

## CENTRE OF EXCELLENCE FIRST

### TUTKII SATUNNAISUUTTA JA RAKENTEITA MATEMATIIKASSA JA SOVELLUKSISSA

**Laura Kippola, Eero Saksman ja Paolo Muratore-Ginanneschi**

*Helsingin yliopisto*

Suomen Akatemian vuosille 2022–2029 valitsemaa yksitoista uutta tutkimuksen huippuyksikköä ovat ehtineet käynnistellä toimintaansa jo vajaan kahden vuoden ajan. Professori **Eero Saksmanin** (Helsingin yliopisto) johtamassa Satunnaisuuden ja rakenteiden tutkimuksen huippuyksikössä toiminta on käynnistynyt reippaasti: yksikön tutkimusryhmät ovat jo tehneet lupaavia avauksia tutkimuksen saralla, ja yksikössä on järjestetty aktiviteetteja tiiviskursseista konferensseihin. Tulevaisuudessa huippuyksikön tavoitteena on keskittyä huipputason tutkimuksen ohella erityisesti nuorten tutkijoiden koulutukseen.

**S**atunnaisuuden ja rakenteiden tutkimuksen huippuyksikkö (Finnish Centre of Excellence in Randomness and Structures, FiRST) tarkastelee satunnaisuuden rakenteita, tavoitteenaan erityisesti ymmärtää satunnaisten rakenteiden analyttisiä ja geometrisia ominaisuuksia. Huippuyksikön yhteistyötä motivoi satunnaisuuden tutkimuksen viime aikoina saavuttama rooli monilla matematiikan osa-alueilla: monet ajankohtaiset, keskenään hyvinkin erilaiset matematiikan ja sen sovellusten ongelmat sisältävät olennaisena osana satunnaisuutta ja johtavat yllättävän samankaltaisiin satunnaisia rakenteita koskeviin kysymyksiin.

Esimerkkeinä satunnaisuutta sisältävistä ajankohtaisista tutkimusaiheista voidaan mainita muun muassa koneoppiminen: monet siinä sovelletuista algoritmeista ovat luonteeltaan probabilistisia, kuten stokastisen gradienttimenetelmän soveltaminen verkon opettamisessa. Kvanttikenttäteorian äskettäisissä matemaattisissa läpimurroissa keskeisenä uutena lähtökohdiana oli Gaussisen multiplikatiivisen kaaoksen käyttö mallin rakennuspalikkana. Analyttisessä lukuteoriassa probabilistinen näkökulma on osoittautunut erittäin hyödylliseksi monissa yhteyksissä, ja Riemannin zetafunktion itsessään sisältämää satunnaisuutta on tutkittu intensiivisesti viime aikoina.



**FINNISH CENTRE OF EXCELLENCE  
IN RANDOMNESS AND  
STRUCTURES 2022-2029**

Satunnaisuuden ja rakenteiden tutkimuksen logon on suunnitellut graafinen suunnittelija Eero Astala.

Satunnaisuuden ja rakenteiden tutkimus vaatii useamman matematiikan alan asiantuntemusta, joten huippuyksikkö kokoaa johtavia suomalaisia matemaatikkoita sekä alan uuden sukupolven maailmanluokan asiantuntijoita näiden ongelmien selvittämiseksi. Huippuyksikkö tähtää matemaattisiin edistysaskeliin todennäköisyysteorian menetelmien, kvantti- ja konformikenttäteorioiden, geometrisen ja harmonisen analyysin, osittaisdifferentiaaliyhtälöiden sekä analyttisen lukuteorian yhtymäkohdissa.

Tämän artikkelin tavoitteena on kertoa lyhyesti Arkhimedeksen lukijoille Satunnaisuuden ja rakenteiden tutkimuksen huippuyksikössä tähän mennessä tehdystä tutkimuksesta ja yksikön muista aktiviteeteista sekä kartoittaa huippuyksikön suunnitelmia tuleville vuosille. Artikkelin

päätteeksi esitellään huippuyksikön tutkimusryhmät erityisaloineen.

#### **ESIMERKKEJÄ TUTKIMUKSESTA**

Satunnaisuuden ja rakenteiden tutkimuksen huippuyksikön tieteellinen tukiryhmä vieraili Helsingissä marraskuussa 2022 ja arvioi ensimmäisessä raportissaan huippuyksikön jäsenten tieteellisen laadun korkealle. Tukiryhmä oli myös vaikuttanut huippuyksikön tutkimuksen laajasta kirjosta, joka vaihtelee mitä teoreettisimmasta aina soveltavimpaan. Huippuyksikön viimeaikaisiin tutkimuskohteisiin lukeutuvat muun muassa alkuluvut, satunnaiset SLE-multikäyrät, satunnaiset algoritmit sovelluksineen ja renormalisaatiomenetelmät stokastisessa homogenisaatiossa, joihin tutustutaan seuraavaksi.

Prof. Kaisa Matomäen ryhmä (TY) on tutkinut 'melkein alkulukujen' tiheyttä erilaisissa yhteyksissä. Eräs viimeisimmistä tuloksista näyttää, että jos  $q$  ja  $a$  ovat yhteistekijättömiä kokonaislukuja ja  $q$  on kuutiovapaa, niin on olemassa sellaiset kolme alkulukua  $p_1, p_2, p_3 \leq q$ , että  $p_1 p_2 p_3 \equiv a \pmod{q}$ .

Tämä työ on paras tunnettu tulos kohti Erdősin konjektuuria, jonka mukaan sama väite pätee, kun tarkastellaan vain kahden alkuluvun tuloja. Mainittakoon, että vuonna 2023 Matomäelle myönnettiin jälleen kerran (yhdessä hänen yhteistyökijänsä Maksym Radziwillin kanssa) huomattava kansainvälinen tunnustus, Cole Prize, joka myönnetään merkittävästä työstä lukuteorian alalla.

Prof. Eveliina Peltolan ryhmä (Aalto) on tutkinut yhdessä Yilin Wangin kanssa suuria poikkeamia satunnaisille SLE-multikäyrille. He muun muassa osoittivat minimienergiakonfigu-

raation yksikäsitteisyyden, mistä ylimääräisenä seurauksena oli uusi todistus Shapiron konjektuurille algebrallisessa geometriassa. Äskettäin Peltolalle myönnettiin ERC:n Starting Grant vuosille 2023–2027.

Prof. Matti Viholan ryhmä (JY) on tutkinut satunnaisten algoritmien teoreettisia ominaisuuksia ja kehittänyt uusia menetelmiä. Eräs tutkimuskohteista, jota on tutkittu yhteistyössä Saksmanin ryhmän (HY) kanssa, liittyy ns. Hamiltonin Monte Carlo -menetelmän suositettuun NUTS-versioon (No U Turn Sampler). NUTS- algoritmia käytetään laajasti koneoppimisen ja Bayes-tilastotieteen sovelluksissa, mutta ennen tätä työtä sen rajakäyttäytymistä ei ole ymmärretty matemaattisesti.

Prof. Tuomo Kuusen ryhmä (HY) on kehittänyt uusia renormalisaatiomenetelmiä stokastisessa homegenisaatioissa, jonka avulla tutkitaan, kuinka satunnainen mikroskooppinen rakenne



Pauliina Ilmosen ryhmän agenttipohjainen zombieepidemia-simulaatio on herättänyt kansanvälistä kiinnostusta. Tutkimus on mainittu yli 30 kertaa uutisartikkeleissa ympäri maailmaa. Ryhmään kuuluvat (vasemmalta oikealle) Jaakko Pere, Natalia Vesselinova, Pauliina Ilmonen ja Aleksis Avela.

määrää aineen makroskooppisen käyttäytymisen. Kehitettyjä uusia menetelmiä on mahdollista soveltaa muun muassa moniin korkean kontrastin homogenisaatio-ongelmiin. Sovellusaloja ovat esimerkiksi turbulenssimallit ja veden virtaus kalliossa.

## AKTIVITEETTEJA KURSSEISTA KONFERENSSEIHIN

Korkealaatuisen tutkimustyön ohella huippuyksikkö on järjestänyt itse kuusi tiiviskurssia [1], joista jokaiseen on kutsuttu puhujiksi ulkomaisia, alojensa johtavia asiantuntijoita, ja osallistunut Simons Laufer Mathematical Sciences Institutin (ent. Mathematical Sciences Research Institute) temaattiseen lukukauteen ”*Analysis and geometry of random spaces*” [2] niin järjestäjinä kuin osallistujina. Temaattinen lukukausi järjestettiin 18.1.-27.5.2022 Berkeleyssä, Kaliforniassa.

Huippuyksikön ensimmäisen, Helsingin yliopistossa järjestetyn tiiviskurssin piti lokakuussa 2022 Durhamin yliopiston apulaisprofessori Ellen Powell otsikolla ”*Introduction to the Gaussian Free Field*”. Powellin lisäksi Helsingin yliopistolla huippuyksikön tiiviskursseja ovat pitäneet Zaher Hani (University of Michigan), Yu Deng (University of Southern California), Henna Koivusalo (University of Bristol) ja Richard Kenyon (Yale University). Keväällä 2023 huippuyksikön tiiviskurssitarjonta laajeni Turun yliopistoon, jossa kuultiin Warwickin yliopiston professorin Adam Harperin intensiivikurssi ”*Random and non-random multiplicative functions*”, ja alkusyksystä 2023 Aalto-yliopistossa järjestettiin Chicagon yliopiston apulaisprofessorin Ewain Gwynnen vetämä tiiviskurssi ”*The Liouville quantum gravity metric*”.

Suurin osa huippuyksikön järjestämistä tiiviskursseista on tarkoitettu maisteri- ja tohtorio opiskelijoille sekä muille kurssin aiheista yleisesti kiinnostuneille. Osaan kursseista on sisällytynyt laskentaharjoituksia, jotka suorittamalla opiskelija on voinut kerryttää itselleen muutama opintopisteen. Kurssit ovat keränneet yleisöä laajalti eri matematiikan laitoksilta, ja jopa kesäkuussa pidetty lyhytkurssi veti ilahduttavasti salin täyteen. Tiiviskurssien suosiollisen vastaanoton pohjalta huippuyksikössä on arvioitu, että kurssien tapaisille tilaisuuksille on kotimaisen matematiikan kentällä ollut tilausta.

Huippuyksikkötoiminnan käynnistyttyä yksikön tutkijat ovat olleet mukana järjestämässä edellä mainitun Berkeleyyn teemakevään lisäksi kahta kansainvälistä konferenssia: Probability and Mathematical Physics -konferenssia [3] Helsingissä 28.6.-7.7.2022 ja Quasiworld workshop -tapaamista [4] niin ikään Helsingissä 14.-18.8.2023. Asiantuntevan neuvoa-antavan tieteellisen komitean (Hugo Duminil-Copin, Alice Guionnet, Martin Hairer, Felix Otto, Nicolai Reshetikhin, Sylvia Serfaty) tuella järjestetty Probability and Mathematical Physics -konferenssi tapahtui rinnakkain Kansainvälisen matematiikan unionin (IMU) yleiskokouksen kanssa, joka pidettiin Helsingissä 3.-4.7.2022. Videotallenteet [5] konferenssin esitelmistä ovat edelleen katsottavissa konferenssin kotisivuilla. Konferenssin järjestelytoimikunnan ohella osa huippuyksikön jäsenistä kuului Helsingissä samana kesänä järjestetyn Kansainvälisen matematiikan unionin mitaliseremonian [6] paikalliseen järjestäjätoimikuntaan.

## KATSE TULEVAAN

Nuorten tutkijoiden koulutus on keskeinen osa Satunnaisuuden ja rakenteiden tutkimuksen huippuyksikön tulevaisuudentavoitteita. Yksi-

kön kunnianhimoisena tavoitteena on kasvattaa uuden sukupolven matemaatikkoja vastaamaan luontaisesti poikkitieteellisten probleemien haasteisiin kannustamalla heitä yhdistämään vahva teoreettinen tausta monipuoliseen kiinnostukseen monitieteistä ja soveltavaa tutkimusta kohtaan. Tämän huippuyksikkö pyrkii mahdollistamaan muun muassa tarjoamalla mahdollisuuksia liikkuvuuteen yksikön sisällä ja sen ulkopuolisiin tutkimuslaitoksiin suuntautuen.

Tulevina vuosina huippuyksikkö pyrkii tarjoamaan uusia tiiviskursseja, ja suunnitelmissa on järjestää myös laajempia, tietyn teemakokonaisuuden ympärille rakentuvia kesä- ja talvikouluja. Perinteisen luento-opetuksen ohella tai jopa sen sijaan huippuyksikön kesäkouluissa tullaan kokeilemaan erilaisia yhteisöllisen oppimisen menetelmiä, kuten flipped learning-mallia, jossa opiskelijat perehtyvät jo ennalta kurssilla käsiteltäviin materiaaleihin, ja kesäkoulussa he ratkovat yhdessä niihin liittyviä harjoituksia sekä keskustelevat oppimastaan. Lisäksi potentiaalsiin tulevaisuuden suunnitelmiin kuuluu kesäkoulu, jossa kutsuttujen specialistien asemasta väitösohjelmat itse pitävät esitelmiä muiden töistä toisille väitösohjelmoijille.

Satunnaisuuden ja rakenteiden tutkimuksen huippuyksikön muodostavat yksitoista vastuullista tutkijaa tutkimusryhmineen: professori Eero Saksman (johtaja, probabilistiset menetelmät, Helsingin yliopisto), professori Tuomas Hytönen (harmoninen analyysi, Helsingin yliopisto), professori Tuomo Kuusi (osittaisdifferentiaaliyhtälöt, Helsingin yliopisto), professori Jani Lukkarinen (matemaattinen fysiikka, Helsingin yliopisto), professori Xiao Zhong (kvasi-konformaaliset menetelmät, Helsingin yliopisto), professori Kalle Kytölä (konforminen kenttäteoria, Aalto-yliopisto), professori Pauliina Ilmonen (tilastolliset menetelmät, Aalto-yliopisto), professori Eveliina Peltola (satunnainen geometria, Aalto-yliopisto), professori Kaisa Matomäki (analyttinen lukuteoria, Turun yliopisto), professori Matti Vihola (probabilistiset algoritmit, Jyväskylän yliopisto) ja professori Pekka Koskela (varajohtaja, geometrinen analyysi, Jyväskylän yliopisto). Huippuyksikön tieteellisenä koordinaattorina toimii yliopistotutkija Paolo Muratore-Ginanneschi (Helsingin yliopisto) ja projektikoordinaattorina VTM Laura Kippola (Helsingin yliopisto). Huippuyksikön tavoittaa parhaiten sähköpostitse osoitteesta [coe-first@helsinki.fi](mailto:coe-first@helsinki.fi).

### **Viitteet:**

- [1] <https://www.helsinki.fi/en/projects/first/events/past-events>
- [2] <https://www.slmath.org/programs/317>
- [3] <https://www.helsinki.fi/en/conferences/probability-and-mathematical-physics>
- [4] <https://www.helsinki.fi/en/conferences/quasiworld-workshop>
- [5] <https://www.helsinki.fi/en/conferences/probability-and-mathematical-physics/programme-and-videos>
- [6] <https://www.hs.fi/tiede/art-2000008902831.html>