) d\tau_1,$$

$$\ldots,$$

$$\hat{\lambda}_{2m+1}^{(0)} = \tilde{\lambda}_{m+1}, \;\; \hat{\lambda}_{2m+2}^{(0)} = \tilde{\lambda}_{m+1} + \int_{\frac{\theta_{m+1}+\theta_m}{2}}^{T} f(\tau_1, \tilde{\lambda}_{m+1} +$$

$$+ \int_{\frac{\theta_{m+1}+\theta_m}{2}}^{\tau_1} f(\tau_2, \tilde{\lambda}_{m+1} + \ldots +$$

$$+ \int_{\frac{\theta_{m+1}+\theta_m}{2}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \tilde{\lambda}_{m+1}, \tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_{m+1}) d\tau_\nu, \ldots) d\tau_2, \tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_{m+1}) d\tau_1.$$

В качестве иллюстрации приведем пример. На отрезке [0, 1] рассмотрим нелинейную краевую задачу для нагруженных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} x_1^2 + t \cdot x_1(\theta) + t^2 \cdot x_2^2(0) + f_1(t), \\ x_2^2 + (t-1) \cdot x_2(t) + t^2 \cdot x_1^2(0) + f_2(t), \end{cases} \tag{13}$$

$$x(0) = x(1), \tag{14}$$

где

$$f_1(t) = t^3(t-2) + 2.25t - 1, \quad f_2(t) = -t, \quad \theta = 0.5.$$

Точным решением задачи (13), (14) является $x(t) = \begin{pmatrix} t \cdot (t-1) \\ 1 \end{pmatrix}$.

Точкой нагружения $\theta = 0.5$ произведем разбиение интервала $[0, 1)$. Введя параметры $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} = x(0)$, $\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = x(\theta)$ и произведя замену функции:

$$u_{11}(t) = x_1(t) - \lambda_1, \;\; u_{12}(t) = x_2(t) - \mu_1, \;\; t \in [0, 0.5),$$

$$u_{21}(t) = x_1(t) - \lambda_2, \;\; u_{22}(t) = x_2(t) - \mu_2, \;\; t \in [0.5, 1),$$

получим нелинейную краевую задачу с параметрами:

$$\frac{du_{11}}{dt} = (u_{11} + \lambda_1)^2 + t \cdot \lambda_2 + t^2 \cdot \mu_1^2 + f_1(t), u_{11}(0) = 0, t \in [0, 0.5); \tag{15}$$

$$\frac{du_{12}}{dt}=(u_{12}+\mu_1)^2+(t-1)(u_{12}+\mu_1)+t^2\cdot\lambda_1^2+f_2(t),u_{12}(0)=0,t\in[0,0.5); \tag{16}$$

$$\frac{du_{21}}{dt}=(u_{21}+\lambda_2)^2+t\cdot\lambda_2+t^2\cdot\mu_1^2+f_1(t),u_{21}(\theta)=0,t\in[0.5,1); \tag{17}$$

$$\frac{du_{22}}{dt}=(u_{22}+\mu_2)^2+(t-1)(u_{22}+\mu_2)+t^2\cdot\lambda_1^2+f_2(t),u_{22}(\theta)=0,t\in[0.5,1); \tag{18}$$

$$\lambda_1=\lambda_2+\lim_{t\to1-0}u_{21}(t); \tag{19}$$

$$\mu_1=\mu_2+\lim_{t\to1-0}u_{22}(t); \tag{20}$$

$$\lambda_1+\lim_{t\to0.5-0}u_{11}(t)=\lambda_2; \tag{21}$$

$$\mu_1+\lim_{t\to0.5-0}u_{12}(t)=\mu_2. \tag{22}$$

Задачи Коши (15)–(18) эквивалентны соответственно нелинейным интегральным уравнениям Вольтерра второго рода:

$$u_{11}(t)=\int_0^t[(u_{11}(\tau)+\lambda_1)^2+\tau\cdot\lambda_2+\tau^2\cdot\mu_1^2+f_1(\tau)]d\tau,\quad t\in[0,0.5);$$

$$u_{12}(t)=\int_0^t[(u_{12}(\tau)+\mu_1)^2+(\tau-1)(u_{12}(\tau)+\mu_1)+\tau^2\cdot\lambda_1^2+f_2(\tau)]d\tau,\quad t\in[0,0.5);$$

$$u_{21}(t)=\int_{0.5}^t[(u_{21}(\tau)+\lambda_2)^2+\tau\cdot\lambda_2+\tau^2\cdot\mu_1^2+f_1(\tau)]d\tau,\quad t\in[0.5,1);$$

$$u_{22}(t)=\int_{0.5}^t[(u_{22}(\tau)+\mu_2)^2+(\tau-1)(u_{22}(\tau)+\mu_2)+\tau^2\cdot\lambda_1^2+f_2(\tau)]d\tau,\quad t\in[0.5,1).$$

В интегральных уравнениях вместо $u_{11}(\tau)$, $u_{12}(\tau)$, $u_{21}(\tau)$, $u_{22}(\tau)$ подставляя соответствующие правые части и повторив этот процесс ν $(\nu=1,2,\ldots)$ раз, имеем представления функций $u_{11}(t)$, $u_{12}(t)$, $u_{21}(t)$, $u_{22}(t)$. Определив $\lim\limits_{t\to0.5-0}u_{11}(t)$, $\lim\limits_{t\to0.5-0}u_{12}(t)$, $\lim\limits_{t\to1-0}u_{21}(t)$, $\lim\limits_{t\to1-0}u_{22}(t)$ и подставив их в (19)–(22), получим систему нелинейных уравнений относительно введенных параметров:

$$Q_\nu(\Delta_2;\lambda,u)=0,\lambda=(\lambda_1,\mu_1,\lambda_2,\mu_2). \tag{23}$$

Выбор начального приближения решения задачи (15)–(22) основывается на решении системы (23) при u $=0$, т. е. системы

$$\begin{cases}480\lambda_1-660\lambda_2-240\lambda_2^2-140\mu_1^2-17=0;\\24\mu_1-21\mu_2-12\mu_2^2-7\lambda_1^2-9=0;\\480\lambda_1-420\lambda_2+240\lambda_1^2+20\mu_1^2-133=0;\\15\mu_1-24\mu_2+12\mu_1^2+\lambda_1^2-3=0.\end{cases}$$

Пусть при заданных Δ_2 и $\nu=1$ система $Q_1(\Delta_2;\lambda,0)=0$ имеет решение $\tilde{\lambda}=(\tilde{\lambda}_1,\tilde{\mu}_1,\tilde{\lambda}_2,\tilde{\mu}_2)\in R^4$. Возьмем точку

$$t_0=0<t_1=\frac{\theta}{2}<t_2=\theta<t_3=\frac{1+\theta}{2}<t_4=1.$$

Разбиение $[0,1)=\bigcup\limits_{r=1}^{4}[t_{r-1},t_r)$ обозначим через Δ_4. По схеме метода параметризации система нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров имеет вид

$$Q_1(\Delta_4;\lambda,u)=0,\lambda=(\lambda_1,\mu_1,\ldots,\lambda_4,\mu_4)\in R^8. \tag{24}$$

Для нахождения решения системы (24) используется теорема 1 из [6], где за начальное приближение решения берется вектор $\lambda^{(0)}=(\lambda_1^{(0)},\mu_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},\mu_2^{(0)},\lambda_3^{(0)},\mu_3^0,\lambda_4^{(0)},\mu_4^{(0)})\in R^8$. Здесь

$$\lambda_1^{(0)}=\tilde{\lambda}_1,\ \hat{\lambda}_2^{(0)}=\tilde{\lambda}_1+\int_{t_0}^{t_1}[\tilde{\lambda}_1^2+\tau\cdot\tilde{\lambda}_2+\tau^2\cdot\tilde{\mu}_1^2+f_1(\tau)]d\tau;$$

$$\hat{\mu}_1^{(0)} = \tilde{\mu}_1,\ \hat{\mu}_2^{(0)} = \tilde{\mu}_1 + \int_{t_0}^{t_1} [\tilde{\mu}_1^2 + (\tau-1)\tilde{\mu}_1 + \tau^2 \cdot \tilde{\lambda}_1^2 + f_2(\tau)]d\tau;$$

$$\hat{\lambda}_3^{(0)} = \tilde{\lambda}_2,\ \hat{\lambda}_4^{(0)} = \tilde{\lambda}_2 + \int_{t_2}^{t_3} [\tilde{\lambda}_2^2 + \tau \cdot \tilde{\lambda}_2 + \tau^2 \cdot \tilde{\mu}_1^2 + f_1(\tau)]d\tau;$$

$$\hat{\mu}_3^{(0)} = \tilde{\mu}_2,\ \hat{\mu}_4^{(0)} = \tilde{\mu}_2 + \int_{t_2}^{t_3} [\tilde{\mu}_2^2 + (\tau-1)\tilde{\mu}_2 + \tau^2 \cdot \tilde{\lambda}_1^2 + f_2(\tau)]d\tau.$$

Таким образом, предложенный в настоящей работе подход к выбору начального приближения решения задачи (15)–(22) основан на решении системы нелинейных алгебраических уравнений при соответствующем разбиении и при $u = 0$, т.е. системы уравнений

$$Q_\nu(\Delta_{2^k}; \lambda, 0) = 0, \lambda = (\lambda_1, \mu_1, \ldots, \lambda_{2^k}, \mu_{2^k}),\ \ k = 1, 2, \ldots. \qquad (25)$$

В таблицах 1 и 2 приведены вычисления значений введенных дополнительных параметров и точного решения нелинейной краевой задачи (13), (14) при ν=1 и ν=2 соответственно.

Таблица 1

Значения дополнительных параметров и точного решения нелинейной краевой задачи при $\nu = 1$

Число разбиений, $\Delta_{2^k},\ k \in \mathrm{N}$	t	λ	$x_1^*(t)$	μ	$x_2^*(t)$
Δ_2	0.0	0.0229099	0	0.9999052	1
	0.5	- 0.242574	-0.25	0.9998678	1
Δ_4	0.00	0.0122464	0	0.9999749	1
	0.25	-0.1785389	-0.1875	0.9999686	1
	0.50	-0.2459039	-0.25	0.9999633	1
	0.75	-0.1808678	-0.1875	0.9999632	1
Δ_8	0.000	0.0065145	0	0.9999931	1
	0.125	-0.1033719	-0.109375	0.9999922	1
	0.250	-0.1830214	-0.1875	0.9999913	1
	0.375	-0.2313403	-0.234375	0.9999903	1
	0.500	-0.2476398	-0.25	0.9999896	1
	0.625	-0.2316768	-0.234375	0.9999893	1
	0.750	-0.1836136	-0.1875	0.9999895	1
	0.875	-0.1039513	-0.109375	0.9999907	1
Δ_{16}	0.0000	0.0033501	0	0.9999982	1
	0.0625	-0.0553144	-0.0585938	0.9999981	1
	0.1250	-0.1063583	-0.109375	0.999998	1
	0.1875	-0.1496983	-0.1523438	0.9999978	1
	0.2500	-0.1852618	-0.1875	0.9999977	1
	0.3125	-0.2129881	-0.2148438	0.9999976	1
	0.3750	-0.2328306	-0.234375	0.9999974	1
	0.4375	-0.2447568	-0.2460938	0.9999973	1
	0.5000	-0.2487481	-0.25	0.9999973	1
	0.5625	-0.2447988	-0.2460938	0.9999972	1
	0.6250	-0.2329156	-0.234375	0.9999972	1
	0.6875	-0.2131159	-0.2148438	0.9999972	1
	0.7500	-0.1854271	-0.1875	0.9999972	1
	0.8125	-0.1498858	-0.1523438	0.9999973	1
	0.8750	-0.1065376	-0.109375	0.9999975	1
	0.9375	-0.0554374	-0.0585938	0.9999978	1

Таблица 2

Значения дополнительных параметров и точного решения нелинейной краевой задачи при $\nu = 2$

Число разбиений, $\Delta_{2^k}, k \in \mathrm{N}$	t	λ	$x_1^*(t)$	μ	$x_2^*(t)$
Δ_2	0.0	-0.010804	0	0.999981	1
	0.5	-0.258672	-0.25	0.999971	1
Δ_4	0.00	-0.001675	0	0.9999996	1
	0.25	-0.189051	-0.1875	0.9999994	1
Δ_8	0.50	-0.251296	-0.25	0.9999993	1
	0.75	-0.188913	-0.1875	0.9999993	1
	0.000	-0.0000265	0	1	1
	0.125	-0.109635	-0.109375	1	1
	0.250	-0.187735	-0.1875	1	1
	0.375	-0.234579	-0.234375	1	1
	0.500	-0.250187	-0.25	1	1
	0.625	-0.234569	-0.234375	1	1
	0.750	-0.187717	-0.1875	1	1
	0.875	-0.109619	-0.109375	1	1
Δ_{16}	0.0000	-0.000053	0	1	1
	0.0625	-0.058646	-0.0585938	1	1
	0.1250	-0.109425	-0.109375	1	1
	0.1875	-0.152392	-0.1523438	1	1
	0.2500	-0.187544	-0.1875	1	1
	0.3125	-0.214885	-0.2148438	1	1
	0.3750	-0.234413	-0.234375	1	1
	0.4375	-0.246129	-0.2460938	1	1
	0.5000	-0.250034	-0.25	1	1
	0.5625	-0.246129	-0.2460938	1	1
	0.6250	-0.234412	-0.234375	1	1
	0.6875	-0.214883	-0.2148438	1	1
	0.7500	-0.187543	-0.1875	1	1
	0.8125	-0.152389	-0.1523438	1	1
	0.8750	-0.109424	-0.109375	1	1
	0.9375	-0.058645	-0.0585938	1	1

При вычислении значений параметров использовали математический пакет Mathcad (табл. 3).

Таблица 3

Оценка разности точного решения нелинейной краевой задачи и начального приближения

	ν=1		ν=2	
	$\lVert x_1^*(t) - \lambda^0 \rVert$	$\lVert x_2^*(t) - \mu^0 \rVert$	$\lVert x_1^*(t) - \lambda^0 \rVert$	$\lVert x_2^*(t) - \mu^0 \rVert$
Δ_2	$3 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-5}$
Δ_4	$1 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-7}$
Δ_8	$6 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-8}$
Δ_{16}	$3 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-10}$

Таким образом, в работе предложен один из способов выбора начального приближения для нахождения нелинейной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений.

Список литературы

1 *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. — М.: Высш. шк., 1995. — С. 205.

2 *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применение. — М.: Наука, 1990. — С. 232.

3 *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применение // Диф. уравнения. — 1983. — Т. 19. — № 1. — С. 86–94.

4 *Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р.* О численном решении нагруженных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. математики и матем. физики. — 2004. — Т. 44. — № 9. — С. 1585–1595.

5 *Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р.* Численный метод решения нагруженных нелокальных граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. математики и матем. физики. — 2014. — Т. 54. — № 7. — С. 1096–1109.

6 *Aida-zade K.R., Abdullaev V.M.* On Numerical Solution to Loaded Systems of Ordinary Differential Equations with Non-separated Multipoint and Integral Conditions // Numerical Analysis and Applications. — 2014. — Vol. 17. — No. 1. — P. 1–16.

7 *Бакирова Э.А.* О признаке однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. — 2005. — № 1. — С. 95–102.

8 *Джумабаев Д.С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Журн. вычисл. математики и матем. физики. — 1989. — Т. 29. — № 1. — С. 50–66.

Э.А. Бакирова, Н.Б. Искакова

Жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін сызықты емес шеттік есептің шешімінің бастапқы жуықтауын таңдаудың бір тәсілі туралы

Мақалада параметрлеу әдісі негізінде жіктелген дифференциалдық теңдеулер үшін сызықты емес екі нүктелі шеттік есеп зерттелді. Параметрлеу әдісінің мәні, берілген аралықты жүктелу нүктелерімен бөлу және қосымша параметрлер енгізу арқылы қарастырылып отырған есеп пара-пар параметрлері бар сызықты емес екі нүктелі шеттік есепке келтірілді. Қосымша параметрлер енгізу ішкі аралықтарда белгісіз функциялар үшін бастапқы шарттарды алуға мүмкіндік берді. Параметрлердің бекітілген мәндерінде жай дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Коши есебі шешілді. Коши есебінің шешімінің кейіптемелерін шеттік шарттарға және аралықты бөлетін ішкі нүктелеріндегі шешімнің үзіліссіздік шарттарына қоя отырып, енгізілген параметрлерге қарасты сызықты емес алгебралық теңдеулер жүйесі құрылды. Құрылған сызықты емес алгебралық теңдеулер жүйесі параметрлеу әдісінің алгоритмдерінің негізі болып табылады және жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін сызықты емес екінүктелі шеттік есептің шешіміне «жақсы» алғашқы жуықтауларды табуға мүмкіндік береді. Сызықты емес шеттік есептің шешімін табуға арналған «жақсы» алғашқы жуықтауды таңдап алудың бір тәсілі ұсынылған. Бұл қадамдар жеткілікті түрде аз болғанда жіктелген дифференциалдық теңдеулер үшін сызықты емес екі нүктелі шеттік есептің оқшауланған шешімінің бар болуының шарттары алынған.

E.A. Bakirova, N.B. Iskakova

An approach to the choice of the initial approximation of the solution of nonlinear boundary value problem for loaded differential equations

On the basis of the parameterization method is investigated nonlinear two-point boundary value problem for systems loaded differential equations. The essence of the parameterization is that the problem of the partition of the interval specified points of loading and introduction of additional parameters is reduced to the equivalent nonlinear two-point boundary value problem with parameter. The introduction of additional parameters allows to get the initial conditions for the unknown functions in the sub-intervals. For fixed values of the parameters solved the Cauchy problem for systems of ordinary differential equations. Substituting the representation of the solution of the Cauchy problem in the boundary condition and the conditions of continuity of the solution was bult for the entered parameters. Built a system of nonlinear algebraic equations are the basis of the method of parameterization algorithms and allow us to find a good initial approximation to the solution of a nonlinear two-point boundary value problem for loaded differential equations. A one way to choosing a good initial approximation was offered for finding solutions of nonlinear boundary problem .The conditions of existence of isolated solution of the nonlinear two-point boundary value problem for loaded differential equations for sufficiently small steps partition.

References

1 Nahushev A.M. *Equations of Mathematical Biology*, Moscow: Vysshaya shkola, 1995, p. 205.

2 Nahushev A.M. *Loaded equations and their applications*, Moscow: Nauka, 2012, p. 232.

3 Nahushev A.M. *Differential equations*, 1983, 19, 1, p. 86–94.

4 Abdullaev V.M., Aida-zade K.R. *Computational Mathematics and Mathematical Physics Journal*, 2004, 44, 9, p. 1585–1595.

5 Abdullayev V.M., Aida-zadeh K.R. *Computational Mathematics and Mathematical Physics Journal*, 2014, 54, 7, p. 1096–1109.

6 Aida-zade K.R., Abdullaev V.M. *Numerical Analysis and Applications,* 2014, 17, 1, p. 1–16.

7 Bakirova E.A. *News of the National Academy of Sciences of RK,* Ser. of Physical and Mathemayical, 2005, 1, p. 95–102.

8 Dzhumabaev D.S. *Computational Mathematics and Mathematical Physics Journal*, 1989, 29, 1, p. 50–66.