Қ.Н.Оспанов, А.Зұлхажав

Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана
(E-mail: ospanov_kn@enu.kz)

Екінші ретті айырымдық бір теңдеулер жүйесі шешімдерінің қасиеттері жайлы

Мақалада екінші ретті нұқсанды айырымдық теңдеулердің шексіз жүйесінің коэрцитивті шешілу шарттары алынған. Бұл шарт жүйені туындатушы оператор резольвентасының шағын және шектеулі типті болатынын қамтамасыз ететіні көрсетілген.

Кілт сөздер: айырымдық жүйе, оператордың бөліктенуі, шағын, сингулярлық мән.

1 Кіріспе және есептің қойылуы

ӘОЖ 517.9

Практикада дифференциалдық теңдеулермен қатар, айырымдық теңдеулер жүйелері де кеңінен қолданылады. Шексіз аралықта берілген (сингулярлы) сызықты дифференциалдық теңдеулердің аналогы болып табылатын айырымдық жүйелер шексіз көп сызықты алгебралық теңдеулерден тұрады. Осындағы теңдеулер санының шексіз көптігі және коэффициенттердің шенелмеген тізбек құруы оларды зерттеуді күрделендіреді. Оның үстіне сингулярлы дифференциалдық теңдеулермен салыстырғанда шексіз айырымдық жүйелер теориясы баяу дамуда. Мысалы, шексіз айырымдық теңдеулер жүйелері үшін бөліктену теориясы мүлде дамымаған десе болады. Негізгі қиындықтар дифференциалдық есептеу мен айырымдық есептеу тәсілдері арасындағы алшақтықтан туындайды.

Соңғы кезде шексіз айырымдық жүйелерді зерттеуде функционалдық талдау әдістері тиімді қолданылып жүр. М. Өтелбаев пен Б. Мүсілімов жұмысында өзіне-өзі түйіндес Штурм-Лиувилль айырымдық операторының алғашқы өзіндік мәнінің екі жақты бағасы алынды [1]. Осы оператордың l_1 тізбектер кеңістігінде қайтарымдылығы мен оның квазисызықты бір жалпылауынан туындайтын теңдеудің шешілу шарттары [2] көрсетілді. Салмақты Соболев кеңістіктерінің аналогы болып табылатын айырымдық салмақты тізбектер кеңістіктері үшін енгізу теоремалары Е. Смайылов, Г. Мұхамедиев, А.Т. Бұлабаев, Л.М. Мұстафина, А.Т. Мұхамбетжанов жұмыстарында зерттелді [3–5]. Бұл нәтижелер айырымдық Штурм-Лиувилль теңдеуін зерттеу үшін пайдаланылған.

Алайда жалпы түрдегі екінші ретті айырымдық теңдеулер Штурм-Лиувилль айырымдық теңдеуіне келтіріле бермейді. Осы себепті жалпы түрдегі екінші ретті айырымдық теңдеулер жүйелерін жеке зерттеу қажеттілігі туындайды. Мақалада біз сингулярлы екінші ретті дифференциалдық теңдеудің айырымдық аналогының бірі болып табылатын

$$\left(L_0 y\right)_j = -\Delta y_j + r_j\left(y_{j+1} - y_j\right) = f_j,\ j \in Z, \tag{1.1}$$

жүйесін қарастырамыз. Мұндағы $r_j \geq \varepsilon > 0,\ \Delta y_j = y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1},\ j \in Z.$

Егер $L_0 y = \left\{\left(L_0 y\right)_j\right\}_{j=-\infty}^{+\infty}$; $\Delta y = \left\{\Delta y_j\right\}_{j=-\infty}^{+\infty}$; $r = \left\{r_j\right\}_{j=-\infty}^{+\infty}$; $\nabla y = \left\{y_{j+1} - y_j\right\}_{j=-\infty}^{+\infty}$; $f = \left\{f_j\right\}_{j=-\infty}^{+\infty}$; $y = \left\{y_j\right\}_{j=-\infty}^{+\infty}$; $r\nabla y = \left\{r_j \nabla y_j\right\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ деп белгілеулер енгізсек, онда (1.1) теңдеуі былай жазылады:

$$L_0 y = -\Delta y + r\nabla y = f,\ f \in l_2. \tag{1.2}$$

Төменде (1.2) айырымдық теңдеулердің шексіз жүйесінің коэрцитивті шешілу шарттары алынған. Және теңдеуді туындатушы L_0 операторы резольвентасының компактылы және шектеулі типті болу шарттары көрсетілген. (1.2) теңдеуінің басты ерекшелігі — оның потенциалы 0-ге тең, ал $r\nabla$ мүшесі r шенелмеген тізбек болғанда Δ-ға (жоғарғы мүшеге) оператор ретінде бағынбайды. Осының әсерінен жаңа қолайсыздықтар туындайды. (1.2) теңдеуінің үзіліссіз аналогы [6]-да зерттелген. Эволюциялық айырымдық теңдеулер жүйелері үшін Коши есебінің коэрцитивті шешілуі мәселесі [7] жұмысында қарастырылған.

2. Кейбір көмекші тұжырымдар

$\tilde{l} = \left\{\left\{z_j\right\}_{j=-\infty}^{+\infty} : \exists N,\ z_j = 0, \left|j\right| \geq N\right\}$ жиынын қарастырып,

$$\tilde{l}_+ = \left\{\left\{z_j\right\}_{j=-\infty}^{+\infty} \in \tilde{l} : z_j = 0,\ j = -1, -2, \ldots\right\} \text{ және } \tilde{l}_- = \left\{\left\{z_j\right\}_{j=-\infty}^{+\infty} \in \tilde{l} : z_j = 0,\ j = 0, 1, 2, \ldots\right\}$$

деп белгілейік. Онда $\tilde{l} = \tilde{l}_- \oplus \tilde{l}_+$. Әдеттегідей l_2

$$\|y\|_2 = \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left|y_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

шартын қанағаттандыратын $y = \left\{y_j\right\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ тізбектерінен тұрады.

Анықтама 2.1. Егер $z_j = \left\{z_{jk}\right\}_{k=-\infty}^{+\infty} \subset \tilde{l}$ тізбегі табылып, $\left\|z_j - y\right\|_2 \to 0,\ \left\|L_0 z_j - f\right\|_2 \to 0$ ($j \to \infty$) қатыстары орындалатын болса, онда $y = \left\{y_j\right\}_{j=-\infty}^{+\infty} \in l_2$ элементін (1.1) жүйесінің шешімі деп атайды.

Белгілі Макенхаупт [8] теоремасының тізбектер үшін бір аналогы мынадай.

Лемма 2.1. Айталық, $1 < p < +\infty$ болсын. Сонда

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left|u_n \sum_{k=n}^{+\infty} a_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left|v_n a_n\right|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ \left\{a_k\right\}_{k=0}^{+\infty} \in \tilde{l}_+ \tag{2.1}$$

теңсіздігі орындалуы үшін

$$B_0 := \sup_{r \geq 0}\left(\sum_{n=0}^{r}\left|u_n\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=r}^{+\infty}\left|v_n\right|^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

болуы қажетті және жеткілікті. Мұндағы $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Сонымен бірге, егер C (2.1) бағалауы орындалатындай ең кіші тұрақты болса, онда

$$B_0 \leq C \leq p^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}} B_0.$$

Дәлелденген лемманы пайдалана отырып, келесі тұжырымға келеміз.

Лемма 2.2. Айталық, $1 < p < +\infty$ болсын. Онда

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}\left|u_n \sum_{k=-\infty}^{n} a_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \tilde{C}\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}\left|v_n a_n\right|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ \left\{a_k\right\}_{k=-\infty}^{-1} \in \tilde{l}_- \tag{2.2}$$

теңсіздігі орындалуы үшін

$$\tilde{B} := \sup_{\tau<0}\left(\sum_{n=\tau}^{-1}|u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=-\infty}^{\tau}|v_n|^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

болуы қажетті және жеткілікті. Мұндағы $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Сонымен бірге, егер $\tilde{C}$ - (2.2) орындалатындай ең кіші тұрақты болса, онда

$$\tilde{B} \le \tilde{C} \le p^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}}\tilde{B}.$$

Дәлелдеу. (2.2) бағалауының сол жағында $k=-s$ $(s\ge 0)$, $n=-t-1$ $(t\ge 0)$ ауыстыруларын жасасақ, онда

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}\left|u_n\sum_{k=-\infty}^{n}a_k\right|^p = \sum_{-t-1=-\infty}^{-1}\left|u_{-t-1}\sum_{-s=-\infty}^{-t-1}a_{-s}\right|^p =$$

$$= \sum_{t=+\infty}^{0}\left|u_t\sum_{s=+\infty}^{t}a_s\right|^p = \sum_{t=0}^{+\infty}\left|u_t\sum_{s=t}^{+\infty}a_s\right|^p.$$

Сол сияқты (2.2) бағалауының оң жағындағы қосынды $\left(\sum_{t=0}^{+\infty}|v_ta_t|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ -ға тең. (2.2) дәлелденді.

Енді B_0 өрнегін қарастырайық, және онда $t=-n-1$ деп алсақ,

$$\sup_{r>0}\left(\sum_{t=0}^{r}|u_t|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{t=r}^{+\infty}|v_t|^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} = \sup_{r>0}\left(\sum_{n=-1}^{-r}|u_{n+1}|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=-r-1}^{-\infty}|v_{n+1}|^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

немесе

$$B_0 = \tilde{B} = \sup_{r<0}\left(\sum_{n=r}^{0}|u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=-\infty}^{r}|v_n|^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

Енді лемма қорытындысы лемма 2.1-ден шығады. Лемма дәлелденді.

L арқылы $\tilde{l}$ жиынында анықталған $L_0y=-\Delta y+r\nabla y$ айырымдық операторының l_2 кеңістігі нормасындағы тұйықталуын белгілейміз.

Лемма 2.3. Айталық, $r_j \ge \varepsilon > 0$ $(j\in Z)$ болсын. Онда әрбір $y\in D(L)$ үшін

$$\left\|\sqrt{r}\,\nabla y\right\|_2 \le \left\|\frac{1}{\sqrt{r}}Ly\right\|_2 \tag{2.3}$$

бағалауы орындалады.

Дәлелдеу. Айталық, $y=(\ldots,0,0,y_{m+1},y_{m+2},\ldots,y_{n-2},y_{n-1},0,0,\ldots)\in\tilde{l}$ болсын. $\nabla y_j=z_j$ деп белгілейік. Онда $\nabla(\nabla y_j)=\Delta y_j$ болғандықтан, $-\Delta y_j+r_j\nabla y_j=f_j$ теңдеуі

$$-(z_{j+1}-z_j)+r_jz_j=f_j,\ j\in Z,$$

түрінде жазылады. Соңғы теңдеудің екі жағын z_j-ге көбейтіп, нәтижесін j-лер бойынша қосындылаймыз

$$-\sum_{j=-\infty}^{+\infty}(z_{j+1}-z_j)z_j+\sum_{j=-\infty}^{+\infty}r_jz_j^2=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}f_jz_j. \tag{2.4}$$

Бұл өрнектегі

$$A := \sum_{j=-\infty}^{+\infty}(z_{j+1}-z_j)z_j$$

қосындысы теріс екенін байқауға болады. Шынында да,

$$A=\sum_{j=m}^{n-1}\left(z_{j+1}-z_j\right)z_j=\sum_{j=m}^{n-1}z_{j+1}z_j-\sum_{j=m}^{n-1}z_jz_j=$$

$$=z_nz_{n-1}+\sum_{j=m+1}^{n-1}z_jz_{j-1}-\sum_{j=m+1}^{n-1}z_jz_j-z_mz_m=$$

$$=z_nz_{n-1}+\sum_{j=m+1}^{n-1}z_j\left(z_{j-1}-z_j\right)-z_mz_m=$$

$$=z_nz_n-z_mz_m-\sum_{j=m}^{n-1}z_{j+1}\left(z_{j+1}-z_j\right).$$

Соңғы өрнек ондағы қосынды астында z_{j+1} -ге z_j -ді қосып азайтсақ, келесі түрге келеді:

$$A=z_nz_n-z_mz_m-\sum_{j=m}^{n-1}z_{j+1}\left(z_{j+1}-z_j\right)-\sum_{j=m}^{n-1}z_j\left(z_{j+1}-z_j\right).$$

Осыдан түрлендіру жасап алдық

$$2A=z_nz_n-z_mz_m-\sum_{j=m}^{n-1}\left(z_{j+1}-z_j\right)^2,$$

алуымыз бойынша $z_n=z_m=0.$ Демек, $A\le 0,$ онда (2.4)-тен

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}r_jz_j^2\le\sum_{j=-\infty}^{+\infty}f_jz_j.$$

Гельдер теңсіздігін пайдалансақ,

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}r_jz_j^2\le\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{f_j}{\sqrt{r_j}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\sqrt{r_j}\,z_j\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

немесе

$$\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\sqrt{r_j}z_j\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{f_j}{\sqrt{r_j}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},\ y\in\tilde{l},$$

(2.3)-ке келдік.

Енді, айталық, $y\in D(L)$ болсын. Онда L операторының анықтамасы бойынша $\left\|\tilde{y}_k-y\right\|_2\to 0,$ $\left\|L_0\tilde{y}_k-Ly\right\|_2\to 0$ ($k\to\infty$), қатыстарын қанағаттандыратын $\{\tilde{y}_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}\subset\tilde{l}$ тізбегі табылады. Және (2.4) пен (2.3) бойынша

$$\left\|\sqrt{r}\nabla\tilde{y}_k\right\|_2\le\left\|\frac{1}{\sqrt{r}}L\tilde{y}_k\right\|_2,\ k\in Z,$$

теңсіздігі орынды. $|k|$-ны ұлғайтып, шекке көшеміз. Онда сандық тізбек шегінің қасиеттері бойынша

$$\left\|\sqrt{r}\nabla y\right\|_2\le C_0\left\|\frac{1}{\sqrt{r}}Ly\right\|_2,\ y\in D(L).$$

Лемма дәлелденді.

(2.3)-тен

$$\left\|\sqrt{r}\,\nabla y\right\|_2\le\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\|\,f\|_2=C\|\,Ly\|_2,\ y\in D(L),\tag{2.5}$$

теңсіздігі шығады.

Лемма 2.4. Айталық, $r=\{r_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ тізбегі $r_j \geq \varepsilon > 0 \ (j\in Z)$ және

$$F^* := \sup_{n\geq 0}\left[\sqrt{n}\left(\sum_{j=n}^{+\infty} r_j^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right] < \infty; \tag{2.6}$$

$$F^{**} := \sup_{k<0}\left[\sqrt{-k+1}\left(\sum_{j=-\infty}^{k} r_j^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right] < \infty \tag{2.7}$$

шарттарын қанағаттандырсын. Онда $y\in D(L)$ элементі үшін

$$\|y\|_2 \leq C_1^{'}\| Ly\|_2 \tag{2.8}$$

теңсіздігі орындалады.

Дәлелдеу. Айталық, $y=\{y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ $\tilde{l}$ жиынының элементі болсын. Онда 2.1 және 2.2 леммалары бойынша

$$\sum_{j=1}^{+\infty} y_n^2 \leq 2\sup_{n\geq 1}\left[\sqrt{n}\left(\sum_{j=n}^{+\infty}\sqrt{r_j}^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{r_n}\nabla y_n\right)^2;$$

$$\sum_{j=-\infty}^{0} y_n^2 \leq 2\sup_{n\leq 0}\left[\sqrt{-n+1}\left(\sum_{j=-n+1}^{+\infty}\sqrt{r_j}^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\sum_{n=-\infty}^{0}\left(\sqrt{r_n}\nabla y_n\right)^2.$$

Бұл теңсіздіктер лемма шарттары бойынша мағыналы. Сондықтан

$$\|y\|_2^2 \leq 2\sup_{k\leq 0}\left[\sqrt{-k+1}\left(\sum_{j=-\infty}^{k}\sqrt{r_j}^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\sum_{n=-\infty}^{0}\left(\sqrt{r_n}\nabla y_n\right)^2 +$$

$$+2\sup_{n\geq 1}\left[\sqrt{n}\left(\sum_{j=n}^{+\infty}\sqrt{r_j}^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{r_n}\nabla y_n\right)^2 \leq$$

$$\leq\left[2\sup_{k\leq 0}\left[\sqrt{-k+1}\left(\sum_{j=-\infty}^{k}\sqrt{r_j}^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]+2\sup_{n\geq 1}\left[\sqrt{n}\left(\sum_{j=n}^{+\infty}\sqrt{r_j}^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right]\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\sqrt{r_n}\nabla y_n\right)^2 =$$

$$=\left[C_2+C_3\right]\left\|\sqrt{r}\,\nabla y\right\|_2^2,\ y\in\tilde{l}. \tag{2.9}$$

Осыдан (2.3)-ті ескерсек, (2.8) бағалауына ($y\in\tilde{l}$ үшін) келеміз.

Енді, айталық, $y\in D(L)$ болсын. Онда ұйғарым бойынша $\|\tilde{y}_k - y\|_2 \to 0$, $\|L_0\tilde{y}_k - Ly\|_2 \to 0$, $k\to\infty$, орындалатындай, $\{\tilde{y}_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}\subset\tilde{l}$ тізбегі табылады. Және (2.9)-бен (2.3) бойынша

$$\|\tilde{y}_k\|_2 \leq C\left[C_2+C_3\right]\|L\tilde{y}_k\|_2,\ k\in Z,$$

$|k|$-ны ұлғайтып, шекке көшеміз. Сонда сандық тізбектің шегінің қасиеттері бойынша

$$\|y\|_2 \leq C_1\|Ly\|_2,\ y\in D(L).$$

Мұндағы $C_1 = C\left[C_2+C_3\right]$. Бұл — (2.8) теңсіздігі. Лемма дәлелденді.

(2.8) және (2.3) теңсіздіктерін біріктірсек,

$$\|y\|_2 + \left\|\sqrt{r}\,\nabla y\right\|_2 \leq C_0\| Ly\|_2,\ y\in D(L). \tag{2.10}$$

3 Негізгі нәтижелер мен оларды дәлелдеу

Келесі

$$Ly = -\Delta y + r\nabla y = f,\ f \in l_2, \tag{3.1}$$

теңдеуін қарастырайық.

Анықтама 3.1. Егер $Ly,\ y \in l_2$, қатыстарынан $\Delta y,\ r\nabla y \in l_2$ шығатын болса, онда $L: l_2 \to l_2$ операторы бөліктенеді делінеді.

Теорема 3.1. Егер $r = \{r_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ тізбегі $r_j \ge \varepsilon > 0$ $(j \in Z)$ (2.6) және (2.7) шарттарын қанағаттандырса, онда (3.1) теңдеулер жүйесінің $y \in l_2$ шешімі бар және ол жалғыз. Сонымен бірге, егер

$$\sup_{i,j\in Z,|i-j|\le 3} \frac{r_i}{r_j} \le C \tag{3.2}$$

болса, онда

$$\|\Delta y\|_2 + \|r\nabla y\|_2 \le C\| Ly\|_2 \tag{3.3}$$

бағалауы орындалады.

Дәлелдеу. Айталық, $\tilde{y}_{2n+1} = (...,0,0,y_{-2n+1},y_{-2n+2},...,y_0,...,y_{2n},y_{2n+1},0,0,...)$ ($n \in N$) элементі

$$L\tilde{y}_{2n+1} = \tilde{f}_{2n+1} \tag{3.4}$$

теңдігін қанағаттандырсын. Мұндағы

$$\tilde{f}_{2n+1} = (...,0,0,f_{-2n+1},f_{-2n+2},...,f_0,...,f_{2n},f_{2n+1},0,0,...).$$

Лемма шарттары орындалғанда мұндай $\tilde{y}_{2n+1}$ жалғыз ғана. Шынында да, (3.4) — $(2n+1)\times(2n+1)$ өлшемді сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі. Егер $L\tilde{y}_{2n+1} = 0$ болса, онда (2.8) теңсіздігінен $\tilde{y}_{2n+1} = 0$ болатыны шығады. Онда әрбір $f \in \tilde{l}$ үшін (3.1) теңдеуінің шешімі бар және жалғыз.

Айталық, $f \in l_2$, ал $\{\tilde{f}_s\} \subset \tilde{l}$ оған жинақталатын тізбек болсын: $\|\tilde{f}_s - f\|_2 \to 0,\ s \to \infty.$ Айталық, $\tilde{y}_S$ $(s \in Z),$ келесі $Ly = \tilde{f}_s$ жүйесінің шешімі болсын. Онда анықтама бойынша $\|L\tilde{y}_s - f\|_2 \to 0,\ s \to \infty,$ ал (1.4)-тен $\|\tilde{y}_s\|_2 \le C_1\|L\tilde{y}_s\|_2$ екенін аламыз. Соңғы теңсіздіктен $\|\tilde{y}_k - \tilde{y}_m\|_2 \le C_1\|L\tilde{y}_k - L\tilde{y}_m\|_2 \to 0,$ $k,m \in N,$ орындалатыны шығады. Олай болса, $\{\tilde{y}_s\}_{s=-\infty}^{+\infty}$ —фундаменталды тізбек. l_2 — банах кеңістігі болғандықтан, $\|\tilde{y}_s - \overline{y}\|_2 \to 0,$ $s \to \infty,$ болатындай, $\overline{y} \in l_2$ табылады. Сонымен, $\|\tilde{y}_k - \overline{y}\|_2 \to 0,$ $\|L\tilde{y}_k - f\|_2 \to 0,\ k \to \infty.$ Демек, $\overline{y}$ — (3.1) теңдеулер жүйесінің шешімі. Ендеше, әрбір $f \in l_2$ үшін (3.1) теңдеулер жүйесінің шешімі бар. Бұл шешімнің жалғыз екені (2.8) теңсіздігінен шығады.

Енді y шешімі үшін (3.3) бағасы орындалатынын көрсетейік. Егер $\nabla y = z$ деп белгілеп, (3.1) теңдеулер жүйесін

$$\mathscr{L}\, z = -\nabla z + rz = f \tag{3.5}$$

түрінде жазамыз. Мұндағы $rz = \{r_j z_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$. $\mathscr{L}$ операторы теорема шарты орындалғанда l_2-де анықталған. Себебі (2.3) теңсіздігінен $z = \nabla y \in l_2$ шығады, демек, $D(\mathscr{L}) \subset l_2$.

Айталық, $r_j \ge \varepsilon > 0$ ($j \in Z$), (2.6), (2.7) және (3.2) шарттары орындалсын. Онда, жоғарыда көрсетілгендей, $\mathscr{L}: l_2 \to l_2$ операторы қайтарымды. Енді $z \in D(\mathscr{L})$ үшін келесі

$$\|\nabla z\|_2 + \|rz\|_2 \le C\| \mathscr{L}\, z\|_2 \tag{3.6}$$

бағалауы орындалатынын көрсетейік. (1.4) теңсіздігін ескерсек, бізге $\mathscr{L}: l_2 \to l_2$ бөліктенетін оператор екенін көрсету қажетті және жеткілікті екенін байқаймыз.

$\mathscr{L}_\lambda = \mathscr{L} + \lambda E,\ \lambda \ge 0,$ деп белгілейік. Мұндағы E — бірлік оператор. Оператордың бөліктенуінің анықтамасынан $\mathscr{L}$ және $\mathscr{L}_\lambda = \mathscr{L} + \lambda E$ операторлары бір уақытта бөліктенетіні не бөліктенбейтіні шығады. Сондықтан, ең болмағанда, бір λ үшін $\mathscr{L}_\lambda$ операторы бөліктенетінін көрсетсек, жеткілікті. Осы мақсатпен

$$\mathscr{L}_\lambda z = -\nabla z + (r+\lambda)z = f \tag{3.7}$$

теңдеуін қарастырамыз. Мұндағы $(r+\lambda)z = \left\{(r_j+\lambda)z_j\right\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ (3.7) теңдеуінің екі жағын z_j-ге көбейтсек, онда

$$-\left(z_{j+1}-z_j\right)z_j + \left(r_j+\lambda\right)z_j^2 = f_j z_j,\ j \in Z. \tag{3.8}$$

Осы теңдіктерді j-лер бойынша қосындылаймыз.

$$-\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(z_{j+1}-z_j\right)z_j + \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(r_j+\lambda\right)z_j^2 = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f_j z_j.$$

Мұндағы бірінші қосылғыштың теріс екенін жоғарыда көрсеткенбіз. Олай болса,

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(r_j+\lambda\right)z_j^2 \le \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f_j z_j.$$

Осы теңсіздіктен түрлендірулер жасап алатынымыз белгілі:

$$\left\|\sqrt{r+\lambda}z\right\|_2 \le \left\|\frac{1}{\sqrt{r+\lambda}}\mathscr{L}_\lambda z\right\|_2,\ z \in D(\mathscr{L}_\lambda). \tag{3.9}$$

Енді $\left(z_{s-1}, z_s, z_{s+1}\right)$ $\left(s \in Z\right)$ элементін

$$\left(-\nabla z_{s-1} + \left(z_{s-1}+\lambda\right)z_{s-1}, -\nabla z_s + \left(z_s+\lambda\right)z_s, -\nabla z_{s+1} + \left(z_{s+1}+\lambda\right)z_{s+1}\right)$$

векторына түрлендіретін $\mathscr{L}_{s,\lambda}$ операторын аламыз. Соңғы өрнекте $z_{s+2} = 0$ деп есептеледі.

Жоғарыда L операторы үшін пайдаланылған әдіске сүйене отырып, теорема шарттары орындалғанда $\mathscr{L}_{s,\lambda}$ операторы қайтарымды екенін көреміз. Және (3.2) мен (3.9)-дан

$$\left\|-\nabla z\right\|_2 + \left\|(r+\lambda)z\right\|_2 \le C\left\|\mathscr{L}_{s,\lambda} z\right\|_2,\ z \in D(\mathscr{L}_{s,\lambda}),\ s \in Z, \tag{3.10}$$

теңсіздігі шығады. Мұндағы $C - z$ пен s-тен тәуелсіз оң шама.

$\varphi_s \in \tilde{l}$ $\left(s \in Z\right)$ элементтерін былайша таңдап алайық:

$$\varphi_s \in \left\{\varphi_{sk}\right\}_{k=-\infty}^{+\infty},\ \varphi_{sk} = \frac{\sqrt{2}}{3}\begin{cases} 1, & k = s; \\ \dfrac{1}{2}, & k = s \pm 1; \\ 0, & |k-s| \ge 2. \end{cases}$$

Сонда $\varphi_l = C\left(\ldots,0,0,\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},0,0,\ldots\right)$, мұндағы 1 саны — φ_l-векторының l-ші координатасы. Және егер $|s-l| \ge 3$ болса, онда $\left(\varphi_s, \varphi_l\right) = 0$. Мұндағы $(\cdot\,,\cdot) - l_2$-дегі скаляр көбейтінді.

Келесі M_λ және B_λ операторларын аламыз:

$$M_\lambda f = \sum_{s=-\infty}^{+\infty}\varphi_s\left(\mathscr{L}_{s,\lambda}^{-1}\varphi_s f\right),\ B_\lambda f = \sum_{s=-\infty}^{+\infty}\left(-\nabla\varphi_s\right)\left(\mathscr{L}_{s,\lambda}^{-1}\varphi_s f\right),$$

бұл жерде $\varphi_s\left(\mathscr{L}_{s,\lambda}^{-1}\varphi_s f\right) := \left\{\varphi_{sk}\left(\mathscr{L}_{s,\lambda}^{-1}\varphi_s f\right)_k\right\}_{k=s-1}^{s+1}$. Сонда

$$\mathscr{L}_\lambda\left(M_\lambda f\right) = B_\lambda f + \sum_{s=-\infty}^{+\infty}\varphi_s\left(\mathscr{L}_\lambda\mathscr{L}_{s,\lambda}^{-1}\varphi_s f\right) = B_\lambda f + \sum_{s=-\infty}^{+\infty}\varphi_s\left(\varphi_s f\right).$$

Бірақ

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty}\varphi_s\left(\varphi_s f\right)=\ldots+\varphi_{-1}\left(\varphi_{-1}f\right)+\varphi_0\left(\varphi_0 f\right)+\varphi_1\left(\varphi_1 f\right)+\ldots=$$

$$=C^2\left[\ldots+\left(\ldots,0,0,\frac{1}{4}f_{-2},f_{-1},\frac{1}{4}f_0,0,0,0,\ldots\right)+\left(\ldots,0,0,0,\frac{1}{4}f_{-1},f_0,\frac{1}{4}f_1,0,0,\ldots\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\ldots,0,0,0,0,\frac{1}{4}f_0,f_1,\frac{1}{4}f_2,0,\ldots\right)+\ldots\right]=\frac{2}{3}\left(\ldots,\frac{3}{2}f_{-2},\frac{3}{2}f_{-1},\frac{3}{2}f_0,\frac{3}{2}f_1,\frac{3}{2}f_2,\ldots\right)=f.$$

Олай болса,

$$\mathscr{L}_\lambda\left(M_\lambda f\right)=\left(E+B_\lambda\right)f. \tag{3.11}$$

Енді $B_\lambda f$ өрнегін түрлендіреміз. Алуымыз бойынша

$$B_\lambda f=\sum_{s=-\infty}^{+\infty}\left(-\nabla\varphi_s\right)\left(\mathscr{L}_{s,\lambda}^{-1}\varphi_s f\right)=$$

$$=\left(\ldots,\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\mathscr{L}_{-3,\lambda}^{-1}\varphi_{-3}f\right)_{-1}+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\mathscr{L}_{-2,\lambda}^{-1}\varphi_{-2}f\right)_{-1}+\frac{1}{2}\left(\mathscr{L}_{-1,\lambda}^{-1}\varphi_{-1}f\right)_{-1}+\frac{1}{2}\left(\mathscr{L}_{0,\lambda}^{-1}\varphi_0 f\right)_{-1};\right.$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\mathscr{L}_{-2,\lambda}^{-1}\varphi_{-2}f\right)_0+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\mathscr{L}_{-1,\lambda}^{-1}\varphi_{-1}f\right)_0+\frac{1}{2}\left(\mathscr{L}_{0,\lambda}^{-1}\varphi_0 f\right)_0+\frac{1}{2}\left(\mathscr{L}_{1,\lambda}^{-1}\varphi_1 f\right)_0;$$

$$\left.\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\mathscr{L}_{-1,\lambda}^{-1}\varphi_{-1}f\right)_1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\mathscr{L}_{0,\lambda}^{-1}\varphi_0 f\right)_1+\frac{1}{2}\left(\mathscr{L}_{1,\lambda}^{-1}\varphi_1 f\right)_1+\frac{1}{2}\left(\mathscr{L}_{2,\lambda}^{-1}\varphi_2 f\right)_1,\ldots\right).$$

Сондықтан, егер

$$\left\|\mathscr{L}_{s,\lambda}^{-1}\varphi_s f\right\|_{2,s}=\sum_{k=s-1}^{s+2}\left[\left(\mathscr{L}_{s,\lambda}^{-1}\varphi_s f\right)_k\right]^2,$$

деп белгілеп, (2.8)-ді ескерсек, онда

$$\left\|B_\lambda f\right\|_2\le\left(\ldots+\left(\mathscr{L}_{0,\lambda}^{-1}\varphi_0 f\right)_2\right)^2+\left(\left(\mathscr{L}_{1,\lambda}^{-1}\varphi_1 f\right)_2\right)^2+\left(\left(\mathscr{L}_{2,\lambda}^{-1}\varphi_2 f\right)_2\right)^2+\left(\left(\mathscr{L}_{3,\lambda}^{-1}\varphi_3 f\right)_2\right)^2+$$

$$+\left(\left(\mathscr{L}_{1,\lambda}^{-1}\varphi_1 f\right)_3\right)^2+\left(\left(\mathscr{L}_{2,\lambda}^{-1}\varphi_2 f\right)_3\right)^2+\left(\left(\mathscr{L}_{3,\lambda}^{-1}\varphi_3 f\right)_3\right)^2+\left(\left(\mathscr{L}_{4,\lambda}^{-1}\varphi_4 f\right)_3\right)^2+$$

$$+\left(\left(\mathscr{L}_{2,\lambda}^{-1}\varphi_2 f\right)_4\right)^2+\left(\left(\mathscr{L}_{3,\lambda}^{-1}\varphi_3 f\right)_4\right)^2+\left(\left(\mathscr{L}_{4,\lambda}^{-1}\varphi_4 f\right)_4\right)^2+\left(\left(\mathscr{L}_{5,\lambda}^{-1}\varphi_5 f\right)_4\right)^2+$$

$$+\left(\left(\mathscr{L}_{3,\lambda}^{-1}\varphi_3 f\right)_5\right)^2+\left(\left(\mathscr{L}_{4,\lambda}^{-1}\varphi_4 f\right)_5\right)^2+\left(\left(\mathscr{L}_{5,\lambda}^{-1}\varphi_5 f\right)_5\right)^2+\left(\left(\mathscr{L}_{6,\lambda}^{-1}\varphi_6 f\right)_5\right)^2+\ldots=$$

$$=\ldots+\left\|\mathscr{L}_{0,\lambda}^{-1}\varphi_0 f\right\|_{2,0}^2+\left\|\mathscr{L}_{1,\lambda}^{-1}\varphi_1 f\right\|_{2,1}^2+\left\|\mathscr{L}_{2,\lambda}^{-1}\varphi_2 f\right\|_{2,2}^2+\ldots=\sum_{s=-\infty}^{+\infty}\left\|\mathscr{L}_{s,\lambda}^{-1}\varphi_s f\right\|_{2,s}^2\le$$

$$\le\frac{1}{\left(\delta+\lambda\right)^2}\sum_{s=-\infty}^{+\infty}\left\|\varphi_s f\right\|_{2,s}^2.$$

Әрі қарай

$$\left\|\varphi_s f\right\|_{2,s}^2=C^2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 f_{s-1}^2+1^2 f_s^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 f_{s+1}^2\right].$$

Сондықтан

$$\sum_s\left\|\varphi_s f\right\|_{2,s}^2=\frac{2}{3}\left[\ldots+\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 f_{-1}^2+1^2 f_0^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 f_1^2\right]+\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 f_0^2+1^2 f_1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 f_2^2\right]+\right.$$

$$+\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 f_1^2+1^2 f_2^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 f_3^2\right]+\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 f_2^2+1^2 f_3^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 f_4^2\right]+\ldots\Bigg]=$$

$$=\frac{2}{3}\left[\frac{3}{2}f_1^2+\frac{3}{2}f_2^2+\frac{3}{2}f_3^2+\ldots\right]=\|f\|_2^2.$$

Олай болса, $\|B_\lambda\|_{l_2\to l_2}\le\dfrac{1}{\delta+\lambda},\quad \delta>0.$

Сол себепті λ_0 санын әрбір $\lambda\ge\lambda_0$ үшін $\|B_\lambda\|_{l_2\to l_2}\le\dfrac{1}{2}$ орындалатындай етіп таңдап алуға болады. Онда $E+B_\lambda$ $(\lambda\ge\lambda_0)$ операторы қайтарымды және $\dfrac{1}{2}\le\|E+B_\lambda\|_{l_2\to l_2}\le\dfrac{3}{2}$; $\dfrac{2}{3}\le\|E+B_\lambda\|_{l_2\to l_2}\le 2,\ \lambda\ge\lambda_0.$

$(E+B_\lambda)f=g$ $(\lambda\ge\lambda_0)$ деп белгілейік. Онда $f=(E+B_\lambda)^{-1}g$ және (3.11)-ден

$$\mathscr{L}_\lambda M_\lambda f=\mathscr{L}_\lambda M_\lambda(E+B_\lambda)^{-1}g=g\quad(\lambda\ge\lambda_0).$$

Сонымен, кері $\mathscr{L}_\lambda^{-1}$ операторы бар және

$$\mathscr{L}_\lambda^{-1}=M_\lambda(E+B_\lambda)^{-1},\ \lambda\ge\lambda_0. \tag{3.12}$$

Енді $\left\|(r+\lambda)\mathscr{L}_\lambda^{-1}f\right\|_2$ нормасын бағалайық. (3.12) бойынша

$$\left\|(r+\lambda)\mathscr{L}_\lambda^{-1}f\right\|_2^2=\sum_s\left\|(r+\lambda)\varphi_s\mathscr{L}_{s,\lambda}^{-1}(E+B_\lambda)^{-1}f\right\|_2\le$$

$$\le 3\sum_s r_{\lambda,s}^2\left(\left[\mathscr{L}_{s,\lambda}^{-1}\left(\varphi_s(E+B_\lambda)^{-1}f\right)\right]_s\right)^2\le\ 3C\frac{2}{3}\sum_s\varphi_{s,s}^2\left((E+B_\lambda)^{-1}f\right)_s^2\le$$

$$\le 3C\left\|(E+B_\lambda)^{-1}f\right\|_2^2\le 12C\|f\|_2^2.$$

Осыдан және (3.9)-дан (3.6) теңсіздігіне келеміз. $z=y'$ екенін ескеріп, (3.6)-дан теоремадағы бағалауды аламыз. Теорема дәлелденді.

Лемма 3.1. Айталық, $\{r_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ 3.1 теоремасы шарттарын және келесі шарттарды қанағаттандырсын:

$$\left(\sum_{j=s}^{0}r_j\right)^{\frac{1}{2}}\le\sqrt{r_s(-s)}\quad(s<0),\quad\left(\sum_{j=0}^{l}r_j\right)^{\frac{1}{2}}\le\sqrt{r_l l}\quad(l>0). \tag{3.13}$$

Онда $\{y_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}\in D(L)$ үшін

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sqrt{r_n}\,y_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\le C_0\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(r_n|\nabla y_n|\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.14}$$

бағалауы орындалады.

Дәлелдеу. Алдымен әрбір $g=\{g_n\}_{n=0}^{\infty}\in l_2$ үшін

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(u_n\sum_{j=0}^{n}a_j\right)g_n\le C_1\left(\sum_{n=0}^{+\infty}|g_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.15}$$

орындалатындай $C_1<\infty$ тұрақтысы табылатынын көрсетеміз. Шынында да, (3.15) өрнегінің сол жағында қосындылардың ретін ауыстырып, Гельдер теңсіздігін қолдансақ, мынаған келеміз:

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty}\left(u_n\sum_{j=0}^{n}a_j\right)g_n\right|\le\left|\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\sum_{j=0}^{n}u_ja_j\right|\le\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left|v_na_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{|v_n|}\sum_{j=0}^{n}\left|u_jg_j\right|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Соңғы көбейткішті лемма 2.1-ді пайдаланып (леммада u_n, a_j, v_j, p шамалары орнына сәйкес $\frac{1}{\sqrt{v_n}}$, $\frac{u_j}{\sqrt{v_n}}$, $\frac{\sqrt{v_n}}{u_j}$, p' шамаларын алып), былайша бағалаймыз:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{|v_n|}\sum_{j=0}^{n}\left|u_jg_j\right|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\le 2\sup_{n\ge0}\left[\left(\sum_{j=n}^{+\infty}\left|v_j\right|^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\left|v_n\right|^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=0}^{n}u_j^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left|g_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Сонымен,

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty}\left(u_n\sum_{j=0}^{n}a_j\right)g_n\right|\le\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left|v_na_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\sup_{n\ge0}\left[\left(\sum_{j=n}^{+\infty}\left|v_j\right|^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{|v_n|}}\cdot\left(\sum_{j=0}^{n}u_j^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left|g_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тура осы әдіспен лемма 2.2-ні пайдаланып, мына теңсіздікті аламыз:

$$\left|\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(u_n\sum_{j=-n}^{-1}a_j\right)g_n\right|\le\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}\left|v_na_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\sup_{n<0}\left[\left(\sum_{j=-\infty}^{-n}\left|v_j\right|^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{|v_n|}}\cdot\left(\sum_{j=-n}^{-1}u_j^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}\left|g_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Соңғы екі теңсіздікті біріктірсек және оператордың нормасының эквивалентті анықтамасына сүйенсек, онда

$$\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(|u_n|\sum_{j=-n}^{n}a_j\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\le\left\{\sup_{s<0}\left[\left(\sum_{j=-\infty}^{-s}\left|v_j\right|^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{|v_s|}}\cdot\left(\sum_{j=s}^{0}u_j^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]+\right.$$

$$\left.+\sup_{s\ge0}\left[\left(\sum_{j=s}^{+\infty}\left|v_j\right|^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{|v_s|}}\cdot\left(\sum_{j=1}^{s}u_j^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}\cdot\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}v_j^2a_j^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Осы теңсіздікте $\sum_{j=-n}^{n}a_j=y_n$ деп белгілеп, u_n мен v_n-дер орнына сәйкес $\sqrt{r_n}$, r_n $\left(n\in Z\right)$ сандарын қоямыз. Сонда r_n-ге қойылған лемма шартын пайдаланып, алатынымыз:

$$\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\sqrt{r_n}\,y_n\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\le\left\{\sup_{s\le0}\left[\left(\sum_{j=-\infty}^{s}\left|r_j\right|^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2|r_s|}}\cdot\left(\sum_{j=s}^{0}r_j\right)^{\frac{1}{2}}\right]+\right.$$

$$\left.+\sup_{s\ge1}\left[\left(\sum_{j=s}^{+\infty}\left|r_j\right|^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2|r_s|}}\cdot\left(\sum_{j=1}^{s}r_j\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}\cdot\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}r_j^2\left(\nabla y_j\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\sup_{s\le0}\left[\left(\sum_{j=-\infty}^{-s}r_j^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-s}\right]+\frac{1}{\sqrt{2}}\sup_{s\ge1}\left[\left(\sum_{j=s}^{\infty}r_j^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{s}\right]\right\}\cdot\sum_{j=-\infty}^{+\infty}r_j^2\left(\nabla y_j\right)^2.$$

Осыдан, (2.6) және (2.7) шарттарын ескеріп, (3.15)-ті аламыз. (3.15)-тен және норманың түйіндес кеңістік элементтері арқылы берілген белгілі анықтамасынан (3.14) теңсіздігі шығады. Лемма дәлелденді.

Ескерту 3.1. (3.13) шарты, мысалы, егер $r_k\le r_{k+1}$ $(k=0,1,...)$ және $r_m\ge r_{m+1}$ $(m=-1,-2,...)$ болғанда, орындалады.

Теорема 3.2. Айталық, $\{r_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ тізбегі 3.1 леммасының барлық шарттарын қанағаттандырсын. Сонда L^{-1} операторы l_2 кеңістігінде шағын болады.

Дәлелдеу. (3.14) және (3.3) теңсіздіктерінен мынаны аламыз $\left(y=\{y_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}\in D(L)\right)$:

$$\left[\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\left|y_{n+1}-y_n\right|^2+\sqrt[4]{1+n^2}\,\left|y_n\right|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\le C_0\left\|Ly\right\|_2. \qquad (3.16)$$

$M=\left\{y\in l_2:\left\|Ly\right\|_2\le 1\right\}$ деп белгілейік. Онда (3.16)-дан және белгілі теорема 3 [9] (IX-т.) тұжырымынан M жиыны l_2-де компактылы болатыны шығады. Демек, L^{-1} операторы l_2 кеңістігінде шағын. Теорема дәлелденді.

Сонымен, егер теорема 3.2 шарттары орындалса, онда L^{-1} кері операторы l_2-ні нормасы

$$\left\|y\right\|_W=\left[\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\left|y_{n+1}-y_n\right|^2+\sqrt[4]{1+n^2}\,\left|y_n\right|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

болатын W нормаланған кеңістігіне бейнелейтін шенелген оператор болады: $L^{-1}\in\mathscr{L}\ (l_2,W)$.

L^{-1} операторының k-шы сингулярлық (аппроксимативтік) мәні деп

$$s_k\left(L^{-1}\right)=\inf_{K\in\mathscr{L}_{k-1}}\left\|L^{-1}-K\right\|_{l_2\to l_2},\quad k=1,2,...,$$

санын айтады. Мұндағы $\mathscr{L}_{k-1}$-өлшемі (өзгеру облысының өлшемі) — $k-1$-ден аспайтын операторлар жиыны. Әдебиеттен $s_k\left(L^{-1}\right)$ өзіне-өзі түйіндес $\sqrt{\left(L^{-1}\right)^*\left(L^{-1}\right)}$ операторының k-шы өзіндік мәніне тең екені белгілі.

Егер бір $p\in(1,+\infty)$ үшін $\sum_{k=1}^{\infty}\left[s_k\left(L^{-1}\right)\right]^p<\infty$ болса, онда L^{-1} операторы σ_p Шаттен класына жатады делінеді. Бұл жағдайда L^{-1}-ді шекті типті оператор деп те атайды.

Мынадай тұжырым орынды.

Теорема 3.3. Айталық, $r=\{r_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ тізбегі 3.1 леммасының барлық шарттарын қанағаттандырсын. Сонда

$$s_k\left(L^{-1}\right)\le\frac{C}{1+\sqrt[4]{k}},\ k=0,1,2,... \qquad (3.17)$$

Дәлелдеу. E ретінде W-кеңістігін l_2-ге енгізу операторын белгілейік. Сонда $s_k\left(L^{-1}\right)=s_k\left(E\right)$, $k=0,1,2,...$. Айталық, $N(\lambda,E)$, $\lambda>0$, мәнінен үлкен болатын E операторының $a_k=a_k(E)$ аппроксимативтік мәндерінің саны болсын: $N(\lambda,E)=\sum_{\{k:a_k>\lambda\}}1$ (оң жақтағы қосынды λ-дан үлкен аппроксимативтік мән кездескен сайын 1-ге артып отырады).

Теорема 5 (IX-т.) [9] монографиясындағы және жоғарыда дәлелденген теорема 3.2 бойынша

$$N(\lambda,E):=\sum_{\left\{k:a_k\left(L^{-1}\right)\ge\lambda\right\}}1\le\sum_{\left\{k:\frac{1}{3\sqrt{5}(1+k)^{1/8}}\ge\lambda\right\}}1$$

теңсіздігін аламыз. Бұл жерде $\lambda>0.$ Осы теңсіздіктен

$$s_k\left(L^{-1}\right)\le\frac{C}{1+\sqrt[4]{k}},\ k=0,1,2,...$$

екені көрінеді. Теорема дәлелденді.

Салдар 3.1. Айталық, $r=\{r_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ 3.1 леммасының шарттарын қанағаттандырсын да, $p>4$ болсын. Сонда $L^{-1}\in\sigma_p$.

Дәлелдеу. (3.17) теңсіздігінен әрбір $p>4$ үшін $\sum_{k=1}^{\infty}\left[s_k\left(L^{-1}\right)\right]^p<\infty$ орындалатыны шығады. Демек, $L^{-1}\in\sigma_p, p>4$. Салдар дәлелденді.

Ескерту 3.2. Нұқсанды айырымдық (1.1) теңдеуінің шешілімділігі және оның шешімінің l_2 -де жату шарттары онымен бір мезгілде резольвентаның компактылы болуын және оның σ_p $(p>4)$ кеңістігінде жатуын қамтамасыз ететінін көрдік. Бұл (1.1) теңдеуінің қасиеттері Штурм-Лиувилль айырымдық теңдеуінен бөлек екенін растайды.

Мақала Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі ҒК 1048/ГФ3 және 5132/ГФ4 ғылыми гранттары есебінен қаржыландырылды.

Әдебиеттер тізімі

1 *Отелбаев М., Муслимов Б.* Оценка наименьшего собственного значения одного класса матриц, соответствующих разностному уравнению Штурма-Лиувилля // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. — 1981. — Т. 21. — № 6. — С. 1430–1434.

2 *Отелбаев М.* О коэрцитивных оценках решения разностных уравнений // Тр. МИ АН СССР. — 1988. — Т. 181. — С. 241–249.

3 *Смаилов Е.С.* Разностные теоремы вложения для пространства Соболева с весом и их приложения // ДАН СССР. — 1983. — Т. 270. — № 1. — С. 52–55.

4 *Булабаев А.Т.* Разностные теоремы вложения и их приложения // Изв. АН КазССР. Сер. физ.мат. — 1987. — № 1. — С. 9–12.

5 *Булабаев А.Т., Мустафина Л.М.* Некоторые разностные теоремы вложения // Изв. АН КазССР. Сер.физ.мат. — 1989. — № 1. — С. 16–17.

6 *Оспанов К.Н., Ахметкалиева Р.Д.* О разделимости вырожденного дифференциального оператора в гильбертовом пространстве // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2013. — № 2. — С. 132–141.

7 *Cuevas C., Lizama C.* Maximal regularity of discrete second order Cauchy problems in Banach spaces // Journal Difference Equ. Appl. — 2007. — Vol. 13 (12). — P. 1129–1138.

8 *Muckenhoupt B.* Hardy's inequality with weights // Stud. Math. — 1972. — Vol. 24. — No. 1. — P. 31–38.

9 *Мынбаев К.Т., Отелбаев М.* Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. — М.: Наука, 1988. — 288 с.

К.Н.Оспанов, А.Зулхажав

О свойствах решения одной системы разностных уравнений второго порядка

В статье получены условия коэрцитивной разрешимости бесконечной вырожденной системы разностных уравнений второго порядка. Показано, что эти условия обеспечивают компактность резольвенты и конечность типа резольвенты оператора, порождающего систему.

K.N.Ospanov, A.Zulkhazhav

On the properties of solutions of one system of second order difference equations

In this paper the conditions of coercive solvability of infinite degenerate system of difference equations of second order are obtained. It is shown that these conditions are enough for compactness of the resolvent and for finiteness of its type.

References

1 Otelbayev M., Muslimov B. *Computational mathematics and mathematical physics*, 1981, 21, 6, p. 1430–1434.

2 Otelbayev M. *Proceedings of the USSR Academy of Sciences MI*, 1988, 181, p. 241–249.

3 Smailov Ye.S. *DAN USSR*, 1983, 270, 1, p. 52–55.
4 Bulabayev A.T. *Math. KazSSR, ser. fiz.mat.*, 1987, 1, p. 9–12.
5 Bulabayev A.T., Mustafina L.M. *Izv.AN KazSsR*, *ser. fiz.mat.,* 1989, 1. p. 16–17.
6 Ospanov K.N., Akhmetkaliyeva R.D. *Bull. of KSU, ser.mat*, 2013, 2, p. 132–141.
7 Cuevas C., Lizama C., *Journal Difference Equ. Appl*., 2007, 13 (12), p. 1129–1138.
8 Muckenhoupt B. *Stud. Math*., 1972, 24, 1, p. 31–38.
9 Mynbayev K.T., Otelbayev M. *Weighted function spaces and a range of differential operators*, Moscow: Nauka, 1988, 288 p.