УДК 517.5

Г.Акишев

Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова
(E-mail: akishev@ksu.kz)

Оценки билинейных приближений функций в пространстве Лоренца

В статье рассмотрены пространство Лоренца периодических функций многих переменных и класс Никольского-Бесова. В пространстве Лоренца дано определение билинейного приближения функции и приведена теорема Марцинкевича-Зигмунда для тригонометрического полинома. Установлены оценки наилучших билинейных приближений класса Никольского-Бесова в пространстве Лоренца.

Ключевые слова: билинейное приближение, пространство Лоренца, класс Никольского-Бесова.

Пусть $\bar{x} = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{I}^m = [0, 2\pi)^m$. Пространством Лоренца $L_{q,\theta}(\mathbb{I}^m)$ называется множество всех измеримых по Лебегу 2π-периодических функций, для которых

$$\|f\|_{q,\theta} = \left\{ \frac{\theta}{q} \int_0^{(2\pi)^m} \left(\int_0^t f^*(\tau) d\tau \right)^\theta t^{\theta(\frac{1}{q}-1)-1} dt \right\}^{\frac{1}{\theta}} < +\infty, \quad 1 < q < +\infty, \quad 1 \le \theta < +\infty,$$

где $f^*(\tau)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(\bar{x})|$ [1]. Если $\theta = q$, то $L_{q,q}(\mathbb{I}^m) = L_q(\mathbb{I}^m)$ — пространство Лебега [2].

Пусть $V_l(t)$, $l \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, обозначает ядро Валле-Пуссена вида

$$V_l(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{l} \cos kt + 2 \sum_{k=l+1}^{2l-1} \frac{2l-k}{l} \cos kt,$$

(при $l = 1$ вторую сумму считаем равной нулю).

Многомерное ядро Валле-Пуссена $V_l(\bar{x})$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$, определяется по формуле

$$V_l(\bar{x}) = \prod_{j=1}^{m} V_l(x_j).$$

На пространстве $L_{p,\theta}(\mathbb{I}^m)$ определим оператор свертки $\mathbb{V}_l : L_{p,\theta}(\mathbb{I}^m) \to L_1(\mathbb{I}^m)$, действующий по формуле

$$\mathbb{V}_l f(\bar{x}) = (2\pi)^m \int_{\mathbb{I}^m} f(\bar{y}) V_l(\bar{x} - \bar{y}) d\bar{x}.$$

Таким образом, с помощью оператора $\mathbb{V}_l$ определяются кратные средние Валле-Пуссена функции $f \in L_{p,\theta}(\mathbb{I}^m)$
$$V_l(f,\bar{x}) = \mathbb{V}_l f(\bar{x}).$$
Для функции $f \in L_{p,\theta}(\mathbb{I}^m)$, $1 < p < \infty$, $1 \le \theta < \infty$, положим
$$\sigma_0(f,\bar{x}) = V_1(f,\bar{x}), \ \ \sigma_s(f,\bar{x}) = V_{2^s}(f,\bar{x}) - V_{2^{s-1}}(f,\bar{x}), \ \ s = 1,2,\dots .$$

Пусть $1 < p, \theta < \infty$, $1 \le \tau \le \infty$ и $r > 0$. Рассмотрим классы Никольского-Бесова
$$H^r_{p,\theta} = \left\{ f \in L_{p,\theta}(\mathbb{I}^m) : \|\sigma_s(f)\|_{p,\theta} \le 2^{-sr}, s \in \mathbb{Z}_+ \right\},$$
$$B^r_{p,\theta,\tau} = \left\{ f \in L_{p,\theta}(\mathbb{I}^m) : \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{sr\theta} \|\sigma_s(f)\|^{\tau}_{p,\theta} \right)^{\frac{1}{\tau}} \le 1 \right\}.$$

Для функции $f \in L_{p,\theta}(\mathbb{I}^{2m})$ рассмотрим наилучшее билинейное приближение порядка $M \in \mathbb{N}$
$$\tau_M(f)_{p,\theta} = \inf_{u_j(\bar{x}), v_j(\bar{y})} \|f(\bar{x},\bar{y}) - \sum_{j=1}^{M} u_j(\bar{x}) v_j(\bar{y})\|_{p,\theta},$$
где $u_j \in L_{p,\theta}(\mathbb{I}^m)$; $v_j \in L_{p,\theta}(\mathbb{I}^m)$.

Теория билинейных приближений имеет долгую и богатую историю. По-видимому, первый результат был получен Е.Шмидтом в 1907 г. и относится к задаче наилучшего билинейного приближения функций $f(x_1, x_2)$ двух переменных в гильбертовом пространстве L_2 [3]. Эта задача, в свою очередь, тесно связана с проблемой разложения соответствующего интегрального оператора с ядром $f(x_1, x_2)$ [3]. Систематическое развитие этой теории проведено в серии работ В.Н.Темлякова $[4-7]$ (там же и в [8] см. историю вопроса и подробную библиографию). Оценкам порядка величин $\tau_M(F)_q$ в случае, когда F — класс Соболева W^r_p или Никольского H^r_p, посвящены статьи В.Н. Темлякова [4–7], Э.С. Белинского [9], М.-Б.А. Бабаева [10], К. Т. Мынбаева [11]. Точный порядок наилучшего билинейного приближения функций вида $f(\bar{x}-\bar{y})$ на классе Никольского-Бесова-Аманова $S^r_{p,\theta}B$ в пространстве Лебега $L_q(\mathbb{I}^m)$ установил и А.С. Романюк и В.С. Романюк [12, 13].

Оценки билинейных приближений обобщенных классов Никольского-Бесова-Аманова в пространстве Лебега получила К.В. Солич [14, 15].

С другой стороны, билинейное приближение функций тесно связано с оценками колмогоровских поперечников классов функций (см. [5, 9, 11]).

Если задан класс $F \subset L_{p,\theta}(\mathbb{I}^{2m})$, то положим
$$\tau_M(F)_{p,\theta} = \sup_{f \in F} \tau_M(f)_{p,\theta}.$$

Цель статьи — найти оценки наилучших билинейных приближений функций класса Никольского-Бесова $B^r_{p,\theta,\tau}$ в пространстве Лоренца.

Для положительных величин $A(y), B(y)$ запись $A(y) \asymp B(y)$ означает, что существуют положительные числа C_1, C_2 такие,что $C_1 A(y) \le B(y) \le C_2 A(y)$.

Основные результаты

Основным результатом статьи является теорема 2. Сначала приведем некоторые вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства основного результата.

Рассмотрим множества

$$C^m(M) = \{\bar{k} = (k_1, ..., k_m) \in \mathbb{Z}^m : |k_j| \leq M, j = 1, ..., m\};$$

$$\mathbb{T}(C^m(M)) = \left\{ T(\bar{x}) = \sum_{\bar{k} \in C^m(M)} c_{\bar{k}} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle}, c_{\bar{k}} \in \mathbb{C} \right\}$$

и для чисел $1 < p < \infty, \ 1 \leq \theta < \infty$ положим, что

$$\mathbb{T}(C^m(M))_{p,\theta} = \{f \in \mathbb{T}(C^m(M)) : \|f\|_{p,\theta} \leq 1\}.$$

Теорема 1 [16]. Пусть $f \in \mathbb{T}(C^m(M)), n \in \mathbb{N}$, $1 \leq \theta_1, \theta_2 < \infty$. Тогда при $1 < p < q \leq \infty$ имеет место неравенство

$$\|f\|_{q,\theta_2} \leq C 2^{nm(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|f\|_{p,\theta_1}.$$

Лемма 1. Пусть $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n, \quad 1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 < \infty$. Если

$$\sum_{l=1}^{n} a_l^{\theta_1} l^{\theta_1 \alpha - 1} \leq A^{\theta_1}$$

и $\theta_2 \beta \leq \theta_1 \alpha$, то

$$\left(\sum_{l=n_1}^{n} a_l^{\theta_2} l^{\theta_2 \beta - 1} \right)^{\frac{1}{\theta_2}} \leq C A n_1^{-(\alpha - \beta)}.$$

Замечание. В случае $\alpha = \frac{1}{\theta_1}, \ \beta = \frac{1}{\theta_2}$ лемма 1 ранее доказана В.Н. Темляковым [4].

Для заданного тригонометрического полинома

$$T_{\bar{N}}(\bar{x}) = \sum_{|k_j| \leq N_j, j=1,...m} c_{\bar{k}} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle}$$

рассмотрим функцию

$$JT_{\bar{N}}(\bar{x}^{\bar{n}}, \bar{t}) = \sum_{n_1=1}^{4N_1} ... \sum_{n_m=1}^{4N_m} T_{\bar{N}}(\bar{x}^{\bar{n}}) \chi_{I_{\bar{n}}}(\bar{t}),$$

где $\chi_{I_{\bar{n}}}(\bar{t})$ – характеристическая функция множества

$$I_{\bar{n}} = \prod_{j=1}^{m} [\frac{\pi(n_j - 1)}{2N_j}, \frac{\pi n_j}{2N_j}], \bar{x}^{\bar{n}} = (x_1^{\bar{n}}, ..., x_m^{\bar{n}}), x_j^{n_j} \ = \ \frac{\pi n_j}{2N_j}, n_j \ = \ 1, ..., 4N_j, \ \ j = 1, ..., m.$$

Пусть $M_m = \prod_{j=1}^{m} 4N_j$; $\{T_{\bar{N}}^*(j)\}_{j=1}^{M_m}$ — невозрастающая перестановка чисел $|T_{\bar{N}}(\bar{x}^{\bar{n}})|$.

В работе [17] в пространстве Лоренца доказано соотношение

$$\|T_{\bar{N}}\|_{p,\theta} \asymp \|JT_{\bar{N}}\|_{p,\theta}, \ \ 1 < p < \infty, \ \ 1 \leq \theta < \infty,$$

которое можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Лемма 2. Пусть $1 < p < \infty, \ \ 1 \leq \theta < \infty$. Тогда для любого тригонометрического полинома $T_{\bar{N}}$ справедливо соотношение

$$\|T_{\bar{N}}\|_{p,\theta} \asymp \left(prod_{j=1}^{m} \frac{\pi n_j}{2N_j} \right)^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{j=1}^{M_m} \left(T_{\bar{N}}^*(j) j^{\frac{\theta}{p} - 1} \right) \right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Теперь докажем основные результаты.

Теорема 2. Пусть $1 \le \theta_1, \theta_2 < \infty$, $1 \le \tau \le \infty$.

1. Если $1 < p \le 2 < q < \infty$, $\frac{r}{m} > \frac{2}{p}$, то

$$\tau_M(B^r_{p,\theta_1,\tau})_{q,\theta_2} \asymp M^{-\frac{r}{m}+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

2. Если $1 < p < q \le 2$, $\theta_1 \le \theta_2$, $\frac{\theta_2}{q} \le \frac{\theta_1}{p}$, $\frac{r}{m} > 2(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$, то

$$\tau_M(B^r_{p,\theta_1,\tau})_{q,\theta_2} \le CM^{-\frac{r}{m}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

В случае $q \ge \theta_2$ оценка точна по порядку.

3. Если $2 < p < q < \infty$, $r > m$, то

$$\tau_M(B^r_{p,\theta_1,\tau})_{q,\theta_2} \le CM^{-\frac{r}{m}}.$$

Доказательство. Оценку сверху достаточно установить в случае $\tau = \infty$. Пусть дана функция $f(\bar{t}) \in H^r_{p,\theta_1}$, $\bar{t} = (t_1, ..., t_{2m}) \in \mathbb{R}^{2m}$.

Рассмотрим полиномы

$$A_n(f;\bar{z}) = f(\bar{t}) * \Big(V_{2^n}(\bar{t}) - V_{2^{n-1}}(\bar{t})\Big), \ \ n = 1, 2, \dots;$$

$$A_0(f;\bar{z}) = f(\bar{t}) * V_1(\bar{t}).$$

Здесь $\bar{z} = (z_1, ..., z_{2m}) \in \mathbb{R}^{2m}$. Тогда функцию $f(\bar{t}) \in H^r_{p,\theta_1}$ можно представить в виде

$$f(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(f;\bar{z}). \tag{1}$$

Пусть $2 \le p < q < \infty$, $r > 0$, $1 \le \theta_1, \theta_2 < \infty$ и $f \in H^r_{p,\theta_1}$.

Положим $M_1 = (2^{l+1} - 1)^m \asymp 2^{lm}$, $M_n = [M_1 2^{-\alpha(n-l)}]$, $n \ge l$, где $[a]$– целая часть числа a, $\alpha > 0$ — произвольное число.

Пусть $M = C(\alpha)2^{lm}$, где $C(\alpha) > 0$ — достаточно большое число. Тогда

$$M_0 = M_1 + \sum_{n=l}^{\infty} M_n < M \text{ и } M_0 \asymp 2^{lm}.$$

Существует число $n_0 = [\lambda l] + 1$, $\lambda > 1$, такое, что $M_n > 1$ при $l \le n \le n_0$ и $M_n = 0$ при $n > n_0$. Далее, по лемме 1 в [13]

$$\tau_{M_n}(A_n(f))_\infty \le CM_n^{-1} 2^{nm} \log(1 + M_n^{-1} 2^{nm}) \|A_n(f)\|_2 \tag{2}$$

при $n \le n_0$.

Если $2 < p$, то $H^r_{p,\theta_1} \subset H^r_{2,2}$. Поэтому из оценки (2) получим

$$\tau_{M_n}(A_n(f))_\infty \le CM_n^{-1} 2^{nm} \log(1 + M_n^{-1} 2^{nm}) 2^{-nr}$$

при $n \le n_0$.

Далее, пользуясь этой оценкой и неравенством разных метрик (теорема 1), получим:

$$\tau_M(f)_{q,\theta_2} \le \tau_M(f)_\infty = \sum_{n=l}^{n_0} \tau_{M_n}(A_n(f))_\infty + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \|A_n(f)\|_\infty \le$$

$$\le C\left\{\sum_{n=l}^{n_0} M_n^{-1} 2^{nm} \log(1 + M_n^{-1} 2^{nm}) 2^{-nr} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{nm} \|A_n(f)\|_2\right\} \le \tag{3}$$

$$\le C\left\{M_1^{-1} 2^{-l\alpha} \sum_{n=l}^{n_0} 2^{-n(r-m-\alpha)} \log(1 + M_n^{-1} 2^{nm}) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n(r-m)}\right\}.$$

Выберем число α такое, что $r-m-\alpha>0$. Тогда из неравенства (3) находим

$$\tau_M(f)_{q,\theta_2} \le C\left\{M_1^{-1}2^{-l\alpha}2^{-l(r-m-\alpha)}+2^{-n_0(r-m)}\right\} \le C2^{-lr} \asymp M^{-\frac{r}{m}}.$$

Таким образом,

$$\tau_M(f)_{q,\theta_2} \le CM^{-\frac{r}{m}}$$

для любой функции $f(\bar{t}) \in H^r_{p,\theta_1}$ в случае $2<p<q<\infty,\ \ r>m$.

Следовательно,

$$\tau_M(B^r_{p,\theta_1,\tau})_{q,\theta_2} \le CM^{-\frac{r}{m}} \tag{4}$$

в случае $2<p<q<\infty,\ \ r>m$.

Если $p=2<q<\infty$ и $\theta_1\le 2$, то $H^r_{p,\theta_1}=H^r_{2,\theta_1}\subset H^r_{2,2}$. Поэтому оценка (4) остается справедливой и в этом случае.

Пусть $1<p<q\le 2$. Для $n\ge 2$ полином $A_n(f,\bar{z})$ представим в виде

$$A_n(f,\bar{z}) = 2^{-2m(n+3)}\sum_{\bar{\mu},\bar{\nu}} A_n(f,\bar{x}^{\bar{\mu}},\bar{y}^{\bar{\nu}})V_{2^{n+1}}(\bar{x}-\bar{x}^{\bar{\mu}},\bar{y}-\bar{y}^{\bar{\nu}}),$$

где

$$x_j^{\bar{\mu}} = \frac{\mu_j\pi}{2^{n+2}},\ \ \mu_j=0,1,2,...,2^{n+3}-1,\ \ j=1,...,m;$$

$$y_j^{\bar{\nu}} = \frac{\nu_j\pi}{2^{n+2}},\ \ \nu_j=0,1,2,...,2^{n+3}-1,\ \ j=1,...,m.$$

Пусть G_n обозначает множество, состоящее из M_n точек $(\bar{x}^{\bar{\mu}},\bar{y}^{\bar{\nu}})$ с наибольшими числами $|A_n(f,\bar{x}^{\bar{\mu}},\bar{y}^{\bar{\nu}})|$. Тогда

$$G_n=\{(\bar{x}^{\bar{\mu}},\bar{y}^{\bar{\nu}}):\ \mu_j=0,1,2,...,2^{n+3}-1;\ \nu_j=0,1,2,...,2^{n+3}-1;\ \ j=1,...,m\}=\square_n.$$

$M_n=|G_n|$; $|\square_n|$ — количество точек соответственно множеств $G_n,\ \square_n$.

Рассмотрим функцию

$$g_n(\bar{x},\bar{y}) = 2^{-2m(n+3)}\sum_{\bar{\mu},\bar{\nu}:(\bar{x}^{\bar{\mu}},\bar{y}^{\bar{\nu}})\in G_n} A_n(f,\bar{x}^{\bar{\mu}},\bar{y}^{\bar{\nu}})V_{2^{n+1}}(\bar{x}-\bar{x}^{\bar{\mu}},\bar{y}-\bar{y}^{\bar{\nu}}).$$

Применяя лемму 2, получим

$$\|A_n(f)-g_n\|_{q,\theta_2} = \|\sum_{(\bar{x}^{\bar{\mu}},\bar{y}^{\bar{\nu}})\in\square_n\setminus G_n} A_n(f,\bar{x}^{\bar{\mu}},\bar{y}^{\bar{\nu}})V_{2^{n+1}}(\bar{x}-\bar{x}^{\bar{\mu}},\bar{y}-\bar{y}^{\bar{\nu}})\|_{q,\theta_2} \le$$

$$\le C(2^{-n2m})^{\frac{1}{q}}\Big(\sum_{j=M_n+1}^{|\square_n|}(A_n^*(f,j))^{\theta_2}j^{\frac{\theta_2}{q}-1}\Big)^{\frac{1}{\theta_2}}. \tag{5}$$

По лемме 2 для полинома $A_n(f,\bar{x},\bar{y})$ имеем

$$(\pi 2^{-n2m})^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{j=1}^{|\square_n|}(A_n^*(f,j))^{\theta_1}j^{\frac{\theta_1}{p}-1}\Big)^{\frac{1}{\theta_1}} \le C\|A_n(f)\|_{p,\theta_1}.$$

Следовательно, если $\theta_1\le\theta_2$ и $\frac{\theta_2}{q}\le\frac{\theta_1}{p}$, то по лемме 1 получим

$$\left(\sum_{j=M_n+1}^{|\square_n|}(A_n^*(f,j))^{\theta_2}j^{\frac{\theta_2}{q}-1}\right)^{\frac{1}{\theta_2}} \le C2^{\frac{n2m}{p}}M_n^{-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|A_n(f)\|_{p,\theta_1}.$$

Поэтому из неравенства (5) будем иметь

$$\|A_n(f)-g_n\|_{q,\theta_2}\le C2^{n2m(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}M_n^{-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|A_n(f)\|_{p,\theta_1}, \tag{6}$$

если $\theta_1\le\theta_2$ и $\frac{\theta_2}{q}\le\frac{\theta_1}{p}$.

Из неравенства

$$\tau_M(f)_{q,\theta_2}\le\sum_{n=l}^{\infty}\tau_{M_n}(A_n(f))_{q,\theta_2},$$

учитывая соотношение (6) и применяя неравенство разных метрик, получим

$$\tau_M(f)_{q,\theta_2}\le\sum_{n=l}^{n_0}\|A_n(f)-g_n\|_{q,\theta_2}+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\|A_n(f)\|_{q,\theta_2}\le$$

$$\le C\Big\{\sum_{n=l}^{n_0}2^{n2m(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}M_n^{-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|A_n(f)\|_{p,\theta_1}+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}2^{n2m(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|A_n(f)\|_{p,\theta_1}\Big\}.$$

Так как $f\in H^r_{p,\theta_1}$, то, учитывая определение чисел M_n, отсюда будем иметь

$$\tau_M(f)_{q,\theta_2}\le C\left\{M_1^{-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}2^{-l\alpha\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\sum_{n=l}^{n_0}2^{-n\left(r-(2m+\alpha)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)}+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}2^{-n\left(r-2m\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)}\right\}. \tag{7}$$

Выберем положительное число α такое, что $r-(2m+\alpha)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)>0$. Тогда из формулы (7) следует, что

$$\tau_M(f)_{q,\theta_2}\le CM^{-\left(\frac{r}{m}-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)}$$

для любой функции $f(\bar t)\in H^r_{p,\theta_1}$ в случае $1<p<q\le 2$ и $\theta_1\le\theta_2$, $\dfrac{\theta_2}{q}\le\dfrac{\theta_1}{p}$.

Следовательно,

$$\tau_M(B^r_{2,\theta_1,\tau})_{q,\theta_2}\le CM^{-\left(\frac{r}{m}-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)}$$

в случае $1<p<q\le 2$, $\theta_1\le\theta_2$ и $\frac{\theta_2}{q}\le\frac{\theta_1}{p}$. Этим оценки сверху доказаны.

Докажем оценки снизу. Пусть $1<p<q\le 2$. Если $q\ge\theta_2$, то $L_{q,\theta_2}(\mathbb{I}^{2m})\subset L_q(\mathbb{I}^{2m})$ и $\|f\|_q\le$ $\le C\|f\|_{q,\,\theta_2}$. Так как $V_{2^n}(\bar x-\bar y)$ — непрерывная функция, то $V_{2^n}\in L_q(\mathbb{I}^{2m})$. В работе [13] доказано, что

$$\tau_M(V_{2^n}(\bar x-\bar y))_q\ge C2^{-nm\left(\frac{1}{q}-1\right)}.$$

Следовательно,

$$\tau_M(V_{2^n}(\bar x-\bar y))_{q,\theta_2}\ge C_1 2^{-nm\left(\frac{1}{q}-1\right)} \tag{8}$$

при условии $q\ge\theta_2$.

Теперь рассмотрим функцию

$$f_1(\bar t)=C_1^{-1}2^{-nm\left(\frac{r}{m}+1-\frac{1}{p}\right)}V_{2^n}(\bar t),\ \ \bar t\in\mathbb{R}^m.$$

Так как $\|V_{2^n}\|_{p,\theta_1}\asymp 2^{nm\left(1-\frac{1}{p}\right)}$, $1<p<\infty$, то нетрудно убедиться, что функция $f_1\in B^r_{p,\theta_1,\tau}$. Поэтому из неравенства (8) имеем

$$\tau_M(B^r_{p,\theta_1,\tau})_{q,\theta_2}\ge\tau_M(f_1)_{q,\theta_2}\ge C2^{-nm\left(\frac{r}{m}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}\ge CM^{-\left(\frac{r}{m}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \tag{9}$$

в случае $1 < p < q \leq 2$ при условии $q \geq \theta_2$.

Пусть $1 < p < 2 < q < \infty$. Так как $L_{q,\theta_2}(\mathbb{I}^{2m}) \subset L_2(\mathbb{I}^{2m})$ и $\|f\|_2 \leq C\|f\|_{q,\theta_2}$ при $2 < q < \infty$, то

$$\tau_M(B^r_{p,\theta_1,\tau})_{q,\theta_2} \geq \tau_M(f_1)_2.$$

Следовательно, в силу (9) при $q = \theta_2 = 2$ имеем

$$\tau_M(B^r_{p,\theta_1,\tau})_{q,\theta_2} \geq CM^{-\left(\frac{r}{m}+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}.$$

Этим оценка снизу в случае $1 < p < 2 < q < \infty$, $1 \leq \theta_2 < \infty$ доказана.

Замечание. В случае $\theta_1 = p$, $\theta_2 = q$ из теоремы 2 следуют результаты А.С.Романюка и В.С.Романюка [13].

Список литературы

1 *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. — М.: Мир, 1974. — С. 216.

2 *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1977. — С. 11.

3 *Бирман М. Ш., Слоломяк М.З.* Оценки сингулярных чисел интегральных операторов // Успехи матем. наук. — 1977. — Т.32. — № 1. — С. 17–84.

4 *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1986. — Т. 178. — С. 3–112.

5 *Темляков В. Н.* Оценки наилучших билинейных приближений функций двух переменных и некоторые их приложения// Мат. сб. — 1987. — Т.134, № 1. — С. 93–107.

6 *Темляков В. Н.* Оценки наилучших билинейных приближений функций // Тр. Мат. ин-та. АН СССР. — 1988. — Т. 181. — С. 250–267.

7 *Темляков В. Н.* Билинейная аппроксимация и приложения// Тр. Матем. ин-та АН СССР. — 1989. — Т. 187. — С. 191–215.

8 *Temlyakov V.N.* Nonlinear methods of approximation// Found. Comput.Math. — 2003. — Vol. 3. — P.33–107.

9 *Белинский Э. С.* Приближение «плавающей» системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. — Ярославль, 1988. — С. 16–33.

10 *Бабаев М.-Б. А.* О порядке приближения соболевского класса W^r_q билинейными формами // Мат. сб. — 1991. — Т. 182. — № 1. — С. 122–129.

11 *Мынбаев К.Т.* О приближении интегральных операторов, их ядер и решений интегральных уравнений Фредгольма II рода в связи с оператором типа Штурма-Лиувилля // Изв. Российской академии наук. — Сер. мат. — 1993. — Т. 57. — № 1. — С. 192–201.

12 *Романюк А. С.* Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. Российской академии наук. — Сер. мат. — 2006. — Т. 70. — № 2. — С. 69–98.

13 *Романюк А. С., Романюк В. С.* Наилучшие билинейные приближения функций из пространств Никольского-Бесова // Укр. мат. журнал. — 2012. — Т. 64. — №5. — С. 685–697.

14 *Соліч К.В.* Найкращі білінійні наближення $S^r_{p,\theta}B$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журнал. — 2011. — Т. 63. — № 6. — С. 809–826.

15 *Соліч К.В.* Оцінки білінійних наближень класів $S^r_{p,\theta}B$ періодичних функцій двох змінних // Укр. мат. журнал. — 2012. — Т. 64. — № 8. — С. 1106–1120.

16 *Акишев Г.* О порядках m-членных приближений классов функций симметричного пространства // Мат. журнал. — 2014. — Т. 14. — № 4. — С. 46–71.

17 *Konig H.* s-Nnumbers of Besov-Lorentz imbeddings // Math. Nachr. — 1979. — Vol. 91. — P. 389–400.

Ғ.Ақышев

Лоренц кеңiстiгiнде функциялардың қоссызықты жуықтауларын бағалау

Мақалада 2π көп айнымалы функциялардың Лоренц кеңiстiгi және Никольский-Бесов класы қарастырылды. Лоренц кеңiстiгiнде функцияның ең жақсы қоссызықты жуықтауының анықтамасы және тригономериялық көпмүше үшiн Марцинкевич-Зигмунд теоремасы берiлген. Лоренц кеңiстiгiнде Никольский-Бесов класының функцияларының ең жақсы қоссызықты жуықтауының бағалауы алынды.

G.Akishev

The estimates bilinear of approximations functions in the space Lorentz

In this paper considered Lorentz space of periodic functions of many variables and Nikol'skii's-Besov's class. in Lorentz space the definition of the best bilinear of approximation function and Marcinkiewicz-Zygmund theorem for trigonometric polynomial. Is obtained the estimate of the best bilinear of approximation function Nikol'skii's-Besov's classes in the space Lorentz.

References

1 Stein I., Weis G. *Interduction to Fourier analysis on euclidean spaces,* Moscow: Mir, 1974, p. 216.

2 Nikol'skii S. M. *Approximation of classes of functions of several variables and embeding theorems,* Moscow: Nauka, 1977, p. 11.

3 Birman M.Sh. , Solomyak M. Z. *Russian Mathematical Surveys [Uspekhi Matematicheskikh Nauk],* 1977, 32, 1, p. 17–84.

4 Temlyakov V.N. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics,* 1986, 178, p. 3–112.

5 Temlyakov V.N. *Sbornik: Mathematics,* 1987, 134, 1, p. 93–107.

6 Temlyakov V.N. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1988, 181, p. 250–267.

7 Temlyakov V.N. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1989, 187, p. 191–215.

8 Temlyakov V.N. *Foundations of Computational Mathematics,* 2003, 3, p. 33–107.

9 Belinskii E. S. *Studies in the theory of functions of several real variables,* Yaroslavl, 1988, p. 16–33.

10 Babaev M.-B. A. *Sbornik: Mathematics,* 1991, 182, 1, p. 122–129.

11 Mynbaev K.T. *Izvestiya: Mathematics*, 1993, 57, 1, p. 192–201.

12 Romanyuk A. S. *Izvestiya: Mathematics,* 2006, 70, 2, p. 69–98.

13 Romanyuk A. S., Romanyuk V. S. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2012, 64, 5, p. 685–697.

14 Solich K.V. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2011, 63, 6, p.809–826.

15 Solich K.V. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2012, 64, 8, p. 1106–1120.

16 Akishev G. *Mathematical Journal* 2014, 14, 4, p. 46–71.

17 Konig H. *Mathematische Nachrichten*, 1979, 91, p. 389–400.