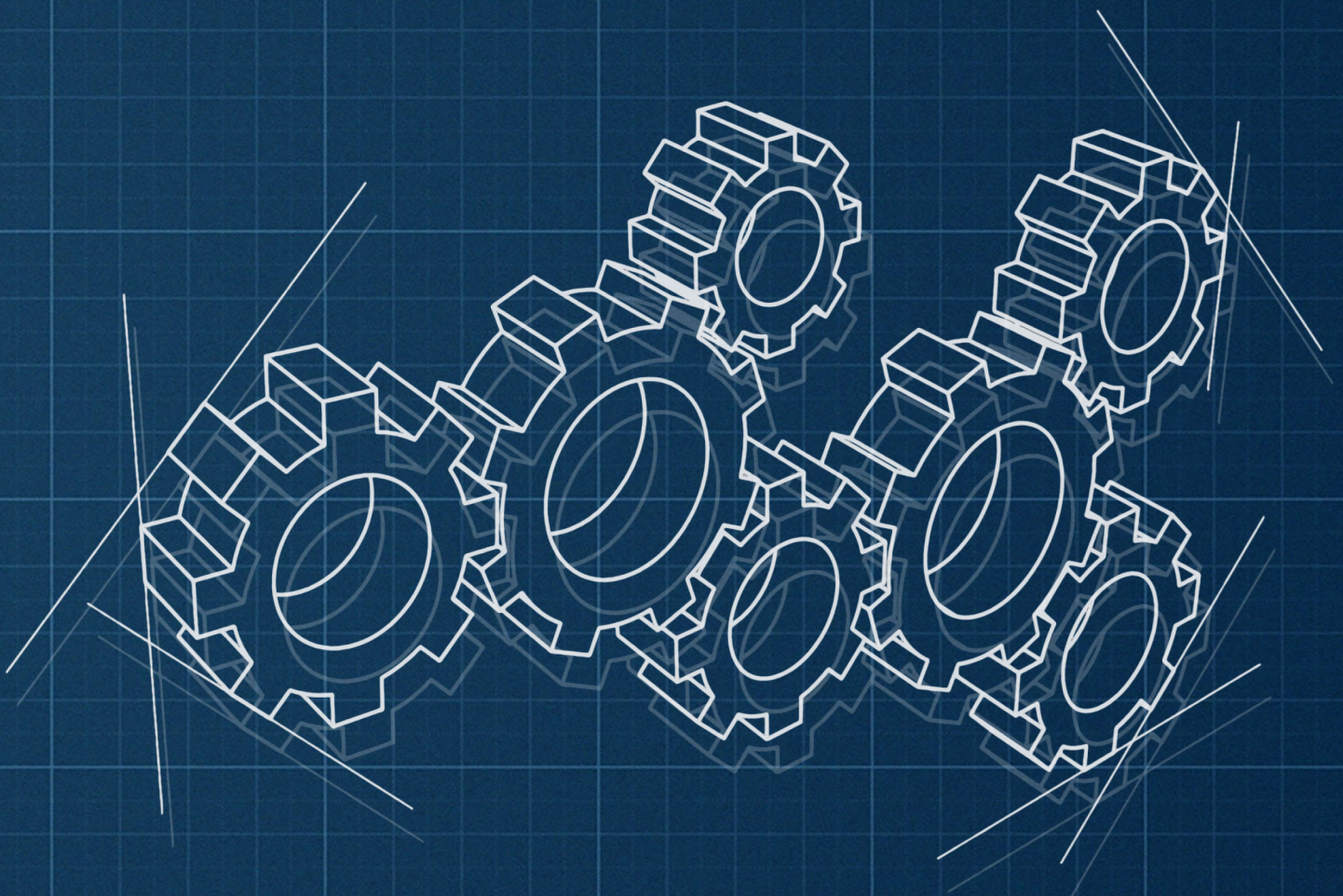


# ANALITIČNA MEHANIKA

Milan Ambrožič | Arbresha Hölbl



Univerzitetna založba  
Univerze v Mariboru





Univerza v Mariboru

Fakulteta za naravoslovje  
in matematiko

# **Analitična Mehanika**

Avtorja

**Milan Ambrožič**

**Arbresha Hölbl**

December 2023

<b>Naslov</b> <i>Title</i>	<b>Analitična mehanika</b> <i>Analytical Mechanics</i>
<b>Avtorja</b> <i>Author</i>	Milan Ambrožič (Osnovna šola Solkan)  Arbresha Hölbl (Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko)
<b>Recenzija</b> <i>Review</i>	Milan Svetec (PORA, razvojna agencija Gornja Radgona)  Anita Prapotnik Brdnik (Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo)
<b>Jezikovni pregled</b> <i>Language editing</i>	Mojca Garantini (Univerza v Mariboru, Filozofska fakulteta)
<b>Tehnični urednik</b> <i>Technical editor</i>	Jan Perša (Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba)
<b>Oblikovanje ovitka</b> <i>Cover designer</i>	Arbresha Hölbl (Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko)
<b>Grafika na ovitku</b> <i>Cover graphics</i>	Zobniki, avtorja: Ambrožič, Hölbl, 2023
<b>Grafične priloge</b> <i>Graphic material</i>	Vsi viri slik so lastni. Ambrožič, Hölbl 2023
<b>Založnik</b> <i>Published by</i>	<b>Univerza v Mariboru</b> <b>Univerzitetna založba</b> Slomškovo trg 15, 2000 Maribor, Slovenija <a href="https://press.um.si">https://press.um.si</a> , <a href="mailto:zalozba@um.si">zalozba@um.si</a>
<b>Izdajatelj</b> <i>Issued by</i>	<b>Univerza v Mariboru</b> <b>Fakulteta za naravoslovje in matematiko</b> Koroška cesta 160, 2000 Maribor, Slovenija <a href="https://www.fnm.um.si">https://www.fnm.um.si</a> , <a href="mailto:fnm@um.si">fnm@um.si</a>
<b>Izdaja</b> <i>Edition</i>	Prva izdaja  <b>Izdano</b> <i>Published at</i> Maribor, december 2023
<b>Vrsta publikacije</b> <i>Publication type</i>	E-knjiga  <b>Dostopno na</b> <i>Available at</i> <a href="https://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/827">https://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/827</a>

<p>CIP - Kataložni zapis o publikaciji Univerzitetna knjižnica Maribor</p> <p>531 (075.8) (0.034.2)</p> <p>AMBROŽIČ, Milan Analitična mehanika [Elektronski vir] / avtorja Milan Ambrožič, Arbresha Hölbl. - 1. izd. - E-publikacija. - Maribor : Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba, 2023</p> <p>Način dostopa (URL) : <a href="https://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/827">https://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/827</a> ISBN 978-961-286-805-5 (PDF) doi: 10.18690/um.fnm.4.2023 COBISS.SI-ID 175018755</p>
---



© Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba  
/ University of Maribor, University Press

**Besedilo / Text** © Ambrožič, Hölbl 2023

To delo je objavljeno pod licenco Creative Commons Priznanje avtorstva 4.0 Mednarodna. / *This work is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 International License.*

Uporabnikom je dovoljeno tako nekomercialno kot tudi komercialno reproduciranje, distribuiranje, dajanje v najem, javna priobčitev in predelava avtorskega dela, pod pogojem, da navedejo avtorja izvirnega dela.

Vsa gradiva tretjih oseb v tej knjigi so objavljena pod licenco Creative Commons, razen če to ni navedeno drugače. Če želite ponovno uporabiti gradivo tretjih oseb, ki ni zajeto v licenci Creative Commons, boste morali pridobiti dovoljenje neposredno od imetnika avtorskih pravic.

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

**ISBN** 978-961-286-805-5 (pdf)

**DOI** <https://doi.org/10.18690/um.fnm.4.2023>

**Cena**  
*Price* Brezplačni izvod

**Odgovorna oseba založnika**  
*For publisher* prof. dr. Zdravko Kačič,  
rektor Univerze v Mariboru

**Citiranje**  
*Attribution* Ambrožič, M., Hölbl, A. (2023). *Analitična mehanika*. Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba. doi: 10.18690/um.fnm.4.2023

# Kazalo

<b>Predgovor</b> .....	<b>1</b>
<b>1 Osnovne definicije in principi mehanike</b> .....	<b>3</b>
<b>1.1 Eno točkasto telo</b> .....	<b>3</b>
Računski zgled 1 .....	8
Računski zgled 2 .....	9
Računski zgled 3 .....	10
<b>1.2 Sistem točkastih teles</b> .....	<b>12</b>
<b>1.3 Zgledi 1D gibanja</b> .....	<b>15</b>
Računski zgled 4 .....	15
Računski zgled 5 .....	17
<b>1.4 Zgledi 2D in 3D gibanja</b> .....	<b>18</b>
Računski zgled 6 .....	19
Računski zgled 7 .....	20
Računski zgled 8 .....	23
<b>2 Lagrangian in Hamiltonian</b> .....	<b>27</b>
<b>2.1 Generalizirane koordinate</b> .....	<b>27</b>
<b>2.2 Euler-Lagrangeeve enačbe</b> .....	<b>29</b>
Računski zgled 9 .....	33
Računski zgled 10 .....	35
Računski zgled 11 .....	36
Računski zgled 12 .....	37
Računski zgled 13 .....	39
<b>2.3 Potencial, odvisen tudi od hitrosti</b> .....	<b>40</b>
<b>2.4 Vpeljava Hamiltoniana</b> .....	<b>42</b>
Računski zgled 14 .....	44
Računski zgled 15 .....	45
<b>2.5 Konično nihalo</b> .....	<b>55</b>
<b>2.6 Hamilton-Jacobijeva enačba</b> .....	<b>59</b>
<b>3 Gravitacija</b> .....	<b>61</b>
<b>3.1 Problem dveh teles pri centralni sili</b> .....	<b>61</b>
<b>3.2 Gravitacija in Keplerjevi zakoni</b> .....	<b>63</b>
<b>3.3 Izpeljava polarne enačbe za elipso, hiperbolo in parabolo</b> .....	<b>66</b>
<b>3.4 O Keplerjevih zakonih na bolj klasičen način</b> .....	<b>69</b>
Računski zgled 16 .....	72
Računski zgled 17 .....	73
Računski zgled 18 .....	73
<b>3.5 Kozmologija</b> .....	<b>78</b>
<b>4 Sipanje delcev pri centralni sili</b> .....	<b>85</b>
<b>4.1 Geometrijski opis</b> .....	<b>85</b>
<b>4.2 Odbojna elektrostatična sila</b> .....	<b>88</b>

<b>5</b>	<b>Gibanje togih teles.....</b>	<b>91</b>
<b>5.1</b>	<b>Rotacija vektorjev .....</b>	<b>91</b>
	Računski zgled 19.....	93
<b>5.2</b>	<b>Uporaba Paulijevih matrik .....</b>	<b>95</b>
<b>5.4</b>	<b>Rotacija telesa in vztrajnostni moment.....</b>	<b>102</b>
	Računski zgled 20.....	108
	Računski zgled 21.....	109
	Računski zgled 22.....	110
	Računski zgled 23.....	111
	Računski zgled 24.....	112
	Računski zgled 25.....	113
	Računski zgled 26.....	116
	Računski zgled 27.....	116
	Računski zgled 28.....	117
	Računski zgled 29.....	119
	Računski zgled 30.....	120
	Računski zgled 31.....	122
<b>5.5</b>	<b>Sestavljeno gibanje .....</b>	<b>123</b>
	Računski zgled 32.....	125
	Računski zgled 33.....	129
	Računski zgled 34.....	130
	Računski zgled 35.....	132
	Računski zgled 36.....	134
	Računski zgled 37.....	135
<b>5.6</b>	<b>Enakomerno vrtenje koordinatnega sistema .....</b>	<b>140</b>
<b>5.7</b>	<b>Precesija vrtavke.....</b>	<b>142</b>
<b>6</b>	<b>Nihanje.....</b>	<b>145</b>
<b>6.1</b>	<b>Enostavno sinusno nihanje .....</b>	<b>145</b>
	Računski zgled 38.....	146
	Računski zgled 39.....	148
	Računski zgled 40.....	150
	Računski zgled 41.....	151
<b>6.2</b>	<b>Dušeno nihanje .....</b>	<b>153</b>
	Računski zgled 42.....	156
<b>6.3</b>	<b>Vsiljeno dušeno nihanje .....</b>	<b>156</b>
	Računski zgled 43.....	159
<b>6.4</b>	<b>Sklopljeno nihanje .....</b>	<b>160</b>
	Računski zgled 44.....	162
	Računski zgled 45.....	165
<b>6.5</b>	<b>Nihanje kristalne mreže .....</b>	<b>167</b>
	Računski zgled 46.....	167
	Računski zgled 47.....	169
<b>7</b>	<b>Posebna teorija relativnosti (PTR).....</b>	<b>175</b>
<b>7.1</b>	<b>Lorentzova transformacija.....</b>	<b>176</b>
<b>7.2</b>	<b>Posebni učinki Lorentzove transformacije.....</b>	<b>179</b>
<b>7.3</b>	<b>Relativistična gibalna količina in energija .....</b>	<b>181</b>
<b>7.4</b>	<b>Kovariantni zapis vektorjev četvercev .....</b>	<b>184</b>
	Računski zgled 48.....	189
	Računski zgled 49.....	191
<b>7.5</b>	<b>Relativistični Lagrangian .....</b>	<b>195</b>
	Računski zgled 50.....	197
<b>7.6</b>	<b>Relativistična teorija v elektromagnetizmu.....</b>	<b>198</b>

---

<b>Matematični dodatek A: Krivulje in ploskve</b> .....	<b>203</b>
<b>A.1 Krivulje v dveh dimenzijah</b> .....	<b>203</b>
Računski zgled 51.....	207
<b>A.2 Krivulje v treh dimenzijah</b> .....	<b>210</b>
Računski zgled 52.....	211
<b>A.3 Ploskve</b> .....	<b>213</b>
Računski zgled 53.....	216
Računski zgled 54.....	222
<b>Matematični dodatek B: Grupe</b> .....	<b>225</b>
<b>B.1 Definicija grupe in nekaj pojmov</b> .....	<b>225</b>
<b>B.2 Zgledi grup</b> .....	<b>229</b>
<b>Matematični dodatek C: Pravokotni koordinatni sistemi</b> .....	<b>235</b>
<b>C.1 Definicija pravokotnih koordinatnih sistemov</b> .....	<b>235</b>
<b>C.2 Pretvorba koordinat</b> .....	<b>235</b>
<b>C.3 Smerni vektorji ter prostorninski, ploskovni in ločni element</b> .....	<b>237</b>
<b>Viri in literatura</b> .....	<b>241</b>





## Predgovor

Pri predmetu Analitična mehanika obravnavamo številne probleme iz mehanike, predvsem dinamike, na bolj matematično sistematičen način, kot je navada pri običajnih fizikalnih nalogah, npr. v zvezi z drugim Newtonovim zakonom. Tako lahko vključimo tudi kompleksnejše geometrije pri gibanju teles. Ključni del analitične mehanike je vpeljava generaliziranih koordinat kot neodvisnih spremenljivk gibanja, s katerimi izrazimo Lagrangeovo funkcijo in tudi Hamiltonian. Nazadnje moramo rešiti ustrezne diferencialne enačbe, da najdemo časovno odvisnost generaliziranih koordinat. Gravitacija in nihanje sta značilni področji, kjer koristno uporabimo matematični formalizem analitične mehanike.



# 1 Osnovne definicije in principi mehanike

## 1.1 Eno točkasto telo

Pri delcu ali točkastem telesu zanemarimo njegovo velikost in ga obravnavamo kot točko z maso  $m$ . Legu delca podamo s trenutnim krajevnim vektorjem  $\vec{r}$ , ki je odvisen od časa. To je vektor z začetkom v izhodišču izbranega koordinatnega sistema in koncem v točki v prostoru, kjer se nahaja delec. Gibalno količino bomo označevali s simbolom  $\vec{p}$  in vrtilno količino z  $\vec{L}$  ali z  $\vec{l}$ . To je standardizirani mednarodni zapis. Z  $\vec{l}$  bomo označevali tirno vrtilno količino enega samega točkastega telesa in z  $\vec{L}$  skupno vrtilno količino, npr. vsoto tirnih vrtilnih količin sestava točkastih teles ali rotacijsko vrtilno količino razsežnega telesa, ki si zamišljamo kot množico točkastih teles. Pri vrtilni količini in navoru poudarimo, da sta odvisna od izbrane točke (npr. koordinatnega izhodišča), glede na katero ju računamo, v nasprotju z gibalno količino in silo.

Najprej na kratko povzemimo nekaj osnovnih definicij in enega od izrekov za točkasto telo (delec) s konstantno maso.

### Definicije:

- Hitrost je časovni odvod krajevnega vektorja:  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ .
- Gibalna količina je zmnožek mase in hitrosti telesa:  $\vec{p} = m\vec{v} = m \frac{d\vec{r}}{dt}$ .

- Tirna vrtilna količina je vektorski produkt krajevnega vektorja in gibalne količine telesa:  $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$ .
- Navor je vektorski produkt krajevnega vektorja telesa in sile na telo:  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ .

### Izrek:

- Sila na telo je časovni odvod gibalne količine in je zato sorazmerna pospešku telesa:  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$ .

Posebej obravnavajmo pomembno zvezo med navorom in spremembo (tirne) vrtilne količine točkastega telesa. Upoštevali bomo enačbo  $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ . Časovni odvod vrtilne količine je:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{l}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \\ \frac{d\vec{l}}{dt} &= \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}. \end{aligned}$$

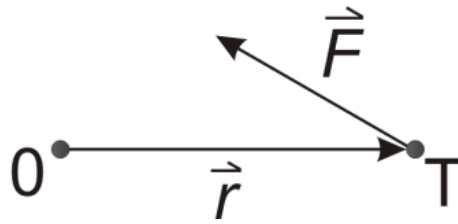
Prvi člen na desni strani zadnje enačbe je nič, ker sta hitrost in gibalna količina vzporedna vektorja. Drugi člen je po zgornjih enačbah enak navoru sile.

Ponovimo ključni zvezi. Časovni odvod gibalne količine je enak sili na delec, časovni odvod tirne vrtilne količine pa navoru te sile glede na izbrano točko:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \tag{1.1 a}$$

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{M}. \tag{1.1 b}$$

Če je sil na telo več, vzamemo v enačbi (1.1 a) njihovo vsoto (rezultanto), v enačbi (1.1 b) pa vsoto njihovih navorov. Geometrija pri računu navora je prikazana na Sliki 1. Podobno velja za račun tirne vrtilne količine telesa, če namesto sile  $\vec{F}$  vzamemo gibalno količino telesa.



**Slika 1: Račun navora.** Krajevni vektor in sila sta prikazana v ravnini, npr. v ravnini  $(x, y)$ , saj lahko tako vedno izberemo koordinatni sistem. Os  $x$  lahko izberemo v smeri krajevnega vektorja. Njun vektorski produkt je takrat navor v smeri osi  $z$ , kaže pa proti nam.

Pri računu navora glede na točko 0 za silo s točkastim prijemališčem je pomembno tudi, kje je njeno prijemališče (v točki T na Sliki 1). Vektor  $\vec{r}$  se takrat začne v točki 0 in konča v točki T. Pravimo mu ročica sile. Velikost navora je  $M = Fr \sin \varphi$ , kjer je  $\varphi$  kot med vektorjema  $\vec{r}$  in  $\vec{F}$ . Vseeno je, ali vzamemo ostri kot med vektorjema ali njegov suplementarni topi kot, saj velja  $\sin(\pi - \varphi) = \sin \varphi$ . Smer navora je pravokotna na ravnino, ki jo določata sila in ročica. Ta smer se ujema s smerjo gibanja desnosučnega vijaka, če ga vrtimo od vektorja ročice po najkrajši poti do vektorja sile (če enega od obeh vektorjev vzporedno premaknemo, da imata isti začetek). V primeru na Sliki 1 vijak odvijamo, torej kaže po tej analogiji smer navora ven iz ravnine – proti nam. Navor smo definirali tako, da je veljavna enačba (1.1 b). V enostavnejšem primeru, ko imamo vzvod, vrtljiv okrog neke osi skozenj, in sta sili na obeh krakih vzvoda pravokotni nanj in vrtita vzvod v nasprotnih smereh, sta oba navora navadna produkta ustreznih ročic in sil. Vzvod se ne vrtil pospešeno, če sta navora v ravnovesju, to pomeni, da sta enako velika.

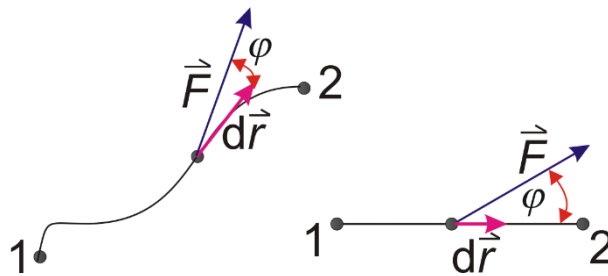
Delo sile  $\vec{F}$  s točkastim prijemališčem, če se prijemališče sile giblje po tiru s spreminjajočim se krajevnim vektorjem  $\vec{r}$  med začetno točko 1 in končno točko 2 s krajevnima vektorjema  $\vec{r}_1$  in  $\vec{r}_2$ , je:

$$A_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}. \quad (1.2 \text{ a})$$

To je krivoljni integral s skalarnim produktom med silo in vektorjem infinitezimalnega premika (Slika 2 levo). Takšen integral si vedno lahko predstavljamo kot limitni primer vsote skalarnih produktov po majhnih premikih, ko gre velikost premikov proti vrednosti nič. Delo na splošno ni odvisno samo od začetne in končne točke, temveč tudi od vmesnega tira (poti). Če je sila na poti konstantna in tir raven, potem enačbo za delo lahko poenostavimo:

$$A_{12} = Fs \cos \varphi. \quad (1.2 \text{ b})$$

Pri tem je  $s$  opravljena pot prijemališča sile in  $\varphi$  kot med silo in tirom gibanja. Zdaj moramo paziti, da vzamemo pravilen kot (Slika 2 desno). Enačba (1.2 b) velja tudi v nekoliko splošnejšem primeru, ko je sila konstantna in prav tako kot med silo in lokalno tangento na tir gibanja, tir pa je lahko ukrivljen. Privzemimo, da je telo, na katerega deluje sila, točkasto, tako da lega telesa in lega prijemališča sile ves čas sovpadata. Zato bomo preprosto pisali o gibanju telesa, namesto o gibanju prijemališča sile.



**Slika 2: Opredelevanje dela sile: levo splošen primer; desno primer s konstantno silo in premim tirom telesa. V obeh primerih  $d\vec{r}$  označuje majhen premik v lokalni smeri tira.**

Omenimo dva najpreprostejša zglede ne glede na to, ali je tir gibanja telesa raven ali ukrivljen: 1) sila kaže ves čas v smeri tangente na tir; 2) sila je ves čas pravokotna na tangento na tir. V drugem primeru je delo sile enako nič; v prvem primeru je pod integralom navaden produkt velikosti vektorjev namesto skalarnega produkta vektorjev:

$$A_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} F_t(\vec{r}) ds. \quad (1.2 c)$$

Silo smo označili z  $F_t$  in majhen premik z  $ds$ . Oznaka  $dr$  bi bila v tem primeru nekoliko zavajajoča, ker z njo ponavadi razumemo majhno spremembo razdalje točke od izhodišča koordinatnega sistema. Za zgled razstavimo poljubno silo na telo pri kroženju točkastega telesa po krožnici na tangентno in radialno komponento:  $F_t$  in  $F_r$ . Delo radialne komponente je enako nič, ker je ta komponenta ves čas pravokotna na tir gibanja. Delo tangენტne komponente izračunamo po enačbi (1.2 c) in lahko integriramo kar po kotu  $\varphi$ :

$$A_{12} = R \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F_t(\varphi) d\varphi.$$

Upoštevali smo  $ds = R d\varphi$ , kjer je  $R$  polmer krožnice. Silo smo lahko zapisali kot funkcijo kota, ker je polmer konstanten.

Če na točkasto ali tego telo deluje ena sama sila, je njen edini učinek sprememba gibanja telesa. Sila povzroči pospešek telesa, zato lahko poiščemo zvezo med njenim delom in kinetično energijo telesa:

$$A = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m \int d\vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$A = T_2 - T_1 \tag{1.3 a}$$

$$T = \frac{m}{2} v^2. \tag{1.3 b}$$

Delo sile je enako spremembi kinetične energije telesa. Kinetično energijo označujemo pri analitični mehaniki s črko  $T$ . Izpeljava v vrstici pred enačbo (1.3 a) je sicer fizikalno nazorna, a nekoliko matematično nedosledna, ker smo diferencial časa kot imenovalec predstavili k koeficientu pod integralom, da smo dobili hitrost. Natančneje gre tukaj za integriranje per partes (integriranje po delih).

Konservativna sila (potencialna sila) je takšna, da je njeno delo odvisno samo od začetne in končne točke poti, ne od vmesnih točk. Na primer na Sliki 2 levo bi lahko za konservativno silo vzeli kak drug tir med točkama 1 in 2, namesto narisane pa bi bil integral (1.2 a) enak kot prej. Zato lahko njeno delo povežemo s potencialno energijo telesa v začetni in končni točki:

$$A = -\Delta V = V_1 - V_2. \tag{1.4}$$

Zato velja ohranitev vsote kinetične in potencialne energije, če ni nekonservativnih sil:

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2. \tag{1.5}$$

Iz enačbe (1.4) neposredno izhaja definicija za potencialno energijo (na kratko *potencial*):

$$V = C - \int \vec{F} \cdot d\vec{r}, \tag{1.6}$$

kjer je  $C$  poljubna konstanta, saj ne vpliva na razliko potencialov v enačbi (1.4). V enačbi (1.6) je spodnja meja integrala neka poljubna fiksirana (določena) točka in je zgornja meja tista točka, v kateri nas zanima potencial. Iz enačbe (1.6) izhaja tudi obratna zveza med silo in potencialno energijo:

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) \quad (1.7 \text{ a})$$

$$\vec{F} = -\nabla V. \quad (1.7 \text{ b})$$

Enačba (1.7 a) je zapisana v kartezičnih koordinatah, enačba (1.7 b) pa je samo njen simbolični prepis. Količino v oklepaju na desni strani enačbe (1.7 a) imenujemo gradient potenciala. Sila je torej nasprotno enaka gradientu potenciala. Enačbo (1.7 b) lahko vzamemo tudi kot posplošitev enačbe (1.7 a), tako da je neodvisna od izbire koordinatnega sistema. Na primer, znane so enačbe za gradient v cilindričnem in sferičnem koordinatnem sistemu.



### Računski zgled 1

Pokažimo, da je teža, ki deluje na telesa v bližini Zemljinega površja, konservativna. Hkrati izračunajmo njeno delo za poseben primer, ko telo z maso  $m = 10 \text{ kg}$  premaknemo v poševni ravni smeri od točke s koordinatami  $(0, 10, 20) \text{ m}$  do točke s koordinatami  $(0, 20, 40) \text{ m}$  (Slika 3). Vzamemo homogeni težni pospešek  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  in os  $z$  naravnamo v navpično smer (Slika 3). Začnemo z definicijo dela sile:

$$A = \int \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = m \int \vec{g} \cdot d\vec{r}$$

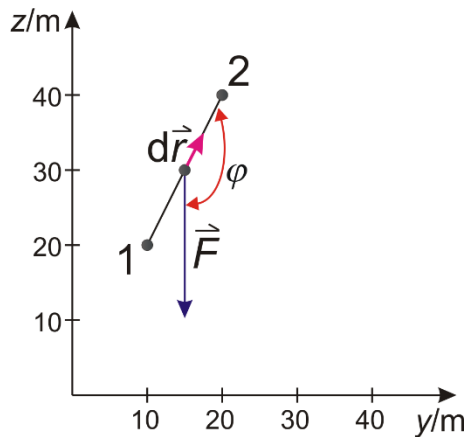
$$A = m \int (0, 0, -g) \cdot (dx, dy, dz).$$

Vektor  $\vec{g}$  ima od nič različno samo tretjo komponento, zato je skalarni produkt obeh vektorjev pod integralom enak  $-g dz$ . Tako dobimo izraz:

$$A = -mg\Delta z.$$

Delo teže je res neodvisno od oblike poti med začetno in končno točko in je odvisno od razlike koordinate  $z$  obeh točk. V našem primeru je  $A = -10 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (40 \text{ m} - 20 \text{ m}) = -1962 \text{ J}$ . Ustrezna sprememba potencialne energije ima nasproten predznak. Kot  $\varphi$  med premikom  $d\vec{r}$  in silo teže  $\vec{F}_g$  na Sliki 3 je top, njegov kosinus je torej negativen, kar potrjuje, da je delo sile teže negativno.



Slika 3: Delo teže ob Zemljinem površju. Telo se giblje v ravnini  $(y, z)$ .

## Računski zgled 2

Posplošimo zgled delovanja teže na večje oddaljenosti od središča Zemlje, tako da moramo upoštevati spreminjajoči se težni pospešek. Da bo izpeljava čim splošnejša, uporabimo sferični koordinatni sistem. Zanimarimo nepravilnosti zaradi rahle sploščenosti in vrtenja Zemlje in upoštevamo le radialno odvisnost težnega pospeška:  $\vec{g} = -g(r)\vec{e}_r$ , kjer je  $r$  razdalja od središča zemlje in  $\vec{e}_r$  enotski smerni vektor v radialni smeri od Zemljinega središča navzven. Vzemimo spet 10-kilogramsko telo, ki ga po zaviti poti premaknemo s severnega tečaja v lego točno nad južnim tečajem, tako da je od središča Zemlje oddaljeno dva Zemljina polmera (Slika 4); kaj se potem dogaja s telesom, nas ne zanima. Zemljin polmer označimo z  $R = 6400$  km. Težni pospešek pada s kvadratom razdalje  $r$ , tako da ga izrazimo s pospeškom  $g_0 = 9,8$  m/s<sup>2</sup> na površju Zemlje.

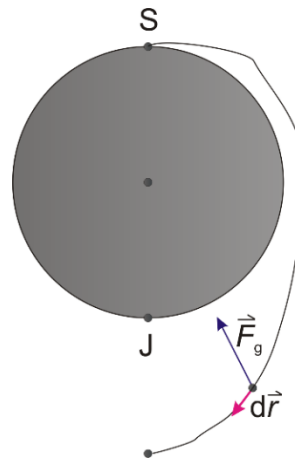
Čeprav bi na splošno lahko izpeljali diferencialni element  $d\vec{r}$  na splošno v sferičnih koordinatah, je skalarni produkt  $\vec{e}_r \cdot d\vec{r}$  kar enak skalarni spremembi radialne razdalje  $dr$  (Slika 4). Tako račun poenostavimo:

$$A = m \int \vec{g} \cdot d\vec{r} = -m \int g(r) dr$$

$$A = -mg_0 \int_{r_1}^{r_2} \frac{R^2}{r^2} dr$$

$$A = mg_0 R^2 \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Delo teže je spet neodvisno od oblike poti med začetno in končno točko, odvisno je od obeh radialnih razdalj od središča Zemlje. Vzamemo  $r_2 = 2R$  in  $r_1 = R$  in izračunamo  $A = -314$  MJ. Ustrezna sprememba potencialne energije je pozitivna. Če pa bi telo spravili na neskončno oddaljenost od Zemlje, bi dobili dvakrat tolikšen rezultat.

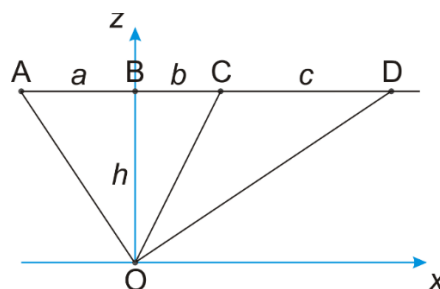


Slika 4: Delo teže pri nehomogenem težnem pospešku



### Računski zgled 3

Pokažimo razliko med konservativno silo teže in nekonservativno silo trenja, če zanju računamo delo po različnih tirih, in sicer z isto začetno in končno točko: izhodiščem O in točko D na Sliki 5. Prvi tir gre po klanecu neposredno od O do D, drugi trije pa so vsi iz dveh ravnih odsekov: OCD, OBD in OAD. Prvi odsek je torej poševen klanec ali navpičen, drugi so vodoravna tla, koeficient trenja med podlago in telesom pa je  $k_{tr}$ . Ustrezne dolžine so prikazane na Sliki 5.



Slika 5: Tiri gibanja pri računu dela sile teže in sile trenja

Delo lahko namesto z integralom izračunamo na preprostejši način, ker sta obe sili na posameznih odsekih konstantni po velikosti, in prav tako kot med silo in tirom gibanja. Vseeno za vajo zapišimo, kako bi zapisali element  $d\vec{r}$ , npr. na ravnem klancu v ravnini  $(x, z)$  s splošnim nagibom  $\varphi$ . Ker je takrat  $dz = \tan \varphi \cdot dx$ , velja  $d\vec{r} = (1, 0, \tan \varphi) dx$ . Ker imamo v integralu skalarni produkt, je rezultat integriranja skalar in lahko v našem primeru nadomestimo krivuljni integral z navadnim enodimenzionalnim integralom po spremenljivki  $x$ . Pri splošnejšem primeru krivega gibanja bi prevedli krivuljni integral na navadni integral po nekem parametru, s katerim izrazimo vse tri kartezične koordinate.

Našo nalogo bomo rešili drugače, kot je že omenjeno. Sila teže je enaka  $\vec{F}_g = mg(0, 0, -1)$ , zato je njeno delo na vodoravnih odsekih enako nič. Na klancih je  $dA_g = -mg \cdot \tan \varphi \cdot dx$ . Upoštevali smo skalarni produkt  $(0, 0, -1) \cdot (1, 0, \tan \varphi) = -\tan \varphi$ . Vendar je v obeh primerih  $dz = \tan \varphi \cdot dx$ , zato lahko namesto po koordinati  $x$  integriramo po koordinati  $z$  in dobimo nazadnje vedno enak rezultat:  $A_g = -mg\Delta z = -mgh$ . To smo že pokazali v prvem računskem zgledu.

Drugače je pri sili trenja. V vseh primerih je sila trenja vzporedna s tirom in kaže v nasprotno smer, kot se giblje telo. Na klancih je njena velikost sorazmerna s statično komponento teže,  $F_{tr} = k_{tr}mg \cos \varphi$ , na vodoravnem odseku pa preprosto postavimo  $\varphi = 0$ . Na navpičnem odseku je sila trenja nič. Na klancu je potem delo sile trenja:

$$A_{tr} = -F_{tr} \cdot s = -k_{tr}mg \cos \varphi \cdot \frac{h}{\sin \varphi}$$

$$A_{tr} = -k_{tr}mgh \cot \varphi = -k_{tr}mg|\Delta x|.$$

Pri tem smo s  $s = h/\sin \varphi$  označili pot in z  $\Delta x$  spremembo koordinate  $x$ . Ni nam treba računati dela sile trenja za vsak odsek poti posebej, ampak samo seštevamo premike v smeri osi  $x$ . Na prvi pogled je rezultat podoben tistemu za delo sile teže in je videti tudi sila trenja konservativna. Tako je za tire OD, OCD in OBD delo sile trenja  $A_{tr} = -k_{tr}mg(b + c)$ . Drugače je za tir OAD, ko se najprej koordinata  $x$  zmanjšuje in nato povečuje. Ker je delo sile trenja na vsakem odseku negativno, smo morali v zgornji enačbi vzeti absolutno vrednost spremembe koordinate  $x$ . Tako se člena za delo na odsekih OA in AB ne izničita, ampak sta oba negativna. Zato je na celotnem tiru v četrtem primeru  $A_{tr} = -k_{tr}mg(2a + b + c)$ .

Za primerjavo pogledimo, kaj je z delom obeh sil na »krožnem tiru«, to je trikotniku OCDO. Delo sile teže je takrat nič, ker se telo vrne v isto točko. Natančneje, delo je pozitivno na odseku DO in izniči skupno negativno delo na odsekih OC in CD. Negativno delo sile trenje je 2-krat tolikšno kot prej:  $A_{tr} = -2k_{tr}mg(b + c)$ .

## 1.2 Sistem točkastih teles

Skupna gibalna količina sistema (sestava, skupine)  $N$  točkastih teles je vsota posamičnih gibalnih količin:

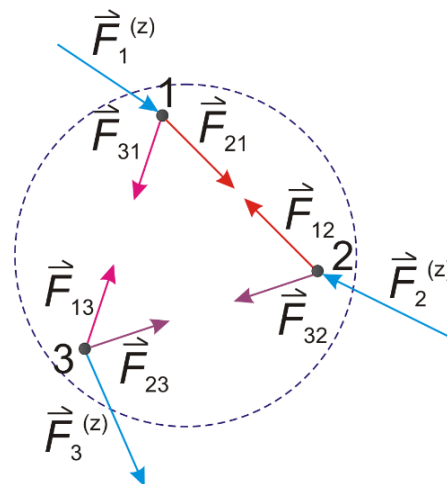
$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i. \quad (1.8)$$

Medsebojne notranje sile sistema so po parih  $\vec{F}_{ij}$ , kjer  $i$ -to telo s silo deluje na  $j$ -to telo (Slika 6). Vsoto dodatnih zunanjih sil na  $i$ -to telo označimo s  $\vec{F}_i^{(z)}$ . Obravnavajmo spreminjanje gibalne količine  $i$ -tega telesa zaradi vpliva vseh sil nanj:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i^{(z)}.$$

Časovni odvod skupne gibalne količine sistema je vsota teh prispevkov:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i,j=1}^N \vec{F}_{ji} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(z)}.$$



Slika 6: Prikaz notranjih in zunanjih sil za sistem treh teles

K spremembi prispevajo samo zunanje sile, ker se notranje sile v dvojni vsoti zaradi tretjega Newtonovega zakona po parih izničijo. Pri dvojni vsoti indeksa  $i$  in  $j$  nikjer nista enaka, ker telo ne deluje s silo samo nase. Ugotovili smo, da je časovni odvod skupne gibalne količine sistema enak vsoti vseh zunanjih sil na vsa telesa v sistemu:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(z)}. \quad (1.9)$$

Zadnjo ugotovitev lahko takoj uporabimo v primeru razsežnega telesa, pa naj bo togo ali prožno, ker si lahko razsežno telo predstavljamo kot sestavljeno iz neskončne množice infinitezimalno majhnih točkastih teles. Torej je časovni odvod gibalne količine razsežnega telesa enak vsoti vseh zunanjih sil nanj. Posplošitev velja tudi za sistem več razsežnih teles:

**Časovni odvod skupne gibalne količine sistema teles (točkastih ali razsežnih, prožnih ali togih) je enak vsoti vseh zunanjih sil na ta sistem.**

Lego masnega središča sistema teles podaja vektor:

$$\vec{r}^* = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{m}. \quad (1.10 \text{ a})$$

Pri tem je masa  $m$  vsota vseh mas teles in  $m_i$  so posamične mase. Če so vsa telesa sistema točkasta, potem so  $\vec{r}_i$  njihovi krajevni vektorji; če pa so razsežna, so to krajevni vektorji njihovih masnih središč.

Podobno velja za hitrost in pospešek masnega središča sistema:

$$\vec{v}^* = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i}{m}. \quad (1.10 \text{ b})$$

$$\vec{a}^* = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i}{m}. \quad (1.10 \text{ c})$$

Različica drugega Newtonovega zakona za pospešek masnega središča je:

$$m\vec{a}^* = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(z)}. \quad (1.11)$$

Ta enačba izhaja neposredno iz (1.9) in (1.10 c). Podobno kot pri spreminjanju celotne gibalne količine določa pospešek masnega središča samo vsota vseh zunanjih sil na sistem.

Skupna vrtilna količina sistema je vsota posamičnih tirnih vrtilnih količin:

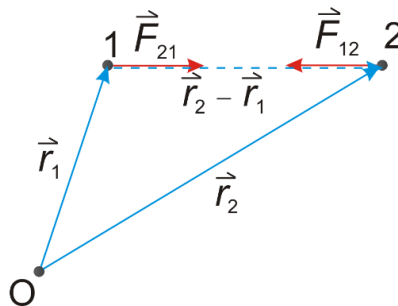
$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i. \quad (1.12)$$

Njen časovni odvod izračunamo takole:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \left[ \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i^{(z)} \right]. \end{aligned}$$

V drugi vrstici tako kot pri izpeljavi enačbe (1.1 b) odpade člen z vektorskim produktom hitrosti in gibalne količine. Zdaj ne moremo več sklepati kot pri spreminjanju gibalne količine, da se notranje sile zaradi tretjega Newtonovega zakona uničijo po parih, saj so tudi vektorsko pomnožene s posameznimi krajevnimi vektorji delcev.

Če pa so sile centralne (smer se ujema z zveznico med delcema), je notranja vsota res nič. Pokažimo to za dva delca z indeksoma 1 in 2 (Slika 7).



Slika 7: Prikaz vektorjev za par teles

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} - \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{21}.$$

Le-to je nič, ker je sila vzporedna z razliko obeh krajevnih vektorjev. Torej v primeru centralnih sil vrtilno količino sistema teles spreminjajo samo zunanji navori:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(z)} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i^{(z)}. \quad (1.13)$$

Enačba (1.9) je posplošitev enačbe (1.1 a), enačba (1.13) pa posplošitev enačbe (1.1 b).

### 1.3 Zgledi 1D gibanja

Ker pri reševanju fizikalnega sistema v zvezi z gibanjem enega telesa ponavadi začnemo z drugim Newtonovim zakonom pri znanih silah, imamo podan izraz za pospešek in iz tega izračunamo, kako se telo giblje. V treh primerih je reševanje neposredno, to je, če je pospešek telesa znana funkcija časa ali hitrosti ali položaja. Drugi Newtonov zakon je najbolj uporaben, ko se masa telesa ne spreminja in kjer je geometrija problema razmeroma enostavna. Drugače si lahko pomagamo tudi z enačbo za spremembo gibalne količine (1.1 a), z energijskim zakonom itd. V naslednjih primerih lahko pospešek izrazimo iz znane sile ali rezultante sil, ki jo delimo s konstantno maso.

Če je pospešek funkcija časa,  $a = a(t)$ , ga dvakrat integriramo po času, da izračunamo časovno odvisnost koordinate telesa:

$$x(t) = A + Bt + \int_0^t du \int_0^u a(\tau) d\tau.$$

Vseeno je, kako označimo integracijsko spremenljivko, pri tem smo se morali izogniti uporabi črke  $t$  zanjo. Konstanti  $A$  in  $B$  lahko izračunamo glede na dodatno informacijo o gibanju telesa. Ponavadi sta podani začetna lega telesa  $x_0$  in začetna hitrost  $v_0$  v času  $t = 0$  in takrat je  $A = x_0$ ,  $B = v_0$ , četudi ustrezno postavimo integracijske meje. Imamo tudi druge možnosti: lahko je npr. podana lega telesa v dveh različnih časih in podobno. Pri reševanju takšne naloge si lahko pomagamo z nedoločenim ali določenim integralom, vendar moramo biti previdni pri interpretaciji dodatnih konstant.

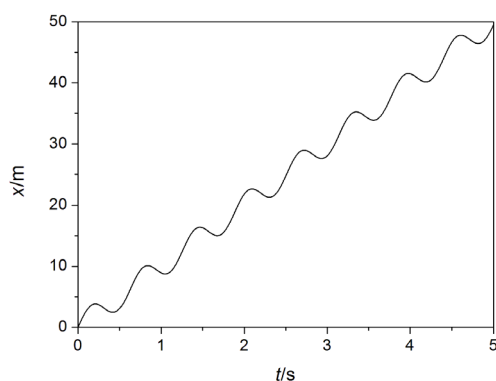


#### Računski zgled 4

Naj bo pospešek sinusna funkcija časa:  $a = -a_0 \sin(\omega t)$ . To velja pri sinusnem nihanju in v tem uvodnem poglavju ne gre toliko za fizikalni razmislek kot za matematični postopek. Uporabimo dvakrat nedoločeni integral. Pozorni moramo biti na predznak pri integriranju obeh kotnih funkcij. Hitrost in koordinata sta:

$$\begin{aligned} v &= B - \int a_0 \sin(\omega t) dt \\ v &= B + \frac{a_0}{\omega} \cos(\omega t) \\ x &= A + Bt + \frac{a_0}{\omega^2} \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Pravilno smo spet prišli do sinusnega nihanja, ki pa mu je lahko dodano enakomerno gibanje zaradi člena  $Bt$ , kot bi imeli nihanje linearnega nihala v vozilu, ki vozi enakomerno. Naj ima vozilo hitrost  $B = v_1$ . Če je v trenutku  $t = 0$  telo v izhodišču pri  $x = 0$ , potem je  $A = 0$ . Slika 8 prikazuje graf  $x(t)$  pri podatkih  $v_1 = 10$  m/s,  $x_0 = a_0/\omega^2 = 2$  m in  $\omega = 10$  s<sup>-1</sup>. Če koordinato dvakrat odvajamo po času, pridemo spet do prvotne časovne odvisnosti pospeška.



Slika 8: Graf  $x(t)$  pri gibanju, sestavljenem iz enakomerne gibanja in nihanja

Če je pospešek funkcija hitrosti,  $a = a(v)$ , upoštevamo  $a = dv/dt$ , enačbo malo zasukamo, da dobimo diferencialno enačbo z ločljivima spremenljivkama (čas in hitrost) in jo takoj integriramo na obeh straneh:

$$\int \frac{dv}{a(v)} = \int dt.$$

Pri tem je bolj praktično vzeti kar nedoločena integrala, dovolj pa je nedoločena konstanta samo na eni strani enačbe. Integral na desni strani enačbe je preprost, zato dodamo nedoločeno konstanto na desno stran in dobimo  $t + B$ . Če znamo enačbo rešiti, dobimo eksplicitno odvisnost  $v(t)$  in nato integriramo še enkrat, da dobimo odvisnost  $x(t)$ . Tako bomo spet dobili dve konstanti, npr.  $A$  in  $B$ .

Za konkreten zgled vzemimo  $a = -kv$ , kar velja za ustavljanje počasnega telesa v viskozni tekočini, če ni drugih sil, razen sile upora. Potem problema rešimo takole:

$$\begin{aligned} \int \frac{dv}{-kv} &= t + B \\ -\frac{\ln v}{k} &= t + B \\ v &= Ce^{-kt}. \end{aligned}$$



Vzeli smo  $C = e^{-kB}$ . Hitrost integriramo še enkrat:

$$x = \int C e^{-kt} dt = -\frac{C}{k} e^{-kt} + A.$$

Če je začetna hitrost telesa  $v_0$ , začetna lega pa 0, sta konstanti  $C = v_0$  in  $A = v_0/k$ . Hkrati  $A$  pomeni limito koordinate  $x$ , ko čas narašča proti neskončnosti; telo čez to koordinato ne gre.

Pri tretji možnosti je pospešek funkcija koordinate,  $a = a(x)$ . Enačba velja npr. v elektrostatiki, kjer je sila med nabojema odvisna samo od njune razdalje, eden od obeh nabojev pa zaradi velike mase skoraj miruje. Tudi v tem primeru s trikom (spretno) takoj pridemo do diferencialne enačbe z ločljivima spremenljivkama: zapišemo namreč hkrati enačbi  $v = dx/dt$  in  $a = dv/dt$ . Z njunim deljenjem odpravimo časovni razmik  $dt$ , obrnemo enačbo in integriramo:

$$\int v dv = \int a(x) dx.$$

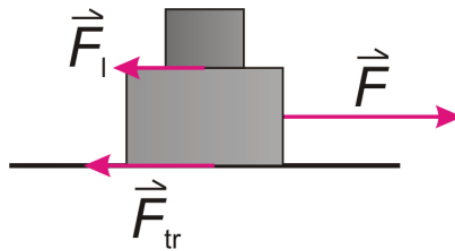
Na levi strani enačbe je  $v^2/2$ . Če enačbo pomnožimo z maso telesa, dobimo na levi strani spremembo kinetične energije, na desni pa delo sile, ki povzroča pospešek telesa.

Za konec 1D zgljedov pogledjmo še preprost primer gibanja sistema dveh teles pod vplivom medsebojnih in zunanjih sil. Telesi nista točkasti, vendar njune dimenzije pri obravnavi nimajo nobene vloge. Pri tem imamo namesto ene enačbe gibanja dve. Problema gibanja sistema dveh teles se lahko lotimo na več načinov. Na primer, pri konservativnih silah lahko uporabimo enačbe za energijo in gibalno količino, še posebej če zunanjih sil ni. Pozneje bomo spoznali tudi Lagrangeev in Hamiltonov matematični formalizem. Tukaj bomo neposredno uporabili drugi Newtonov zakon.



### Računski zgled 5

Škatla z maso  $m_1 = 1$  kg leži na tleh, na njej je manjša škatla z maso  $m_2 = 0,5$  kg. Koeficient trenja med spodnjo škatlo in tlemi je  $k_{tr} = 0,2$ , koeficient lepenja na stični ploskvi med škatlami pa je  $k_l = 0,4$ . Z vsaj kolikšno silo  $F$  moramo v vodoravni smeri povleči spodnjo škatlo, da bo zgornja škatla zdrsnila z nje (Slika 9)?



Slika 9: Sile pred zdrsom zgornje škatle. Zaradi nazornosti so prikazane samo vodoravne sile na spodnjo škatlo. Navpično usmerjene sile so opisane v besedilu. Na zgornjo škatlo deluje v vodoravni smeri samo sila lepenja, ki pa je nasprotno enaka zgoraj prikazani sili lepenja na spodnjo škatlo.

Predstavljajmo si prav mejni primer, tik preden zgornja škatla zdrsne. Takrat se gibljeta še obe škatli kot celota z istim pospeškom  $a$  v smeri vlečne sile  $F$ . Obravnavajmo najprej zgornjo škatlo. Njo vleče sila lepenja med škatlami, ta sila pa je največja mogoča, saj je škatla tik pred zdrsom. Iz drugega Newtonovega zakona izhaja:  $m_2 a = k_l m_2 g$ , zato je pospešek  $a = k_l g$ .

Od tukaj naprej imamo dve praktični možnosti pogleda na sistem in obravnavajmo oba, da preverimo njuno skladje. Po prvi možnosti opazujemo gibanje spodnje škatle. Nanjo deluje v desno sila  $F$ , nasprotujeta pa ji sila trenja  $F_{tr}$  in sila lepenja  $F_l$  med škatlami. Po Newtonovem zakonu je:  $m_1 a = F - F_{tr} - F_l$ . Čeprav obravnavamo samo spodnjo škatlo, k sili trenja nanjo vpliva teža obeh škatel, ki je nasprotno enaka normalni sili tal:  $F_{tr} = k_{tr}(m_1 + m_2)g$ . Pri sili lepenja se pojavi samo masa zgornje škatle:  $F_l = k_l m_2 g$ . Upoštevajmo tudi zgornjo enačbo za pospešek in izračunajmo vlečno silo:

$$F = (k_l + k_{tr})(m_1 + m_2)g.$$

Po drugi, elegantnejši možnosti gledamo na obe škatli kot celoto. Zato ne upoštevamo notranjega para nasprotnih sil lepenja med škatlami:  $(m_1 + m_2)a = F - F_{tr}$ , kar da enak končni izraz za silo kot zgoraj. Vstavimo podatke in dobimo  $F = 8,83 \text{ N}$ .

## 1.4 Zgledi 2D in 3D gibanja

Kot klasična zgleda dvodimenzionalnega (2D) gibanja točkastega telesa obravnavajmo kroženje brez vpliva teže in poševni met v težnem polju Zemlje. Ne glede na dejansko lego v tridimenzionalnem (3D) prostoru bomo točke v ravnini gibanja opisali s koordinatama  $x$  in  $y$ .



## Računski zgled 6

Zgled kroženja točkastega telesa po krožnici s polmerom  $R$  naj bo čim splošnejši. Telo ima maso  $m$ , h krožnemu tiru pa ga ne glede na druge zunanje sile prisili toga prečka, vrtljiva okrog izhodišča. Razen tega na telo deluje tudi spremenljiva zunanja sila ali rezultanta več sil, pri kateri je pomembna samo njena projekcija na ravnino kroženja. Obravnavajmo dinamiko telesa.

Kinematiko telesa lahko opišemo s kotom  $\varphi$  in koordinatama:  $x = R \cos \varphi$ ,  $y = R \sin \varphi$ . Komponenti hitrosti sta:  $v_x = \frac{dx}{dt} = -R\omega \sin \varphi$ ,  $v_y = \frac{dy}{dt} = R\omega \cos \varphi$ . Vpeljali smo kotno hitrost:  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ . S ponovnim odvajanjem po času izračunamo tudi komponenti pospeška, pri čemer upoštevamo tudi odvisnost kotne hitrosti od časa:

$$\begin{aligned} a_x &= -R\alpha \sin \varphi - R\omega^2 \cos \varphi \\ a_y &= R\alpha \cos \varphi - R\omega^2 \sin \varphi. \end{aligned}$$

Vpeljali smo tudi kotni pospešek:  $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ . Rezultat prepisimo kot vektorsko vsoto:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t \quad (1.14 \text{ a})$$

$$\vec{a}_r = -R\omega^2(\cos \varphi, \sin \varphi) \quad (1.14 \text{ b})$$

$$\vec{a}_t = R\alpha(-\sin \varphi, \cos \varphi). \quad (1.14 \text{ c})$$

V med seboj pravokotnih komponentah pospeška  $\vec{a}_r$  in  $\vec{a}_t$  prepoznamo radialni in tangencialni pospešek. Radialni pospešek kaže v nasprotno smer kot krajevni vektor, proti središču kroženja, tangencialni pospešek pa v smer hitrosti. Torej lahko pospešek pri kroženju razstavimo na pravokotni komponenti na dva načina: (I) običajni način glede na kartezični osi ali pa (II) uporabnejši način glede na trenutno radialno in tangencialno smer pri gibanju. Količini  $\omega$  in  $\alpha$  smo tukaj vpeljali kot skalarja; na splošno sta pri 3D opisu gibanja vektorja. V našem 2D primeru gibanja, ki ga vložimo v 3D prostor, sta oba vektorja pravokotna na ravnino gibanja telesa. Kako pa vpliva zunanja sila  $\vec{F}$  na kroženje telesa? V tem primeru je najkoristnejša razstavitev sile na radialno in tangencialno komponento. Pomembna je predvsem druga, ki jo preprosto izračunamo kot projekcijo na smer vektorja hitrosti:

$$F_t = \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{v}. \quad (1.15 \text{ a})$$

V števcu izraza na desni strani je skalarni produkt med celotno silo in hitrostjo. Nato izračunamo velikost tangencialnega pospeška  $a_t = \frac{F_t}{m}$ . Kotni pospešek je:  $\alpha = \frac{F_t}{Rm}$ . Z integriranjem tega lahko izračunamo najprej odvisnost kotne hitrosti od časa,  $\omega(t)$ , in nato tudi kot  $\varphi(t)$ . S tem je gibanje povsem opisano, če vnaprej poznamo časovno odvisnost sile. V opisanem računu sploh nismo potrebovali radialne komponente sile:

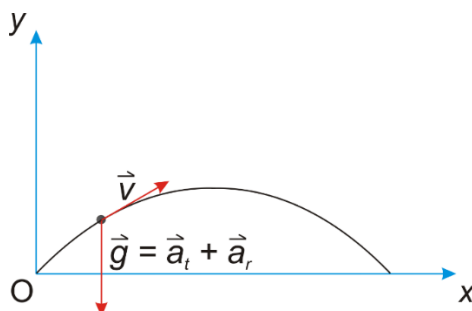
$$F_r = \frac{\vec{F} \cdot \vec{r}}{r}. \quad (1.15 \text{ b})$$

V števcu izraza na desni strani je skalarni produkt med celotno silo in krajevnim vektorjem. Če nas zanima velikost radialnega pospeška, je ta določena že s kotno hitrostjo:  $a_r = R\omega^2$ . Lahko pa uporabimo  $F_r$  za izračun radialne reakcijske sile prečke  $F_p$ . Če je v nekem trenutku  $F_t = 0$ , potem je radialna sila prečke kar centripetalna sila:  $F_p = F_c = -mR\omega^2$ . Z negativnim predznakom povemo, da kaže proti središču kroženja. Če pa obstaja tudi radialna komponenta sile navzven,  $F_r > 0$ , je radialna sila prečke:  $F_p = -mR\omega^2 - F_r$ . Centripetalna sila je namreč vektorska vsota sile prečke in radialne komponente zunanje sile. Tukaj poudarimo, da centripetalna sila ni neka posebna sila, ampak je rezultanta drugih sil. Skicirajte sami smeri sil in premislite o njihovih velikostih za oba primera:  $F_r > 0$  in  $F_r < 0$ .



### Računski zgled 7

Telo zleti iz izhodišča s hitrostjo  $v_0$  in pod začetnim kotom  $\alpha$  glede na vodoravnico. Obravnavajmo gibanje telesa. V vsaki točki na paraboli tega poševnega meta razstavimo pospešek na radialno in tangencialno komponento (Slika 10).



**Slika 10:** Poševni met, hitrost in težni pospešek. Tangencialna komponenta pospeška kaže v smeri hitrosti (druga polovica parabole, hitrost se povečuje), ali pa v nasprotno smer (prva polovica parabole kot na tej sliki, hitrost se do temena zmanjšuje).

Zapišimo koordinati telesa:  $x = v_0 \cos \alpha \cdot t$ ,  $y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$ . Komponenti hitrosti sta:  $v_x = v_0 \cos \alpha$ ,  $v_y = v_0 \sin \alpha - gt$ , komponenti pospeška pa:  $a_x = 0$ ,  $a_y = -g$ .

Drugi del naloge je težji, vendar lahko rešimo problem razstavitve pospeška na tangencialno in radialno komponento na več načinov. Geometrijsko je morda najbolj nazoren način ta, da najprej v dani točki na paraboli poiščemo smerni vektor na tangenti  $\vec{e}_t$  in smerni vektor na njeni pravokotnici  $\vec{e}_n$ . Ni treba, da najprej zapišemo enačbo parabole  $y(x)$  in smer tangente poiščemo z odvajanjem te funkcije. Tangentni smerni vektor je vzporeden vektorju hitrosti:

$$\vec{e}_t = \frac{(v_x, v_y)}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}.$$

Vektor  $\vec{e}_n$  je pravokoten na vektor  $\vec{e}_t$ , zato ga izrazimo z zamenjavo komponent:

$$\vec{e}_n = \frac{(v_y, -v_x)}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}.$$

Zdaj izračunamo ustrezni komponenti težnega pospeška:

$$a_t = \vec{g} \cdot \vec{e}_t = (0, -g) \cdot \frac{(v_x, v_y)}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

$$a_t = -\frac{gv_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

$$a_r = \vec{g} \cdot \vec{e}_r = (0, -g) \cdot \frac{(v_y, -v_x)}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

$$a_r = \frac{gv_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}.$$

Izrazimo komponenti pospeška s koordinato  $x$ , namesto s časom  $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$ . Še raje vpeljimo brezdimenzijsko koordinato  $u = \frac{x}{x_{max}}$ , kjer je domet  $x_{max} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$ .

Rezultat je:

$$a_t = \frac{(2u - 1) \sin \alpha}{\sqrt{1 + 4u(u - 1) \sin^2 \alpha}} g$$

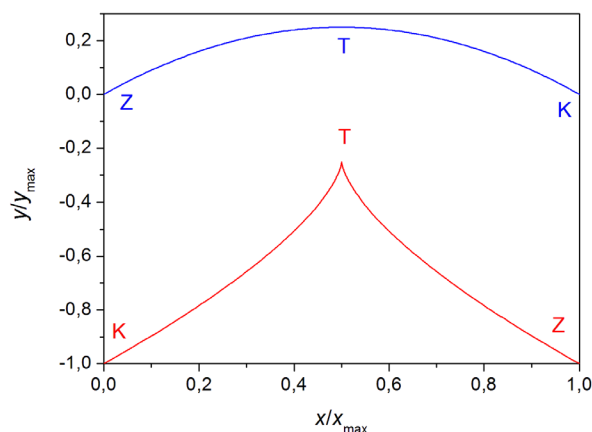
$$a_r = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 + 4u(u - 1) \sin^2 \alpha}} g.$$

Medtem ko je radialna komponenta vedno pozitivna in kaže proti trenutnemu »središču kroženja«, pa tangencialna komponenta zamenja predznak v temenu parabole T. V temenu T, pri  $u = 1/2$ , je radialni pospešek največji in je tam enak težnemu pospešku.

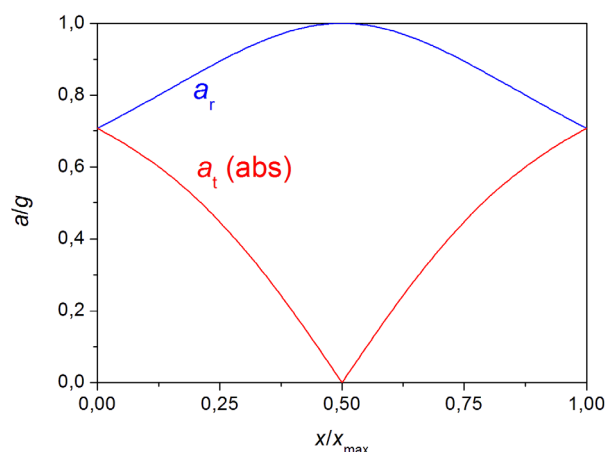
Opozoriti moramo tudi na nekaj pomembnih pojmov v zvezi s poljubno matematično krivuljo v 2D. Več o tem bomo povedali v posebnem matematičnem razdelku. Čeprav krivulja ni krožnica, lahko v vsaki njeni točki »pritisnemo« krožnico, ki se krivulji najbolj prilega. Pri tem se pri krivulji sami in pritisnjeni krožnici paroma ujemajo vrednost  $y$ , odvod  $dy/dx$  (skupna tangenta) in tudi drugi odvod  $d^2y/dx^2$  (enaka ukrivljenost). V vsaki točki ima pritisnjena krožnica zase svoj polmer  $R$  in središče S. Tukaj bomo prišli do teh podatkov po fizikalni poti, namesto z matematičnim formalizmom za krivulje. Iz radialnega pospeška in hitrosti izrazimo polmer pritisnjene krožnice:  $R = \frac{v^2}{a_r}$ . Če v dani točki krivulje poznamo tudi smer normale, ki naj kaže proti središču krožnice, lahko izračunamo tudi obe koordinati središča.

Na Sliki 11 je prikazan graf parabole  $y(x)$  v brezdimenzijski obliki pri začetnem kotu  $\alpha = 45^\circ$ . Iz enačb za domet in maksimalno višino,  $x_{max} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$  in  $y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$ , je razvidno, da je pri tem kotu  $y_{max} = \frac{1}{4} x_{max}$ . Kako pridemo do obeh enačb? Teme parabole T z maksimalno višino je tam, kjer je navpična komponenta hitrosti nič. Najprej izračunamo čas, da pride telo do T, pri dvakrat večjem času pa pade telo na tla. Iz obeh časov izračunamo  $x_{max}$  in  $y_{max}$ . Na isti sliki je narisana tudi graf (spodnja špičasta krivulja), ki podaja lege središč ustreznih pritisnjenih krožnic (evoluta). Špica na sredini ustreza središču krožnice, ki se prilega temenu parabole (obe oznaki T). Za ta par točk je krivinski radij, to je razdalja med njima, najkrajši:  $R = \frac{1}{2} x_{max}$ . Preverimo! V temenu parabole je hitrost najmanjša:  $v = v_x = v_0 \cos \alpha$ , radialni pospešek je v tej točki enak težnemu. Torej je  $R = \frac{(v_0 \cos \alpha)^2}{g} = \frac{1}{2} x_{max}$  v primeru začetnega kota  $45^\circ$ . Biti moramo pozorni na to, da levi polovici parabole ustreza desna polovica evolute, in nasprotno. Ko

gre telo po paraboli od leve proti desni, gre ustrezna točka na evoluti v nasprotno smer. To smo poudarili z oznakama Z za začetek in K za konec gibanja telesa po paraboli. Na Sliki 12 sta prikazana grafa obeh komponent težnega pospeška v radialni in tangencialni smeri glede na pritisnjene krožnice.



Slika 11: Parabola pri poševnem metu (zgornja krivulja) in ustrezna evoluta (krivulja središč pritisnjenih krožnic, spodnja krivulja s špico na sredini)



Slika 12: Radialni in tangencialni pospešek v točkah parabole v enotah težnega pospeška. Pri  $a_t$  smo zaradi lažje primerjave vzeli absolutno vrednost, ker je negativen v prvi polovici parabole. Pri začetnem kotu  $45^\circ$  sta v začetni in končni točki velikost obeh komponent pospeška enaki.



## Računski zgled 8

Telo se enakomerno giblje po 3D vijačnici, katere geometrijska parametra sta polmer  $R$  in hod  $H$  (razmik med sosednjima ovojem). Opišite gibanje telesa (lega, hitrost in pospešek). Kolikšno pot  $s$  naredi telo v času  $t$ ?

Vijačnica naj ima geometrijsko os v navpični ( $z$ ) smeri. Enakomerno gibanje po njej si predstavljajmo sestavljeno iz enakomernega kroženja v vodoravni ravnini in enakomernega premega gibanja v navpični smeri. Ustrezen zapis koordinat telesa je:  $x = R \cos(\omega t)$ ,  $y = R \sin(\omega t)$ ,  $z = v_z t$ . Vendar pa sta kotna hitrost  $\omega$  in komponenta hitrosti  $v_z$  med seboj povezani. V enakem času, kot naredi telo na krožnici en obhod, se pomakne za hod  $H$  navzgor. Zato je  $\omega = 2\pi \cdot \frac{v_z}{H}$ . Komponente hitrosti so  $v_x = -R\omega \sin(\omega t)$ ,  $v_y = R\omega \cos(\omega t)$  in  $v_z$ , komponente pospeška pa:  $a_x = -R\omega^2 \cos(\omega t)$ ,  $a_y = -R\omega^2 \sin(\omega t)$  in  $a_z = 0$ . Pospešek se ujema s centripetalnim pospeškom. Naklonski kot vektorja hitrosti glede na vodoravno ravnino izračunamo takole:

$$\beta = \arctan \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

$$\beta = \arctan \frac{v_z}{R\omega} = \arctan \frac{H}{2\pi R}.$$

Ta kot podaja strmino vijačnice. Pot v odvisnosti od časa izračunamo z integralom:

$$s = \int_0^t \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} dt.$$

V primeru spirale je vsota kvadratov komponent hitrosti neodvisna od časa, zato je rezultat preprost:

$$s = v_z t \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi R}{H}\right)^2}.$$

V zvezi s silo Coulombovega tipa omenimo še en poseben klasični ohranitveni zakon, ki ga lahko prevedemo tudi v kvantno-mehanski zapis. Coulombova interakcija naj bo privlačna, kot deluje električna sila med točkastima električnima nabojema nasprotnih predznakov ali pa gravitacijska sila med nebesnima telesoma. Sila je centralna in njena velikost obratno sorazmerna s kvadratom razdalje med telesoma. Vzemimo, da je eno telo zelo masivno in da miruje v izhodišču koordinatnega sistema. Potem je sila tega telesa na drugo telo:

$$\vec{F} = -\gamma \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (1.16)$$



Tukaj je  $\vec{r}$  krajevni vektor lažjega telesa. Na primer, pri gravitacijski sili je  $\gamma = \kappa M m$ , kjer je  $\kappa$  gravitacijska konstanta,  $M$  masa masivnega telesa v izhodišču,  $m$  pa masa opazovanega telesa (na kratko telesa), ki ga imamo za točkastega in katerega dinamiko opazujemo. Definirajmo naslednjo količino, povezano s krajevnim vektorjem, gibalno in vrtilno količino telesa:

$$\vec{A} = \frac{\vec{r}}{r} - \frac{1}{\gamma m} \vec{p} \times \vec{l}. \quad (1.17)$$

Vektor (1.17) imenujemo Runge–Lenzov vektor. Dokazali bomo, da se ta vektor pri gibanju telesa ohranja. Po času bomo odvajali vsakega od obeh členov na desni strani enačbe (1.17) posebej. Z odvajanjem enačbe  $r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r}$  najprej izhajaja:

$$\dot{r} = \frac{\vec{r} \cdot d\vec{r}/dt}{r}. \quad (1.18)$$

Odvod leve strani enačbe (1.18) pomeni, da najprej poiščemo velikost krajevnega vektorja telesa in šele nato to velikost odvajamo po času. Nato odvajamo prvi člen na desni (1.16):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{d\vec{r}/dt}{r} - \frac{\dot{r}}{r^2} \vec{r} = \frac{\vec{p}}{mr} - \frac{\dot{r} \cdot \vec{p}}{mr^3} \vec{r}. \quad (1.19)$$

Uporabili smo odvajanje produkta, (1.18) in tudi definicijo za  $\vec{p}$ . Lotimo se drugega člena:

$$\frac{d}{dt} \left( -\frac{1}{\gamma m} \vec{p} \times \vec{l} \right) = -\frac{1}{\gamma m} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} \times \vec{l}.$$

Upoštevali smo, da je pri centralni sili vrtilna količina konstantna, zato je njen odvod nič. Za odvod gibalne količine upoštevajmo (1.1 a), (1.16) in tudi definicijo za  $\vec{l}$ :

$$\frac{d}{dt} \left( -\frac{1}{\gamma m} \vec{p} \times \vec{l} \right) = \frac{1}{m} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \times (\vec{r} \times \vec{p}). \quad (1.20)$$

Za dvojni vektorski produkt v enačbi (1.20) uporabimo relacijo:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}.$$

Tako dobimo:

$$\frac{d}{dt} \left( -\frac{1}{\gamma m} \vec{p} \times \vec{l} \right) = \frac{1}{mr^3} [(\vec{r} \cdot \vec{p})\vec{r} - r^2\vec{p}]. \quad (1.21)$$

Člena (1.19) in (1.21) se izničita. Zato zares velja:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = 0. \quad (1.22)$$

## 2 Lagrangian in Hamiltonian

### 2.1 Generalizirane koordinate

Sistem vsebuje  $N$  točkastih delcev. Če ne bi bilo omejitev gibanja, bi to pomenilo  $3N$  prostostnih stopenj. Prostostno stopnjo si lahko zamišljamo kot dovoljeno smer gibanja. Na primer, eno točkasto telo, ki se lahko giblje v 3D prostoru, ima 3 prostostne stopnje gibanja. Zanje ponavadi izberemo tri med seboj pravokotne smeri. Točkasto telo, ki se lahko giblje samo po neki ploskvi v prostoru, ravni ali ukrivljeni, ima samo 2 prostostni stopnji. Če pa se lahko giblje samo po neki premici ali po vnaprej določeni krivulji, ima 1 prostostno stopnjo. Eni prostostni stopnji ustreza ena generalizirana (posplošena koordinata). Za zgled vzemimo dve točkasti telesi, ki se lahko brez omejitev gibljeta v nekem prostoru. Skupaj imata 6 prostostnih stopenj, za 6 generaliziranih koordinat pa vzamemo po 3 kartezične koordinate za vsako od njiju. Zaradi omejitev, podanih npr. s  $k$  enačbami za sklopitev med kartezičnimi koordinatami, imamo samo  $f = 3N - k$  prostostnih stopenj in prav toliko generaliziranih koordinat:  $q_1, q_2, \dots, q_f$ . Zložimo jih v vektor:  $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_f)$ . Z njim izrazimo vse krajevne vektorje delcev:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(\vec{q}, t). \quad (2.1 \text{ a})$$

Eksplisitno lahko nastopi v teh enačbah tudi čas. Navedimo nekaj zgledov. Za zgoraj omenjeni prosto gibljivi točkasti telesi je npr.  $\vec{q} = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ , ali  $q_1 = x_1$ ,  $q_2 = y_1$  itd. V tem primeru sta krajevna vektorja teles  $\vec{r}_1 = (q_1, q_2, q_3)$  in  $\vec{r}_2 = (q_4, q_5, q_6)$ . Drugi zgled je delec, ki se lahko giblje samo po premici, ki gre skozi

izhodišče izbranega koordinatnega sistema. Enačbo za lego točke ali delca na tej premici zapišemo z enim samim prostim parametrom ali generalizirano koordinato  $q_1 = s$ :  $\vec{r} = s\vec{e}$ . Pri tem je  $\vec{e}$  konstantni smerni vektor te premice. Za tretji zgled vzemimo kisikovo molekulo, katere lega v prostoru nas zanima. Pri ne previsokih temperaturah lahko zanemarimo medsebojno nihanje, tako da je razdalja  $d$  med atomoma konstantna. Zanima nas lega obeh atomov v prostoru. Razdaljo med dvema točkama v prostoru podamo z eno enačbo. Zato je v tem primeru prostostnih stopenj 5. Uporaba kartezičnih koordinat za atoma ni praktična. Za prve tri generalizirane koordinate vzamemo kartezične koordinate masnega središča molekule, drugi dve pa sta kota sferičnega koordinatnega sistema, ki podajata smer vezi med atomoma. Vektor generaliziranih koordinat je  $\vec{q} = (x^*, y^*, z^*, \theta, \varphi)$ . Naj nas ne moti, če so fizikalne enote generaliziranih koordinat različne, saj gre tukaj samo za formalni zapis vektorja. Krajevna vektorja kisikovih atomov sta potem:

$$\vec{r}_{1,2} = \left( x^* \pm \frac{d}{2} \sin \theta \cos \varphi, y^* \pm \frac{d}{2} \sin \theta \sin \varphi, z^* \pm \frac{d}{2} \cos \theta \right).$$

Zgornji predznak v celi enačbi je za prvi atom, spodnji pa za drugega. V nasprotju s prvim zgledom dveh prosti delcev v 3D je tukaj vsaka generalizirana koordinata prisotna v zapisu obeh krajevnih vektorjev.

Naš cilj je z uporabo drugega Newtonovega zakona poiskati ustrezne časovne enačbe za generalizirane koordinate. Pri izpeljavah bomo potrebovali tudi izraz za hitrost vsakega ( $i$ -tega) delca z generaliziranimi koordinatami. Uporabimo tudi Einsteinovo konvencijo: če se isti indeks na isti strani enačbe pojavi dvakrat, je mišljena vsota po njem. Naj bo to indeks  $j$  za seštevanje po generaliziranih koordinatah. Odvajajmo krajevni vektor (2.1 a) totalno po času in dobimo:

$$\vec{v}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}. \quad (2.1 \text{ b})$$

Pika nad  $q_j$  označuje časovni odvod generalizirane koordinate po času. Hitrost  $i$ -tega delca je funkcija generaliziranih koordinat, njihovih časovnih odvodov in lahko tudi eksplicitno časa. Bodimo pozorni na razlike med totalnim in parcialnim odvajanjem po času. Pospešek izračunamo na podoben način s totalnim odvodom hitrosti po času:

$$\vec{a}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + 2 \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial t} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t^2}. \quad (2.1 \text{ c})$$

Pri drugem členu je dvojna vsota. Kako dobimo toliko členov in zakaj je pri tretjem členu koeficient 2, naj izpelje bralec sam.

## 2.2 Euler-Lagrangeeve enačbe

To je ključni razdelek analitične mehanike. Izpeljava Euler-Lagrangeevih enačb (ELE) izhaja iz D'Alembertovega principa dela pri **virtualnih** (navideznih premikih) telesa. O virtualnih premikih govorimo, če premaknemo telo samo v mislih, v resnici pa je telo ves čas pri miru. Virtualni premiki morajo biti v skladu z omejitvami gibanja. Na primer, pri gibanju klade po klancu je lahko virtualni premik le vzdolž klanca. Najprej vzemimo statični primer (ravnovesje sil na telo ali sistem več teles). Vsota vseh sil na  $i$ -to točkasto telo v sistemu je nič:  $\vec{F}_i = 0$ . Skalarno pomnožimo to enačbo z majhnim virtualnim premikom telesa ali delca in potem seštejmo premike po vseh telesih:  $\vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$ . Zadnja enačba še ne poda kakih novih fizikalnih spoznanj. Sedaj razdelimo vse sile na  $i$ -to telo, na **aktivne** in na **pasivne** (slednje zaradi omejitev gibanja, tudi reakcijske sile ali sile vezi). Pasivne sile so tiste, pri katerih je delo zaradi navideznega premika enako nič, ker so pravokotne nanj. Na primer, pri drsenju telesa po klancu navzdol brez trenja je teža aktivna sila, normalna sila tal je pasivna. Normalna sila tal poskrbi, da se telo ne ugrezne. Sila trenja, npr. na klancu, pa ni pasivna, čeprav se pojavi kot odziv na drsenje telesa in normalne sile tal; njeno delo je negativno. Skupno delo vseh sil na sistem delcev, aktivnih in pasivnih, je nič, če je sistem v ravnovesju. Potem pa je posebej enako nič tudi skupno delo vseh aktivnih sil na sistem v ravnovesju.

Obravnavo razširimo na dinamiko, ko sile niso v ravnovesju, tako da začnemo z dinamično enačbo (1.1 a) in sklepamo podobno kot zgoraj za ravnovesje:

$$\vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i - \frac{d\vec{p}_i}{dt} \cdot \delta\vec{r}_i = 0. \quad (2.2)$$

Spet so mišljene samo aktivne sile. Sedaj uvedemo v enačbo generalizirane koordinate. Najprej obravnavajmo člene s silami:

$$\vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \vec{F}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (2.3)$$

V enačbi je dvojna vsota: po  $i$  in  $j$ . Namesto z navideznimi premiki delcev smo si pomagali z navideznimi premiki generaliziranih koordinat  $\delta q_j$ . Pozor: čeprav je krajevni vektor delca lahko eksplicitno odvisen tudi od časa, v zadnjem izrazu ni odvoda po času,

ker ne gre za realne premike, temveč navidezne, kjer je čas fiksiran. Vrstni red seštevanja po  $i$  ali  $j$  ni pomemben. Zato lahko enačbo (2.3) prepíšemo takole:

$$\vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = Q_j \delta q_j. \quad (2.4 \text{ a})$$

kjer smo uvedli generalizirane sile:

$$Q_j = \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \quad (2.4 \text{ b})$$

Generalizirano silo  $Q_j$  si lahko mislimo kot nekakšno projekcijo vsote vseh sil na smer generalizirane koordinate  $q_j$ . V (2.4 b) z indeksom  $i$  še vedno seštevamo po delcih. V (2.4 a) pa smo prešli z vsote po delcih na levi strani enačbe k vsoti po generaliziranih koordinatah na desni strani.

Za predelavo člena z gibalno količino v enačbi (2.2) je precej več dela. Najprej uvedimo pospešek in hkrati razvoj virtualnega odmika po generaliziranih koordinatah:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} \cdot \delta \vec{r}_i = m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (2.5 \text{ a})$$

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} \cdot \delta \vec{r}_i = m_i \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - \frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j. \quad (2.5 \text{ b})$$

Da je enačba (2.5 b) pravilna, hitro preverimo, ali od nje pridemo nazaj do (2.5 a). Iz enačbe (2.1 b) izhajata tudi:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \quad (2.6 \text{ a})$$

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}. \quad (2.6 \text{ b})$$

Zato lahko vsoto (2.5 b) napišemo malo drugače:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} \cdot \delta \vec{r}_i = m_i \left[ \frac{d}{dt} \left( \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j. \quad (2.7)$$

Krajevne vektorje smo v celoti zamenjali s hitrostmi, kar bomo povezali s kinetično energijo. Pri obeh členih v oglatem oklepaju v (2.7) je posredno odvajanje tipa  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y^2}{2} \right) =$

$y \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$ , le da imamo skalarna produkta namesto navadnih. Zapišimo enačbo, ki jo dajo (2.2), (2.4 a) in (2.7):

$$\left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0. \quad (2.8)$$

Tukaj  $T$  je skupna kinetična energija vseh delcev. Ker so virtualni premiki  $\delta q_j$  popolnoma neodvisni in poljubni, je edina možnost, da je izraz v oglatem oklepaju v zadnji enačbi enak nič za vsak indeks  $j$  posebej:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0. \quad (2.9)$$

Enačba (2.9) je osnovna različica Euler-Lagrangeevih enačb (ELE). Teh enačb je  $f$ , kolikor je prostostnih stopenj sistema, to je število neodvisnih generaliziranih koordinat. V posebnem primeru, ko so sile samo konservativne, lahko preuredimo člen  $Q_j$ :

$$Q_j = \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\nabla_i V \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}. \quad (2.10)$$

V prvi vrstici smo z  $\nabla_i V$  označili gradient potenciala samo glede na kartezične koordinate  $i$ -tega delca. Vendar imamo v izrazu še vedno vsoto po vseh delcih. Te koordinate so posredne spremenljivke pri odvajanju po generalizirani koordinati  $q_j$ , zato smo pristali pri preprosti enačbi (2.10). Predpostavimo tudi, da potencialna energija ni odvisna od časovnih odvodov generaliziranih koordinat, zato lahko sistem ELE (2.9) zapišemo bolj jedrnato:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0. \quad (2.11 a)$$

Pri tem je **Lagrangian** ali **Lagrangeeva funkcija**  $L$  razlika kinetične in potencialne energije:

$$L \left( \vec{q}, \frac{d\vec{q}}{dt}, t \right) = T - V. \quad (2.11 b)$$

Z zadnjim zapisom smo poudarili, da je Lagrangian odvisen od generaliziranih koordinat in njihovih časovnih odvodov, lahko pa tudi eksplicitno od časa. To je skupaj  $2f + 1$  spremenljivk. Ob tem se moramo vedno zavedati, da ko rešimo fizikalni problem do konca, torej če nam uspe rešiti ELE, je nazadnje neodvisna spremenljivka samo čas in generalizirane koordinate so od časa odvisne.

Nazadnje smo se omejili samo na konservativne sile, ki jih podamo s potencialom. Če pa imamo sile obeh vrst, tako konservativne, kot je teža, kot tudi nekonservativne, kot je sila trenja (pozor: to ni pasivna sila v zgoraj opisanem pomenu), enačbi (2.9) in (2.11 a) posplošimo:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - Q_j = 0. \quad (2.12)$$

Konservativne sile smo vključili v Lagrangian  $L$ , nekonservativne pa v generalizirane sile  $Q_j$ .

Enačbe (2.11 a) lahko obravnavamo tudi z variacijskim računom. Minimizarati moramo naslednji integral s še neznanimi funkcijami  $q_i(t)$ :

$$S = \int L \left( \vec{q}, \frac{d\vec{q}}{dt}, t \right) dt. \quad (2.13)$$

Z zahtevo, da je variacija tega integrala enaka nič, res pridemo do ELE (2.11 a). Funkcional imenujemo tudi **akcija**, posebej če so generalizirane koordinate kartezične.

Včasih se katera od ELE poenostavi, to je, ko je ustrezna generalizirana koordinata  $q_i$  ciklična. Ciklična koordinata pomeni, da funkcija  $L$  ni neposredno odvisna od nje, ampak samo od njenega časovnega odvoda. Potem dobimo enačbo prve stopnje:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = k. \quad (2.14)$$

Konstanta  $k$  ima še poljubno vrednost, ki jo nazadnje izračunamo iz začetnih pogojev. To posebnost ciklične koordinate si velja zapomniti, saj se v pomembnih fizikalnih problemih večkrat pojavi. Izrazu na levi strani enačbe (2.14) ali v oklepaju v enačbi (2.11 a) tudi na splošno pravimo generalizirani impulz. Ta je pri ciklični generalizirani

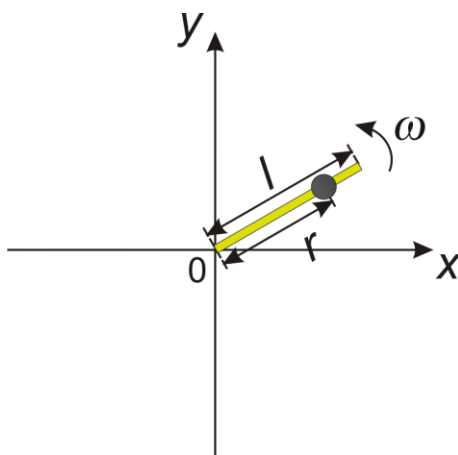


koordinati konstanten. Več o njem bomo povedali pri uvedbi Hamiltoniana. Za prvi računski zgled uporabe Lagrangiana vzemimo problem brez potencialne energije.



### Računski zgled 9

Tanka palica naj se v vodoravni ravnini enakomerno vrtili s kotno hitrostjo  $\omega$  okrog enega krajišča (Slika 13). Po njej lahko brez trenja drsi kroglica. Začetna razdalja kroglice od osi vrtenja je  $r_0$ , začetna hitrost je nič. Kako se njena razdalja  $r$  spreminja s časom?



Slika 13: Gibanje kroglice po vrteči se palici

V tem primeru imamo samo kinetično energijo kroglice, medtem ko je potencialna energija enaka nič. Generalizirana koordinata je ena sama, in to je  $r$ . Uporabimo polarni koordinatni sistem:  $x = r(t) \cdot \cos(\omega t)$ ,  $y = r(t) \cdot \sin(\omega t)$ . Polarni kot je namreč  $\varphi = \omega t$ . Več o različnih koordinatnih sistemih lahko prebere bralec v Matematičnem dodatku C. Odvajajmo koordinati, da dobimo ustrezni komponenti hitrosti (odvode po času bomo označevali s piko nad ustrezno količino):

$$\begin{aligned}v_x = \dot{x} &= \dot{r} \cdot \cos(\omega t) - r\omega \cdot \sin(\omega t) \\v_y = \dot{y} &= \dot{r} \cdot \sin(\omega t) + r\omega \cdot \cos(\omega t).\end{aligned}$$

Komponenti kvadriramo in seštejemo, da dobimo kvadrat hitrosti. Rezultat za kinetično energijo oziroma Lagrangian je preprost:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \omega^2).$$

Lahko bi ga uganili vnaprej, saj prvi člen v oklepaju pomeni kvadrat radialne komponente hitrosti, drugi člen pa kvadrat tangencialne. Masa kroglice je  $m$ , vendar se bo v končnih enačbah krajšala. Do diferencialne enačbe pojdimo po korakih:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r} \rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = m\ddot{r} \\ \frac{\partial L}{\partial r} &= m\omega^2 r \\ \ddot{r} &= \omega^2 r.\end{aligned}$$

Rešitev zadnje diferencialne enačbe drugega reda je linearna kombinacija realnih eksponentnih funkcij. Lahko pa takoj začnemo s hiperboličnim sinusom in hiperboličnim kosinusom. Glede na začetna pogoja je prava rešitev:

$$r = r_0 \cosh(\omega t).$$

Iz zadnjega izraza je razvidno, da je  $r = 0$  labilna ravnovesna lega: če je natanko  $r_0 = 0$ , potem kroglica ostane v izhodišču, če pa je  $r_0$  le malo večji od nič, se kroglica od izhodišča oddaljuje. Izračunajmo še, s kolikšno hitrostjo zapusti kroglica palico, ki je dolga  $l > r_0$ . Uporabimo zgoraj izpeljani izraz za hitrost:

$$\begin{aligned}v^2 &= \dot{r}^2 + r^2\omega^2 \\ v^2 &= \omega^2 r_0^2 [\sinh^2(\omega t) + \cosh^2(\omega t)].\end{aligned}$$

Uporabimo še zvezo  $\sinh^2 x = \cosh^2 x - 1$ , in tudi  $l = r_0 \cosh(\omega t)$  za konec palice:

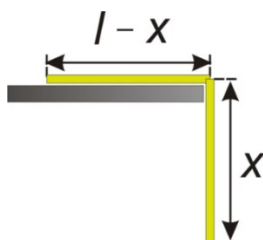
$$v = \omega \sqrt{2l^2 - r_0^2}.$$

Limitna primera sta: (1)  $r_0 \approx 0 \rightarrow v = \sqrt{2} \cdot \omega l$ ; (2)  $r_0 = l \rightarrow v = \omega l$ . Kaj pa čas? V prvem primeru potrebuje kroglica neskončen (ali zelo velik) čas, da pride do konca palice, čeprav je hitrost končna; v drugem primeru je čas potovanja po palici enak nič. Druga limita sicer fizikalno ni zanimiva, je pa testni primer za pravilnost izpeljane enačbe za hitrost. Prvi limitni primer je lahko nekoliko zavajajoč, zato poudarimo, da pomeni  $r_0 = 0$  labilno ravnovesno lego. Teoretično vztraja kroglica v tej legi neskončno časa, vendar da že majhen odklik kroglice od izhodišča končni časa gibanja. Je pa očitno, da čim manjši je  $r_0$ , tem večji je čas.



## Računski zgled 10

Poravnano verižico z dolžino  $l$  postavimo na rob mize, tako da visi čez rob tretjina njene dolžine (Slika 14). Potem jo spustimo, da zdrsne čez rob. Trenje zanemarimo. Zapišimo in rešimo ustrezno enačbo njenega gibanja.



Slika 14: Verižica na robu mize

Naj na splošno visi z roba del verižice z dolžino  $x$ . To dolžino izberemo kot generalizirano koordinato. Cela verižica, del na mizi in viseči del, se giblje z enako hitrostjo, ki je kar odvod koordinate  $x$  po času. Lagrangian je razlika kinetične in negativne potencialne energije:

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{mg}{2l} x^2.$$

Pri potencialni energiji smo ravnali tako: na višini roba mize izberemo njeno vrednost nič, zato je za viseči del verižice negativna. Koeficient  $\frac{1}{2}$  je zato, ker je težišče visečega dela na njegovi polovici. Upoštevali smo maso njenega visečega dela:  $m' = mx/l$ . Kot v prejšnjem zgledu delajmo postopno in zaradi večje podobnosti definirajmo  $\omega^2 = \frac{g}{l}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} \rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= mx \\ \ddot{x} &= \omega^2 x. \end{aligned}$$

Formalno je račun enak kot pri prejšnjem računskem zgledu, le da nadomestimo  $r \rightarrow x$ . Rešitev je:

$$x = \frac{l}{3} \cosh(\omega t).$$

Vrnimo se k računskemu zgledu 9, vendar naj se zdaj palica vrtil v navpični ravnini, tako da se spreminja tudi potencialna energija kroglice. Način vrtenja palice posplošimo v računskem zgledu 11.



### Računski zgled 11

Tanka palica naj se v navpični ravnini enakomerno vrtil s kotno hitrostjo  $\omega(t)$ , ki je poljubna funkcija časa. Sicer geometrija ustreza Sliki 13. Na začetku naj bo palica vodoravna. Po njej lahko brez trenja drsi kroglica. Začetna razdalja kroglice od osi vrtenja je  $r_0$ . Kakšna je diferencialna enačba za odvisnost razdalje od časa? Kakšna naj bo funkcija  $\omega(t)$ , da bo kroglica pri vrtenju ves čas ostala pri začetni razdalji od izhodišča?

Koordinati kroglice sta:  $x = r(t) \cdot \cos \varphi(t)$ ,  $y = r(t) \cdot \sin \varphi(t)$ . Kot  $\varphi$  lahko sicer izračunamo z integriranjem kotne hitrosti po času, vendar tega še ne bomo potrebovali. Komponente hitrosti in kinetično energijo zapišemo podobno kot pri zgledu 9. Zdaj namesto  $\omega t$  zapišemo  $\varphi$ , kotna hitrost  $\omega = \dot{\varphi}$  na splošno ni konstantna. Generalizirana koordinata je spet  $r$ , saj sta kot in kotna hitrost vnaprej določeni časovni funkciji. Resda ju moramo v tej nalogi še najti, ampak za samo gibanje sta to podani funkciji. Potentialna energija je odvisna od koordinate  $y$ , tako da je Lagrangian:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \omega^2) - mgr \cdot \sin \varphi.$$

Ustreza mu ELE:

$$\ddot{r} = \omega^2 r - g \cdot \sin \varphi.$$

Ta diferencialna enačba za razdaljo je nehomogena navadna linearna diferencialna enačba s konstantnimi koeficienti. Rešitev je sestavljena iz funkcije za homogeno diferencialno enačbo (npr. kombinacija hiperboličnega kosinusa in sinusa, tako kot pri računskem zgledu (8) in iz partikularne rešitve, ki je odvisna od tega, kako se kot na desni strani enačbe spreminja s časom).

Če naj se  $r$  ne spreminja, je njegov drugi časovni odvod nič, zato velja  $\omega^2 r_0 = g \sin \varphi$ . Tukaj prepoznamo dve sili: centripetalna sila je enaka dinamični komponenti teže. Izrazimo kotno hitrost in dobimo novo enačbo:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{g}{r_0} \cdot \sin \varphi}.$$

Spremenljivki ločimo in integriramo:

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin \varphi}} = \sqrt{\frac{g}{r_0}} \cdot t.$$

Integral moramo rešiti numerično za vsak kot na zgornji meji integrala na levi strani. Lahko pa se prepričamo, da ima integral pri majhnih kotih končno, torej fizikalno smiselno vrednost. Sinus kota aproksimiramo s kotom samim v radianih, zato za majhne kote velja:

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin \varphi}} \approx \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi}} = 2\sqrt{\varphi}.$$

Pri majhnih časih, ki ustrezajo majhnim kotom, je torej približna rešitev zgornje enačbe:

$$\varphi \approx \frac{g}{4r_0} \cdot t^2 \rightarrow \omega \approx \frac{g}{2r_0} \cdot t.$$



### Računski zgled 12

Telo se pod vplivom teže brez trenja giblje po ravnini z enačbo  $ax + by + cz + d = 0$ . Koordinatna os  $z$  kaže navpično navzgor, za generalizirani koordinati vzemimo  $x$  in  $y$ . Zapišimo enačbe gibanja in jih rešimo v celoti, če sta podana tudi oba para potrebnih začetnih pogojev:  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ ,  $v_x(0) = v_{x0}$ ,  $v_y(0) = v_{y0}$ .

Najprej izrazimo koordinato  $z$  s koordinatama  $x$  in  $y$  in tudi komponento hitrosti  $v_z$  s komponentama  $v_x$  in  $v_y$ :

$$z = -\frac{1}{c}(ax + by + d)$$

$$v_z = -\frac{1}{c}(a\dot{x} + b\dot{y}).$$

Lagrangian je potem:

$$L = \frac{m}{2} \left[ \left(1 + \frac{a^2}{c^2}\right) \dot{x}^2 + \left(1 + \frac{b^2}{c^2}\right) \dot{y}^2 + \frac{2ab}{c^2} \dot{x}\dot{y} \right] + \frac{mg}{c}(ax + by + d).$$

ELE:

$$\left(1 + \frac{a^2}{c^2}\right) \ddot{x} + \frac{ab}{c^2} \ddot{y} = \frac{a}{c}g$$

$$\left(1 + \frac{b^2}{c^2}\right) \ddot{y} + \frac{ab}{c^2} \ddot{x} = \frac{b}{c}g.$$

Iz tega sistema linearnih enačb izrazimo posebej obe komponenti pospeška, in nato tudi komponento v navpični smeri. Vektor pospeška je tako:

$$\vec{a} = \frac{g}{a^2 + b^2 + c^2} (ac, bc, -(a^2 + b^2)).$$

Preden poiščemo končno rešitev, ponazorimo zadnji rezultat s koti. Smer pospeška podamo s poenostavljenim, nenormaliziranim vektorjem  $\vec{e} = (ac, bc, -(a^2 + b^2))$ . Očitno je to smer, v kateri bi se po klancu enakomerno pospešeno gibalo telo, če bi ga samo spustili. To je smer najhitrejšega spreminjanja koordinate  $z$ , saj je 2D projekcija vektorja  $\vec{e}$  na vodoravno ravnino premo sorazmerna 2D gradientu funkcije  $z(x, y)$ :  $\nabla z = -\frac{1}{c}(a, b)$ . Naj bo  $\alpha$  kot, ki ga  $\vec{e}$  oklepa z ravnino  $(x, y)$ . Ta kot je kompletentaren kotu  $\beta$ , ki ga  $\vec{e}$  oklepa z navpičnim smernim vektorjem  $\vec{e}_z = (0, 0, 1)$ , zato velja:

$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{|\vec{e} \cdot \vec{e}_z|}{|\vec{e}|} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Za tretjo komponento pospeška potem očitno velja:  $a_z = -g \sin^2 \alpha$ . Do enakega rezultata seveda pridemo s preprostim 1D opisom drsenja po klancu. Če je njegov naklon  $\alpha$ , potem je pospešek na klancu zaradi dinamične komponente teže po velikosti enak  $a = g \sin \alpha$ . Ko pa računamo projekcijo vektorja tega pospeška na navpično smer, moramo dodati predznak minus in še enkrat  $\sin \alpha$ , pa smo spet pri zgornjem izrazu za  $a_z$ . Integrirajmo pospešek dvakrat, da dobimo časovno odvisnost krajevnega vektorja:

$$\vec{r} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2} (ac, bc, -(a^2 + b^2)) \cdot \frac{1}{2} g t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0.$$

Začetna hitrost  $\vec{v}_0$  in začetni krajevni vektor  $\vec{r}_0$  morata biti skladna z enačbo ravnine, kar pomeni, da imamo samo 4 neodvisne začetne podatke.



### Računski zgled 13

Zapišimo ELE za gibanje telesa brez trenja po elipsi s polosema  $a$  (v vodoravni smeri) in  $b$  (v navpični smeri) v navpični ravnini pod vplivom teže. Generalizirana koordinata je  $\psi$ , tako da velja  $x = a \cos \psi$  in  $y = b \sin \psi$ . Os  $y$  je usmerjena navpično. Nato rešimo nalogo tudi v primeru, ko elipso zavrtimo okrog osi  $x$  za konstantni ostri kot  $\theta$ , kar pomeni, da je polos  $a$  še vedno v vodoravni smeri, polos  $b$  pa oklepa z navpično ravnino kot  $\theta$ .

V prvem delu naloge zapišemo oba vektorja:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= (a \cos \psi, b \sin \psi) \\ \vec{v} &= (-a \sin \psi, b \cos \psi) \cdot \dot{\psi}.\end{aligned}$$

Lagrangian je:

$$L = \frac{1}{2} m (a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi) \cdot \dot{\psi}^2 - m g b \sin \psi.$$

Temu ustreza ELE:

$$(a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi) \cdot \ddot{\psi} + \frac{1}{2} (a^2 - b^2) \sin(2\psi) \cdot \dot{\psi}^2 + g b \cos \psi = 0.$$

Če zavrtimo elipso okrog osi  $x$ , se ta koordinata nič ne spremeni. Prej navpična koordinata  $y$  se zmanjša za koeficient  $\cos \theta$  in pojavi se nova navpična koordinata  $z$ . Spremenjene koordinate so:  $x = a \cos \psi$ ,  $y = b \cos \theta \sin \psi$  in  $z = b \sin \theta \sin \psi$ . Kinetična energija je enaka kot prej, potencialna energija se spremeni za koeficient  $\cos \theta$ , zato sta nova Lagrangian in ELE:

$$L = \frac{1}{2}m(a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi) \cdot \dot{\psi}^2 - mgb \cos \theta \sin \psi$$

$$(a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi) \cdot \ddot{\psi} + \frac{1}{2}(a^2 - b^2) \sin(2\psi) \cdot \dot{\psi}^2 + gb \cos \theta \cos \psi = 0.$$

### 2.3 Potencial, odvisen tudi od hitrosti

Generalizirana sila  $Q_j$  naj se nekoliko splošneje izraža z generaliziranim potencialom:

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad . \quad (2.15)$$

Da bi poudarili to posplošitev, smo potencial označili z  $U$  namesto z  $V$ . Ponovno vzamemo Lagrangian  $L = T - V$ , veljava ELE ostane enaka kot prej. Potencial je zdaj odvisen tudi od časovnih odvodov generaliziranih koordinat. Značilen zgled za uporabo potenciala (2.15) je Lorentzova sila v elektromagnetnem polju (EMP), ki je vsota električne in magnetne sile:

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (2.16)$$

Obe polji izrazimo z elektromagnetnima potencialoma:

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (2.17 \text{ a})$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (2.17 \text{ b})$$

Torej je generalizirani potencial enak:

$$U = e(\phi - \vec{A} \cdot \vec{v}). \quad (2.17 \text{ c})$$

Ustrezni Lagrangian je:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + e(-\phi + \vec{A} \cdot \vec{v}). \quad (2.18)$$



Uporaba ELE (2.11), kjer so generalizirane koordinate kartezične koordinate, res pripelje do drugega Newtonovega zakona za silo (2.16).

Podobno vlogo kot posplošeni potencial v elektromagnetizmu ima tudi disipacijska funkcija, s katero lahko v Euler-Lagrangeev formalizmu vključimo tudi linearni zakon upora. Naj bo vsaka komponenta zaviralne sile upora sorazmerna z ustrežno komponento hitrosti telesa pri gibanju skozi tekočino, npr. komponenta v smeri osi  $x$ :  $F_{ux} = -k_x v_x$ . Uvedimo Rayleighovo disipacijsko funkcijo za več delcev:

$$F_R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (k_x v_{ix}^2 + k_y v_{iy}^2 + k_z v_{iz}^2). \quad (2.19)$$

Silo upora na  $i$ -ti delec izrazimo kot:

$$\vec{F}_{u,i} = -\nabla_{v,i} F_R. \quad (2.20 \text{ a})$$

$$\nabla_{v,i} = \left( \frac{\partial}{\partial v_{ix}}, \frac{\partial}{\partial v_{iy}}, \frac{\partial}{\partial v_{iz}} \right). \quad (2.20 \text{ b})$$

Definirali smo hitrostni gradient z operatorjem »nabla« namesto navadnega: odvodi po komponentah hitrosti se nanašajo samo na  $i$ -ti delec. Izračunajmo delo, ki ga moramo dovajati enemu telesu, da nadomestimo izgube zaradi sile upora pri majhnem premiku:

$$dA = -\vec{F}_u \cdot d\vec{r} = -\vec{F}_u \cdot \vec{v} dt = 2F_R dt. \quad (2.21)$$

Torej pomeni disipacijska funkcija  $F_R$  polovično moč porabe energije zaradi upora. Vrnimo se spet k več telesom in izračunajmo generalizirano silo zaradi skupnega upora na vse delce. Upoštevajmo po vrsti enačbe (2.4 b), obe enačbi (2.20) in (2.6 b) in tudi posredno odvajanje glede na hitrosti in dobimo nazadnje:

$$Q_j = -\frac{\partial F_R}{\partial \dot{q}_j}. \quad (2.22)$$

Zato lahko celoten sistem ELE napišemo v tem primeru na osnovi enačbe (2.12) takole:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial F_R}{\partial \dot{q}_j} = 0. \quad (2.23)$$

## 2.4 Vpeljava Hamiltoniana

V zvezi z Lagrangianom vpeljimo generalizirani impulz  $p_j$ , ki smo ga že omenili:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}. \quad (2.24)$$

V primeru, ko je generalizirana koordinata  $q_j$  navadna kartezična koordinata, je generalizirani impulz  $p_j$  navadna gibalna količina. To preverimo, če vzamemo za Lagrangian samo kinetično energijo pri 1D gibanju:  $L = \frac{1}{2}mv^2$ ,  $v = \dot{x}$ ,  $p = \frac{\partial L}{\partial v} = mv$ . Ponovimo pojem ciklične koordinate, ki smo ga že srečali v prejšnjem razdelku: če Lagrangian ni eksplicitno odvisen od  $q_j$ , je to ciklična koordinata, ustreznemu impulzu v enačbi (2.24) se s časom ohranja.

Sestavimo Hamiltonovo funkcijo ali Hamiltonian na sledeči formalni način:

$$H = p_j \dot{q}_j - L. \quad (2.25)$$

Seštevamo po indeksu  $j$ . Za preprosto interpretacijo enačbe (2.25) vzemimo spet 1D gibanje, vendar zdaj s potencialno energijo:  $L = \frac{1}{2}mv^2 - V(x)$ . T je Hamiltonian, izračunan po tej enačbi:  $H = (mv) \cdot v - L = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$ , to je, enak je energiji. Ni pa vedno tako! Za podrobnejšo razlago si oglejmo totalni časovni odvod Hamiltoniana. Ker so vse spremenljivke v (2.25) odvisne od časa, dobimo najprej pet členov. Če upoštevamo enačbi (2.11 a) in (2.24), se dva para členov izničita, tako da ostane samo še en člen:

$$\dot{H} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2.26)$$

Zdaj lahko najdemo pogoj, da moremo Hamiltonian poistovetiti z energijo. Če Lagrangian ni eksplicitno odvisen od časa, je totalni časovni odvod Hamiltoniana po zadnji enačbi enak nič. Ponovimo: če  $L$  ne vsebuje časa eksplicitno, potem se  $H$  s časom ohranja in lahko zapišemo  $H = E$ .

Lagrangian smo obravnavali na splošno kot funkcijo generaliziranih koordinat, njihovih časovnih odvodov in lahko tudi časa v eksplicitni obliki:  $L = L\left(\vec{q}, \frac{d\vec{q}}{dt}, t\right)$ . V enačbi (2.25) za Hamiltonian lahko vidimo Legendrovo transformacijo, kjer se neodvisne spremenljivke prvotne funkcije  $L$  delno zamenjajo. To najlepše preverimo z diferencialom: naredimo to najprej za Lagrangian in nato za Hamiltonian:

$$\begin{aligned} dL &= \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ dL &= \dot{p}_j dq_j + p_j d\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ dH &= \dot{q}_j dp_j + p_j d\dot{q}_j - dL. \end{aligned}$$

V drugi vrstici smo upoštevali pri prvem in drugem členu definicijo (2.24), pri prvem tudi ELE (2.11). V tretji vrstici smo zapisali diferencial za (2.25). Po združitvi druge in tretje vrstice velja:

$$dH = -\dot{p}_j dq_j + \dot{q}_j dp_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (2.27)$$

Hamiltonian lahko potem zapišemo kot funkcijo novih neodvisnih spremenljivk:  $H = H(\vec{q}, \vec{p}, t)$ . Hkrati so iz zadnje enačbe razvidne tudi naslednje Hamiltonove enačbe:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}. \quad (2.28 \text{ a})$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}. \quad (2.28 \text{ b})$$

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (2.28 \text{ c})$$

Enačba (2.28 c) je kombinacija enačbe (2.26) in (2.27). Razmislimo o praktičnem pomenu sistema enačb (2.28 a) in (2.28 b) za reševanje danega fizikalnega problema. Ta sistem je ekvivalenten sistemu ELE (2.11). Bistvena matematična razlika med obema sistemoma enačb je v tem, da so enačbe (2.11) drugega reda za generalizirane koordinate, Hamiltonove enačbe pa so sistem enačb prvega reda. Zato jih je dvakrat več: za generalizirane koordinate in ustrezne impulze. Včasih je primernejše reševati sistem (2.11) ter drugič sistem (2.28 a) in (2.28 b). Enačba (2.28 c) je bolj teoretičnega pomena, npr. v statistični termodinamiki, pove pa, da sta totalni in parcialni odvod Hamiltoniana po času enaka.



## Računski zgled 14

Nitno nihalo je sestavljeno iz zgoraj na nosilec privezane vrvice dolžine  $l = 2$  m in na njej obešene kroglice (masa je nepomembna za naš račun). Vrvico in kroglico odmaknemo za kot  $\varphi_0 = 60^\circ$  od navpične lege in spustimo. S kolikšno hitrostjo  $v_0$  gre kroglica skozi ravnovesno lego? Kako izračunamo čas od skrajne do ravnovesne lege, četrtnino nihajnega časa nihala?

Da si bomo lahko pomagali z ohranitvijo vsote kinetične in potencialne energije, se moramo prepričati, da razen teže nobena druga sila ne opravlja dela med gibanjem kroglice. Sila vrvice je ves čas pravokotna na premike kroglice, zato je njeno delo res enako nič. Tako velja:

$$|\Delta V| = \Delta T$$

$$mgl(1 - \cos \varphi_0) = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$v_0 = \sqrt{2gl(1 - \cos \varphi_0)}.$$

Višinska razlika med obema legama kroglice je  $|\Delta z| = gl(1 - \cos \varphi_0)$ . Hitrost kroglice pri prehodu skozi najnižjo lego je potem 4,43 m/s. Za izračun časa spet uporabimo energijski zakon, ker hočemo izraziti hitrost v poljubni legi. Pri kotu  $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$  velja:

$$v = \sqrt{2gl(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}.$$

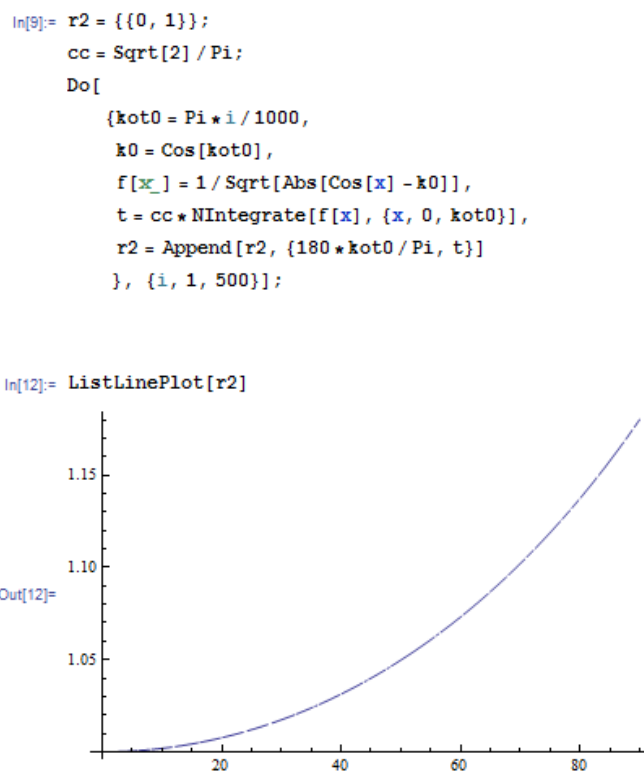
Račun nadaljujemo s kotno hitrostjo:

$$\omega = \frac{v}{l} = \sqrt{2\frac{g}{l}(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}.$$

Kratek časovni interval pri neenakomernem kroženju je  $dt = \frac{d\varphi}{\omega}$ , zato je skupni čas:

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}}.$$

Raje smo vzeli gibanje od ravnovesne do skrajne lege, ki traja enako. Čas izračunamo numerično, npr. v programu Mathematica, rezultat je 0,759 s. Izračunajmo tudi nihajni čas nitnega nihala za majhne odmike, ko so koti veliko manjši od enega radiana, zato računu dodamo koeficient 4. Kosinus majhnega kota razvijemo v Taylorjevo vrsto do kvadratnega člena:  $\cos \varphi \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$ , prav tako za največji kot  $\varphi_0$ . Tako lahko izračunamo integral analitično in rezultat je neodvisen od največjega kota:  $t_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ . Numerično izračunamo, kako se nihajni čas povečuje za večje kote, do kota  $\frac{\pi}{2}$ . Slika 15 prikazuje program v Mathematici skupaj z grafom. Na primer, pri kotu  $60^\circ$  se časa razlikujeta samo za 7 %.



Slika 15: Nihajni časi nitnega nihala do amplitude  $90^\circ$



### Računski zgled 15

To je poučen daljši 2D problem drsenja teles po ukrivljenem klancu. Obravnavajmo gladko drsenje telesa po poljubni sodi konveksni krivulji  $y(x)$  (krožnica in elipsa imata lahko tudi zgornji konkavni del), ki ima minimum pri  $x = 0$  in  $y = 0$  in je tam stabilna

ravnovesna lega (Slika 16). Opazujemo časovno odvisnost koordinate  $x$ . Amplituda naj bo  $x_0$  in začetna lega ali skrajna točka je  $T_0(x_0, y_0 = y(x_0))$  v prvem kvadrantu, začetna hitrost je nič. Ohranja se mehanska energija,  $mgy_0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$  ali:

$$v = \sqrt{2g(y_0 - y)}.$$

Vendar moramo obravnavati komponento hitrosti v smeri  $x$ :

$$v_x = \pm \sqrt{2g(y_0 - y)} \cdot \cos \varphi,$$

kjer je  $\varphi$  naklonski kot tangente na krivuljo v dani točki. Velja:  $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$ , kjer je smerni koeficient tangente  $k = \tan \varphi = y'$ . Komponenta hitrosti je:

$$v_x = \pm \sqrt{2g(y_0 - y)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}.$$

Opazujemo zadnjo četrtino nihaja, ko gre telo od izhodišča nazaj proti začetni legi v prvem kvadrantu in je zato  $v_x = \frac{dx}{dt} > 0$ . Ločimo spremenljivki  $x$  in  $t$ :

$$\sqrt{\frac{1+(y')^2}{2g(y_0-y)}} dx = dt.$$

Problem rešimo do konca z integriranjem in izračunamo celotni nihajni čas:

$$t = 4 \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2g(y_0-y)}} dx.$$

Najprej vzemimo primer majhnih odmikov iz ravnovesne lege, kjer je  $|y'| \ll 1$ . Takrat kvadrat tega odvoda v števcu zanemarimo:

$$t_{0m} = 4 \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{2g(y_0-y)}}.$$

Tako izračunamo nihajni čas  $t_{0m}$  za majhne odmike nihala iz ravnovesja. Vendar račun še bolj poenostavimo, podobno kot pri nitnem nihalu. Upoštevamo Taylorjevo vrsto za funkcijo do drugega odvoda:  $y \approx \frac{1}{2R_0} x^2$ , saj je v minimumu  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ , drugi

odvod je enak obratnemu krivinskemu polmeru krivulje:  $y''(0) = \frac{1}{R_0}$ . Enako kot za vmesno lego naredimo pri skrajni legi  $y = y_0$ . Tako dobimo:

$$t_{0m} = 4 \sqrt{\frac{R_0}{g}} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}}.$$

Pri integriranju uvedemo novo spremenljivko:  $x = x_0 \sin \varphi$ . Dobimo enak izraz kot za nitno nihalo z zamenjavo  $l \rightarrow R_0$ , če je  $l$  dolžina vrvice  $t_{0m} = 2\pi \sqrt{\frac{R_0}{g}}$ . Izrazimo zdaj resnični nihajni čas  $t_0$  za večje amplitude v enotah nihajnega časa  $t_{0m}$ . Hkrati v integralu normaliziramo koordinate glede na krivinski polmer v minimumu:  $x = R_0 u$ ,  $y = R_0 v$ , tako da transformiramo funkcijo:  $y(x) \rightarrow v(u)$ . Izraz za nihajni čas postane:

$$\frac{t_0}{t_{0m}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{u_0} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dv}{du}\right)^2}{v(u_0) - v(u)}} du, \quad (*)$$

kjer je  $u_0 = \frac{x_0}{R_0}$ . Alternativno enačbo dobimo, če integriramo po koordinati  $y$ , tako da obravnavamo že od začetka projekcijo gibanja v smeri  $y$ , ali pa da v enačbi (\*) zamenjamo vlogi spremenljivk:

$$\frac{t_0}{t_{0m}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{v_0} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{du}{dv}\right)^2}{v_0 - v}} dv, \quad (**)$$

kjer je  $v_0 = \frac{y_0}{R_0}$ . Pri obeh enačbah, (\*) in (\*\*), moramo paziti pri zgornji meji, ko postane imenovalc izraza pod korenem enak nič. Pri (\*\*) moramo biti pozorni tudi pri spodnji meji: tam je namreč zaradi minimuma  $\frac{dv}{du} = 0 \rightarrow \frac{du}{dv} = \infty$ . Izberimo sedaj nekaj značilnih krivulj: krožnico, elipso, obrnjeno na dva načina, parabolo in hiperbolični kosinus.

### Krožnica (K)

Čeprav bi za krožnico rešili nalogo hitreje po drugi poti, nadaljujemo po opisanemu postopku zaradi analogije z drugimi krivuljami. Pri krožnici s središčem  $S(0, R)$  je  $x^2 + (y - R)^2 = R^2$ , zato je ordinata  $y = R \pm \sqrt{R^2 - x^2}$ . Zato je  $v = 1 \pm \sqrt{1 - u^2}$ .

Enačba (\*) je:

$$\frac{t_0}{t_{0m}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(\sqrt{1-u^2}-\sqrt{1-u_0^2})}}$$

Spet uporabimo novo spremenljivko:  $u = \sin \varphi$ ,  $u_0 = \sin \varphi_0$ , pa imamo eliptični integral:

$$\frac{t_0}{t_{0m}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}}. \quad (*K)$$

Kot  $\varphi_0$  pomeni največji odklon nihala (točke) od osi  $y$  glede na središče krožnice, tako kot pri nitnem nihalu. Pri amplitudah  $\varphi_0 > \frac{\pi}{2}$  utegne biti uporaba enačbe (\*K) vprašljiva, saj smo jo izpeljali iz enačbe (\*), kjer smo predpostavili enoličnost funkcije  $y(x)$ . Pri tako velikih odklonih lahko isti abscisi ustrezata dve ordinati. Zato je v tem primeru bolje, da začnemo z enačbo (\*\*), saj obravnavamo le prvi kvadrant, in tam je funkcija  $x(y)$  ali  $u(v)$  enolična, čeprav ne bijektivna. Dobimo  $u = +\sqrt{v(2-v)}$ , uporabimo enačbo (\*\*), uvedemo novo spremenljivko,  $\cos \varphi = 1 - v$ , in spet pristanemo pri enačbi (\*K), vendar brez dvomov o enoličnosti in pravilnosti integrala tudi za velike amplitude. Razen tega je kosinusna funkcija enolično padajoča na vsem intervalu  $(0, \pi)$ .

### Pokončna elipsa (PE)

Polosi naj bosta  $a$  in  $b < a$ , daljša polos  $a$  je navpična. Velja enačba:  $\frac{x^2}{b^2} + \frac{(y-a)^2}{a^2} = 1$  in zato je  $y = a \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}} \right)$ ; za središče elipse vzamemo namreč  $S(0, a)$ . Krivinski polmer  $v$  izhodišču je  $R_0 = \frac{b^2}{a}$ . Središče na minimum prilepljene krožnice je pod središčem elipse, zato je  $v = \frac{1}{k^2} \cdot (1 \pm \sqrt{1 - k^2 u^2})$ , kjer je  $k = \frac{b}{a} < 1$ . To je posplošitev ustreznega izraza za krožnico zgoraj. Odvod je po absolutni vrednosti  $\left| \frac{dv}{du} \right| = \frac{u}{\sqrt{1 - k^2 u^2}}$ . Enačba (\*) je:

$$\frac{t_0}{t_{0m}} = \frac{k\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{u_0} \frac{\sqrt{1 + (1 - k^2)u^2}}{\sqrt{(1 - k^2 u^2)(\sqrt{1 - k^2 u^2} - \sqrt{1 - k^2 u_0^2})}} du.$$



Zdaj uvedemo novo spremenljivko  $\varphi$ :  $u = \frac{1}{k} \cdot \sin \varphi$  in podobno za  $u_0$  in imamo integral:

$$\frac{t_0}{t_{0m}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\varphi_0} \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi + \frac{1}{k^2} \sin^2 \varphi}{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} d\varphi. \quad (*E)$$

Kot pri krogli razpršimo dvome o pravilnosti in enoličnosti enačbe (\*E) za velike amplitude tako, da začnemo z inverzno funkcijo:  $u(v) = +\sqrt{v(2 - k^2v)}$ , uporabimo (\*\*), uvedemo novo integracijsko spremenljivko,  $\cos \varphi = 1 - k^2v$ , in spet pristanemo pri (\*E).

### Ležeča elipsa (LE)

Polosi naj bosta kot pri pokončni elipsi, le da je zdaj navpična krajša polos  $b$ . Velja enačba:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1$ , račun je podoben kot za pokončno elipso. Krivinski polmer v izhodišču je enak  $R_0 = \frac{a^2}{b}$  in je središče na minimum prilepljene krožnice nad središčem elipse. Enačba ima enako obliko kot pri pokončni elipsi, (\*E), le  $k = \frac{a}{b} > 1$ .

### Parabola (P)

Telo naj drsi po paraboli:  $y = \frac{\alpha}{2} x^2$ . Krivinski polmer v izhodišču je  $R_0 = \frac{1}{y''(0)} = \frac{1}{\alpha}$ , zato je brezdimenzijska oblika enačbe parabole:  $v = \frac{1}{2} u^2$  in prvi odvod je:  $\frac{dv}{du} = u$ . Enačba (\*) postane:

$$\frac{t_0}{t_{0m}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{u_0} \sqrt{\frac{1+u^2}{u_0^2-u^2}} du,$$

kjer je  $u_0 = \frac{x_0}{R_0}$ . Skrajna točka je  $T_0(x_0, y_0 = \frac{\alpha}{2} x_0^2)$ . Vzamemo:  $u = u_0 \sin \varphi$ . Tako dobimo naslednji integral:

$$\frac{t_0}{t_{0m}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + u_0^2 \sin^2 \varphi} d\varphi. \quad (*P)$$

Drugače kot pri prejšnjih treh krivuljah je zdaj zgornja integracijska meja neodvisna od  $u_0$ . Če velja  $u_0 \ll 1$ , zanemarimo sinusni člen pod korenem in dobimo pričakovani rezultat:  $t_0 \approx t_{0m}$ . Nasprotno, za  $u_0 \gg 1$  zanemarimo 1, tako da dobimo:  $t_0 \approx \frac{2u_0}{\pi} \cdot t_{0m}$ . Upoštevamo tudi prejšnje zveze za  $u_0$ ,  $t_{0m}$  in  $R_0$  in dobimo rezultat:  $t_0 \approx 4 \cdot \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$ . Izraz pod korenem je čas za prosti pad z višine  $y_0$ . Koefficient 4 je pravilen, ker gre telo med enim nihajem po paraboli dvakrat dol in dvakrat gor. Za velike amplitude je večji del parabole tako strm, da je tako, kot če bi bilo nihalo kar prožna kroglica, ki bi poskakovala od tal. Parabolično nihalo je malo počasnejše, saj smo v zadnji oceni zanemarili 1 pod korenem. Nihanje po paraboli se razlikuje od nihanja pri prejšnjih stožnicah po tem, da je lahko amplituda  $x_0$  neomejena, ker parabola ni sklenjena.

### Hiperbolični kosinus (HK)

Za hiperbolični sinus in hiperbolični kosinus bomo uporabljali oznaki »sinh« in »cosh«. Telo naj drsi po krivulji:  $y = \alpha[\cosh(\beta x) - 1]$ . Krivinski polmer v izhodišču je  $R_0 = \frac{1}{\alpha\beta^2}$ . Fizikalni enoti obeh parametrov sta:  $\alpha$  [m],  $\beta$  [1/m]. Zato je primerna brezdimenzijska oblika enačbe krivulje:  $v = k^2 \left[ \cosh \frac{u}{k} - 1 \right]$ , kjer je brezdimenzijski parameter:  $k = \alpha\beta$ . Odvod je potem enak:  $\frac{dv}{du} = k \cdot \sinh \frac{u}{k}$ . Enačba (\*) se prelevi v:

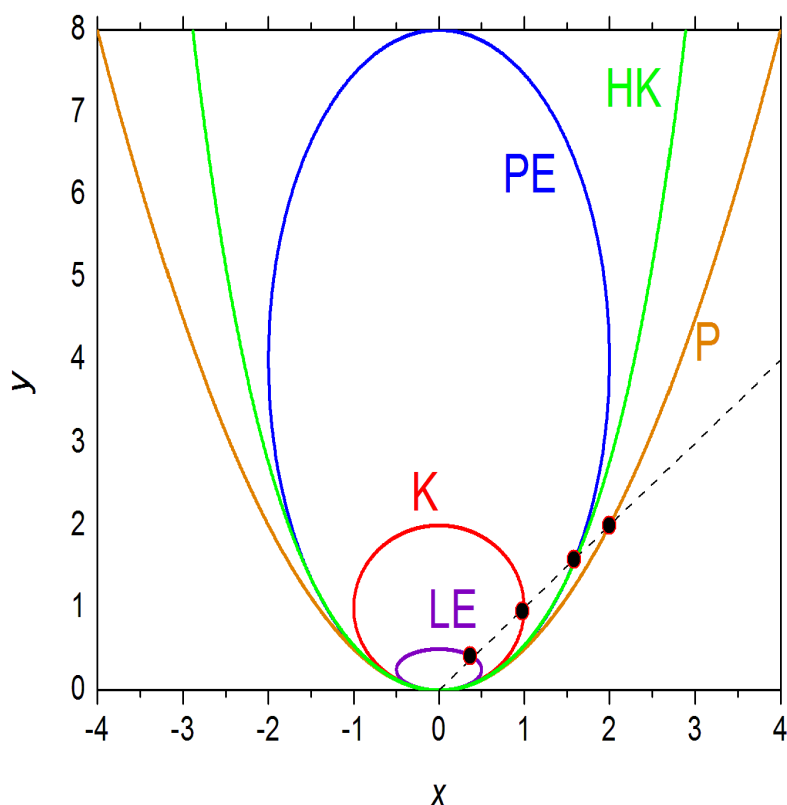
$$\frac{t_0}{t_{0m}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi k} \int_0^{u_0} \sqrt{\frac{1+k^2 \sinh^2 \frac{u}{k}}{\cosh \frac{u_0}{k} - \cosh \frac{u}{k}}} du.$$

Zdaj uvedemo novo spremenljivko in parameter:  $\varphi = \frac{u}{k}$ ,  $\varphi_0 = \frac{u_0}{k}$ . Dobimo:

$$\frac{t_0}{t_{0m}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\varphi_0} \sqrt{\frac{1+k^2 \sinh^2 \varphi}{\cosh \varphi_0 - \cosh \varphi}} d\varphi. \quad (*HK)$$

Za velike vrednosti amplitude zanemarimo 1 v števcu in pridemo do enakega rezultata kot pri paraboli: nihajni čas je približno 4-kratni čas padanja telesa z višine  $y_0 = y(x_0)$ , če točka z absciso  $x_0$  spet označuje skrajno lego.

Slika 16 prikazuje grafe vseh 5 krivulj, tako da imajo zaradi neposredne primerjave skupno središče krožnice, prilepljene v izhodišču koordinatnega sistema, kjer je minimum vseh opisanih funkcij. Zato je nihajni čas za majhne odmike,  $t_{0m}$ , za vse krivulje enak. Vzamemo preprosto  $R_0 = 1$ , torej je središče prilepljene krožnice  $S(0,1)$ . Pri obeh elipsah izberemo relacijo za polosi  $a = 2b$ , zato je pri pokončni elipsi  $a = 4$ ,  $b = 2$ , pri ležeči pa  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{1}{4}$ . Pri paraboli mora biti  $\alpha = 1$ , pri hiperboličnem kosinusu pa  $\alpha = \beta = 1$ , da je spet  $R_0 = 1$ .



Slika 16: Grafi krivulj s skupnim središčem v minimumu prilepljenega kroga: krožnica (K, rdeča krivulja), pokončna (PE, modra) in ležeča elipsa (LE, vijolična), parabola (P, oranžna) in hiperbolični kosinus (HK, zelena). V tem primeru je krožnica hkrati prilepljena krožnica za druge štiri krivulje. Označene so tudi začetne točke (črni krožci) na krivuljah pri enakem polarnem kotu, npr.  $45^\circ$ . To je kot med vodoravnico in črtkano premico. PE in HK se v tem območju najmanj razlikujeta, zato je začetna točka pri tem kotu skoraj enaka pri obeh krivuljah. Razlike postajajo bolj očitne pri večjih kotih.

Vseh 5 integralov, (\*K), (\*PE), (\*LE), (\*P) in (\*HK), rešimo numerično s Simpsonovo metodo, primer kode v Pascalu je podan spodaj. Razen pri (\*P) moramo biti pri numeričnem integriranju pozorni na bližino zgornje meje, kjer postane integrand neskončen. Zato oddvojimo majhno območje okrog zgornje meje pri vseh integralih (\*K), (\*PE), (\*LE) in (\*HK) in ga izračunamo ločeno pri približku konstantnega števca, pri imenovalcu si pomagamo z diferencialom.

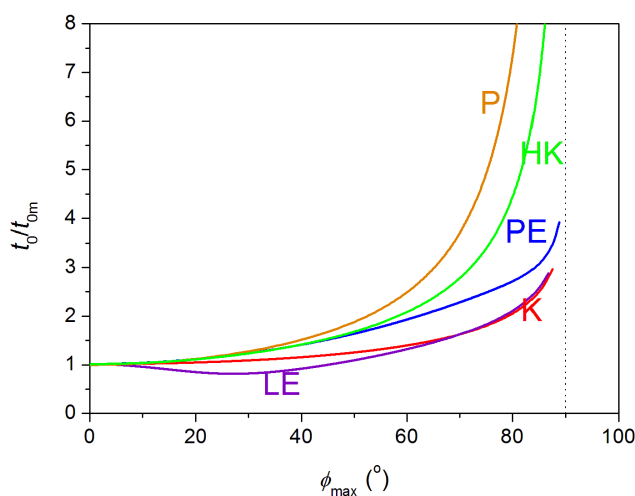
Da poenotimo grafični prikaz odvisnosti nihajnih časov od amplitude nihanja, vzamemo pri vseh krivuljah kot merilo največjega odmika od ravnovesne lege kar maksimalni polarni kot:  $\phi_{max} = \arctan \frac{y_0}{x_0}$ , kjer je  $T_0(x_0, y_0)$  skrajna točka na desni strani krivulje. Za vse te krivulje ne glede na to, ali so sklenjene ali ne, leži ta kot v intervalu  $0 < \phi_{max} < \frac{\pi}{2}$ . Z naraščanjem maksimalnega polarnega kota proti pravemu kotu nihajni čas neomejeno raste. Najbolj praktično je, da pri pripravi grafov vzamemo za vhodni argument parameter  $u_0$  ali pa  $v_0$  in potem izračunamo oba kota:  $\varphi_0$  in  $\phi_{max}$ . Za vseh pet krivulj naredimo to npr. tako, kot prikazuje Preglednica 1.

Preglednica 1: Zveza med parametri za drsenje po krivuljah

Krivulja	Argument z območjem	$\phi_{max}$	$\varphi_0$
K	$0 < v_0 < 2$ $u_0 = \sqrt{v_0(2 - v_0)}$	$\arctan \frac{v_0}{u_0}$	$\arcsin u_0, v_0 < 1$ $\pi - \arcsin u_0, v_0 > 1$
PE ali LE	$0 < v_0 < \frac{2}{k^2}$ $u_0 = \sqrt{v_0(2 - k^2 v_0)}$	$\arctan \frac{v_0}{u_0}$	$\arcsin(ku_0), v_0 < \frac{1}{k^2}$ $\pi - \arcsin(ku_0), v_0 > \frac{1}{k^2}$
P	$0 < u_0 < \infty$ $v_0 = \frac{1}{2} u_0^2$	$\arctan \frac{u_0}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
HK	$0 < u_0 < \infty$ $v_0 = k^2 \left( \cosh \frac{u_0}{k} - 1 \right)$	$\arctan \frac{v_0}{u_0}$	$\frac{1}{k} u_0$

Opomba\*: V prvi vrstici vsakega okenca drugega stolpca je podan tisti parameter, ki ga izberemo kot neodvisnega:  $u_0$  ali  $v_0$ . V drugi vrstici drugega izrazimo s prvim. V četrtem stolpcu je razen za parabolo (P) zgornja meja ustreznega integrala  $\varphi_0$ .

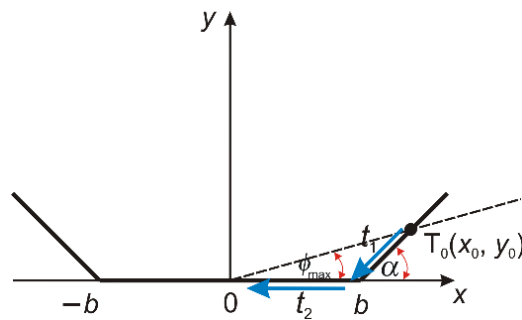
Rezultat za vseh pet krivulj je prikazan na Sliki 17.



Slika 17: Grafi za odvisnost nihajnega časa od polarnega kota za 5 krivulj s skupnim središčem v minimumu pilepljenega kroga: krožnica (K, rdeča krivulja), pokončna (PE, modra) in ležeča elipsa (LE, vijolična), parabola (P, oranžna) in hiperbolični kosinus (HK, zelena)

Posebno poučen je graf za ležečo elipso, ki ima celo minimum. Torej se v nekem območju nihajni čas z amplitudo celo zmanjšuje! Najprej morda pomislimo na napako, a si lahko rezultat hitro razložimo: ležeča elipsa je v širokem območju okrog minimuma precej položna, telo pa se najbolj pospeši v njenem strmejšem delu. Če gremo z amplitudo malo bolj v strmi del ležeče elipse, se tam čas gibanja telesa resda malo podaljša, zato pa gre telo toliko hitreje skozi minimum in položnejši del elipse!

Hitro najdemo preprost zgled, ki ga lahko rešimo analitično in potrjuje dogajanje pri ležeči elipsi. Naša »krivulja« je odsekoma linearna (Slika 18): na območju  $-b \leq x \leq b$  je  $y = 0$ , izven tega intervala sta klanca z naklonom  $\alpha$ . Klanec naj bo v stiku samo z ravnim delom podlage rahlo ukrivljen, da bo drsenje res gladko. Začetna lega telesa je  $T_0(x_0, y_0)$ , kot vidimo na sliki. Nihajni čas je  $t_0 = 4(t_1 + t_2)$ , kjer je  $t_1$  čas gibanja po klanecu in  $t_2$  po vodoravnem delu tira od vznožja klanca do izhodišča.



Slika 18: Prikaz posebne oblike krivulje, po kateri drsi telo

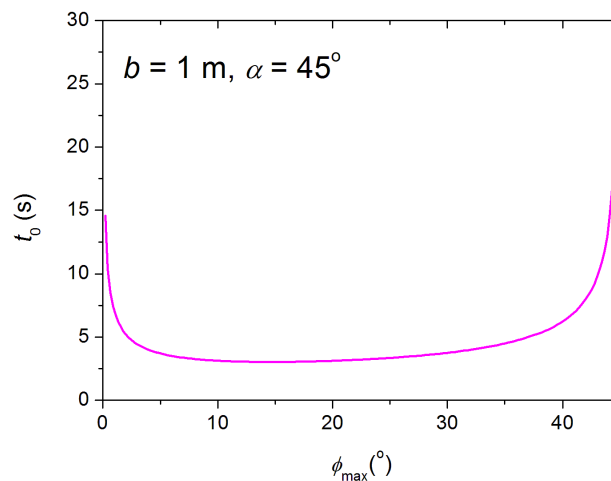
Čas  $t_1$  izračunamo iz enakomerno pospešenega drsenja po klanecu. Pospešek je  $a = g \sin \alpha$ , pot je  $s = \frac{y_0}{\sin \alpha}$ , zato iz  $s = \frac{1}{2}at^2$  izhaja:  $t_1 = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$ . Hitrost telesa ob vznožju klanca, ne glede na strmino, je  $v = \sqrt{2gy_0}$ , in s to hitrostjo nadaljuje telo pot po vodoravnem delu tira. Zato je  $t_2 = \frac{b}{v} = \frac{b}{\sqrt{2gy_0}}$ . Nihajni čas zapišemo v obliki:

$$t_0 = 4 \left( \frac{\tau}{\sin \alpha} + \frac{b}{g\tau} \right),$$

kjer smo uvedli karakteristični čas  $\tau = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$ , ki bi ustrezal času pri prostem padu z višine  $y_0$ . Opazimo, da v obeh limitah,  $\tau \rightarrow 0$  in  $\tau \rightarrow \infty$  nihajni čas narašča proti neskončni vrednosti, zato imamo pri nekem karakterističnem času minimum nihajnega časa. Z zahtevo  $\frac{dt_0}{d\tau} = 0$  dobimo:

$$t_{0min} = 8 \sqrt{\frac{b}{g \cdot \sin \alpha}}.$$

Temu ustreza optimalna začetna višina  $y_0 = \frac{b}{2} \sin \alpha$ . Podobno kot pri grafih na Sliki 16 definirajmo spet maksimalni polarni kot, ki definira začetno točko na Sliki 18, nato narišimo graf  $t_0(\phi_{max})$  za dejanske podatke:  $b = 1 \text{ m}$ ,  $\alpha = 45^\circ$  (Slika 19). Tokrat je območje polarnega kota samo v intervalu  $0 \leq \phi_{max} \leq \alpha$ .



**Slika 19:** Odvisnost nihajnega časa od maksimalnega polarnega kota pri gibanju po »krivulji« na sliki 12

Kako se spremenijo rezultati, če imamo namesto drsenja po krivuljah kotaljenje? Ne posebno. Obravnavajmo skupaj kotaljenje rotacijsko simetričnih teles, npr. polnega in tankega votlega valja ter polne in tanke votle kroglice. Pri vseh lahko zapišemo vztrajnostni moment pri vrtenju okrog težiščne osi (pri valju mislimo geometrijsko os) tako:  $J^* = cmR^2$ , kjer je  $m$  masa telesa,  $R$  polmer in  $c$  številska konstanta: 1 za votli valj,  $1/2$  za polni valj,  $2/3$  za votlo kroglo in  $2/5$  za polno kroglo. Kinetična energija pri kotaljenju je:  $T = \frac{1}{2}(mv^2 + J^*\omega^2)$ , kjer je  $v$  hitrost gibanja težišča in  $\omega = \frac{v}{R}$  kotna hitrost rotacije glede na težišče. To bomo razložili v poglavju o rotaciji togega telesa. Nadaljujmo:

$$T = \frac{1}{2} \left( mv^2 + cmR^2 \cdot \frac{\omega^2}{R^2} \right) = \frac{1}{2} (1 + c)mv^2.$$

Pri pretvorbi potencialne energije v kinetično pri gibanju po klancu navzdol je hitrost:

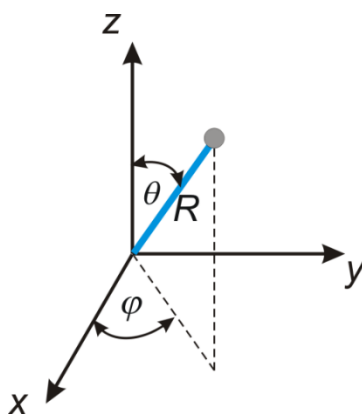
$$v = \sqrt{\frac{2g}{1+c} [y(x_0) - y(x)]}.$$

Kar se torej pri obravnavi spremeni, je le to, da je hitrost pri kotaljenju manjša za koeficient  $(1 + \epsilon)^{1/2}$  v primerjavi z drsenjem, zato so vsi časi povečani za isti koeficient. Razmerje časov  $\frac{t_0}{t_{0m}}$  se zato ne spremeni in krivulje na Sliki 13 ostanejo pri kotaljenju nespremenjene. Seveda velja omejitev, da strmina klanca ne sme postati prevelika, ker takrat sila lepenja ne more več preprečiti zdrsa (to je odvisno tudi od koeficienta lepenja med rotacijskim telesom in podlago) V realnosti moramo pri drsenju upoštevati tudi drsno trenje.

## 2.5 Konično nihalo

Pomemben in poučen zgled uporabe Lagrangeevega in/ali Hamiltonovega principa reševanja dinamičnih problemov je konično nihalo, zato mu namenimo poseben razdelek. To je nitno nihalo, lahko tudi majhna utež (kroglica) na zelo lahki togi prečki. V drugem primeru ni omejitev za kote odklona kroglice od stabilne ravnovesne lege. Masa kroglice naj bo  $m$ , dolžina toge prečke z zanemarljivo maso je  $R$ . To je polmer krogelne sfere, po kateri se lahko giblje kroglica (Slika 20). Kroglica se lahko giblje v vse smeri, zato podamo njeno lego s sferičnima kotoma  $\theta$  in  $\varphi$ , ki sta hkrati generalizirani koordinati. Kartezične koordinate in komponente hitrosti kroglice so:

$$\begin{aligned}x &= R \sin \theta \cos \varphi \\y &= R \sin \theta \sin \varphi \\z &= R \cos \theta \\ \dot{x} &= R(\cos \theta \cos \varphi \cdot \dot{\theta} - \sin \theta \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}) \\ \dot{y} &= R(\cos \theta \sin \varphi \cdot \dot{\theta} + \sin \theta \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}) \\ \dot{z} &= -R \sin \theta \cdot \dot{\theta}.\end{aligned}$$



Slika 20: Sferična kota pri koničnem nihalu

Kinetična energija kroglice je  $T = \frac{1}{2}mv^2$  in potencialna  $V = mgz$ . V vsoti kvadratov komponent hitrosti se mešana člena s časovnimi odvodoma obeh kotov izničita, tako da ima Lagrangian sorazmerno preprosto obliko:

$$L = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \cdot \dot{\varphi}^2) - mgR \cos\theta. \quad (2.29)$$

Po (2.11) dobimo sestav dveh enačb:

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\sin(2\theta) \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{g}{R}\sin\theta. \quad (2.30 \text{ a})$$

$$\dot{\varphi} = \frac{k}{\sin^2\theta}. \quad (2.30 \text{ b})$$

Pri enačbi (2.30 b) smo že upoštevali, da je  $\varphi$  ciklična koordinata, tako da smo uporabili enostavnejšo enačbo (2.14). Če vstavimo  $\dot{\varphi}$  iz enačbe (2.30 b) v (2.30), pridemo do neodvisne enačbe za polarni kot:

$$\ddot{\theta} = \frac{k^2}{2} \cdot \frac{\sin(2\theta)}{\sin^4\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta. \quad (2.31)$$

Enačbo (2.31) rešujemo numerično. Pri tem moramo biti posebej pozorni na možnost, da gre kroglica skozi katero od točk na osi  $z$ :  $\theta = 0$  ali  $\theta = \pi$ . Tam je sinus kota enak nič in v enačbi (2.31) imamo divergenco: drugi odvod  $\ddot{\theta}$  je neskončen, to pomeni, prvi odvod  $\dot{\theta}$  je nezvezen. Problem je v tem, da polarni kot po definiciji ne more postati negativen. Kot zanimivost povejmo, kako rešimo to težavo, če sami numerično programiramo to nalogo. Naj bo  $\Delta t$  časovni korak v iteraciji. V trenutku  $t$  naj bo  $\theta \approx 0$ . Takrat v naslednji iteraciji vzamemo  $\theta(t + \Delta t) = \theta(t - \Delta t)$ .

Prepišimo enačbo (2.31) v brezdimenzijsko obliko. Čas normaliziramo na nihajni čas matematičnega nihala za majhne odklone  $\tau = \frac{t}{t_0}$ , kjer je  $t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ . Potem velja:

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = \frac{K^2}{2} \cdot \frac{\sin(2\theta)}{\sin^4\theta} + 4\pi^2 \sin\theta \quad . \quad (2.32)$$

Tukaj smo vpeljali brezdimenzijsko konstanto  $K = kt_0$ . Za enolično rešitev celega problema potrebujemo še 4 začetne pogoje, npr.:  $\theta(0) = \theta_0$ ,  $\dot{\theta}(0) = \Omega_0$ ,  $\varphi(0) = \varphi_0$  in  $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$ . Čeprav je enačba (2.30 b) samo prve stopnje, vseeno potrebujemo še en



pogoj, da najdemo konstanto  $k$ , npr. z enačbo  $k = \omega_0 \sin^2 \theta_0$ . Zaradi tega potrebujemo tudi podatek  $\omega_0$ . To je v redu: ne glede na to, ali je katera koordinata ciklična ali ne, potrebujemo za mehanski problem z  $f$  generaliziranimi koordinatami  $2f$  začetnih pogojev, da ga rešimo enolično.

Obravnavajmo še dve posebni, dobro znani rešitvi sistema enačb (2.30): (1) navadno nihanje matematičnega nihala v navpični ravnini, kjer je azimutni kot  $\varphi$  konstanten; (2) enakomerno kroženje v vodoravni ravnini s konstantnim polarnim kotom  $\theta$ . V prvem primeru se enačba (2.30 a) poenostavi v enačbo:  $\ddot{\theta} = \frac{g}{R} \sin \theta$ . Na desni strani enačbe nimamo negativnega predznaka, kot smo navajeni pri nihanju, ker merimo tukaj kot od labilne zgornje lege namesto od ravnovesne najnižje lege nihala. Pri majhnih odmikih od najnižje lege raje spremenimo predznak na desni strani enačbe, štejemo kot od te lege namesto od zgornje in vzamemo  $\sin \theta \approx \theta$ , pa dobimo spet harmonično nihanje. Tudi v drugem primeru s konstantnim polarnim kotom se vrnemo k znanemu gibanju kot pri vrtiljaku. Enačba (2.30 b) potrjuje, da je kotna hitrost  $\omega = \dot{\varphi}$  v vodoravni ravnini res konstanta. Zvezo med kotno hitrostjo in polarnim kotom dobimo neposredno s primerjavo sil pri vrtiljaku (Slika 21). Tudi tukaj raje vzamemo kot  $\theta$  glede na negativni poltrak osi  $z$ .

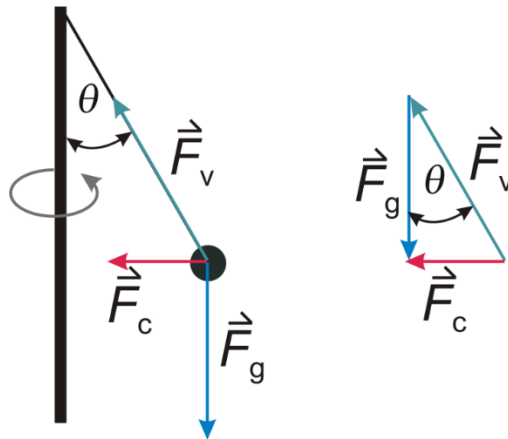
Iz pravokotnega trikotnika sil na desni ugotovimo zvezo:

$$\tan \theta = \frac{F_c}{F_g} = \frac{mr\omega^2}{mg} = \frac{R \sin \theta}{g} \cdot \omega^2.$$

Upoštevali smo, da je polmer kroženja v vodoravni ravnini enak  $r = R \sin \theta$ . Tangens kota zapišemo kot količnik sinusa in kosinusa, krajšamo in dobimo:

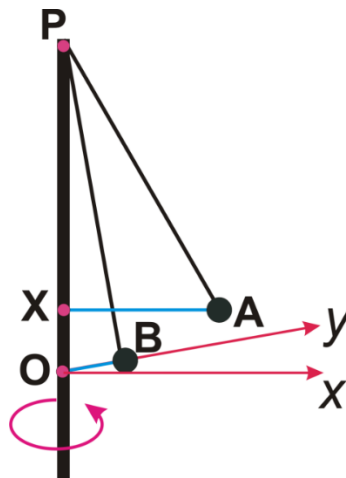
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R \cos \theta}}. \quad (2.33)$$

Kotna hitrost mora biti dovolj velika: njena najmanjša vrednost, da se vrstica ravno odkloni od navpične lege, je  $\omega_{min} = \sqrt{\frac{R}{g}}$ , ko je  $\theta = 0$ .



Slika 21: Sile pri vrtiljaku, kjer je kot  $\theta$  med vrtenjem konstanten

Nazadnje se vrnimo k splošnejšemu koničnemu nihalu, ki naj zaradi lažje predstave niha le tako, da je kot med vrvico in navpičnico oster. Zanimali nas bosta samo posebni točki z najvišjo in najnižjo lego kroglice (Slika 22, točki A in B). Koordinatni sistem bomo postavili drugače, kot smo delali zgoraj, nalogo bomo reševali z vidika energije in vrtilne količine.



Slika 22: Najvišja (točka A) in najnižja (točka B) lega kroglice pri koničnem nihalu

Na sliki smo za lepšo razvidnost označili tudi pomožne točke: P je točka, kjer je vrvica nihala pritrjena na nosilno navpično prečko, O je izhodišče koordinatnega sistema, točko X smo izbrali tako, da ima enako koordinato  $z$  kot točka A. Koordinatne osi smo izbrali tako, da je v najnižji legi kroglice točka B na osi  $y$ , ustrezná daljica je  $b = OB$ , v najvišji legi je daljica  $a = XA$  vzporedna z osjo  $x$ . Dolžini  $a$  in  $b$  sta največja in najmanjša razdalja kroglice od navpične osi. Parametri gibanja so torej dolžine  $R$ ,  $a$  in  $b$ . Projekcija sicer 3D gibanja kroglice na vodoravno ravnino je pri majhnih odklonih vrvice približno elipsa s polosema  $a$  in  $b$ , vendar tega tukaj ne bomo dokazovali, ker je izpeljava

dolgovezna. Zanimata nas le hitrosti kroglice v točkah A in B:  $v_A$  in  $v_B$ . Najprej izrazimo višinsko razliko  $\Delta z = OX$  med točkama A in B, tako da si pomagamo s Pitagorovim izrekom za trikotnika PXA in POB:  $\Delta z = \sqrt{R^2 - b^2} - \sqrt{R^2 - a^2}$ . Potrebujemo dve enačbi za obe iskani hitrosti, upoštevamo pa ohranitev navpične komponente tirne vrtilne količine kroglice glede na točko P in ohranitev vsote kinetične in potencialne energije. Medtem ko je druga ohranitvena relacija očitna, moramo to dokazati za vrtilno količino. Če vektorsko pomnožimo sili teže in vrvice z ročico med P in kroglico, je navor vedno v vodoravni smeri, zato nima navpične komponente in se komponenta vrtilne količine  $l_z$  zares ohranja. Le-to najlažje izračunamo v skrajnih točkah A in B, ker sta tam ustrezna vektorja hitrosti vodoravna (saj imamo ekstrema glede na os  $z$ ). Navpična komponenta vrtilne količine je v teh dveh točkah produkt mase, razdalje in velikosti hitrosti. Tako imamo po krajšanju mase sistem dveh enačb:

$$av_a = bv_b$$

$$\frac{1}{2}v_A^2 + g\Delta z = \frac{1}{2}v_B^2.$$

Rešitev enačb je:

$$v_A = b \cdot \sqrt{\frac{2g\Delta z}{a^2 - b^2}}. \quad (2.34 \text{ a})$$

$$v_B = a \cdot \sqrt{\frac{2g\Delta z}{a^2 - b^2}}. \quad (2.34 \text{ b})$$

Pri gravitaciji bomo obravnavali analogni problem, ko bomo poiskali hitrosti v periheliju in afeliju planeta pri kroženju okrog Sonca po eliptičnem tiru. Točka B je analoga periheliju, točka A pa afeliju.

## 2.6 Hamilton-Jacobijeva enačba

Zapišimo enačbo za energijo točkastega delca v 1D, kjer se ohranja energija:

$$E = T + V = \frac{p^2}{2m} + V.$$

Lagrangian je:

$$L = T - V = 2T - E.$$

Akcija je po definiciji časovni integral Lagrangiana:

$$S(t) = \int_0^t (2T - E) dt'. \quad (2.35 \text{ a})$$

$$S(t) = S_0(t) - Et. \quad (2.35 \text{ b})$$

$$S_0(t) = 2 \int_0^t T(t') dt'. \quad (2.35 \text{ c})$$

Upoštevali smo, da je energija konstantna. Akcijo smo tako razdelili na stacionarni del  $S_0$  in na energijski del, sorazmeren s časom. Pokažimo, da je stacionarni del akcije odvisen od časa le prek koordinat delca, ne pa tudi eksplicitno. Dokaz gre takole:

$$\begin{aligned} dS_0 &= 2T dt \\ dS_0 &= m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) dt \\ dS_0 &= p_x dx + p_y dy + p_z dz. \end{aligned}$$

V prvi vrstici dokaza smo upoštevali, da je odvod integrala s spremenljivo zgornjo mejo vrednost funkcije pod integralom. Pri prehodu iz druge v tretjo vrstico je:  $p_x = m\dot{x}$ ,  $dx = \dot{x} dt$  itd. Zaradi zadnjega diferenciala uvidimo, da je  $S_0$  res samo eksplicitna funkcija koordinat delca. Hkrati zadnja enačba pove:

$$\vec{p} = \nabla S_0. \quad (2.36)$$

Energijska enačba je potem:

$$\frac{|\nabla S_0|^2}{2m} + V - E = 0. \quad (2.37)$$

To je stacionarna Hamilton-Jakobijeva enačba za  $S_0$ . Nato uporabimo tudi enačbo (8.35 b), tako da je  $\nabla S_0 = \nabla S$ , saj je energija konstantna, in tudi  $E = -\frac{\partial S}{\partial t}$ , ker stacionarni del  $S_0$  ni eksplicitno odvisen od časa. Namesto enačbe (2.37) lahko zapišemo splošnejšo, nestacionarno Hamilton-Jakobijevo enačbo za  $S$ :

$$\frac{|\nabla S|^2}{2m} + V + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (2.38)$$

To je nelinearna parcialna diferencialna enačba za akcijo  $S(\vec{r}(t), t)$ . Enačbi (2.37) in (2.38) spominjata na stacionarno in nestacionarno Schrödingerjevo enačbo.

## 3 Gravitacija

### 3.1 Problem dveh teles pri centralni sili

Med točkastima telesoma naj deluje konservativna centralna sila, odvisna samo od njune medsebojne razdalje  $r$ . Zato je potencial te sile enak  $V(r)$ , Lagrangian pa je:

$$L = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - V(r). \quad (3.1)$$

Namesto krajevnih vektorjev  $\vec{r}_1$  in  $\vec{r}_2$  obeh točkastih teles vzamemo vektor za njuno skupno masno središče:

$$\vec{r}^* = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.2)$$

in vektor razlike leg, to je krajevni vektor relativne lege drugega telesa glede na prvo telo (Slika 23):

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \quad (3.3)$$

Ustrezna vektorja hitrosti označimo z  $\vec{v}^*$  in  $\vec{v}$ . Lagrangian (3.1) potem preide v obliko:

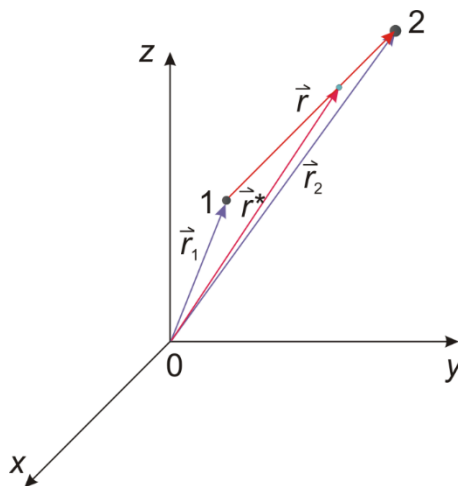
$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) (v^*)^2 + \frac{1}{2} m_r v^2 - V(r), \quad (3.4)$$

kjer je reducirana masa:

$$m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.5)$$

Povedano drugače: inverzna reducirana masa je enaka vsoti inverznih mas obeh teles. Zato je reducirana masa manjša od obeh posamičnih mas. V literaturi ponavadi označujejo reducirano maso s simbolom  $\mu$ . Ker se v Lagrangianu (3.4) ne pojavlja koordinata  $\vec{r}^*$  eksplicitno, temveč samo hitrost masnega središča, je to ciklična koordinata. Ustrezna gibalna količina se ohranja, ali hitrost masnega središča je konstanten vektor. Zato se lahko omejimo samo na obravnavo drugega dela Lagrangiana, ki ga označimo enako:

$$L = \frac{1}{2} m_r v^2 - V(r).$$



**Slika 23:** Zveza med posameznima krajevnima vektorjema teles in vektorjema  $\vec{r}^*$  in  $\vec{r}$ . Izbrali smo primer, kjer je  $m_2 = 2m_1$ , tako da je masno središče (modri krožec) na »dveh tretjinah poti« od prvega telesa do drugega.

Odslej bomo reducirano maso označevali brez indeksa »r«. Ker je sila centralna, je njen navor glede na masno središče teles enak nič, zato se ohranja vektor vrtilne količine. Gibanje je ravninsko in zato uporabimo 2D koordinatni sistem. Čeprav je Slika 23 zaradi splošnosti prikazana za poljubne smeri vektorjev in koordinatnih osi, izberemo raje takšen koordinatni sistem, da je gibanje obeh teles v ravnini  $(x, y)$ . Zato je  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Lagrangian je:

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r). \quad (3.6)$$

Zdaj je ciklična koordinata  $\varphi$ , zato je ustrezen impulz  $l$  konstanten:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} = l. \quad (3.7)$$

To pa je velikost vrtilne količine ali kar njena  $z$ -komponenta. Iz enačbe (3.7) izrazimo:

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2}. \quad (3.8)$$

Pri radialnem delu problema si pomagamo z ohranitvijo energije:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r) \\ E &= \frac{1}{2} m \left( \dot{r}^2 + \frac{l^2}{m^2 r^2} \right) + V(r) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Iz zadnje enačbe lahko izrazimo odvod  $dr/dt$ , obrnemo in integriramo:

$$t = \int_{r_z}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}}. \quad (3.10)$$

Tukaj je  $r_z$  izbrana začetna razdalja. Namesto tega integrala lahko z integriranjem dobimo neposredno enačbo za tir gibanja, če še enkrat upoštevamo enačbo (3.8):

$$\varphi = \varphi_z + \int_{r_z}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV(r)}{l^2} - \frac{1}{r^2}}}. \quad (3.11)$$

Upoštevali smo:  $d\varphi = \frac{l dt}{mr^2}$ . Začetni kot  $\varphi_z$  ustreza začetni razdalji  $r_z$ . Smiselno je uvesti novo integracijsko spremenljivko  $u = 1/r$ , ker se s tem zaradi količnika  $dr/r^2$  integral (3.11) nekoliko poenostavi.

### 3.2 Gravitacija in Keplerjevi zakoni

Nadaljnji račun je odvisen od oblike potencialne energije. Obravnavamo sistem Sonce – drugo nebesno telo. Da smo konkretnješi, vzemimo, da je drugo nebesno telo planet. Potencialna energija sistema je  $V(r) = -\frac{k}{r}$ , kjer je  $k = \kappa m_S m_P$ ,  $\kappa$  je gravitacijska

konstanta,  $m_S$  je masa Sonca in  $m_P$  masa planeta. V naslednjih enačbah še naprej označujemo reducirano maso z  $m$ . Tako dobimo iz enačbe (3.11) pri uvedbi  $u = 1/r$ :

$$\varphi = \varphi_z - \int_{1/r_z}^{1/r} \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \frac{2mku}{l^2} - u^2}} \quad (3.12)$$

S predelavo izraza pod korenem v popolni kvadrat integracijske spremenljivke z dodatnim konstantnim členom in z uvedbo nove spremenljivke  $v$ , linearno povezane z  $u$ , nastane pod korenem imenovalca izraz  $1 - v^2$ . To je:  $v = \frac{u - \frac{mk}{l^2}}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \left(\frac{mk}{l^2}\right)^2}}$ . Rešitev integrala je  $\arccos v$ . Končna rešitev za tir gibanja je:

$$r = \frac{r_0}{1 + \varepsilon \cdot \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad (3.13)$$

Pri tem je  $r_0$  nek referenčni polmer (referenčna razdalja od Sonca ali natančneje, od masnega središča sistema),  $\varphi_0$  nek referenčni kot. Ta dva parametra nista enaka začetnima vrednostima  $r_z$  in  $\varphi_z$ , ampak smo ju uvedli zato, da je enačba (3.13) zapisana v najenostavnejši splošni obliki. Zveza med  $r_0$  in  $\varphi_0$  je:  $r(\varphi = \varphi_0) = \frac{r_0}{1 + \varepsilon}$ . Parameter  $\varepsilon$  imenujemo ekscentričnost, vsaj za eliptični tir gibanja. Medtem ko lahko kot  $\varphi_0$  definiramo glede na poljubno referenčno točko na tiru gibanja, sta parametra  $r_0$  in  $\varepsilon$  natanko določena z vrtilno količino in energijo:

$$r_0 = \frac{l^2}{mk} \quad (3.14)$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} \quad (3.15)$$

Enačba (3.13) je polarna enačba stožnice. Pri negativni energiji velja  $\varepsilon = \frac{e}{a} < 1$  in gre za elipso, pri pozitivni energiji je tir hiperbola z  $\varepsilon = \frac{e}{a} > 1$ . Pri tem je goriščna razdalja enaka (plus pod korenem je za hiperbolo, minus pa za elipso):

$$e = \sqrt{a^2 \pm b^2} \quad (3.16)$$



Iz enačb izhaja tudi tale povezava za parameter  $a$  pri obeh krivuljah:

$$a = \left| \frac{k}{2E} \right|. \quad (3.17)$$

Vzemimo sedaj eliptični tir, planet naj bo dovolj majhen,  $m_p \ll m_s$ , tako da je reducirana masa  $m$  praktično enaka masi planeta. Ploščinska hitrost je sorazmerna z velikostjo vrtilne količine, zato se ohranja pri gibanju planeta okrog Sonca (drugi Keplerjev zakon). S primerjavo ploščinske hitrosti in skupne energije v periheliju (PH, planet je najbližji Soncu) in afeliju (AF, planet je najdlje od Sonca) lahko npr. izračunamo hitrost v PH, ki je največja:

$$v_{PH} = \sqrt{\frac{\kappa m_s (a+e)}{a(a-e)}}. \quad (3.18)$$

Izpeljavo te enačbe bomo prikazali v razdelku 3.4. Izrazimo ploščinsko hitrost  $\mu = \frac{dS}{dt}$ . V primeru PH in AF, ko je vektor hitrosti pravokoten na krajevni vektor planeta glede na Sonce, izpeljemo ploščinsko hitrost kot količnik med ploščino majhnega trikotnika (gl. Sliko 28) in majhnim časom. Če je majhen premik planeta enak  $ds$  in je razdalja planeta od Sonca  $r$ , velja za ploščino  $dS = \frac{1}{2} r ds$ , in če upoštevamo  $v = \frac{ds}{dt}$ , dobimo  $\mu = \frac{1}{2} r v$ . Tako velja:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{2} v_{PH} r_{PH} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\kappa m_s (a+e)}{a(a-e)}} \cdot (a-e) \\ \mu &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\kappa m_s (a+e)(a-e)}{a}} \\ \mu &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\kappa m_s (a^2 - e^2)}{a}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\kappa m_s b^2}{a}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\kappa m_s}{a}} \cdot b. \end{aligned}$$

Hkrati velja  $\mu = \frac{\pi ab}{t_0}$ , kjer je  $\pi ab$  ploščina elipse,  $t_0$  pa obhodni čas. S primerjavo obeh izrazov za ploščinsko hitrost pridemo do tretjega Keplerjevega zakona:

$$\frac{a^3}{t_0^2} = \frac{\kappa m_s}{4\pi^2}. \quad (3.19)$$

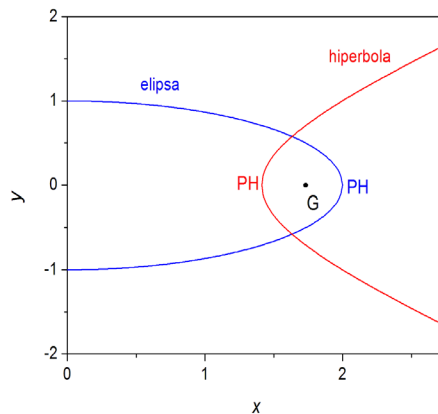
Zapišimo obhodni čas eksplicitno:

$$t_0 = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{\kappa m_S}}. \quad (3.19^*)$$

### 3.3 Izpeljava polarne enačbe za elipso, hiperbolo in parabolo

Najprej izpeljimo polarno enačbo za elipso in hiperbolo hkrati; pri izpeljavi bodo razlike le v predznakah nekaterih členov. To bomo pisali z dvojnimi predznakom: gornji bo veljal za elipso, spodnji za hiperbolo. Pri hiperboli, ki je sicer matematično dvojna krivulja, vzamemo samo desni krak, pri elipsi pa desno polovico (Slika 24). Gorišče s Soncem je v obeh primerih prikazano kot ista točka G. PH **elipse**:  $x = a$ ,  $y = 0$ ,  $r_{PH} = a - e$  in  $\varphi = 0$ ; PH **hiperbole**:  $x = a$ ,  $y = 0$ ,  $r_{PH} = e - a$  in  $\varphi = \pi$ . V obeh primerih vzamemo za  $r$  razdaljo točke na krivulji prikazanega gorišča,  $\varphi$  je kot med pozitivnim poltrakom osi  $x$  ter zveznico med goriščem in točko. Enačba elipse ali hiperbole je:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (*)$$



Slika 24: Elipsa (levo) in hiperbola (desno). Zaradi nazornosti imata elipsa in hiperbola isto gorišče. Prikazani sta samo desna polovica elipse in desni krak dvojne hiperbole.

Vanjo vstavimo koordinati telesa  $x = e + r \cos \varphi$  in  $y = r \sin \varphi$ . Pri enačbi (3.16) za goriščno razdaljo moramo obrniti zapis obeh predznakov:  $e = \sqrt{a^2 \mp b^2}$ .

Pri grafih na Sliki 24 smo izbrali za elipso  $a = 2b$ , za hiperbolo pa  $a' = \sqrt{2} \cdot b$ . Polosi  $b$  naj bosta pri obeh krivuljah enaki, tako da je v obeh primerih  $e = \sqrt{3} \cdot b$ . Elipsa ima afelij (AF) na nasprotni strani kot PH, hiperbola pa afelija nima in je gibanje telesa po njej neomejeno.

Enačba (\*) postane:

$$\frac{(e+r \cos \varphi)^2}{a^2} \pm \frac{(r \sin \varphi)^2}{b^2} = 1.$$

Odpravimo ulomka, kvadrirajmo, zmnožimo in pri dveh členih razcepimo  $a^2 = e^2 \pm b^2$ . Upoštevamo tudi  $b^2 r^2 \cos^2 \varphi + b^2 r^2 \sin^2 \varphi = b^2 r^2$ :

$$2eb^2 r \cos \varphi + b^2 r^2 \pm e^2 r^2 \sin^2 \varphi = \pm b^4.$$

Pri tretjem členu upoštevamo:  $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$ . Kosinusna člena prestavimo na desno stran enačbe in jo zapišemo kot kvadrat:

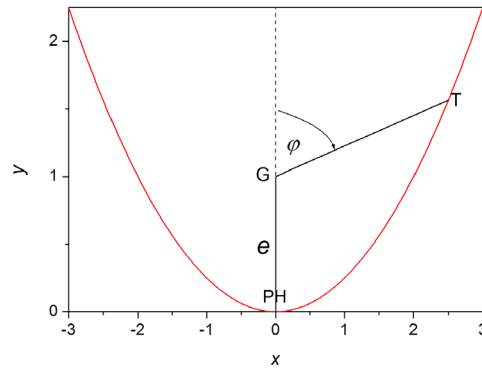
$$(b^2 \pm e^2)r^2 = \pm(b^2 \mp er \cos \varphi)^2.$$

Upoštevamo  $b^2 + e^2 = a^2$  na levi strani za elipso ali  $b^2 - e^2 = -a^2$  za hiperbolo. Nato lahko krajšamo predznak na obeh straneh enačbe, korenimo in izrazimo polmer. Dobimo enačbo (3.13) v nekoliko drugačni obliki:

$$r = \frac{b^2}{a(1 \pm \varepsilon \cos \varphi)}. \quad (3.20)$$

Hitro se prepričamo, da za  $\varphi = 0$  pri elipsi in  $\varphi = \pi$  pri hiperboli po enačbi (3.20) dobimo pravi rezultat za minimalno razdaljo  $r_{PH}$  nebesnega telesa od Sonca. Pri elipsi obstaja celoten razpon kotov  $(0, 2\pi)$ , pri hiperboli imamo omejitve intervala kotov na  $(\varphi_{min}, 2\pi - \varphi_{min})$ . Najmanjši kot ustreza premici asimptoti  $\frac{y}{b} = \frac{x}{a}$  in zanj velja enačba  $\tan \varphi_{min} = \frac{b}{a}$ . Iz zveze med  $a$ ,  $b$  in  $e$  ter med tangensom in kosinusom kota velja tudi  $\cos \varphi_{min} = \frac{1}{\varepsilon}$  in je zato tudi razdalja po enačbi (3.20) neskončna, kot mora biti. Enačba (3.20) se ujema z enačbo tira (3.13): pri elipsi je  $\varphi_0 = 0$ , pri hiperboli pa  $\varphi_0 = \pi$ .

Obravnavajmo tudi parabolo (Slika 25). Vzemimo za  $r$  razdaljo točke na paraboli od njenega edinega gorišča, kot  $\varphi$  je kot med osjo  $y$  in zveznico med goriščem in točko.



Slika 25: Parabola

V enačbo parabole  $y = kx^2$  vstavimo  $x = r \sin \varphi$  in  $y = e + r \cos \varphi$ . Kot merimo zdaj tako, da je v periheliju PH (izhodišču) enak  $\pi$ . V obeh kvadrantih gre kot od nič za točko na ordinatni osi nad goriščem G, ki je telo na paraboli ne doseže, do vrednosti  $\pi$ . V limiti, ko se telo neskončno oddalji od izhodišča, gre kot proti nič, ker koordinata  $y$  hitreje limitira proti neskončnosti kakor  $x$ . Tako definirani kot ne pove, ali je telo na levem ali desnem kraku parabole. Lahko pa bi kotu dali negativno vrednost za točko na levem kraku parabole (v drugem kvadrantu). Pri tem je  $e$  goriščna razdalja, to je razdalja med goriščem in koordinatnim izhodiščem:

$$e = \frac{1}{4k}.$$

Enačba parabole postane:

$$e + r \cos \varphi = kr^2 \sin^2 \varphi.$$

Kot prej pri elipsi uporabimo:  $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$ , uporabimo izraz za  $e$  in člen s kvadratom kosinusa kota prestavimo na levo stran enačbe. Delimo tudi s koficientom  $k$  in pridelamo popoln kvadrat na levi. Korenimo in pristanemo pri:

$$r = \frac{1}{2k(1 - \cos \varphi)}. \quad (3.21)$$

Enačba je podobna tisti za elipso, ekscentričnost pred kosinusnim členom je 1. Sedaj je negativni predznak pri kosinusnem členu, vendar je to samo stvar tega, kako merimo kot  $\varphi$ . Če bi ga merili v nasprotni smeri, od daljice PH–G navzgor, bi se predznak

kosinusnega člena obrnil. Iz zadnje enačbe je tudi razvidno, da je koordinatno izhodišče zares najbližja točka gorišču parabole, čeprav iz Slike 25 to morda ni očitno.

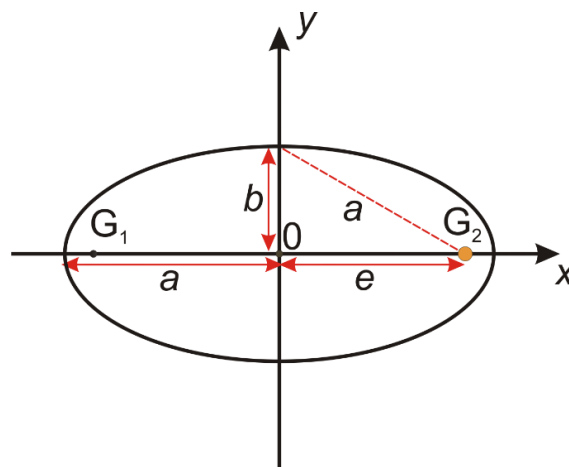
Povzemimo polarno obliko enačbe za elipso, hiperbolo in parabolo še enkrat in poenotimo zapis za vse tri krivulje. Pri zgornjih izpeljavah smo kot  $\varphi$  vzeli tako, da smo lahko v vseh treh primerih obravnavali prvi kvadrant koordinatnega sistema v ravnini  $(x, y)$ . Zdaj, ko že imamo polarni zapis za vse tri krivulje, lahko izberemo kot tako, da je v PH enak nič pri elipsi, hiperboli in paraboli. Tako vse tri krivulje obrnemo v isto smer, kakor je obrnjena elipsa na Sliki 24: gorišče je vedno levo od perihelija. Takrat je enotni polarni zapis za elipso (in tudi krožnico), hiperbolo in parabolo namesto enačbe (3.13):

$$r = \frac{r_0}{1 + \varepsilon \cos \varphi}. \quad (3.13^*)$$

Pri elipsi in paraboli je  $r_0 = \frac{b^2}{a}$  in  $\varepsilon \neq 1$ ; v primeru krožice je  $\varepsilon = 0$ . Pri paraboli je  $r_0 = 2e$  in  $\varepsilon = 1$ . Ponovimo tudi najkrajše razdalje: 1) elipsa:  $r_{PH} = a - e$ , 2) hiperbola:  $r_{PH} = e - a$ , 3) parabola:  $r_{PH} = e$ .

### 3.4 O Keplerjevih zakonih na bolj klasičen način

Obravnavajmo samo gravitacijsko vezani sistem, ko se nebesno telo z maso  $m$  giblje po eliptičnem tiru okrog Sonca z neprimerljivo večjo maso  $m_S$ . Gorišči elipse  $G_1$  in  $G_2$  sta od izhodišča oddaljeni za  $e$  (Slika 26), ekscentričnost ali izsrednost elipse je  $\varepsilon = \frac{e}{a}$ .



Slika 26: Elipsa, njeni polosi in gorišči. Zaradi zrcalne simetrije glede na obe koordinatni osi je označena le po ena velika in mala polos ter ena goriščna razdalja  $e$ . Razmerje polosi je 2, vse dolžine so v pravih razmerjih; enako velja za Sliki 27 in 28 v nadaljevanju. Sivi in večji rumeni krožec v goriščih ponazarjata dejstvo, da je zvezda samo v desnem gorišču  $G_2$ .

Med nebesnima telesoma deluje centralna privlačna gravitacijska sila z velikostjo:

$$F_g = \frac{\kappa m_s m}{r^2} \quad (3.22)$$

Gravitacijska konstanta  $\kappa$  meri  $6,67 \cdot 10^{-11}$  N m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>. Iz enačbe (3.22) izhaja izraz za negativno gravitacijsko energijo para teles:

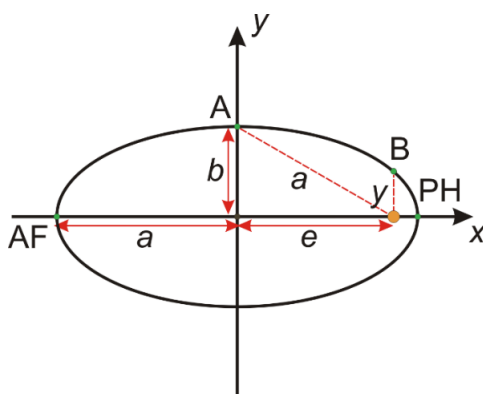
$$E_g = -\frac{\kappa m_s m}{r}. \quad (3.23)$$

Gravitacijska sila (3.22) je enaka odvodu energije (3.23) po razdalji  $r$ . V računih si bomo pomagali z energijo namesto s silo. Mehanska energija sestava obeh teles je enaka vsoti kinetične in gravitacijske energije in se ohranja, vse druge gravitacijske vplive zanemarimo.

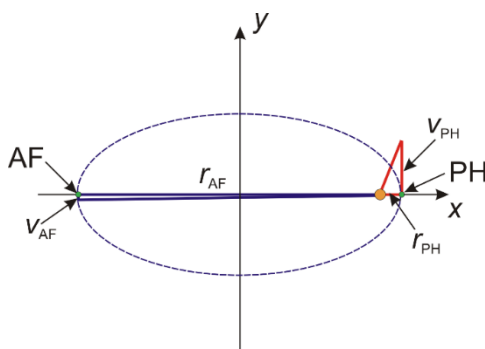
### Perihelij in afelij

Sonce je v desnem gorišču elipse. Da bo izražanje jedrnato, bomo odslej pisali o gibanju planeta okrog Sonca, čeprav veljajo enaki sklepi tudi za komete, asteroide itd. Perihelij je lega planeta, ko je Soncu najbližje, v afeliju je njuna razdalja največja (točki PH in AF na Sliki 27). Naj bo masa planeta zanemarljiva v primerjavi z maso Sonca, tako da lahko zanemarimo gibanje Sonca in izenačimo reducirano maso z maso planeta. Za geometrije teh dveh položajev planeta najlažje uporabimo Keplerjev zakon o konstantni ploščinski hitrosti, ker je vektor hitrosti pravokoten na krajevni vektor planeta glede na Sonce. V kratkem času  $t$  (relativno glede na obhodni čas) se planet od obeh izhodiščnih leg premakne praktično v pravokotni smeri: iz perihelija za pot  $s_{PH} = v_{PH}t$  in iz afelija za pot  $s_{AF} = v_{AF}t$ . Planet opiše glede na Sonce v obeh primerih pravokotna trikotnika, ki imata pri enakem času enako ploščino (Slika 28):

$$\begin{aligned} \frac{r_{PH}s_{PH}}{2} &= \frac{r_{AF}s_{AF}}{2} \\ \frac{(a-e)v_{PH}t}{2} &= \frac{(a+e)v_{AF}t}{2} \\ \frac{v_{AF}}{v_{PH}} &= \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}. \end{aligned} \quad (3.24)$$



Slika 27: Različne lege planeta (modri krožci) glede na Sonce (rumen krožec)



Slika 28: Ploščinska hitrost planeta v periheliju in afeliju. Rdeči in modri trikotnik imata enaki ploščini: vodoravni kateti sta razdalji planeta od Sonca, navpični pa z nekim primernim kratkim časom pomnoženi hitrosti, da so na sliki le dolžinske dimenzije.

Upoštevali smo tudi  $e = \varepsilon a$ . Iz enačbe (3.24) za razmerje hitrosti v PH in AF lahko izrazimo eno hitrost z drugo in to upoštevamo v enačbi za enakost mehanske energije v obeh legah:

$$\frac{1}{2} m v_{PH}^2 - \frac{\kappa m_S m}{a-e} = \frac{1}{2} m v_{AF}^2 - \frac{\kappa m_S m}{a+e}.$$

Nazadnje izpeljemo izraza za hitrosti planeta v obeh skrajnih legah:

$$v_{PH} = v_0 \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \quad (3.25 \text{ a})$$

$$v_{AF} = v_0 \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}, \quad (3.25 \text{ b})$$

kjer je referenčna hitrost v točki A na Sliki 27:

$$v_0 = \sqrt{\frac{\kappa m_S}{a}} \quad (3.25 \text{ c})$$

## Druge lege

Ko poznamo npr. hitrost  $v_{PH}$ , lahko z zakonom ohranitvijo mehanske energije izračunamo hitrost planeta v katerikoli drugi točki, le njegovo oddaljenost od Sonca moramo poznati:

$$\frac{1}{2}mv_{PH}^2 - \frac{\kappa m_S m}{a-e} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\kappa m_S m}{r}. \quad (3.26)$$

Če za lego planeta v točki A vzamemo  $r = a$ , res dobimo hitrost  $v_0$  v (3.25 c).

Pri točki B na Sliki 27 razdalji ustreza  $r = y(x = e) = a(1 - \varepsilon^2)$ . Potem izračunamo:

$$v_B = v_0 \sqrt{\frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}}.$$

Z računanjem hitrosti tudi v drugih točkah na elipsi ugotovimo, da se hitrost planeta zvezno povečuje, ko potuje od afelija do perihelija.



### Računski zgled 16

Nebesno telo kroži okrog zvezde z maso  $5 \cdot 10^{30}$  kg. V periheliju ima hitrost 20 km/s, v afeliju pa 10 km/s. Izračunajte vse parametre eliptičnega tira.

Iz enačbe (3.24) za razmerje hitrosti telesa v obeh skrajnih legah najprej izračunamo ekscentričnost:

$$\frac{v_{PH}}{v_{AF}} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \rightarrow \varepsilon = \frac{\frac{v_{PH}}{v_{AF}} - 1}{\frac{v_{PH}}{v_{AF}} + 1}.$$

Dobimo  $\varepsilon = \frac{1}{3}$ . Nato uporabimo enačbi (3.25 a) in (3.25 c), da z znanimi podatki za  $m_S$ ,  $v_{PH}$  in  $\varepsilon$  izračunamo veliko polos elipse:  $a = 7,4 \cdot 10^{11}$  m. Goriščna razdalja je:  $e = \varepsilon a = 2,5 \cdot 10^{11}$  m. Nazadnje izračunamo tudi malo polos:  $b = 7,0 \cdot 10^{11}$  m. Razdalja nebesnega telesa od zvezde v periheliju je  $r_{PH} = a - e = 2a/3 \approx 5 \cdot 10^{11}$  m, v afeliju je dvakrat večja.





## Računski zgled 17

Neznane kometu pri delu tira okrog Sonca izmerimo hitrosti in oddaljenosti od Sonca v dveh legah:  $r_1$ ,  $v_1$  in  $r_2$ ,  $v_2$ . Kako s temi štirimi podatki izračunamo dolgo polos njegovega tira in hkrati preverimo podatek za maso Sonca?

Podobno kot smo že naredili pri primerjavi PH in AF, uporabimo energijsko enačbo, vendar zdaj na splošno:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{\kappa m_S m}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{\kappa m_S m}{r_2}.$$

V enačbi krajšamo maso kometa  $m$ , izrazimo maso sonca  $m_S$  in preverimo izračunani podatek. Nato lahko za neposredni izračun velike polosi uporabimo enačbo (3.17), pomagamo si tudi s pravkar zapisano energijo:

$$a = \frac{r_1 r_2 (v_2^2 - v_1^2)}{2(r_2 v_2^2 - r_1 v_1^2)}.$$

Poudariti moramo, da je lahko takšen način ugotavljanja velike polosi zelo nenatančen, če se razdalji, in s tem tudi hitrosti kometa, med seboj malo razlikujeta. Račun drugih parametrov, npr. ekscentričnosti, je v tem primeru zelo zapleten. Lažje bi bilo, če bi imeli podane tudi kote med vektorjem hitrosti in krajevnim vektorjem kometa glede na Sonce, saj bi si v tem primeru pomagali z vrtilno količino in enačbo (3.13 c) za izračun ekscentričnosti.



## Računski zgled 18

Nebesno telo se giblje okrog Sonca z maso  $m_S$ . V nekem trenutku poznamo njegovo oddaljenost od Sonca  $r_1$  in njegovo hitrost  $v_1$ . Vektor hitrosti v izbranem trenutku je pravokoten na zveznico med Soncem in telesom. Kako na splošno ugotovimo, za kakšen tir gibanja okrog Sonca gre, in kako dobimo ustrezne parametre tira?

Imamo 5 možnosti: tir je hiperbola, parabola, krožnica ali elipsa, v primeru elipse je izbrana točka perihelij ali afelij. To je odvisno od razmerja med trenutno kinetično in gravitacijsko energijo telesa. Označimo maso nebesnega telesa z  $m$ , tako da je energija:

$$E = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{\kappa m_S m}{r_1}.$$

Poglejmo po vrsti vseh 5 možnosti.

a) Hiperbola

To je takrat, ko je skupna energija pozitivna:  $v_1^2 > \frac{2\kappa m_S}{r_1}$ . Polos  $a$  hiperbole izračunamo po enačbi (3.17). Nebesno telo je v točki PH. Ker je najbližja razdalja  $r_1 = e - a$ , izračunamo  $e = a + r_1$ . Nato izračunamo tudi  $b = \sqrt{e^2 - a^2}$ .

b) Parabola

Energija je nič in velja  $v_1^2 = \frac{2\kappa m_S}{r_1}$ . Takrat je  $r_1 = e$  hkrati najbližja razdalja telesa od Sonca in goriščna razdalja parabole. Koefficient v enačbi parabole  $y = kx^2$  izračunamo takole:  $k = \frac{1}{4e}$ .

Pri krožnici in elipsi je vsota kinetične in gravitacijske energije negativna. Ali gre za krožnico ali elipso z izbrano lego v PH ali AF, preverimo tako, da primerjamo pospešek zaradi gravitacijske sile z radialnim pospeškom, pri katerem za radij prilepljene krožnice vzamemo  $r_1$ .

c) Krožnica

Pri krožnici velja  $v_1^2 = \frac{\kappa m_S}{r_1}$ . Centripetalna sila je kar gravitacijska sila. Radij kroženja je  $r_1$ .

d) Elipsa, dana točka je PH

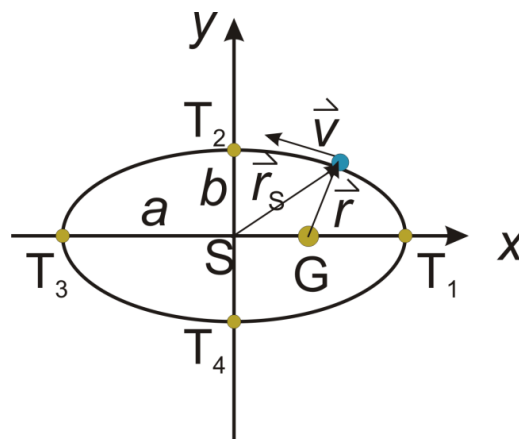
Pogoj za to lego telesa je  $\frac{\kappa m_S}{r_1} < v_1^2 < \frac{2\kappa m_S}{r_1}$ . Najprej izračunamo veliko polos po enačbi (3.15). Ker za PH velja  $r_1 = a - e$ , izračunamo najprej goriščno razdaljo  $e = a - r_1$ , nato tudi malo polos:  $b = \sqrt{a^2 - e^2}$ .

e) Elipsa, dana točka je AF

Pogoj za to je  $v_1^2 < \frac{\kappa m_S}{r_1}$ . Spet izračunamo veliko polos po enačbi (3.15), nato za AF izračunamo  $e = r_1 - a$  in nato tudi malo polos. ♦

Izpeljimo Keplerjevo dinamično enačbo za gibanje planetov po eliptičnih tirih na alternativen način, to je z uporabo parametra  $\psi$  pri opisu elipse namesto s polarnim kotom. Ta način je precej preprostejši in nazornejši kot izpeljava odvisnosti  $\varphi(t)$  s kombiniranjem enačb (3.8)–(3.11). S parametrom izsrednosti najprej izrazimo malo polos:  $b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$ . Parametrični zapis enačbe elipse je:  $x = a \cos \psi$ ,  $y = b \sin \psi$ . Krajevni vektor glede na središče elipse (Slika 29) je:

$$\vec{r}_S = (a \cos \psi, b \sin \psi). \quad (3.27)$$



Slika 29: Elipsa, krajevna vektorja  $\vec{r}_S$  in  $\vec{r}$ , štiri temena in hitrost  $\vec{v}$ . Sonce je v gorišču G. Teme  $T_1$  ustreza periheliju (PH), teme  $T_3$  pa afeliju (AF).

Za spremenljivko  $\psi$  velja kot pri polarnem kotu območje  $0 \leq \psi \leq 2\pi$ . Rekli ji bomo kar »kot«, čeprav zanjo uporabljajo tudi druga imena. Štirim temenskim točkam elipse od  $T_1$  to  $T_4$  ustrezajo koti  $0$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$  in  $\frac{3\pi}{2}$ . V temenih  $T_1$  in  $T_3$  se naš kot ujema s polarnim kotom  $\varphi$ . V zvezi z lego točke na elipsi bomo ob krajevnem vektorju  $\vec{r}_S$  uporabljali vektor  $\vec{r}$  glede na desno gorišče, ki je tudi prikazan na Sliki 29. Z odvajanjem enega ali drugega vektorja po času izrazimo tudi hitrost telesa. Kot narašča s časom, ker se telo giblje v smeri nasprotno od urinega kazalca. Zapišimo nova vektorja:

$$\vec{r} = (a \cos \psi - e, b \sin \psi). \quad (3.28 \text{ a})$$

$$\vec{v} = (-a \sin \psi, b \cos \psi) \cdot \dot{\psi}. \quad (3.28 \text{ b})$$

V nadaljnji izpeljavi bomo potrebovali tudi velikosti obeh vektorjev (3.28), ki ju izračunamo po Pitagorovem izreku:

$$r = a(1 - \varepsilon \cos \psi). \quad (3.29 \text{ a})$$

$$v = a\sqrt{\sin^2 \psi + (1 - \varepsilon^2) \cos^2 \psi} \cdot \dot{\psi}. \quad (3.29 \text{ b})$$

Z uporabo zgoraj izpeljanih enačb (3.25) za referenčne hitrosti, (3.26) za energijo in enačbo za vrtilno količino  $l = mr_{PH}v_{PH}$  najprej izračunamo obe količini, ki se ohranjata:

$$l = mbv_0. \quad (3.30)$$

$$E = -\frac{1}{2}mv_0^2. \quad (3.31)$$

Najprej uporabimo enačbo (3.30), da ugotovimo pogoj (enačbo) za ohranitev vrtilne količine po vsej elipsi. Na splošno izračunamo tirno vrtilno količino kot vektorski produkt med krajevnim vektorjem in gibalno količino telesa:  $\vec{l} = m\vec{r} \times \vec{v}$ . Za krajevni vektor (glede na Sonce) in hitrost uporabimo enačbi (3.28) in dobimo enačbo:

$$l = mab(1 - \varepsilon \cos \psi) \cdot \dot{\psi} = mbv_0.$$

Po krajšanju mase in male polosi ostane tale enačba, ki je samo malo drugačen zapis dobro znane Keplerjeve enačbe:

$$(1 - \varepsilon \cos \psi) \cdot \dot{\psi} = \frac{v_0}{a}. \quad (3.32)$$

To je preprosta diferencialna enačba z ločljivima spremenljivkama  $\psi$  in  $t$ . Ločimo ju in integrirajmo enačbo. Vzemimo, da je v trenutku  $t = 0$  planet v periheliju (teme  $T_1$ ),  $\psi = 0$ . Rešitev je:

$$\psi - \varepsilon \sin \psi = \frac{v_0 t}{a}. \quad (3.33)$$

To je enolična zveza med kotom in časom, ker je na levi strani enačbe naraščajoča funkcija kota zaradi  $\varepsilon < 1$ . Enačbi (3.28 a) in (3.33) si torej zamišljamo kot parametrični zapis za zvezo med časom in lego planeta. Če v (3.33) vstavimo kot  $\psi = 2\pi$  in

upoštevamo spet enačbo (3.25 c) za referenčno hitrost, dobimo spet obhodni čas (3.19\*).

Zapišimo tudi energijsko enačbo:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\kappa m_S m}{r} = -\frac{1}{2}mv_0^2.$$

Upoštevajmo enačbi (3.29) in tudi (3.25 c), da izrazimo tudi maso Sonca v členu za gravitacijsko energijo, in pristanemo spet pri enačbi (3.32). Ista dinamična enačba, če začnemo z ohranitvijo vrtilne količine ali energije, je posreden dokaz, da je elipsa zares pravi tir gibanja.

Če nas zanima tudi polarni kot, to je kot med vektorjem  $\vec{r}$  in osjo  $x$ , ga izrazimo s kotom  $\psi$ :

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x-e} = \arctan \frac{b \sin \psi}{a(\cos \psi - \varepsilon)}. \quad (3.34 \text{ a})$$

ali v elegantnejši obliki s polovičnimi koti:

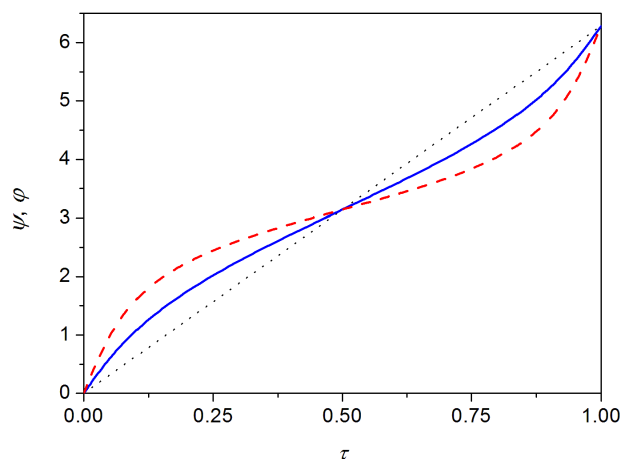
$$\tan \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \cdot \tan \frac{\psi}{2}. \quad (3.34 \text{ b})$$

Nazadnje izračunajmo tudi, koliko časa potuje planet od temena  $T_1$  (PH) do temena  $T_2$ . To je četrtna eliptičnega tira, vendar pa za to pot potrebuje planet manj kot četrt obhodnega časa, ker je bliže Soncu in se giblje hitreje. Vstavimo v (3.33)  $\psi = \frac{\pi}{2}$  in dobimo:  $t = \frac{t_0}{4} \cdot \left(1 - \frac{2\varepsilon}{\pi}\right)$ .

Enačbo (3.33) zapišimo v brezdimenzijski obliki z brezdimenzijskim časom  $\tau = \frac{t}{t_0}$ , kjer za obhodni čas  $t_0$  upoštevamo enačbo (3.19\*). Tako dobimo elegantno enačbo:

$$\psi - \varepsilon \sin \psi = 2\pi \tau. \quad (3.35)$$

Grafa odvisnosti  $\psi(\tau)$  in  $\varphi(\tau)$  pri izsrednosti  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  sta prikazana na Sliki 30. Graf  $\psi(\tau)$  se manj razlikuje od premice kot graf za polarni kot. Bližini PH ustrežata začetni in končni del grafov, AF pa sredina. Omenili smo že, da se oba kota v PH in AF ujemata.



Slika 30: Grafa za funkcijsko odvisnost eliptičnega parametra  $\psi$  (polna modra krivulja) in polarnega kota  $\varphi$  (črtkana rdeča krivulja z večjim odmikom od premice) od brezdimenzijskega časa. Za vodilo je narisana tudi linearna funkcija, ki ustreza idealni krožnici (črna pikčasta črta).

### 3.5 Kozmologija

Gravitacija usodno vpliva na širjenje (lokalnega) vesolja in na tvorbo zvezd. Tukaj kot zanimivost obravnavajmo oba problema v najenostevnejšem modelu: uporabimo klasično fiziko brez kozmološke konstante, ki po Einsteinu lahko povzroči celo pospešeno širjenje vesolja.

#### Širjenje vesolja

Ameriški astronom Edwin Powell Hubble (1889–1953) je ugotovil, da so mnoge vesoljske strukture, ki so jih prej imeli za oblake plinov ali prahu, v resnici galaksije, podobne naši. Razen tega je s primerjavo spektrov svetlobe iz oddaljenih galaksij spoznal, da se na splošno galaksije oddaljujejo druga od druge. Temne črte v spektrih so namreč na splošno pomaknjene k večjim valovnim dolžinam. Pri Dopplerjem pojavu za svetlobo pomeni večja valovna dolžina, da se svetlobni vir oddaljuje od nas. Res je sicer, da je relativno gibanje bližnjih galaksij zaradi gravitacijskega privlaka bolj zapleteno in se lahko dve takšni galaksiji tudi približujeta: to velja npr. za Galaksijo in Andromedo. Na večji astronomski skali pa se galaksije oddaljujejo. Tudi Einstein je v rešitvah svojih enačb na splošni relativnostni teoriji opazil možnost širjenja ali krčenja vesolja. Ker pa je bil prepričan, da je vesolje statično, je v enačbah dodal kozmološko konstanto, ki omogoča tudi statično rešitev. Če v našem preprostem klasičnem računu zanemarimo kozmološko konstanto, se vesolje zaradi gravitacijskega privlaka širi vse počasneje. Povprečne galaksije ali jate galaksij, ko zanemarimo gravitacijske fluktuacije na splošno, so oddaljujejo ena od druge po Hubblovem zakonu:  $v = Hr$ . Tukaj je  $r$  razdalja med

galaksijama,  $v$  njuna relativna hitrost,  $H$  pa Hubblova konstanta. Linearna zveza med hitrostjo in razdaljo res kaže na širjenje vesolja kot celote. Za nazoren enodimenzionalni prikaz tega si lahko zamišljamo elastični trak, na katerega narišemo črtice v razmiku po 1 cm. Ko elastiko raztegujemo z vlečenjem na obeh koncih, se vsi razmiki med črticami enako večajo. Tako je hitrost razmikanja dveh črtic res linearna z razdaljo med njima. V resnici  $H$  ni konstanta, ampak se v kozmološkem časovnem merilu spreminja. Tako moramo vedno računati s trenutno vrednostjo  $H$ , za katero predpostavimo, da je povsod enaka. Ključna je energija vesolja kot vsota celotne kinetične in gravitacijske energije. Če je energija pozitivna, se bo vesolje ves čas širilo (odprto vesolje), drugače bo doseglo končno velikost in se potem spet zaradi gravitacije sesedlo vase (zaprtο vesolje). V zvezi z obema možnostma definiramo kritično trenutno gostoto snovi (natančneje energije, saj h gravitacijskemu privlaku prispevajo tudi delci brez mase). Kritična gostota  $\rho_c$  je mejni primer med odprtim in zaprtim vesoljem.

Imamo dva prijema, kako se lotiti problema. Zaradi lažje predstave vzemimo, kot da je lokalno vesolje krogla s polmerom  $R$ , čeprav je v kozmološki sliki zaradi močne gravitacijske ukrivljenosti prostor-časa ta predstava napačna. Lahko obravnavamo samo gibanje »robni« galaksij, lahko pa obravnavamo energijo vesolja kot celote. Uporabimo drugi način, ker je fizikalno popolnejši. Najprej dokažimo, da imamo pri enačbi za negativno gravitacijsko energijo homogene krogle značilni koeficient 3/5:

$$E_g = -\frac{3}{5} \cdot \frac{\kappa M^2}{R}. \quad (3.36)$$

Pri tem je  $M$  masa krogle. Pri izpeljavi razdelimo kroglo na tanke koncentrične krogelne lupine in prištevamo gravitacijski prispevek notranje krogle z maso  $m$  pri polmeru  $r < R$  na lupino z maso  $dm$  med pomeroma  $r$  in  $r + dr$ . Zaradi sorazmernosti mase s kubom polmera velja za obe masi:  $m = M \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^3$  in  $dm = M \cdot \frac{3r^2 dr}{R^3}$ . Z integralom izračunamo:

$$E_g = - \int \frac{\kappa m dm}{r}$$

$$E_g = - \frac{3\kappa M^2}{R^6} \int_0^R r^4 dr = -\frac{3}{5} \cdot \frac{\kappa M^2}{R}.$$

Nato izpeljemo skupno kinetično energijo. Tanka krogelna lupina, ki smo jo vzeli pri računu gravitacijske energije, ima hitrost  $v = Hr$ . Spet integriramo:

$$E_k = \frac{1}{2} \int (Hr)^2 dm$$

$$E_k = -\frac{3H^2 M}{2R^3} \int_0^R r^4 dr = \frac{3}{5} \cdot \frac{M(HR)^2}{2}. \quad (3.37)$$

Tudi pri kinetični energiji smo dobili dodatni koeficient  $3/5$ . Če za mejni primer širjenja vesolja postavimo  $E_k + E_g = 0$ , izpeljemo zvezo med kritično maso vesolja  $M_c$ , trenutnim polmerom in trenutno Hubblovo konstanto:

$$M_c = \frac{H^2 R^3}{2\kappa}. \quad (3.38)$$

Rezultat je preprost, koeficient  $3/5$  se je krajšal; enak rezultat bi dobili, če bi obravnavali samo gibanje robnih galaksij. Ker je gostota  $\rho = \frac{M}{V}$ , izračunamo iz enačbe (3.38) tudi kritično gostoto:

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi} \cdot \frac{H^2}{\kappa}. \quad (3.39)$$

Trenutna kritična gostota ni odvisna od polmera vesolja. Za  $\rho > \rho_c$  je vesolje zaprto, sicer je odprto.

Napovejmo tudi časovni potek širjenja vesolja za zelo kratek čas po Velikem poku. Najprej povežimo spreminjanje Hubblove konstante z gostoto snovi. Poglejmo, kaj se zgodi, če limitiramo čas proti 0. Zanimivo je, da sta tudi v zelo zgodnjem vesolju gostota in Hubblova konstanta povezana kar z enačbo (3.39), le da za njuni trenutni vrednosti:

$$\rho(t) = \frac{3}{8\pi} \cdot \frac{H^2(t)}{\kappa}. \quad (3.40)$$

enačba velja približno. Razlog enakosti je v tem, da se mora kinetična energija po velikosti skoraj izenačiti z gravitacijsko, sicer se energija ne bi mogla ohranjati, ampak bi šla v limiti zelo majhnih časov asimptotsko proti neskončni vrednosti. Zato tudi v zgodnjem vesolju računamo s približkom, da je skupna energija enaka nič. Če se masa  $M$  vesolja ohranja (vsaj med potekom, ko ni anihilacij delcev in antidelcev), potem je gostota v preprosti zvezi s trenutnim polmerom vesolja  $R$ :

$$\rho(t) = \frac{3M}{4\pi R^3(t)}. \quad (3.41)$$



Povežimo zadnji enačbi, da izrazimo odvisnost Hubblove konstante od polmera:

$$H = \sqrt{2\kappa M} \cdot R^{-3/2}. \quad (3.42)$$

Vendar ta odvisnost velja samo za tisto stopnjo v razvoju vesolja, ko energijsko prevladuje snov nad sevanjem. V stopnji razvoja vesolja, ko prevladuje sevanje (energija delcev brez mase, kot so fotoni), enačba (3.40) za zvezo med gostoto in Hubblovo enačbo še vedno drži, le da moramo za gostoto vzeti ustrezen ekvivalent. Pri sevanju z energijo na prostorninsko enoto  $w = \frac{E}{V}$  lahko po Einsteinovi enačbi  $E = mc^2$  vzamemo v enačbi (3.40):  $\rho = \frac{w}{c^2}$ . Vendar pri sevanju gostota ni več obratno sorazmerna s tretjo potenco polmera, temveč s četrto. To sklepamo iz Planckove porazdelitve energije pri sevanju črnega telesa. Značilna valovna dolžina sevanja raste premo sorazmerno z  $R$ , ker se s širjenjem preprosto povečujejo vse razdalje. Hkrati je maksimum valovne dolžine po Wienovem zakonu obratno sorazmeren s trenutno temperaturo vesolja  $T$ . Zato sta  $R$  in  $T$  obratno sorazmerna med seboj. Po Stefanovem zakonu je gostota energije (oziroma njen masni ekvivalent  $\rho$ ) sorazmerna s  $T^4$ , zato je zares obratno sorazmerna z  $R^4$ . Namesto enačbe (3.41) zapišimo enačbo, ki hkrati opisuje obe stopnji širjenja vesolja:

$$\rho = \frac{C}{R^n}. \quad (3.43)$$

Pri tem je za vesolje s prevladujočo energijo snovi  $n = 3$ , za tistega s prevladujočim sevanjem pa  $n = 4$ . V skladu z enačbo (3.40) lahko potem za Hubblovo konstanto napišemo:

$$H = \frac{D}{R^{n/2}}. \quad (3.44)$$

Konstanti  $C$  in  $D$  nista odvisni od polmera vesolja. Če upoštevamo tudi Hubblov zakon v splošnejši obliki  $v = H(R) \cdot R$ , lahko rešimo diferencialno enačbo:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= DR^{1-n/2} \\ \int_{R_1}^{R_2} R^{\frac{n}{2}-1} dR &= D \int_{t_1}^{t_2} dt \\ \frac{2}{n} \left( R_2^{n/2} - R_1^{n/2} \right) &= D \Delta t. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Enačbo (3.45) obrnemo in izrazimo časovni razmik  $\Delta t = t_2 - t_1$ , v katerem se je vesolje napihnilo od polmera  $R_1$  do  $R_2$ . Ker je bilo na začetku širjenje zelo hitro, ponavadi v opazovanem časovnem razmiku lahko vzamemo  $R_2 \gg R_1$ . Prepišemo  $R_2 \rightarrow R$  in zanemarimo člen z  $R_1$  in dobimo zelo dobro oceno za  $\Delta t$ , ko se vesolje v določeni stopnji napihne do  $R$ :

$$\Delta t = \frac{2}{nD} \cdot R^{n/2}. \quad (3.46)$$

Pri zadnji enačbi nas ne moti, da so bile pred to stopnjo širjenja vesolja že prejšnje stopnje, saj je časovni razmik vsake naslednje stopenj veliko večji od tistega za vse predhodne stopnje skupaj.

### Nastanek zvezd

Zanima nas, kateri pogoj mora biti izpolnjen, da iz velikega oblaka prahu in/ali plina, čemur pravimo meglica, začnejo nastajati zvezde. V obravnavi je bistveno vrtenje oblaka. Izpeljava spominja na zgornjo obravnavo širjenja vesolja. Mejni pogoj je, da je gravitacijska energija meglice (3.36) po absolutni vrednosti enaka dvakratni notranji energiji  $E_n$  zaradi virialnega teorema. To je podobno kot pri kroženju satelita po krožni tirnici okrog Zemlje, kjer je absolutna vrednost gravitacijske energije enaka dvakratni kinetični energiji satelita. V preprosti različici pove virialni teorem naslednje. Vzemimo masivno mirujoče telo in okrog njega krožeče telo, potencialna energija  $E_p$  zaradi medsebojne privlačne sile naj bo negativna in obratno sorazmerna z  $r^n$ , če je  $r$  razdalja med telesoma,  $n$  pa nek eksponent. Izračun sile z odvodom potencialne energije po razdalji in postavitev te sile za centripetalno silo poda zvezo med hitrostjo krožečega telesa in razdaljo od mirujočega telesa. Kratek račun pokaže, da velja  $E_p = -\frac{2}{n} E_k$ . Če imamo gravitacijsko silo, je  $E_p \equiv E_g$  in  $n = 1$ ; od tukaj je koeficient 2. Notranjo energijo si lahko zamisljamo kot vsoto kinetičnih energij delcev.

Notranja energija oblaka je po termodinamični teoriji enaka:

$$E_n = \frac{3}{2} NkT. \quad (3.47)$$

To je pravzaprav kinetična energija plina pri temperaturi  $T$ , kjer je  $N$  število delcev v oblaku,  $k$  pa Boltzmannova konstanta. Ta problem se razlikuje od obravnave širjenja vesolja tudi po koeficientu 2 med kinetično in gravitacijsko energijo. Pri širjenju vesolja

predpostavimo, da ni nobene rotacije vesolja kot celote, zato je vesolje gravitacijsko nestabilno. v Vesolje ne more biti statično, vsaj po splošno sprejetem modelu. Nasprotno pa prav rotacija meglice omogoča vsaj potencialno splošno gravitacijsko stabilnost podobno kot pri kroženju planetov okrog Sonca. Pri kritičnem pogoju nastanka zvezd (lokalno sesedanje oblaka) velja torej enačba:

$$\frac{3}{5} \frac{\kappa M^2}{R} = 3NkT. \quad (3.48)$$

Upoštevajmo tudi, da je povprečna masa delca v meglici enaka  $m_1 = \frac{M}{N}$  ter da je povprečna gostota oblaka  $\rho = M/(4\pi R^3/3)$ , in dobimo iz enačbe (3.48) kritično ali Jeansovo maso obaka za gravitacijsko sesedanje:

$$M_J = \left( \frac{5kT}{\kappa m_1} \right)^{3/2} \cdot \sqrt{\frac{3}{4\pi\rho}}. \quad (3.49)$$

Ta masa ni neposredno odvisna od velikosti oblaka, temveč od temperature, povprečne mase delcev in predvsem gostote obaka. Čim večja je gostota, tem manjša je potrebna masa, kar je intuitivno razumljivo. Iz značilnih podatkov za vodikov oblak pri temperaturi 100 K in gostoti delcev  $10^6/\text{m}^3$  izračunamo  $M_J = 10^5$  mas Sonca. Zvezde ne nastajajo posamično, temveč v skupinah.



## 4 Sipanje delcev pri centralni sili

### 4.1 Geometrijski opis

Naj bo sipalni center tako masiven, da je praktično pri miru in ga postavimo v izhodišče koordinatnega sistema. Vzemimo centralno odbojno silo. Delci prihajajo od daleč, kjer je njihov tir vzporeden z osjo  $z$  (Slika 31). Pri približevanju koordinatnemu izhodišču se njihova smer spremeni in nas zanima, kako. Definiramo diferencialni sipalni presek na naslednji način. Najprej definiramo gostoto ali intenziteto toka vseh vpadnih delcev:

$$I = \frac{dN_{vp}}{dt dS}. \quad (4.1)$$

To je število delcev na enoto prereza curka in enoto časa; fizikalna enota je  $1/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$ . Diferencialni sipalni presek  $\sigma$  je povezan s sipanjem v določen del prostorskega kota:

$$\sigma(\Omega) d\Omega = \frac{dN}{dt}. \quad (4.2)$$

Enačba (4.2) in njene količine imajo naslednji pomen:  $d\Omega$  je majhen prostorski kot, v katerega se sipa v kratkem času  $dt$  majhno število  $dN$  delcev. Zaradi majhnega prostorskega kota pričakujemo, da je število teh delcev sorazmerno z  $d\Omega$ . Če to delimo tudi z vpadno intenziteto, definiramo  $\sigma$  kot sorazmernostni koeficient. Oznaka  $\sigma(\Omega)$  v enačbah ima bolj simboličen pomen: v resnici je diferencialni sipalni presek odvisen od ene smeri, ki jo določata npr. sferična kota  $\theta$  in  $\varphi$ , ne pa celo območje smeri. Prostorski

kot pišemo brez fizikalnih dimenzij. Če vstavimo v (4.2) intenziteto iz enačbe (4.1), razberemo fizikalno enoto za diferencialni presek:

$$\sigma(\Omega)d\Omega = \frac{dN dS}{dN_{vp}}. \quad (4.3)$$

Torej je prava enota kvadratni meter. Zaradi cilindrične simetrije pa intenzivnost sipanja ni odvisna od azimutnega kota  $\varphi$ , temveč le od »polarnega« kota  $\theta_s$ . Zato lahko v majhen prostorski kot zajamemo vse azimutne kote in ga zapišemo v diferencialni obliki:

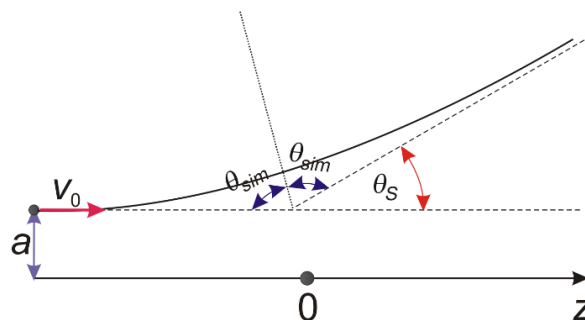
$$d\Omega = 2\pi \sin \theta_s d\theta_s. \quad (4.4)$$

Kot  $\theta_s$  si predstavljamo kot sipalni kot, to je končni odmik gibanja delca od prvotne smeri  $z$ . Ima sicer podoben pomen kot navadni polarni kot  $\theta$  v sferičnih koordinatah, vendar ne pomeni prav enako, ker ni definiran glede na fiksirano koordinatno izhodišče (Slika 31).

Pomemben parameter za vsak delec je vpadna razdalja  $a$ , to je razdalja njegovega tira od osi  $z$ , ko je še daleč stran od sipalnega centra, in tudi začetna hitrost  $v_0$ . Z njima izrazimo vrtilno količino delca glede na izhodišče:

$$l = mv_0 a. \quad (4.5)$$

Vemo, da se vrtilna količina ohranja, če je sila centralna, vendar jo najlažje izračunamo po enačbi (4.5), ko je delec še daleč.



Slika 31: Geometrija pri sipanju delcev

Predpostavimo enako začetno hitrost vseh vpadnih delcev. Potem je kot  $\theta_s$  odvisen samo od vpadne razdalje  $a$ : čim manjša je ta razdalja pri odbojni centralni sili, tem bolj se delec odkloni od prvotne smeri. Pri veliki vrednosti  $a$  se delec praktično ne odkloni,

pri  $a = 0$  se delec odbije neposredno nazaj, to je za največji kot  $\pi$ . Zato je  $\theta_S(a)$  monotonno padajoča funkcija z limitama  $\theta_S(0) = \pi$  in  $\theta_S(\infty) = 0$ .

Vsi delci v ozkem intervalu  $(a, a + da)$  se sipljejo v isti interval kotov  $(\theta_S, \theta_S + d\theta_S)$ . Uporabimo enačbo (4.3), kjer je  $dN = dN_{vp}$ , če štejemo samo vpadne delce v delu prereza oblike tankega kolobarja  $dS = 2\pi a da$ . Tako dobimo:

$$\sigma(\theta_S) \cdot 2\pi \sin \theta_S d\theta_S = 2\pi a da. \quad (4.6)$$

Upoštevali smo odvisnost diferencialnega sipalnega preseka samo od  $\theta_S$ . Obema diferencialoma raje damo absolutno vrednost, ker je  $\theta_S(a)$  padajoča funkcija in hočemo same pozitivne količine v enačbi (4.6). Nazadnje dobimo:

$$\sigma(\theta_S) = \frac{a}{\sin \theta_S} \cdot \left| \frac{da}{d\theta_S} \right| \quad (4.7)$$

Naprej računamo z Lagrangianom kot pri Keplerjevem zakonu, le da nadomestimo  $\varphi \rightarrow \theta$ , ker obravnavamo npr. ravnino  $(x, z)$ :

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r). \quad (4.8)$$

Kot je spet ciklična koordinata, tako da kot prej pri obravnavi gravitacijskega problema pridemo do enake splošne enačbe za obliko tira:

$$\theta = \theta_0 + \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV(r)}{l^2} - \frac{1}{r^2}}}. \quad (4.9)$$

Namesto tega se zanimajmo le za absolutno vrednost spremembe polarnega kota, ko se razdalja  $r$  spremeni od  $r_1$  do  $r_2$ :

$$\Delta\theta = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV(r)}{l^2} - \frac{1}{r^2}}}. \quad (4.10)$$

Vzemimo za  $r_1$  minimalno razdaljo, za  $r_2$  pa neskončno, in dobimo kot med osjo  $z$  in zveznico simetrijske točke na krivulji z izhodiščem:

$$\Delta\theta_{sim} = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV(r)}{l^2} - \frac{1}{r^2}}}. \quad (4.11)$$

Iz tako izračunanega kota dobimo tudi sipalni kot:  $\theta_s = \pi - \theta_{sim}$  (Slika 30). Njegova odvisnost od parametra  $a$  se skriva v vrtilni količini  $l$  v enačbi (4.5) in integralu v (4.11). Nazadnje z enačbo (4.7) izračunamo diferencialni sipalni presek.

## 4.2 Odbojna elektrostatična sila

Potencialna energija je  $V(r) = \frac{k}{r}$ , kjer je koeficient  $k = \frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0}$ , električna naboja pa imata enak predznak. Enačba za orbito ima podobno obliko kot pri gravitacijski sili, le da je parameter ekscentričnosti sedaj vedno večji od 1:

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}, \quad (4.12)$$

ker je energija pozitivna. Zato je tir gibanja hiperbola. Za vpadni delec še daleč stran od sipalnega centra upoštevajmo tudi  $E = \frac{1}{2}mv_0^2$  in  $l = mv_0a$ , in zapišemo:

$$\epsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\epsilon_0 m a v_0^2}{e_1 e_2}\right)^2}. \quad (4.13)$$

Enačba hiperbole je v polarni obliki:

$$r = \frac{r_1}{\epsilon \cos \theta - 1}, \quad (4.14)$$

kjer kot prej pri elipsi velja

$$r_1 = \frac{l^2}{mk} \quad (4.15)$$

Tukaj je enačba za  $r$  zasukana tako, da dobimo minimalno razdaljo pri  $\theta = 0$ :

$$r_{min} = \frac{r_1}{\epsilon - 1}. \quad (4.16)$$

Takoj uvidimo, kolikšen je simetrijski kot  $\theta_{sim}$ , ko je  $r$  neskončen:

$$\cos \theta_{sim} = \frac{1}{\epsilon}. \quad (4.17)$$



Enačbo (4.16) lahko preverimo na preprostejši način, ne da bi poznali tir gibanja. Pri najbližji razdalji od sipalnega centra namreč ni radialne komponente hitrosti. Iz energijske enačbe izhajaja:

$$E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + V(r) = \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{l}{mr}\right)^2 + \frac{k}{r}. \quad (4.18)$$

Prvi člen pri kinetični energiji je nič. Enačbo (4.18) preuredimo v kvadratno enačbo in izračunamo  $r$ :

$$r_{min} = \frac{km + \sqrt{(km)^2 + 2Eml^2}}{2Em}. \quad (4.19)$$

Druga rešitev kvadratne enačbe, z minusom pred korenem, da negativno vrednost  $r_{min}$ , zato je nesmiselna.

Rešimo zdaj do konca enačbo (4.7) za odvisnost  $\sigma(\theta_S)$ :

$$\begin{aligned} \theta_S = \pi - 2\theta_{sim} &\rightarrow \sin \frac{\theta_S}{2} = \cos \theta_{sim} = \frac{1}{\varepsilon} \\ \cot^2 \frac{\theta_S}{2} &= \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta_S}{2}} - 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta_{sim}} - 1 = \varepsilon^2 - 1 \\ \cot \frac{\theta_S}{2} &= \sqrt{\frac{2El^2}{mk^2}} = \frac{4\pi\varepsilon_0 m v_0^2}{e_1 e_2} \cdot a. \end{aligned}$$

Iz zadnje enačbe izrazimo parameter  $a$ , upoštevamo (4.7) in navsezadnje dobimo:

$$\sigma(\theta_S) = \frac{C}{\sin^4 \frac{\theta_S}{2}}. \quad (4.20)$$

Konstanta v enačbi (4.20) je:

$$C = \left( \frac{e_1 e_2}{8\pi\varepsilon_0 m v_0^2} \right)^2. \quad (4.21)$$

Totalni sipalni presek dobimo z integralom diferencialnega sipalnega preseka po vseh prostorskih kotih. Za Coulombovo silo dobimo neskončen totalni sipalni presek, kar je posledica dolgega dosega te sile. Le za sile s končnim dosegom dobimo končno vrednost totalnega sipalnega preseka.



## 5 Gibanje togih teles

### 5.1 Rotacija vektorjev

Podajmo matematični opis fizične rotacije vektorjev v tridimenzionalnem (3D) prostoru. Za rotacijo vektorjev okrog vsake od treh koordinatnih osi v kartezičnem koordinatnem sistemu uporabimo naslednje rotacijske matrike:

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (5.1 \text{ a})$$

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 1 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}. \quad (5.1 \text{ b})$$

$$R_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.1 \text{ c})$$

Predznake pri sinusih kotov definiramo tako, da za ostre kote  $\alpha$ ,  $\beta$  in  $\gamma$  vrtimo v pozitivni smeri (nasprotno od urinega kazalca), če gledamo s smeri pozitivnih poltrakov vseh treh osi navzdol na izhodišče. Natančneje povedano, vrtimo pri  $R_x(\alpha)$  za  $\alpha$  po najbližji poti od  $+y$  osi proti  $+z$  osi; podobno pri  $R_y(\beta)$  za  $\beta$  od  $+z$  osi proti  $+x$  osi in pri  $R_z(\gamma)$  za  $\gamma$  od  $+x$  osi proti  $+y$  osi. Z oznako  $+$  mislimo pozitivne poltrake

omenjenih koordinatnih osi. Zato sta pri drugi rotaciji z matriko (5.1 b) predznaka pri sinusih kota postavljena v drugačnem vrstnem redu kot pri drugih dveh rotacijah.

Matrike (5.1) imajo nekaj posebnih lastnosti. Prvič, so ortogonalne (oznaka  $O(3)$ , ang. 3D orthogonality group): inverzna matrika k matriki je kar transponirana matrika:  $(R^{-1})_{ij} = R_{ji}$ . Takšne matrike ohranjajo skalarni produkt med poljubnima vektorjema. Naj bosta to npr. vektorja  $\vec{x}$  in  $\vec{y}$ . Takrat velja:  $(R\vec{x}) \cdot (R\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$ . Determinanta teh matrik je 1, zato spadajo v ožjo skupino matrik, označeno s  $SO(3)$  (special orthogonal group in 3D). Ena lastna vrednost je 1 in ustreza vektorjem, ki ležijo na osi vrtenja. Zato se ti vektorji ohranijo, kar je isto, kot da se pomnožijo z 1. Drugi dve lastni vrednosti sta kompleksni, razen v posebnem primeru, ko gre za vrtenje za kot  $180^\circ$ .

Če naredimo ortogonalno transformacijo ene od treh matrik zgoraj,  $R_1 = SRS^{-1}$ , kjer je  $S$  spet posebna ortogonalna matrika iz skupine  $SO(3)$ , spada tudi nova matrika  $R_1$  v  $SO(3)$ . To preverimo npr. tako, da zapišemo skalarni produkt v obliki matričnega množenja (npr. če menimo, da so tudi vektorji 1-stolpčne ali 1-vrstične nekvadratne matrike). Takole gre, če transponiranje označimo s črko »T«:

$$(R_1\vec{x}) \cdot (R_1\vec{y}) = (R_1\vec{x})^T (R_1\vec{y}) = (SRS^{-1}\vec{x})^T (SRS^{-1}\vec{y}).$$

Znano je, da se pri transponiranju matričnega produkta v več koeficientov transponirajo posamezni koeficienti, vendar se obrne tudi njihov vrstni red, zato dobimo:

$$(R_1\vec{x}) \cdot (R_1\vec{y}) = \vec{x}^T (S^{-1})^T R^T S^T SRS^{-1}\vec{y}.$$

Upoštevajmo tudi, da je transponiranje matrik  $S$  in  $R$  enako kot njun obrat (inverz). Sedaj se po vrsti odvozlazanka matrik od sredine navzven; najprej  $S^{-1}S = Id$ , nato tudi dvakrat podobno in ostane samo še skalarni produkt  $\vec{x}$  in  $\vec{y}$ . Tudi nova matrika res ohranja skalarni produkt.

Podobno lahko pokažemo, da ortogonalna transformacija ohranja determinanto matrike, vse njene lastne vrednosti in vektorje ter njeno sled. Tako se ohranijo vse ključne lastnosti rotacijskih matrik. Iz ene rotacijske matrike smo tako dobili novo rotacijsko matriko za isti kot, vendar okrog nove osi. Zato lahko iz matrik (5.1) dobimo katerokoli rotacijo 3D prostora. Ena od možnosti je, da večkrat kombiniramo – zmnožimo preproste matrike (5.1) med seboj.

Ker pri tako sestavljeni matriki na prvi pogled ni očitno, katera je nova rotacijska os, jo poiščemo kot lastni vektor, ki ustreza lastni vrednosti 1. Novi kot sukanja dobimo iz sledi nove matrike, saj npr. iz matrike (5.1 a) razberemo:  $\text{sl } R = 1 + 2 \cos \alpha$ .



### Računski zgled 19

Izvedimo zaporedno dve rotaciji vektorjev: najprej za kot  $30^\circ$  v pozitivni smeri okrog osi  $x$  in nato za kot  $60^\circ$  v pozitivni smeri okrog osi  $y$ . Napišimo matriko za nadomestno rotacijo in poiščimo kot in os vrtenja.

Najprej zapišimo obe matriki:

$$R_x\left(\frac{\pi}{6}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$R_y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} .$$

Produkt matrik je:

$$R = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix} .$$

Pazimo: levi koeficient produkta je bil druga matrika, desni koeficient pa prva. Iz sledi zadnje matrike izračunamo kot vrtenja:  $\varphi = \pm 66,45^\circ$ . Ne vemo še, kateri predznak je pravi, odvisen je od tega, kako obrnemo rotacijsko os (če obrnemo rotacijsko os v nasprotno smer, moramo spremeniti tudi predznak ustreznega kota). Osi vrtenja ustreza lastni vektor z lastno vrednostjo 1; označimo ga kot  $\vec{e} = (e_x, e_y, e_z)$  in zapišemo matrično enačbo:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}.$$

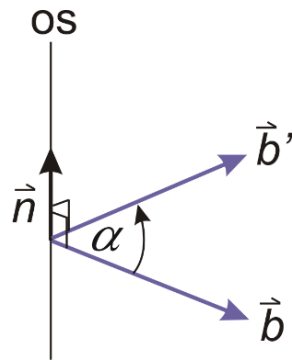
Izberemo  $e_x = 1$  in izračunamo preostali dve komponenti vektorja. Uporabimo npr. le prvo in drugo vrstično enačbo gornje matrične enačbe, ker je zaradi pogoja  $\det(R - Id) = 0$  ena od enačb odveč. Lastni vektor je:

$$\vec{e} = \left( 1, \frac{1}{2\sqrt{3}-3}, -\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3} \right)$$

Vektor  $\vec{e}$  bi lahko normalizirali, vendar ni potrebe za to. Prvi dve njegovi komponenti sta pozitivni, tretja pa je negativna. Če hočemo sedaj ugotoviti (vendar za izračune to pravzaprav ni pomembno, ker operiramo neposredno z rotacijsko matriko), kateri predznak kota  $\varphi$  je ustrezen, če gledamo na rotacijsko os z njenega »vrha« proti izhodišču, pozitivna smer vrtenja pa je nasprotno od urinega kazalca, je najboljša, da si izberemo kakšen preprost vektor in ugotovimo njegov zasuk. Takšen je  $\vec{i} = (1,0,0)$ , rotacijska matrika ga zasuče v vektor:  $R\vec{i} = \frac{1}{2}(1,0,-\sqrt{3})$ .

Napišimo enačbo za rotacijo vektorjev v neposrednem vektorskem zapisu, brez uporabe rotacijske matrike. Potrebujemo enotski vektor  $\vec{n}$ , ki leži na rotacijski osi, in kot vrtenja  $\alpha$ . Za lažjo izpeljavo za zdaj predpostavimo, da je  $\alpha$  ostri kot. Obravnavajmo najprej rotacijo vektorja  $\vec{b}$ , ki je pravokoten na vektor  $\vec{n}$  (Slika 32). Po vrtenju dobimo nov vektor  $\vec{b}'$ , ki je prav tako pravokoten na  $\vec{n}$ . Zato ga zapišimo kot linearno kombinacijo prvotnega vektorja  $\vec{b}$  in vektorskega produkta  $\vec{n} \times \vec{b}$ :  $\vec{b}' = c_1 \vec{b} + c_2 \vec{n} \times \vec{b}$ . Koeficienta  $c_1$  in  $c_2$  dobimo iz zahteve, da je vektor  $\vec{b}'$  enako dolg kot  $\vec{b}$  in da je med njima kot  $\alpha$ . Nazadnje pridemo do rezultata:

$$\vec{b}' = \cos \alpha \cdot \vec{b} + \sin \alpha \cdot \vec{n} \times \vec{b}$$



Slika 32: Rotacija vektorja, pravokotnega na os vrtenja

Sedaj vzemimo splošni vektor  $\vec{b}$ , ki ga razstavimo na dve komponenti. Ena od njiju, to je  $(\vec{n} \cdot \vec{b})\vec{n}$ , je vzporedna z osjo vrtenja in se zato ne spremeni. Druga,  $\vec{b} - (\vec{n} \cdot \vec{b})\vec{n}$ , pa je pravokotna na os in se zato spremeni po enačbi zgoraj. Zato lahko nazadnje napišemo:

$$\vec{b}' = (\vec{n} \cdot \vec{b})\vec{n} + \cos \alpha \cdot [\vec{b} - (\vec{n} \cdot \vec{b})\vec{n}] + \sin \alpha \cdot \{\vec{n} \times [\vec{b} - (\vec{n} \cdot \vec{b})\vec{n}]\}.$$

Ker pa je vektorski produkt vektorja  $\vec{n}$  samega s seboj enak nič, v enačbi (5.2) odpade zadnji člen v enačbi:

$$\vec{b}' = (\vec{n} \cdot \vec{b})\vec{n} + \cos \alpha \cdot [\vec{b} - (\vec{n} \cdot \vec{b})\vec{n}] + \sin \alpha \cdot (\vec{n} \times \vec{b}). \quad (5.2)$$

## 5.2 Uporaba Paulijevih matrik

### Definicija

Paulijeve matrike ali spinorji so hermitske kompleksne matrike razsežnosti  $2 \times 2$ . Hermitski značaj matrik je nekaj podobnega kot simetričnost za realne matrike, le da sedaj velja, da so ustrezno ležeči matrični elementi kompleksno konjugirani:  $A_{ij} = A_{ji}^*$ . Napišimo vse tri Paulijeve matrike skupaj z enotno matriko:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.3 \text{ a})$$

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.3 \text{ b})$$

$$\sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.3 \text{ c})$$

$$\sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (5.3 \text{ č})$$

Ob hermitskem značaju imajo te matrice tudi naslednje lastnosti, ki jih lahko hitro preverimo z njihovim neposrednim množenjem:

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I. \quad (5.4 \text{ a})$$

$$\sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x = i \sigma_z. \quad (5.4 \text{ b})$$

$$\sigma_y \sigma_z = -\sigma_z \sigma_y = i \sigma_x. \quad (5.4 \text{ c})$$

$$\sigma_z \sigma_x = -\sigma_x \sigma_z = i \sigma_y. \quad (5.4 \text{ č})$$

Te matrice se uporabljajo v kvantni mehaniki za predstavitev spinskega dela valovne funkcije delcev s spinom  $\frac{1}{2}$ . So tudi zelo uporabne za opis rotacij v navadnem 3D prostoru. Posebej elegantna je izpeljava kombinirane rotacije, če zaporedno izvedemo rotaciji okrog dveh različno obrnjenih osi. Rotacijsko os in ustrezni kot za nadomestno rotacijo sicer dobimo tudi z uporabo enačb sferične trigonometrije, vendar je izpeljava s spinorji matematično bolj neposredna.

### Opis rotacije s spinorji

Vzemimo smerni enotski vektor  $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ , kjer so  $\alpha$ ,  $\beta$  in  $\gamma$  koti med smernim vektorjem in koordinatnimi osmi. Ta vektor naj podaja os vrtenja. Podajmo tudi kot vrtenja  $\theta$ : pozitiven je, če vrtil nasprotno od smeri urinega kazalca, če na os pogledamo »od zgoraj« (os kaže proti nam). Definirajmo naslednjo matriko, za katero še ne vemo, kakšno zvezo ima z dejansko rotacijo:

$$R = I \cos \frac{\theta}{2} - i(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \sin \frac{\theta}{2}. \quad (5.5)$$

V oklepaju v desnem členu je sicer nekoliko nenavaden zapis: videti je kot skalarni produkt dveh vektorjev, navadnega vektorja  $\vec{n}$  in vektorja  $\vec{\sigma}$ , katerega komponente so pravzaprav matrice. To je zapis za naslednjo kombinacijo matrik:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} - i \left( n_x \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + n_y \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + n_z \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \sin \frac{\theta}{2}.$$

Zapišimo vse z eno samo matriko:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} - i n_z \sin \frac{\theta}{2} & (-n_y - i n_x) \sin \frac{\theta}{2} \\ (n_y - i n_x) \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} + i n_z \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$



Pozor, to ni rotacijska matrika, ki bi delovala neposredno na 3D vektor, kar je razumljivo že s tem, da je matrika  $2 \times 2$ . Elementi rotacije, prikazani s širimi števili: tremi komponentami enotnega vektorja in rotacijskim kotom. Pokazati moramo, da so ti elementi v matriki smiselno zloženi.

Če najprej vzamemo kot  $\theta = 0$ , ko ni rotacije, dobimo enotsko matriko  $I$ . Nato naj dvema zaporednima rotacijama ustreza produkt ustreznih matrik. Preverimo, kaj je z inverzno rotacijo. To je rotacija za kot v nasprotni smeri (okrog iste osi), ali, kar je isto, rotacija za nasprotno predznačen kot. Zapišimo kar v obliki (5.6):

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} + in_z \sin \frac{\theta}{2} & (n_y + in_x) \sin \frac{\theta}{2} \\ (-n_y + in_x) \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} - in_z \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

V matriki (5.6) smo preprosto zamenjali predznake členov s sinusom polovičnega kota. Z množenjem matrik (5.6) in (5.7) res dobimo enotsko matriko. To je v redu, ker je zaporedje operacij zasuka in nasprotnega zasuka okrog iste osi ničelni zasuk. Pri računu upoštevamo tudi normiranost smernega vektorja:  $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ .

Nazadnje moramo zmnožiti tudi dve matriki za splošna zasuka. Najprej matrika  $R_\alpha$  zasučé vektorje za pozitivni kot  $\alpha$  okrog enotnega vektorja  $\vec{m} = (m_x, m_y, m_z)$ , nato tudi  $R_\beta$  za pozitivni kot  $\beta$  okrog enotnega vektorja  $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ . Pazimo na vrsti red množenj matrik. Množimo lahko kar matriki v zapisu (5.7) ali pa formalno kot 4 krat 4 člene po matrikah in upoštevamo relacije (5.4).

Z množenjem matrik člena po členu (16 produktov), z upoštevanjem zgornjih enačb nazadnje dobimo dva zelo različna matrična člena. Člen z enotno matriko je:

$$X_1 = I \cdot \left[ \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cdot (\vec{m} \cdot \vec{n}) \right].$$

Člen s spinorji je v kompaktnem zapis v slogu enačbe (5.5) enak:

$$X_2 = -i \left[ \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} (\vec{m} \cdot \vec{\sigma}) - \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} ((\vec{n} \times \vec{m}) \cdot \vec{\sigma}) \right].$$

Oba člena skupaj imata podobno obliko kot zapis (5.5). S tem smo že dokazali, da zaporedje dveh rotacij pomeni novo rotacijo, hkrati pa iz zadnjega zapisa takoj razberemo tako kot zasuka pri novi rotaciji kot njeno os. Novi kot označimo z  $\gamma$ :

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cdot (\vec{m} \cdot \vec{n}). \quad (5.8)$$

Smerni vektor nove osi označimo s  $\vec{k}$ :

$$\vec{k} = \frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}} \cdot \left[ \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cdot \vec{m} - \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cdot \vec{n} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cdot (\vec{n} \times \vec{m}) \right]. \quad (5.9)$$

Poglejmo nekaj konkretnih zgledov za preverjanje enačb (5.8) in (5.9).

- 1) Če gre za isto os vrtenja,  $\vec{m} = \vec{n}$ , je njun skalarni produkt enak 1, njun vektorski produkt pa je 0. Tako hitro vidimo iz adicijskih izrekov za sinus in kosinus, da je novi kot vsota prejšnjih dveh, nova os pa je enaka kot prejšnja.
- 2) Naj bosta oba kota  $90^\circ$ : najprej zavrtimo v pozitivnim smislu okrog osi  $x$ , potem pa okrog osi  $y$ . Tokrat je skalarni produkt smernih vektorjev enak 0, vektorski produkt da vektor v nasprotni smeri osi  $z$ . Enačba (5.8) nam pove:

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow \gamma = \pm \frac{\pi}{3}.$$

To je vrtenje za  $120^\circ$ . Os nam poda enačba (5.9):  $\vec{k} = \frac{1}{\pm\sqrt{3}} (1, -1, -1)$ .

To je na simetrali para nasprotnih oktantov. Same koordinatne osi se presučejo ena v drugo, v katerem smislu (glede orientiranosti + polosi) pa najlepše vidimo, če preverimo oba zaporedna zasuka za vse tri koordinatne smerne vektorje.

- 3) Naj bo kot v primeru 2, samo zaporedje obrnimo: najprej zasuk za pozitivni pravi kot okrog  $y$ -osi, potem okrog  $x$ -osi. Zdaj se obrne znak vektorskega produkta smernih vektorjev, zato so vsi trije členi v enačbi za  $\vec{k}$  istega predznaka. Gre torej za simetralo skozi prvi oktant.

### 5.3 Rotacija koordinatnega sistema

Označimo matriko za fizično rotacijo vektorjev za kot  $\alpha$  okrog neke osi, definirane z normiranim vektorjem  $\vec{n}$ , kot  $R(\vec{n}, \alpha)$ . Vzemimo vektor  $\vec{x}$  in z zasukom dobimo nov vektor z množenjem:  $\vec{x}' = R(\vec{n}, \alpha)\vec{x}$ . Sedaj pustimo vektorje pri miru in z isto rotacijo zasučemo koordinatni sistem. Zato se zavrtijo smerni vektorji  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  in  $\vec{k}$  vseh treh koordinatnih osi tako kot prej vektor  $\vec{x}$ :  $\vec{i}' = R(\vec{n}, \alpha)\vec{i}$ ,  $\vec{j}' = R(\vec{n}, \alpha)\vec{j}$  in  $\vec{k}' = R(\vec{n}, \alpha)\vec{k}$ .

Če nas zanima, kako se isti vektorji izražajo v novem (zasukanem) koordinatnem sistemu, govorimo raje o transformaciji vektorjev in napišemo enačbo:  $\vec{x}' = T(\vec{n}, \alpha)\vec{x}$ . Pri tem je  $\vec{x}$  izražen v starem koordinatnem sistemu in  $\vec{x}'$  v novem. Po geometrijskem razmisleku transformacijska matrika  $T$  ni nič drugega kot rotacijska matrika, in sicer ista kot za rotacijo koordinatnih osi, samo z nasprotnim kotom:

$$T(\vec{n}, \alpha) = R(\vec{n}, -\alpha) = R^{-1}(\vec{n}, \alpha). \quad (5.10)$$

Zaradi jedrnatosti bomo transformacijsko matriko pisali samo z oznako  $T$ , brez rotacijske osi in kota. Medtem ko se vektorji transformirajo kot  $\vec{x}' = T\vec{x}$ , se matrike  $3 \times 3$ , ki so tenzorji drugega reda (npr. vztrajnostni moment), transformirajo drugače:  $A' = TAT^{-1}$ . Jedrnato dokažimo pravilnost transformacije matrik, če vemo, da je funkcija matrike z množenjem pretvoriti en fizikalni vektor v drugega, npr.  $\vec{y} = A\vec{x}$ . Dokaz poteka takole:

$$\begin{aligned} \vec{y} &= A\vec{x} \rightarrow \vec{y}' = A'\vec{x}' \\ \vec{y}' &= T\vec{y} = T(A\vec{x}) = T(A(T^{-1}\vec{x}')) = (TAT^{-1})\vec{x}'. \end{aligned}$$

Zapišimo matrično množenje za obe transformaciji tudi na dolgo, po indeksih (po Einsteinovi konvenciji v prvi spodnji enačbi seštevamo po  $m$  in v drugi po indeksih  $m$  in  $n$ ):

$$x'_i = T_{im}x_m. \quad (5.11)$$

$$A'_{ij} = T_{im}T_{jn}A_{mn}. \quad (5.12)$$

V (5.12) smo upoštevali, da je inverzna matrika kar transponirana matrika, ker je  $T$  ortogonalna:  $(T^{-1})_{nj} = T_{jn}$ .

Skalar, ki si ga zamišljamo kot tenzor ničtega reda, se seveda ne transformira. Vektor smatramo kot tenzor prvega reda in matriko kot tenzor drugega reda. V fiziki obstajajo tudi tenzorji višjega reda, predvsem tretjega in četrtega. Iz enačb (5.11) in (5.12) uganemo, da vedno seštevamo po toliko indeksih, kot je red tenzorja. Tako hitro vidimo posplošitev enačb, npr. na tenzor tretjega reda:

$$A'_{ijk} = T_{im}T_{jn}T_{kl}A_{mnl}. \quad (5.13)$$

Najlažje dokažemo pravilo (5.13) tako, da tenzor zapišemo kot neposredni produkt treh vektorjev. Transformacijsko matriko  $T_{ij}$  med kartezičnima koordinatnima sistemoma lahko izrazimo tudi takole:  $T_{ij} = \cos \theta_{ij}$ , kjer je  $\theta_{ij}$  kot med novo  $i$ -to koordinatno in staro  $j$ -to koordinatno osjo. Zapišimo celotno matriko na dolgo:

$$T = \begin{bmatrix} \cos \theta_{11} & \cos \theta_{12} & \cos \theta_{13} \\ \cos \theta_{21} & \cos \theta_{22} & \cos \theta_{23} \\ \cos \theta_{31} & \cos \theta_{32} & \cos \theta_{33} \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Pravilnost zapisa (5.14) za transformacijsko matriko najprej preverimo pri zasuku koordinatnega sistema okrog osi  $z$  za pozitivni ostri kot  $\alpha$ . Takrat je kot  $\theta_{33}$  med novo in staro osjo  $z$  enak nič, koti  $\theta_{13}$ ,  $\theta_{23}$ ,  $\theta_{31}$  in  $\theta_{32}$  so vsi pravi, saj sta novi osi  $x$  in  $y$  še vedno pravokotni na staro os  $z$ , prav tako tudi nova os  $z$  na stari osi  $x$  in  $y$ . V tretji vrstici in tretjem stolpcu je tako od nič različen samo diagonalni element:  $\cos \theta_{33} = 1$ . Kota pri prvih dveh diagonalnih elementih sta tudi očitna:  $\theta_{11} = \theta_{22} = \alpha$ . Previdni moramo biti samo pri interpretaciji dveh kotov. Kot  $\theta_{12}$  je kot med novo osjo  $x$  in staro osjo  $y$ : če se os  $x$  zasučje za  $\alpha$  proti stari osi  $y$ , potem velja  $\theta_{12} = \frac{\pi}{2} - \alpha$  in  $\cos \theta_{12} = \sin \alpha$ . Podobno je  $\theta_{21}$  kot med novo osjo  $y$  in staro osjo  $x$ : če se os  $y$  zasučje še za  $\alpha$  stran od stare osi  $x$ , potem je  $\theta_{21} = \frac{\pi}{2} + \alpha$  in  $\cos \theta_{21} = -\sin \alpha$ . Transformacijska matrika (5.14) je torej res po obliki enaka rotacijski matriki (5.1 c), le kot ima nasprotno vrednost.

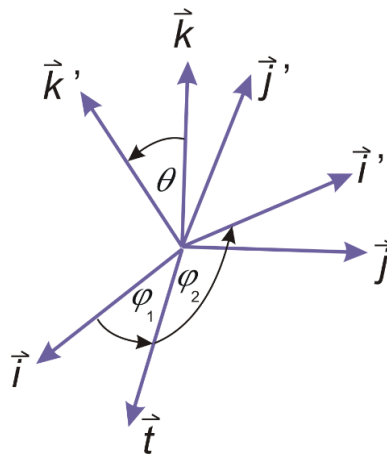
Pa tudi na splošno enačbe (5.14) ni težko dokazati. Spet označimo enotske smerne vektorje starih osi z  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  in  $\vec{k}$ , tiste za nove osi pa z  $\vec{i}'$ ,  $\vec{j}'$  in  $\vec{k}'$ . Vzemimo poljubni vektor  $\vec{a}$  in ga v starem sistemu zapišemo na dva načina:  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ . Zanima nas npr. njegova druga komponenta v novem sistemu, kar je isto kot njegova projekcija na novo os  $y$ . Pomagamo si s skalarnim produktom, pri čemer vektor sam fizično ostane nespremenjen:

$$(a')_2 = \vec{a} \cdot \vec{j}' = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \cdot \vec{j}'$$

$$(a')_2 = a_1(\vec{i} \cdot \vec{j}') + a_2(\vec{j} \cdot \vec{j}') + a_3(\vec{k} \cdot \vec{j}').$$

Skalarni produkti v oklepajih ustrezajo prav kosinusom kotov med novo osjo  $y$  in vsemi tremi starimi koordinatnimi osmi. To je druga vrstica matrike (5.14) in res dobimo skalarno produkt druge vrstice matrike in vektorja  $\vec{a}$  v starem zapisu, v skladu z matričnim množenjem. Pozorni oramo biti, da ne zamenjamo vloge vrstic in stolpcev transformacijskih matrik.

Zdaj ko smo primerjali med seboj fizično rotacijo vektorjev in rotacijo koordinatnega sistema, se spet vrnimo k fizični rotaciji. Splošno rotacijo v 3D prostoru zelo praktično opišemo z Eulerjevimi koti  $\varphi_1$ ,  $\theta$  in  $\varphi_2$ , kot prikazuje Slika 33. Takšna obravnava je primerna npr. za kompleksne fizikalne sisteme, npr. v prekolacijski teoriji ali v različnih teorijah interakcij med pari anizotropnih objektov (kvadrov, elipsoidov itd.), če imamo množico teh objektov z različnimi porazdelitvami njihovih dvoosnih (biaksialnih) orientacij. Smerni vektorji fiksnega koordinatnega sistema naj bodo kot ponavadi  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  in  $\vec{k}$ . Naredimo zaporedje treh rotacij:  $R = f_2 t f_1$ . Najprej z rotacijo  $f_1$  naredimo zasuk okrog osi  $\vec{k}$  za kot  $\varphi_1$ , čemur ustreza matrika (5.1 c) s prepisom kota  $\gamma \rightarrow \varphi_1$ . Pri tem se smerni vektor  $\vec{i}$  stare osi  $x$  zasučje v vektor  $\vec{t}$ , ki leži še vedno v ravnini  $(x, y)$ . Premici v smeri vektorja  $\vec{t}$  pravimo vozliščnica. Nato naredimo z rotacijo  $t$  zasuk okrog te vozliščnice za kot  $\theta$ . V matriki (5.1 a) vzamemo  $\alpha \rightarrow \theta$ , vendar pozor, to je že v zasukanem koordinatnem sistemu. Pri tem zasuku se je stara os  $\vec{k}$ , ki se je pri prvem zasuku ohranila, zavrtela za kot  $\theta$  v vektor  $\vec{k}'$ . Vseeno pazimo, koordinatnega sistema v resnici ne vrtimo. Vrtimo objekte, na primer kvader, na katerega prilepimo smerne vektorje v smereh robov. Zadnja rotacija  $f_2$  zasučje vektorje za kot  $\varphi_2$  okrog osi  $\vec{k}'$ . Temu spet ustreza matrika (5.1 c) s kotom  $\gamma \rightarrow \varphi_2$ , vendar v zasukanem koordinatnem sistemu. Pri tem se je npr. vektor  $\vec{t}$  na črtkani vozliščnici zasukal v vektor  $\vec{t}'$ , kot vidimo na sliki. To bi bila npr. končna lokalna smer  $x'$ , prilepljena na zasukani kvader vzdolž roba  $a$ .



Slika 33: Tri zaporedne rotacije z Eulerjevimi koti

Če hočemo celotno rotacijo zapisati z eno samo matriko v starem koordinatnem sistemu, saj gre navsezadnje za zasuk vektorjev, moramo pri matrikah (5.1 a) in (5.1 c) za rotaciji  $t$  in  $f_2$  izvesti transformacijo v star koordinatni sistem po enačbah (5.12) s pravimi predznaki kotov. Nazadnje dobimo zelo preprost rezultat. Namesto da bi imeli zaporedje množenja matrik, ki ustreza prvotnemu vrstnemu redu, se zaporedje matrik obrne:

$$R = R_z(\varphi_1)R_x(\theta)R_z(\varphi_2).$$

Označimo kotni funkciji kotov  $\varphi_i$  na kratko:  $C_1 = \cos \varphi_1$ ,  $C_2 = \cos \varphi_2$ ,  $S_1 = \sin \varphi_1$ ,  $S_2 = \sin \varphi_2$ , nato z množenjem matrik dobimo rezultat:

$$R = \begin{bmatrix} C_1 C_2 - S_1 S_2 \cos \theta & -C_1 S_2 - S_1 C_2 \cos \theta & S_1 \sin \theta \\ S_1 C_2 + C_1 S_2 \cos \theta & -S_1 S_2 + C_1 C_2 \cos \theta & -C_1 \sin \theta \\ S_2 \sin \theta & C_2 \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Za test lahko vzamemo primer s kotom  $\theta = 0$ . Takrat imamo samo vrtenje za  $\varphi_1 + \varphi_2$  okrog osi  $z$ , kar res dobimo, če vstavimo v matriko  $R$  kot  $\theta = 0$  in upoštevamo adicijska izreka za sinus in kosinus vsote preostalih dveh kotov.

#### 5.4 Rotacija telesa in vztrajnostni moment

Lotimo se fizike vrtenja. Na vztrajnostni moment najprej glejmo kot na eno samo skalarno količino, povezano z vrtenjem tega telesa okrog dane nepremične osi. Začnemo lahko iz dveh izhodišč: z energijo ali z vrtilno količino. Obravnavajmo najprej kinetično energijo vrtečega se telesa pri dani kotni hitrosti  $\omega$ :

$$T = \frac{1}{2} \int v^2 dm = \frac{1}{2} \int (r_p \omega)^2 dm$$

$$T = \frac{1}{2} J \omega^2. \quad (5.15)$$

Upoštevali smo, da imajo vsi deli telesa enako kotno hitrost in da je navadna hitrost posameznega delčka odvisna od njegove pravokotne razdalje  $r_p$  od osi vrtenja:  $v = r_p \omega$ , s tem smo vpeljali tudi ustrezni vztrajnostni moment:

$$J = \int r_p^2 dm. \quad (5.16)$$

Integriramo po masnih koščkih telesa, pomemben je kvadrat razdalje od osi vrtenja. Za sedaj se omejimo na primere, ko gre os vrtenja skozi masno središče telesa (recimo ji težiščna os). Vztrajnostni moment v enačbi (5.16) je odvisen tudi od smeri osi, ne samo od mase in oblike telesa. Če pa hočemo celotno fizikalno sliko v 3D za vrtenje telesa okrog katerekoli težiščne osi, se izkaže, da moramo obravnavati vztrajnostni moment kot tenzor drugega reda. Izrazimo ga v izbranem kartezičnem koordinatnem sistemu kot simetrično matriko  $3 \times 3$ , izhodišče naj bo v masnem središču telesa:

$$J = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

Diagonalni elementi se skladajo z definicijo (5.16); zapišimo podrobneje npr. komponento  $J_{xx}$ , ki ustreza vrtenju okrog osi  $x$ , ki gre skozi masno središče telesa:  $J_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm$ . Nediagonalne matrične elemente imenujemo tudi deviacijski momenti. Zapišimo enega od njih:  $J_{xy} = - \int xy dm$ .

Na splošno lahko napišemo vse matrične elemente z eno samo enačbo z uporabo ustreznih indeksov za vrstice in stolpce matrike, če kot ponavadi označimo krajevni vektor do dane točke telesa kot  $\vec{r} = (x, y, z) \equiv (x_1, x_2, x_3)$ :

$$J_{ij} = \int (r^2 \cdot \delta_{ij} - x_i x_j) dm. \quad (5.18)$$

S Kroneckerjevim simbolom  $\delta_{ij}$ , ki je enak 1, če sta indeksa enaka, drugače je 0. Tukaj pomeni kvadrat  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  razdaljo masnega delčka od izhodišča in jo moramo razlikovati od razdalje  $r_p^2$  od osi vrtenja.

Da je definicija vztrajnostnega momenta (5.18) smiselna, lahko pokažemo s tem, da se pri zasuku koordinatnega sistema zares pravilno transformira kot tenzor drugega reda. Naj bo  $T$  ustrezna transformacijska matrika, ki je ortogonalna. Pri dokazu bomo uporabili tudi naslednjo lastnost ortogonalne matrike. Če vzamemo dve različni vrstici matrike, ju smatramo kot dva vektorja in ju skalarno pomnožimo med seboj, in dobimo rezultat 0. Če pa skalarno pomnožimo isto vrstico samo s seboj, dobimo rezultat 1. Enako velja za množenje stolpcev. Pravilna transformacija matrike (5.18) pomeni naslednje: če naredimo transformacijo  $J' = TJT^{-1}$ , dobimo isti rezultat, kot če naredimo vektorsko transformacijo  $\vec{r}' = T\vec{r}$ , in tako spremenjen vektor damo v matriko (5.18).

Da bo manj pisanja pri dokazovanju, upoštevajmo tudi, da so elementi matrike  $T$  konstantni, zato jih lahko pišemo pred integralom ali znotraj in se nič ne spremeni. Tudi vsoto po matričnih elementih lahko zaradi aditivnosti od zunaj prenesemo pod integral. Element mase  $dm$  je skalar in se pri transformacijah ne spreminja. Zato bomo pri izpeljavi namesto celega integrala (5.16) pisali samo tisto, kar imamo v oklepaju v njem. Najprej upoštevajmo transformacijo  $\vec{r}' = T\vec{r}$  in enačbo (5.11), pa imamo (vsota po  $m$  in  $n$ ):

$$r^2 \delta_{ij} - T_{im} x_m T_{jn} x_n.$$

Pri prvem členu se namreč nič ne spremeni, ker je  $r^2$  skalar. Izvedimo tudi transformacijo  $J' = TJT^{-1}$  s formulo (5.12):

$$r^2 T_{im} T_{jn} \delta_{mn} - T_{im} T_{jn} x_m x_n$$

Drugi člen je enak kot prej. Pri prvem členu v dvojni vsoti ostanejo samo členi z enakima indeksoma:  $m = n$ . Potem dobimo skalarni produkt dveh vrstic matrike in rezultat je res Kroneckerjev koeficient (simbol)  $\delta_{ij}$ , ker so vrstice ortogonalne in normirane. Tako smo preverili pravilnost tenzorske pretvorbe.

Za zdaj je bila vpeljava vztrajnostnega momenta z enačbo (5.18) bolj ugibanje kot neposredna fizikalna izpeljava. Pomagali smo si z osnovnimi simetrijskimi principi fizike. Eden od njih je ta, da vse fizikalne količine praviloma predstavimo kot tenzorje različnih redov. Da spravimo skupaj ustrezne tenzorje drugega reda, si pomagamo s standardnimi preprostimi tenzorji drugega reda, ki se uporabljajo povsod v fiziki. Na primer, v enačbi (5.18) sta skrita dva, eden v prvem členu, drugi v drugem. Najpreprostejši tenzor drugega



reda je diagonalna matrika, ki ima vse tri diagonalne elemente enake. V enačbi (5.18) je to prvi člen. V drugem členu se skriva še en pomemben preprost tenzor, to je tenzorski produkt dveh vektorjev. Z vektorjema  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  in  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  definiramo tenzorski produkt takole:

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix}.$$

Pri drugem členu vztrajnostnega momenta smo vzeli obakrat isti vektor,  $\vec{r}$ , seveda smo tudi pomnožili z maso  $dm$  in integrirali, vendar gre še vedno za tenzorski produkt. Vsekakor pa se s tenzorjem (5.18) diagonalni elementi ujemajo z najpreprostejšo definicijo vztrajnostnega momenta (5.16), medtem ko pomenijo nediagonalni elementi fizikalno nekaj novega. Zgoraj smo pokazali v posebnem primeru, da se tenzorski produkt dveh vektorjev zares vede kot tenzor. Podoben dokaz velja za tenzorski produkt  $N$  vektorjev, ki je tenzor ranga  $N$ . Tenzorski produkt dveh vektorjev krajše zapišemo:  $(\vec{a} \otimes \vec{b})_{ij} = a_i b_j$ .

Vztrajnostni moment kot tenzor oblike (5.18) pa lahko bolj neposredno izpeljemo iz osnovne definicije za vektor vrtilne količine. Spet si zamišljamo vrtenje togega telesa okrog nepremične težiščne osi. Vrtilna količina točkastega telesa je:  $\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v})$ . Za vrteče se togo telo vektorsko seštevamo prispevke vrtilne količine po majhnih koščkih:

$$\vec{L} = \int (\vec{r} \times \vec{v}) dm = \int (\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) dm.$$

Pri vrtenju namreč velja  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ . V integralu je dvojni vektorski produkt. Obravnavajmo na primer komponento  $L_x$ :

$$L_x = \int [(y^2 + z^2)\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z] dm.$$

To pa je prav  $L_x = J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z$ , kjer so matrični elementi:

$$J_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm$$

$$J_{xy} = - \int xy dm$$

$$J_{xz} = - \int xz dm.$$

Podobno bi računali za drugi dve komponenti. Torej je definicija vztrajnostnega momenta (5.18) prava, velja pa ključna enačba:

$$\vec{L} = J\vec{\omega}. \quad (5.19)$$

To pomeni, vrtilna količina vrtečega se togega telesa je s tenzorjem vztrajnostnega momenta pomnožena kotna hitrost. Zato, razen v posebnih primerih,  $\vec{L}$  in  $\vec{\omega}$  nista vzporedna vektorja. Enačba (5.19) velja na splošno, tudi ko os vrtenja ni fiksna. Izraz za rotacijsko kinetično energijo (5.15) posplošimo takole:

$$T = \frac{1}{2}(J\vec{\omega}) \cdot \vec{\omega}. \quad (5.20)$$

V oklepaju je matrični produkt matrike  $J$  s stolpcem vektorja kotne hitrosti, pika označuje skalarni produkt. Razlika med enačbama (5.15) in (5.20) je v tem, da je  $J$  v (5.15) nek efektivni vztrajnostni moment kot skalar za dano os vrtenja, v zadnji enačbi pa je vztrajnostni moment matrika. Kako povežemo to dvoje, bomo videli pozneje.

Če os vrtenja ne gre skozi masno središče telesa, vztrajnostnega momenta (v skalarni obliki, ne kot tenzorja) ni treba računati spet na novo z integralom (5.16), temveč si pomagamo s Steinerjevim izrekom:

$$J = J^* + md^2, \quad (5.21)$$

kjer je  $J^*$  ustrejni vztrajnostni moment težiščne osi, če staro os vzporedno premaknemo za razdaljo  $d$ , da pade na težiščno os. Torej je vztrajnostni moment  $J$  iz težišča premaknjene osi vedno večji kot  $J^*$  za težiščno os. Za lažjo obravnavo naj bosta obe osi vzporedni z osjo  $z$  ustreznega kartezičnega koordinatnega sistema. Prava os vrtenja naj se ujema s to osjo. Prvi dve koordinati težišča sta  $x^*$  in  $y^*$ . Koordinati delov telesa glede na prvi koordinatni sistem označimo z  $x$  in  $y$ , glede na premaknjeni težiščni sistem pa z  $x'$  in  $y'$ , nato dokažemo enačbo (5.21) takole:

$$\begin{aligned} J &= \int (x^2 + y^2) dm \\ J &= \int ((x^* + x')^2 + (y^* + y')^2) dm \\ J &= \int ((x')^2 + (y')^2) dm + \int ((x^*)^2 + (y^*)^2) dm + 2x^* \int x' dm + 2y^* \int y' dm. \end{aligned}$$

Prvi integral v zadnji vrstici je  $J^*$ , saj je izračunan v težiščnem sistemu. Pri drugem integralu je sta  $(x^*)^2 + (y^*)^2 = d^2$ , tako da dobimo z integriranjem zares člen  $md^2$ . Zadnja dva člena odpadeta, ker računamo koordinati težišča v težiščnem sistemu (brez kvocienta mase, ki pa ničelnega rezultata ne spremeni).

Kot vsako simetrično matriko lahko diagonaliziramo tudi tenzor  $J$ , to je, poiščemo njegove tri lastne vrednosti  $J_1$ ,  $J_2$  in  $J_3$ . Rečemo jim kar lastni vztrajnostni momenti telesa. Vzemimo spet samo težiščne osi, čeprav veljajo te ugotovitve tudi za vzporedno premaknjene osi. Transformacija je običajna:  $J' = TJT^{-1}$ , kjer je diagonalni tenzor:

$$J' = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}. \quad (5.22)$$

Vsako, še tako nesimetrično telo ima torej tri lastne vztrajnostne momente, od katerih je eden najmanjši, eden pa največji. Ustrezne težiščne osi so lastne osi in so pravokotne med seboj, kar velja za lastne vektorje vsake simetrične matrike. Lahko izberemo kartezični koordinatni sistem na novo, tako da se sedaj osi tega sistema kar ujemajo z lastnimi osmi vztrajnostnega momenta. Temu pravimo lastni koordinatni sistem. Če sedaj zavrtimo telo okrog poljubne težiščne osi, ki oklepa z lastnimi osmi določene kote, spet uporabimo transformacijo matrike. Tokrat iz lastnega sistema v sistem, kjer se npr. nova os  $Z$  ujema z osjo vrtenja. Na vsak način ugotovimo, da je vztrajnostni moment za poljubno težiščno os neka linearna kombinacija vseh treh lastnih vrednosti. Vsekakor je vztrajnostni moment za poljubno težiščno os vmes med najmanjšo in največjo vrednostjo od treh lastnih vrednosti.

Pri geometrijsko preprostih simetričnih telesih lahko brez težav uganemo, katere so lastne osi vztrajnostnega momenta. To so takšne osi, ki jih poistovetimo s tremi osmi kartezičnega koordinatnega sistema, glede na katerega so zaradi simetrije vsi deviacijski momenti enaki nič. Torej ni treba matrike šele diagonalizirati in poiskati lastne vrednosti.



## Računski zgled 20

Izpeljimo vztrajnostni moment valja pri vrtenju okrog geometrijske osi. Za konkretne podatke vzemimo: višina  $h = 2$  dm, polmer  $R = 1$  dm, masa  $m = 10$  kg.

Začnemo takole (Slika 34):

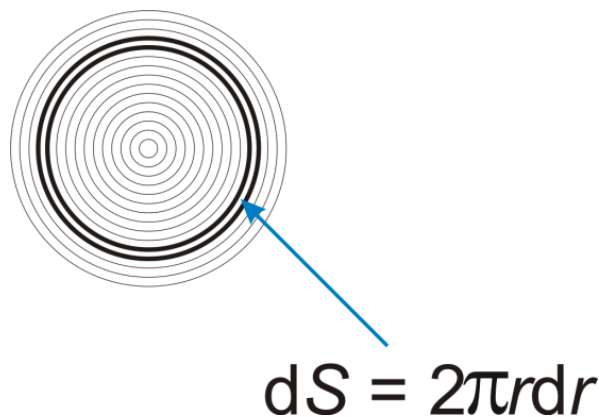
$$J = \rho \int r^2 dV = \rho h \int r^2 dS.$$

Označili smo te podatke:  $\rho =$  gostota valja,  $S =$  ploščina osnovne ploskve. Za pravokotno razdaljo točk od osi vrtenja uporabimo kar oznako  $r$  namesto  $r_p$ , saj pri teh nalogah ni nevarnosti za zamenjavo z velikostjo krajevnega vektorja. Za integriranje po njej uporabimo kar 2D polarni koordinatni sistem in zapišemo:  $dS = r dr d\varphi$ . Integriramo torej po radiju in polarnemu kotu:

$$J = \rho h \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 dr d\varphi$$

$$J = \rho h \cdot \frac{\pi R^4}{2} = \frac{1}{2} m R^2.$$

Uporabili smo tudi  $\rho = \frac{m}{V}$  in  $V = \pi R^2 h$ . Zaradi simetrije bi lahko takoj vzeli za ploščinski element tanek kolobar s ploščino  $dS = 2\pi r dr$ , kot je prikazano na sliki. Višina valja se v končni enačbi ne pojavlja. Za naše podatke izračunamo  $J = 5$  kg dm<sup>2</sup>.



Slika 34: Izpeljava  $J$  za valj



## Računski zgled 21

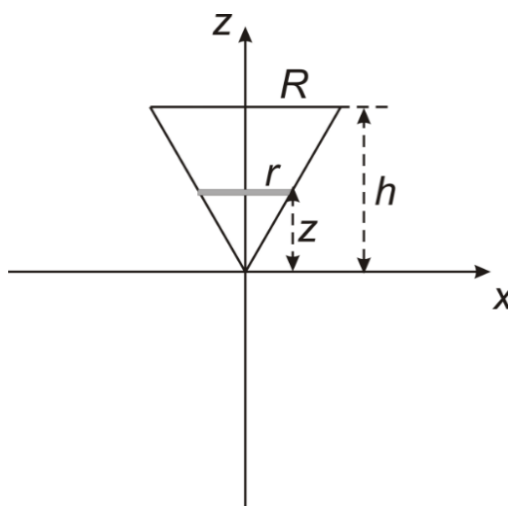
Izpeljimo tudi vztrajnostni moment stožca pri vrtenju okrog geometrijske osi, če si pomagamo z zgoraj izpeljanim izrazom za valj. Stožec naj ima spet višino  $h$ , radij osnovne ploskve  $R$  in maso  $m$ . Podobno izpeljimo tudi vztrajnostni moment krogle za os skozi njeno središče.

Ni treba računati od začetka kot pri valju, ampak si pomagamo tako, da stožec vzdolž geometrijske osi razrežemo na tanke valje – rezine (Slika 35). Iz praktičnega razloga smo stožec obrnili, tako da je njegov vrh v izhodišču. Rezine sicer niso čisto valji, temveč prisekani stožci, vendar je razen pri nekaj valjih ob vrhu stožca ta robna nepravilnost nebitvena. Torej je vztrajnostni moment (ki je aditivna količina) sestavljen iz vztrajnostnih momentov množice tankih valjev, zanje pa lahko uporabimo rezultat prejšnjega računskega zgleda:

$$J = \frac{1}{2} \int r^2 dm$$

Naprej si pomagamo malo drugače kot prej. Integracijska spremenljivka naj bo koordinata  $z$ . Zaradi podobnih trikotnikov na sliki lahko  $z$  njo izrazimo radij valja na višini  $z$ :  $r = \frac{Rz}{h}$ . Masa tanke valjne rezine debeline  $dz$  pa je:  $dm = \rho \cdot \pi r^2 dz$ . Zato velja:

$$J = \frac{1}{2} \pi \rho \int_0^h \left( \frac{Rz}{h} \right)^4 dz = \frac{1}{10} \pi \rho R^4 h.$$



Slika 35: Izpeljava  $J$  za stožec; prikazana je projekcija na ravnino  $(x, z)$

Gostota je  $\rho = \frac{m}{V}$  z volumnom  $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$ , tako da nazadnje dobimo:

$$J = \frac{3}{10} mR^2.$$

Pri krogli začnemo podobno kot pri stožcu. Za nazorno sliko si spet pomagamo s projekcijo na ravnino  $(x, z)$ , sliko pa naj nariše bralec sam (podobna je Sliki 36 spodaj za tanko ploščo). Krogla ima polmer  $R$ , njeno središče je v koordinatnem izhodišču. Integrirali bomo spet po koordinati  $z$ , ki gre v tem primeru od  $-R$  do  $R$ . Ker pa je zaradi simetrije prispevek spodnje polovice krogle k  $J$  enak prispevku zgornje polovice, je dovolj integrirati v območju  $0 \leq z \leq R$  in dodati koeficient 2. Ker tako kot zgoraj pri stožcu razdelimo kroglo v smeri osi  $z$  na tanke valjne rezine, je začetek računa podoben:

$$J = \pi \rho \int_0^R r^4 dz.$$

Tu smo koeficient  $\frac{1}{2}$  pri vztrajnostnem momentu tankega valja krajšali z 2, ker integriramo samo od 0 do  $R$ . Polmer  $r$ , ki ima tukaj enak pomen kot na Sliki 35 za stožec, izračunamo po Pitagorovem izreku:  $r^2 = R^2 - z^2$ . Vstavimo ta izraz v zgornji integral, kvadriramo, inegriramo in nazadnje upoštevamo gostoto  $\rho = \frac{m}{V} = \frac{3m}{4\pi R^3}$ . Potem dobimo znani rezultat za vztrajnostni moment krogle:  $J = \frac{2}{5} mR^2$ .

Če iz preprostih teles sestavljamo druga telesa, vztrajnostne momente preprosto seštevamo. Nasprotno uporabimo pri votlih telesih trik odštevanja vztrajnostnih momentov. Vendar moramo paziti, da pri izpeljavi pravilno interpretiramo maso. To bomo pokazali pri naslednjem računskem zgledu.



## Računski zgled 22

Izpeljimo vztrajnostni moment votle krogle z maso  $m$ , zunanjim polmerom  $R_2$  in notranjim polmerom (polmerom votline)  $R_1 < R_2$  in podobno za votli valj za vrtenje okrog geometrijske osi.

Pri računu pomeni  $m$  maso telesa med  $R_1$  in  $R_2$ .  $J$  izračunamo tako, da od vztrajnostnega momenta  $J_2 = \frac{2}{5}m_2R_2^2$  za polno kroglo odštejemo  $J_1 = \frac{2}{5}m_1R_1^2$  manjše krogle, ki jo izrežemo. Tokrat si ne bomo pomagali z gostoto materiala, ampak bomo uporabili bližnjico, da so mase sorazmerne s tretjo potenco polmera. Končajmo račun:

$$J = \frac{2}{5} \left( \frac{mR_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot R_2^2 - \frac{mR_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot R_1^2 \right) = \frac{2}{5} m \frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3}$$

Pri votlem valju dobimo s podobnim računom rezultat:

$$J = \frac{1}{2} m \frac{R_2^4 - R_1^4}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{1}{2} m (R_2^2 + R_1^2).$$

Izrazimo tudi vztrajnostni moment zelo tanke krogelne lupine, kjer je  $R_1 \approx R_2$ . Povedano kvantitativno, razlika polmerov je veliko manjša od polmerov samih. Zgoraj zapisani izraz za votlo kroglo lahko poenostavimo na več načinov. Na primer, razstavimo obe razliki potenc:

$$J = \frac{2}{5} m \frac{(R_2 - R_1)(R_2^4 + R_2^3R_1 + R_2^2R_1^2 + R_2R_1^3 + R_1^4)}{(R_2 - R_1)(R_2^2 + R_2R_1 + R_1^2)}.$$

Koeficienta z razliko polmerov krajšamo, potem postavimo  $R_1 = R_2 = R$  in izpeljemo preprost izraz:  $J = \frac{2}{3}mR^2$ . Pri zelo tankem votlem valju je izraz še enostavnejši:  $J = mR^2$ . Očiten je tudi brez izpeljave, saj je vsa masa tankega valja zbrana pri razdalji  $R$  od osi vrtenja.



### Računski zgled 23

Kolikšen je vztrajnostni moment homogene tanke palice (povsod enak prerez in gostota) z maso  $m$  in dolžino  $l$  pri vrtenju okrog osi, ki gre skozi središče palice in je pravokotna nanjo?

Naj bo palica na osi  $x$ , njena konca pa sta pri  $x = \pm \frac{l}{2}$ . Palico vrtimo okrog osi  $y$ . Razdelimo jo na kratke odseke z dolžino  $dx$  in maso  $dm = \frac{m dx}{l}$ . Razdalja izbranega odseka od osi vrtenja je  $r = x$ . Vztrajnostni moment je:

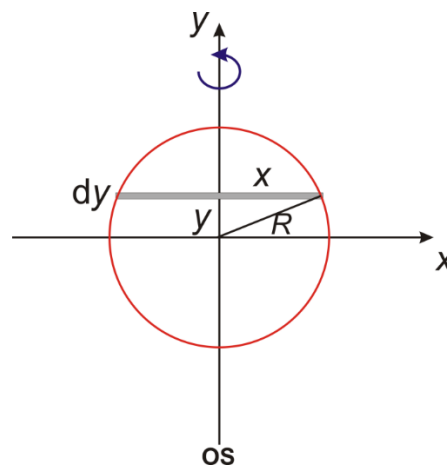
$$J = \frac{m}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{1}{12} ml^2.$$



### Računski zgleđ 24

Kolikšen je vztrajnostni moment tanke homogene okrogle plošče z maso  $m$  in polmerom  $R$  pri vrtenju okrog diametralne osi.

Vrtenje je prikazano na Sliki 36. Os vrtenja je koordinatna os  $y$ .



Slika 36: Izpeljava  $J$  za tanko okroglo ploščo pri vrtenju okrog diametralne osi  $y$

Ploščo razdelimo po tej osi na zelo tanke palice z debelino  $dy$  in različnimi dolžinami  $2x$ , ki so pravokotne na os  $y$ , zato je njihov vztrajnostni moment:  $dJ = \frac{1}{12} dm(2x)^2$ . Uporabimo Pitagorov izrek,  $x^2 = R^2 - y^2$ , upoštevamo za košček mase  $dm = m \cdot \frac{2x dy}{\pi R^2}$ , podobno kot zgoraj pri krogli integriramo po koordinati od 0 do  $R$  in dodamo koeficient 2 in nadaljujemo z:

$$J = \frac{4m}{3\pi R^2} \int_0^R (R^2 - y^2)^{3/2} dy.$$



Uvedemo novo spremenljivko  $\varphi$ , tako da je  $y = R \sin \varphi$ , integral preide v:

$$J = \frac{4mR^2}{3\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^4 \varphi \, d\varphi.$$

Uporabimo dvakrat zaporedoma relacijo  $\cos^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\varphi))$ , da v integralu nadomestimo:  $\cos^4 \varphi = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} + 2\cos(2\varphi) + \frac{1}{2}\cos(4\varphi)\right)$ . Pri integriranju da od nič različni prispevek samo člen  $3/2$ , končni rezultat je  $J = \frac{1}{4}mR^2$ . Vztrajnostni moment pri vrtenju okrog diametralne osi tanke plošče je torej dvakrat manjši kot pri vrtenju okrog geometrijske osi, saj je tanka plošča valj.



### Računski zgled 25

Kolikšen je vztrajnostni moment valja z maso  $m$ , polmerom  $R$  in višino  $h$  pri vrtenju okrog težiščne osi, pravokotne na geometrijsko os?

Uporabimo rezultat prejšnjega zgleda za vrtenje tanke okrogle plošče okrog diametralne osi, razen tega pa tudi Steinerjev izrek. Naj bo os vrtenja  $y$ , medtem ko gre geometrijska os valja po osi  $z$ . Valj razdelimo po osi  $z$  na tanke okrogle rezine z debelino  $dz$  in maso  $dm = m \cdot \frac{dz}{h}$ . Masno središče valja je v koordinatnem izhodišču, zato je koordinata v intervalu  $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$ . Edino za rezino pri  $z = 0$  velja  $dJ = \frac{1}{4}dmR^2$ . Pri drugih, vzporedno premaknjenih rezinah moramo po Steinerjevemu izreku dodati tudi člen  $dmz^2$ . Tako pridemo do izraza:

$$J = \frac{m}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{R^2}{4} + z^2\right) dz = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right).$$

Ta rezultat ne preseneča. Pri zelo tankem valju zanemarimo polmer in dobimo izraz za tanko palico, pri zelo ozkem valju pa zanemarimo višino in pristanemo spet pri izrazu za tanko ploščo. Pri vrtenju valja okrog geometrijske osi je torej pomemben samo polmer, pri vrtenju okrog pravokotne osi pa obe dimenziji, polmer in višina.

Zdaj lahko za valj zapišemo tenzor vztrajnostnega momenta v diagonalni obliki. To dobimo, če za kartezične koordinatne osi izberemo simetrijske osi valja. Te so očitne: os  $z$  naj bo v smeri geometrijske osi, osi  $x$  in  $y$  pa pravokotni nanjo, v dveh pravokotnih radialnih smereh. Masno središča valja naj bo v izhodišču. Takrat je vztrajnostni moment valja diagonalna matrika z elementi:  $J_1 = J_2 = m \left( \frac{1}{4} R^2 + \frac{1}{12} h^2 \right)$ ,  $J_3 = \frac{1}{2} m R^2$ . Z uporabo cilindričnih koordinat se prepričamo, da so deviacijski momenti res enaki nič.

Na primeru valja lahko prikažemo transformacijo tenzorja vztrajnostnega momenta, tako da moremo izračunati vztrajnostni moment pri vrtenju okrog katerekoli težiščne osi, ne le za simetrijske kartezične osi. Pokažimo to transformacijo na splošno. Naj ima diagonalni tenzor  $J_d$  v smeri koordinatnih osi  $x$ ,  $y$  in  $z$ , ki smo jih našli ali uganili na osnovi simetrije, diagonalne elemente  $J_1$ ,  $J_2$  in  $J_3$ . Pri izpeljavi transformacije si lahko pomagamo z izrazoma za rotacijsko kinetično energijo (5.15) in (5.20). Zanima nas vztrajnostni moment  $J_{\vec{e}}$  kot ena sama »komponenta« (skalar) pri vrtenju okrog neke osi z enotskim smernim vektorjem  $\vec{e} = (e_1, e_2, e_3)$ , ki je različna od kartezičnih osi. Kotno hitrost kot vektor pri vrtenju okrog te osi lahko takrat zapišemo takole:  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}$ . Kinetična energija, zapisana na dva načina, je:

$$\frac{1}{2} J_{\vec{e}} \omega^2 = \frac{1}{2} (J_d \omega \vec{e}) \cdot (\omega \vec{e}).$$

Izpostavimo na desni kvadrat kotne hitrosti, krajšamo, zmnožimo vse na desni strani enačbe. Rezultat je:

$$J_{\vec{e}} = J_1 e_1^2 + J_2 e_2^2 + J_3 e_3^2. \quad (5.23)$$

Pri tem velja  $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$ . Iz enačba (5.23) izhaja tudi pomembno pravilo o mogočih vrednostih vztrajnostnega momenta okrog katerekoli težiščne osi. Izberimo koordinatne osi tako, da so velikosti diagonalnih elementov tenzorja urejene takole:  $J_1 \leq J_2 \leq J_3$ . Potem zaradi enačbe (5.23) zagotovo velja neenačba  $J_{\vec{e}} \leq J_3 e_1^2 + J_3 e_2^2 + J_3 e_3^2 = J_3$  in podobna neenačba  $J_{\vec{e}} \geq J_1 e_1^2 + J_1 e_2^2 + J_1 e_3^2 = J_1$ . Ko torej enkrat najdemo simetrijske osi, tako da je tenzor vztrajnostnega momenta diagonaliziran, komponenti  $J_1$  in  $J_3$  nista samo najmanjša in največja diagonalna komponenta, temveč tudi najmanjša in največja mogoča vrednost vztrajnostnega momenta pri vrtenju okrog katerekoli težiščne osi nasploh.

Enačbo (5.23) lahko interpretiramo tudi z vidika ustrezne transformacije koordinatnega sistema. Začnimo s smernim vektorjem na osi  $x$ :  $\vec{x} = (1,0,0)$  v kartezičnih komponentah. Smerni vektor  $\vec{e}$  na osi vrtenja lahko izrazimo kot fizično rotacijo izbranega vektorja  $\vec{x}$  okrog neke tretje osi:  $\vec{e} = R\vec{x}$ . Matrika  $R$  še ni transformacijska matrika med dvema koordinatnima sistemoma, ki nas bo zanimala v nadaljevanju. Vektor kotne hitrosti je  $\vec{\omega} = \omega\vec{e} = \omega R\vec{x}$  in kinetična energija:

$$\frac{1}{2}J_{\vec{e}}\omega^2 = \frac{1}{2}(J_d\omega R\vec{x}) \cdot (\omega R\vec{x}).$$

Pri tem je  $J_d$  že diagonalni tenzor. Krajšamo  $\frac{1}{2}\omega^2$ , pri skalarnem produktu na desni pa oba koeficienta pomnožimo z inverzno rotacijsko matriko, saj se s tem skalarni produkt ne spremeni. Takrat velja:

$$J_{\vec{e}} = R^{-1}(J_d R\vec{x}) \cdot R^{-1}(R\vec{x}) = (R^{-1}J_d R\vec{x}) \cdot \vec{x}.$$

Upoštevali smo  $R^{-1}R = I$ . Produkt treh matrik na desni si zdaj lahko zamišljamo kot transformirani tenzor, ki po transformaciji ni več diagonalen:  $J' = R^{-1}J_d R$ . Nazadnje smo zapisali transformacijo tenzorja drugega reda v standardni obliki, transformacijska matrika pa je  $T = R^{-1}$ . Tako zapišemo vztrajnostni moment z novim, transformiranim in nediagonalnim tenzorjem:

$$J_{\vec{e}} = (J'\vec{x}) \cdot \vec{x}.$$

Nazadnje vstavimo tudi komponente vektorja  $\vec{x}$  in dobimo  $J_{\vec{e}} = J'_{11}$ . Torej, če za izhodiščno smer izberemo kartezično os  $x$ , potem v skladu s smernim vektorjem  $\vec{e}$  rotacijske osi transformiramo diagonalni tenzor vztrajnostnega momenta v nov tenzor, moramo za ustrezni vztrajnostni moment  $J_{\vec{e}}$  za vrtenje okrog izbrane osi vzeti prvo diagonalno komponento. S tem smo še na en način pokazali, da se tenzor vztrajnostnega momenta transformira kot vsi drugi tenzorji drugega reda. Za račun komponente vztrajnostnega momenta okrog neke osi je najbolj praktičen neposredni račun po enačbi (5.23). Naredimo najprej poučen računski zgled za valj, in nato tudi za kvader.



### Računski zgled 26

Kolikšen je vztrajnostni moment valja z maso  $m$ , polmerom  $R$  in višino  $h$  pri vrtenju okrog težiščne osi, ki gre po diagonali osnega prereza valja?

Osni prerez valja upodobimo v presečni ravnini  $(x, z)$  s pravokotnikom, s stranicama  $a = 2R$  in  $b = h$ . V tej ravnini je  $y = 0$ , zato je smerni vektor diagonale tega pravokotnika:

$$\vec{e} = \frac{(2R, 0, h)}{\sqrt{(2R)^2 + h^2}}.$$

Vztrajnostni moment po enačbi (5.23) je:

$$J_{\vec{e}} = \frac{4R^2 J_1 + h^2 J_3}{(2R)^2 + h^2}.$$

Vstavimo tudi  $J_1 = m \left( \frac{1}{4} R^2 + \frac{1}{12} h^2 \right)$ ,  $J_3 = \frac{1}{2} m R^2$  in imamo:

$$J_{\vec{e}} = m \frac{R^4 + 5R^2 h^2 / 6}{(2R)^2 + h^2}.$$



### Računski zgled 27

Kolikšen je vztrajnostni moment kvadra z maso  $m$  ter robovi  $a$ ,  $b$  in  $c$  pri vrtenju okrog težiščne osi, ki gre po njegovi telesni diagonali?

Če se pravokotnik s stranicama  $a$  in  $b$  vrti okrog osi, ki je pravokotna nanj in gre skozi njegovo središče, je ustrezeni vztrajnostni moment podoben tistemu za palico:  $J = \frac{m}{12} (a^2 + b^2)$ . To izpeljemo, če pravokotnik razdelimo na tanke palice (vseeno je, vzdolž katere osi) ter integriramo, pri tem pa upoštevamo tudi Steinerjev izrek. Izpeljava je v bistvu enaka kot za palico samo. Če namesto pravokotnika vzamemo kvader s tretjim robom  $c$  in isto osjo vrtenja, dobimo enak vztrajnostni moment, saj dimenzija vzdolž osi

vrtenja ne vpliva na njegovo vrednost. Kartezične osi usmerimo po robovih kvadra:  $x$  vzdolž  $a$ ,  $y$  vzdolž  $b$  in  $z$  vzdolž  $c$ . Takrat so lastne vrednosti tenzorja  $J$ :  $J_1 = \frac{m}{12}(b^2 + c^2)$ ,  $J_2 = \frac{m}{12}(a^2 + c^2)$ ,  $J_3 = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$ . Zaradi preproste geometrije kvadra smo lahko takoj uganili, da so to simetrijske osi. Vendar je to dobra vaja, da preverimo, ali so deviacijski momenti res enaki nič. Dovolj je, da to pokažemo za enega od njih:

$$J_{12} = - \int xy dm = -\rho \int_{-c/2}^{c/2} dz \cdot \int_{-a/2}^{a/2} x dx \cdot \int_{-b/2}^{b/2} y dy.$$

Ker so integracijske meje integralov neodvisne druga od druge, smo lahko trojni integral zapisali kot produkt treh enojnih integralov. Medtem ko je integral po koordinati  $z$  enak  $c$ , sta druga dva integrala enaka nič, ker sta integranda lihi funkciji. Res velja  $J_{12} = 0$ .

Telesno diagonalo kvadra predstavimo z vektorjem  $\vec{d} = (a, b, c)$ , ki ga normaliziramo. Potem je vztrajnostni moment:

$$J_{\vec{e}} = \frac{J_1 a^2 + J_2 b^2 + J_3 c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{m}{6} \cdot \frac{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

V primeru kocke,  $a = b = c$ , je ustrezni vztrajnostni moment  $J_{\vec{e}} = \frac{1}{6} m a^2$ . To je hkrati tudi vztrajnostni moment pri vrtenju okrog katerekoli kartezične koordinatne osi. Še več, enak vztrajnostni moment dobimo pri vrtenju okrog katerekoli težiščne osi, ker so lastne vrednosti enake med seboj. Glede tenzorja vztrajnostnega momenta ima kocka popolno simetrijo, tako kot kroglja, čeprav je v geometrijskem smislu kvader manj simetričen.



### Računski zgled 28

Kolikšen je vztrajnostni moment elipsoida z maso  $m$  in polosmi  $a$ ,  $b$  in  $c$  pri vrtenju okrog ene od kartezičnih koordinatnih osi? Upoštevamo enačbo ploskve elipsoida  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

Uporabimo parametrični zapis kartezičnih koordinat, ki je podoben transformaciji med kartezičnimi in sferičnimi koordinatami:

$$\begin{aligned}x &= ar \sin \theta \cos \varphi \\y &= br \sin \theta \sin \varphi \\z &= cr \cos \theta.\end{aligned}$$

Zapis velja tudi za notranjost elipsoida, zato je:  $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Na površini je  $r = 1$  in res velja zgornja enačba za elipsoid. Pretvoriti moramo majhen prostorninski element v kartezičnem zapisu  $dV = dxdydz$  v nov zapis. Za to uporabimo absolutno vrednost Jacobijeve determinante  $A$ :

$$A = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$$

$$dV = |A|drd\theta d\varphi.$$

Račun da  $A = abc r^2 \sin \theta$ , tako da je  $dV = abc r^2 drd\theta d\varphi$ , kar spominja na prostorninski element v sferičnih koordinatah. Dovolj je izračunati komponento vztrajnostnega momenta  $J_{zz}$  ali na kratko  $J_z$  za vrtenje okrog osi  $z$ . Kvadrat pravokotne razdalje točke od te osi je  $r_p^2 = x^2 + y^2$ , in pristanemo pri produktu integralov:

$$J_z = \rho abc \cdot \int_0^1 r^4 dr \cdot \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) d\varphi$$

$$J_z = \frac{1}{5} m(a^2 + b^2).$$

Uporabili smo tudi  $\rho = \frac{m}{V}$  in  $V = \frac{4\pi}{3} abc$ . Tudi prostornino elipsoida izračunamo podobno z uporabo Jacobijeve determinante. V primeru krogle, kjer je  $R = a = b = c$ , dobimo pravi rezultat za njen vztrajnostni moment:  $J_z = \frac{2}{5} mR^2$ . Da so deviacijski momenti tenzorja enaki nič, pokažemo npr. pri elementu  $J_{12} = J_{xy}$ , kjer pišemo samo integrale brez dodatnih koeficientov:

$$J_{xy} \propto \int_0^1 r^4 dr \cdot \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi.$$

Tretji integral je enak nič. Celotni diagonalni tenzor vztrajnostnega momenta za elipsoid je potem:

$$J = \frac{1}{5}m \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix}.$$

Izraz spominja na vztrajnostni moment kvadra.



### Računski zgled 29

Kolikšen je vztrajnostni moment stožca z maso  $m$ , polmerom  $R$  in višino  $h$  pri vrtenju okrog težiščne osi, pravokotne na geometrijsko os?

Kot prej pri valju uporabimo rezultat za vrtenje tanke okrogle plošče okrog diametralne osi, razen tega uporabimo tudi Steinerjev izrek. Pomagamo si s Sliko 35, le da je os vrtenja vzporedna z osjo  $y$  in gre skozi masno središče, le-to je pri stožcu pri  $\frac{3}{4}h$ , gledano od izhodišča. Stožec razdelimo po osi  $z$  na tanke okrogle plošče (rezine) z debelino  $dz$  in maso  $dm = 3m \left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{dz}{h}$ , ker je prostornina stožca  $\frac{\pi}{3}R^2h$ , tankega valja pa  $\pi r^2 dz$ . Tu je  $r = \frac{z}{h}R$ . Prispevku vztrajnostnega momenta  $dJ = \frac{1}{4}dmr^2$  moramo dodati tudi člen  $dm \left(z - \frac{3}{4}h\right)^2$ . Tako dobimo:

$$J = \frac{3m}{R^2h} \int_0^h \left[ \frac{r^2}{4} + \left(z - \frac{3}{4}h\right)^2 \right] r^2 dz$$

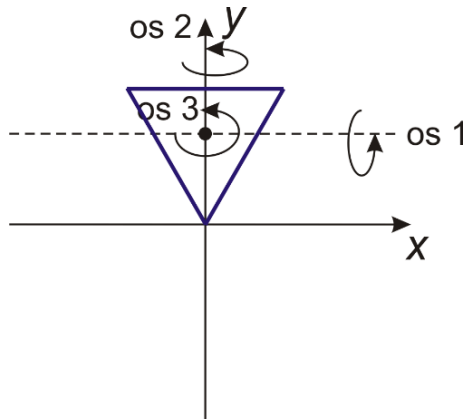
$$J = \frac{3}{80}m(4R^2 + h^2).$$

Tako zdaj že poznamo celotni diagonalni tenzor vztrajnostnega momenta za težiščne osi pri vrtenju kvadra (kocke), elipsoida (krogle), valja in stožca. Nazadnje se lotimo še zahtevnejšega primera, ko še ne poznamo simetrijskih osi in moramo začetni tenzor šele diagonalizirati.



### Računski zgled 30

Kolikšen je vztrajnostni moment tanke plošče v obliki enakostraničnega trikotnika s stranico  $a$  in maso  $m$  okrog naslednjih treh pravokotnih težiščnih osi (Slika 37): 1) osi, ki je vzporedna z eno od stranic (vzporedna  $x$  osi), 2) osi, ki sovpada z višino trikotnika ( $y$  os), in 3) osi, ki je pravokotna na ploščo ( $z$  os)?



Slika 37: Trikotna plošča in dve osi vrtenja

Izhodišče 2D koordinatnega sistema izberemo v oglišču trikotnika, nasprotna stranica pa je vzporedna z osjo  $x$  in je pri koordinati  $y$ , ki je enaka višini trikotnika:  $y = v = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$ . V vseh treh primerih si lahko pomagamo z vrtenjem tankih palic, vzporednih z osjo  $x$ , tako da razdelimo trikotnik po višini oziroma osi  $y$ . Integrali bomo po koordinati  $y$  v mejah od 0 do  $v$ . Dolžina vsake take tanke palice je  $l = 2x$ , kjer vzamemo ustrezno enačbo premice za desno stranico trikotnika, ki je vsa v območju  $x > 0$ . Enačba premice je:  $y = x \cdot \tan \frac{\pi}{3} \rightarrow x = \frac{y}{\sqrt{3}}$ . Pri vrtenju okrog  $x$  in  $z$  osi moramo upoštevati tudi Steinerjev izrek, razdalja med težiščem palice in osjo vrtenja pa je  $d = \left| y - \frac{2}{3} v \right|$ . Masa tanke palice je:

$$dm = m \frac{dS}{S} = m \cdot \frac{8x dy}{a^2 \sqrt{3}},$$

kjer je  $m$  masa cele plošče,  $dS$  ploščina tanke palice,  $S$  pa ploščina cele plošče. Najlažji je izračun za vztrajnostni moment glede na os  $x$ . Takrat je os vzporedna s palico in v poštev pride samo prispevek zaradi Steinerjevega izreka. Lastni vztrajnostni moment zelo tanke palice pri vrtenju okrog njene geometrijske osi (ne osi, pravokotne na palice!) je namreč nič. Torej velja:



$$J_{xx} = \int \left( y - \frac{2}{3}v \right)^2 dm$$

$$J_{xx} = \frac{8m}{3a^2} \int_0^v \left( y - \frac{a}{\sqrt{3}} \right)^2 y dy = \frac{ma^2}{24}.$$

Tudi izračun vztrajnostnega momenta  $J_{yy}$  je lahek, ker se vse tanke palice vrtijo okrog pravokotne težiščne osi:

$$J_{yy} = \frac{1}{12} \int (2x)^2 dm$$

$$J_{yy} = \frac{8m}{27a^2} \int_0^v y^3 dy = \frac{ma^2}{24}.$$

Ni presenetljivo, da je  $J_{yy} = J_{xx}$ , saj so zaradi simetrije enaki vztrajnostni momenti za vse tri težiščne osi, ki sovpadajo z višinami. Zato bi lahko pričakovali vnaprej, da bo vztrajnostni moment za katerokoli težiščno os (tudi manj simetrično) v ravnini  $(x, y)$  enak. Vendar se lahko dodatno prepričamo, da je deviacijski moment  $J_{xy}$  enak nič. Pri tem moramo koordinato  $y'$  vzeti relativno glede na lego težišča:  $y' = y - \frac{2}{3}v$ . Masni element  $dm$  je sorazmeren ploščinskemu elementu  $dS = dx dy$ . Preveriti moramo dvojni integral in pri tem paziti, ker sta meji za koordinato  $x$  odvisni od koordinate  $y$ :

$$J_{xy} \propto \int_0^v \int_{-y/\sqrt{3}}^{y/\sqrt{3}} x \left( y - \frac{2}{3}v \right) dx dy.$$

Najprej integriramo po  $x$  in ker je pod integralom liha funkcija pri simetričnih integracijskih mejah glede na  $x = 0$ , je rezultat res nič. Ostane nam samo še komponenta  $J_{zz}$ :

$$J_{zz} = \frac{1}{12} \int (2x)^2 dm + \int \left( y - \frac{2}{3}v \right)^2 dm.$$

Prvi integral je zaradi lastnega vztrajnostnega momenta palice, drugi pa zaradi Steinerjevega izreka. Opazimo:  $J_{zz} = J_{xx} + J_{yy} = 2J_{xx}$ . Izbrane težiščne osi so simetrijske osi, tako da smo že našli diagonalni tenzor. Če pa imamo namesto tanke trikotne plošče pravilno tristrano prizmo z višino  $h$ , lahko takoj po analogiji z izpeljavo za valj ali tudi kvader uganemo, da se zaradi Steinerjevega izreka h komponentama  $J_{xx}$  in

$J_{yy}$  doda tudi člen  $\frac{1}{12}mh^2$ . Zapišimo torej diagonalni tenzor za pravilno tristrano prizmo:

$$J = \frac{m}{24} \begin{bmatrix} a^2 + 2h^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + 2h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2a^2 \end{bmatrix}.$$

Za vztrajnostni moment ima pravilna tristrana prizma podobno simetrijo kot valj.



### Računski zgled 31

Vrnimo se k tanki palici. Naj leži palica z maso  $m$  in dolžino  $l$  v ravnini  $(x, y)$  in naj oklepa z osjo  $x$  kot  $\alpha$ . Njeno težišče je v izhodišču koordinatnega sistema. Izračunajmo celotni tenzor vztrajnostnega momenta, ki v tem primeru ni diagonalen. Nato ga bomo tudi diagonalizirali, to je, poiskali bomo njegove lastne vrednosti.

Ker je palica pravokotna na os  $z$ , je po računskem zgledu 23 ustrezna komponenta  $J_{zz} = \frac{1}{12}ml^2$ . Zaradi  $z = 0$  sta deviacijska momenta  $J_{xz}$  in  $J_{yz}$  enaka nič. Izračunati moramo tudi  $J_{xx}$ ,  $J_{yy}$  in  $J_{xy}$ . Podrobnejši račun pokažimo samo za komponento  $J_{xx}$ , ker drugi dve komponenti izračunamo podobno. Velja  $J_{xx} = \int y^2 dm$ , vendar bomo namesto po masi palice integrirali po njeni dolžini. Uporabimo cilindrično koordinato  $\rho$ , zaradi simetrije integriramo po polovici palice,  $0 \leq \rho \leq l/2$ , dodamo tudi koeficient 2. Koordinata  $y$  je enaka  $y = \rho \cdot \sin \alpha$ , masni element pa  $dm = m \cdot d\rho/l$ , tako da je integral:

$$J_{xx} = 2 \int_0^{l/2} \rho^2 \sin^2 \alpha \cdot \frac{m d\rho}{l} = \frac{1}{12} ml^2 \sin^2 \alpha.$$

Koordinata  $x$  je enaka  $x = \rho \cdot \cos \alpha$ , zato je  $J_{yy} = \int x^2 dm = \frac{1}{12} ml^2 \cos^2 \alpha$ , podobno izračunamo tudi deviacijski moment:  $J_{xy} = -\frac{1}{12} ml^2 \sin \alpha \cos \alpha$ . Za preizkus vzamemo  $\alpha = 0$ , ko palica leži na osi  $x$ , in dobimo pričakovane vrednosti komponent:  $J_{xx} =$

$J_{xy} = 0$ ,  $J_{yy} = \frac{1}{12}ml^2$ . Pri  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  pa je  $J_{yy} = J_{xy} = 0$ ,  $J_{xx} = \frac{1}{12}ml^2$ . Zanimivejši je vmesni kot  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , kjer so elementi  $J_{xx} = J_{yy} = \frac{1}{2}J_{zz}$ ,  $J_{xy} = -\frac{1}{2}J_{zz}$ .

Zapišimo celoten tenzor in izpostavimo skupni koeficient:

$$J = \frac{1}{12}ml^2 \begin{bmatrix} \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & 0 \\ -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ta tenzor zlahka diagonaliziramo, lastni vrednosti sta 0 in  $\frac{1}{12}ml^2$  (dvojna lastna vrednost). Pri tem zavrtimo koordinatni sistem okrog osi  $z$ , da se ena od osi  $x$  in  $y$  poravnava s palico. Vendar smo tukaj dobili predvsem praktični rezultat za vztrajnostni moment palice pri vrtenju okrog osi, s katero oklepa ostri kot, npr.  $J_{xx}$ . Ta vztrajnostni moment je manjši kot pri vrtenju palice okrog pravokotne osi, ker so deli palice pri ostrem kotu bližje rotacijski osi. Lahko bi začeli račun v nasprotni smeri: z diagonalnim tenzorjem (5.22), potem bi zasukali koordinatni sistem za kot  $\alpha$  okrog osi  $z$  in uporabili matrično transformacijo za tenzor drugega reda.

Ob zadnjem računskem zgledu se spomnimo tudi nečesa iz teorije tenzorjev drugega reda v 3D (matrik  $3 \times 3$ ). Pri simetrični matriki različnima lastnima vrednostma ustrezata med seboj pravokotna lastna vektorja. Pri večji simetriji, kot je npr. tanka palica, sta dve lastni vrednosti vztrajnostnega momenta enaki (dvojna lastna vrednost). V tem primeru imamo degeneracijo. En lastni vektor in hkrati rotacijska os je vzdolž palice, ker pa je le-ta zelo tanka, je ustrezni vztrajnostni moment enak nič. Cela ravnina osi, pravokotnih na palico, ima enak vztrajnostni moment  $\frac{1}{12}ml^2$ . Zato lahko izberemo katerikoli med seboj pravokotni osi vrtenja, ki sta hkrati pravokotni na palico.

## 5.5 Sestavljeno gibanje

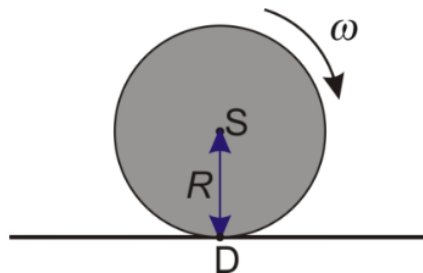
Doslej smo rotacijo telesa, razen pri vpeljavi vztrajnostnega momenta, obravnavali predvsem z geometrijskega vidika. Zdaj pa obravnavajmo sestavljeno gibanje togega telesa, to je, kombinacijo translacije in rotacije. Vključili bomo tudi dinamiko, to je vpliv sil in navorov na translacijo in rotacijo. Kot prvi značilni zgled takšnega gibanja obravnavajmo kotaljenje po tleh brez podrsavanja.

Pri takšnem kotaljenju je trenutna hitrost točke telesa, ki je dotikališče s podlago, enaka nič. Telo naj bo rotacijsko simetrično telo, npr. valj ali krogla. Telo imenujmo kar kolo, čeprav je lahko krogla. Kratak razmislek pove, da velja enačba  $v^* = R\omega$ , kjer je  $v^*$  translacijska hitrost središča kolesa,  $R$  njegov radij in  $\omega$  kotna hitrost vrtenja. O kotaljenju kot gibanju lahko razmišljamo na dva načina, prvi je konceptualno, preprostejši, in drugi fizikalno, doslednejši.

Pri prvem načinu si lahko v izbranem trenutku kotaljenje zamišljamo kot čisto rotacijo okrog osi, ki gre skozi dotikališče D kolesa s podlago (Slika 38). Res je sicer, da se bo v naslednjem trenutku os premaknila, vendar v danem trenutku zamisel o čisti rotaciji še vedno velja. Gibanje središča kolesa S si zamišljamo kot kroženje po krožnici s polmerom  $R$  in kotno hitrostjo  $\omega$ , tako da enačba  $v^* = R\omega$  res velja. Obravnavajmo kinetično energijo:

$$T = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}(J^* + m) \omega^2 = \frac{1}{2}J^* \omega^2 + \frac{1}{2}m(v^*)^2.$$

Upoštevali smo Steinerjev izrek in  $J^*$  je ustrezni vztrajnostni moment za težiščno os.



Slika 38: Kotaljenje kot vrtenje okrog trenutne osi D

Pri drugem načinu gledamo na kotaljenje kot na sestavljeno gibanje: translacijo in rotacijo. Pri translaciji se giblje središče kolesa in kolo kot celota s hitrostjo  $v^*$ . Ni nujno, da je to premo enakomerno gibanje (premo je le, če je podlaga ravna ploskev, enakomerno pa, če ni rezultante zunanjih sil na kolo). Pri rotaciji pa se kolo še dodatno kot celota vrti s kotno hitrostjo  $\omega$  okrog središča. Premislimo še enkrat o dotikališču D kolesa s tlemi. Zaradi translacije ima hitrost  $v^*$  naprej in zaradi dodatne rotacije hitrost  $R\omega$  nazaj. Ker se morata zaradi trenutnega mirovanja točke D ti dve hitrosti izničiti, spet ugotovimo enakost  $v^* = R\omega$ . Največjo hitrost ima točka na vrhu kolesa, in sicer  $2v^*$ . Če kinetično energijo kolesa izračunamo kot vsoto translacijske in rotacijske, dobimo enak izraz, kot smo ga zapisali zgoraj. S kinetično energijo sestavljenega gibanja se bomo več ukvarjali v nadaljevanju.



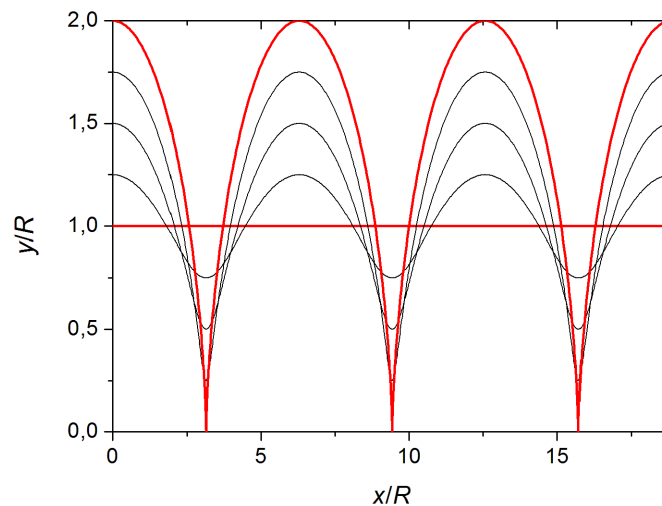
## Računski zgled 32

Kakšni so tiri gibanja točk pri valjastem kolesu, ki se kotali po vodoravni podlagi? Kako so ti tiri odvisni od razdalje točk od središča kolesa  $r$ , če je polmer kolesa  $R$ ?

Izberimo 2D koordinatni sistem tako, da se os  $x$  ujema s podlago. Na začetku naj se kolo dotika tal v izhodišču, torej je središče kolesa na osi  $y$ . Opazujmo tiri gibanja samo tistih točk kolesa, ki so na začetku na tej osi. Tiri drugih točk so namreč samo vzporedno premaknjeni glede na tiri obravnavanih točk. Tiri so neodvisni od časovnega poteka kotaljenja kolesa, zato jih bomo opisali kar z zasukom  $\varphi$  kot parametrom. Ker je gibanje sestavljeno, lahko vektorski premik vsake točke zapišemo kot vsoto translacijskega premika središča kolesa in rotacije te točke okrog središča. Zato sta po zasuku  $\varphi$  koordinati točke, ki je od središča oddaljena za  $r$  in je bila na začetku na osi  $y$ , enaki:  $x = x^* + r \sin \varphi$ ,  $y = y^* + r \cos \varphi$ . Pri tem sta koordinati središča kolesa:  $x^* = R\varphi$  in  $y^* = R$ . Pri prvi koordinati smo upoštevali, da naredi središče v nekem času enako pot, kot je pot obodnih točk kolesa pri vrtenju glede na središče. S spreminjajočim se zasukom dobimo pare koordinat  $(x, y)$  in narišemo grafe. Tiri gibanja za različne vrednosti  $r$  so v brezdimenzijski obliki prikazani na Sliki 39. Grafa za središčno in obodno točko sta poudarjena s debelejšo rdečo črto. Črne črte ustrezajo glede na naraščajoče odmike od ravne črte razmerjem  $\frac{r}{R} = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$  in  $\frac{3}{4}$ . Vse krivulje so gladke, z izjemo  $r = R$  (obodna točka). To lahko dodatno preverimo z odvodom:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\varphi}{dx/d\varphi} = \frac{-r \sin \varphi}{R + r \cos \varphi}.$$

Ta odvod lahko postane nezvezen samo takrat, ko je imenovalac enak nič. Za  $r < R$  se to nikoli ne zgodi. Za  $r = R$  je to takrat, ko je npr.  $\varphi = \pi$ , to je, ko se obodna točka dotakne tal ( $y = 0$ ), kot je tudi razvidno na sliki.

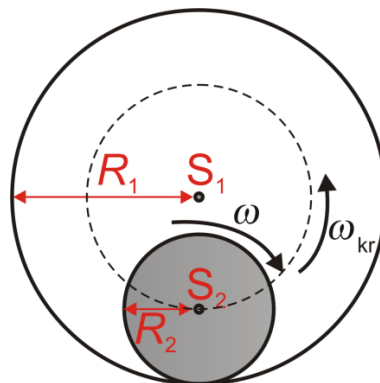


Slika 39: Tiri gibanja točk na kolesu pri kotaljenju za tri obrate. Zaradi relativno večjega premika v smeri osi  $x$  koordinati nista narisani v enaki skali.

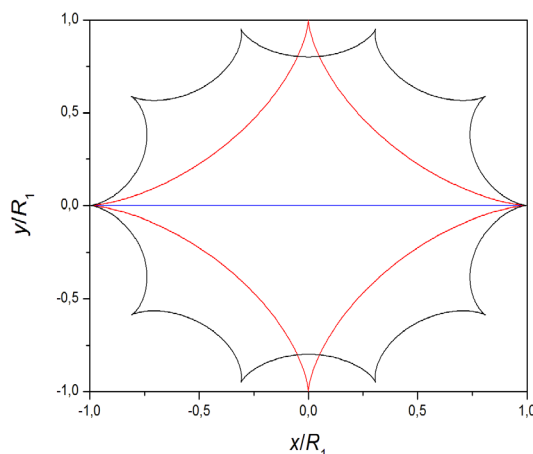
Podobno kot pri opisu tira gibanja posamezne točke kolesa pri kotaljenju po ravni podlagi lahko računamo tire, ko se notranji polni valj s polmerom  $R_2$  kotali znotraj votlega valja z večjim polmerom  $R_1$  (Slika 40). Ta problem je zanimiv za tehniko, npr. za obravnavo gibanja ležajev. Relativna obodna hitrost pri vrtenju notranjega valja glede na njegovo središče  $S_2$  je enaka hitrosti gibanja  $S_2$  po črtkani krožnici, kot če bi bilo to gibanje premo. Zato sta obe kotni hitrosti, prikazani na sliki, povezani takole:

$$\omega = \frac{R_1 - R_2}{R_2} \omega_{kr}.$$

Tukaj je  $\omega$  rotacijska kotna hitrost in  $\omega_{kr}$  kotna hitrost kroženja  $S_2$  po črtkani krožnici s središčem  $S_1$  in polmerom  $R_1 - R_2$ . Tiri gibanja za obodne točke notranjega valja so prikazani na Sliki 41.



Slika 40: Prikaz kotaljenja valja po notranjem obodu večjega votlega valja



Slika 41: Tiri gibanja obodne točke za primere  $R_2 = \frac{1}{2}R_1$  (modra vodravna črta),  $R_2 = \frac{1}{4}R_1$  (rdeča črta s 4 vrhovi/konicami) in  $R_2 = \frac{1}{10}R_1$  (črna črta z 10 vrhovi/konicami)

Primerjajmo tudi kotaljenje okroglih teles po klanecu navzdol. To bomo obravnavali na dva načina: z zvezo med navorom in kotnim pospeškom in po energijskem zakonu. Poglejmo najprej, kaj nam da zveza  $M = J\alpha$ . Naklonski kot ravnega klanca je  $\beta$ . Najprej samo omenimo fizikalno ustrežnejši, a matematično nekoliko nerodnejši način reševanja naloge. Obravnavali bi lahko hkrati rotacijo telesa okrog težiščne osi in translacijo vzdolž klanca. Za to bi potrebovali dve enačbi: prvo za navor še neznanе sile lepenja, ki povzroča pospešeno rotacijo, in drugo za pospešek težišča zaradi razlike dinamične komponente teže in sile lepenja. Obravnavajmo raje kotaljenje kot rotacijo okrog trenutne osi, ki gre skozi dotikališče telesa na klanecu. Navor se pojavi zaradi dinamične komponente teže. Tako potrebujemo samo eno enačbo:

$$\alpha = \frac{M_g}{J} = \frac{mgR \sin \beta}{J^* + mR^2}.$$

Upoštevali smo Steinerjev izrek.  $J^*$  je ustrežni vztrajnostni moment težiščne osi; za značilna okrogla telesa (polna in votla krogla, polni in votli valj) ima obliko  $J^* = CmR^2$ , kjer je koeficient  $C$  odvisen od izbranega telesa. Zato je kotni pospešek:

$$\alpha = \frac{g \sin \beta}{(C+1)R}.$$

Pospešek gibanja središča telesa je  $a^* = R\alpha = \frac{g \sin \beta}{C+1}$  in ni odvisen od polmera. Tisto telo, ki ima manjši koeficient  $C$ , se hitreje kotali po klanecu navzdol. Na primer, vrednosti tega koeficienta so:  $2/5$  za polno kroglo,  $1/2$  za polni valj,  $2/3$  za tanko krogelno lupino in  $1$  za tanko valjno lupino. Torej ima polna krogla od teh štirih teles največji pospešek.

Če bi telo gladko drselo po klancu brez trenja, potem bi bil pospešek  $a = g \sin \beta > a^*$ . Razlika med obema pospeškoma se pojavi zaradi sile lepenja, ki delno zadržuje gibanje. Dobimo jo po drugem Newtonovem zakonu za rezultanto, ki je razlika dinamične komponente teže in sile lepenja:

$$ma^* = F_d - F_l$$

$$F_l = mg \sin \beta - \frac{1}{C+1} mg \sin \beta$$

$$F_l = \frac{C}{C+1} mg \sin \beta.$$

Vendar pa sila lepenja ne more preseči največje možne vrednosti  $F_{l,max} = k_l mg \cos \beta$ , ki je določena z normalno silo tal oz. statično komponento teže in s koeficientom lepenja  $k_l$ . Če povečujemo nagib klanca, pridemo da kritičnega kota  $\beta_{kr}$ , ko postane  $F_l = F_{l,max}$  in dosežemo mejo podrsavanja kolesa po klancu:

$$\frac{C}{C+1} mg \sin \beta_{kr} = k_l mg \cos \beta_{kr}.$$

Kritični kot je:

$$\beta_{kr} = \arctan \frac{(C+1)k_l}{C}.$$

To je več kot kritični kot za zdrs oglatega telesa po klancu, ki se ne more kotaliti in kjer velja znani rezultat:  $\beta_{kr,o} = \arctan k_l$ . Za okroglo telo zadnji izraz nima nobenega pomena, ker se telo kotali po klancu že pri zelo majhnih kotih (ponavadi lahko kotalno trenje kar zanemarimo). Zanimivo je primerjati vedenje oglatega in okroglega telesa, ko ju postavimo na podlago in nagib podlage postopoma povečujemo. Oglato telo bo spočetka mirovalo, okroglo pa se bo takoj začelo kotaliti. Pri kotu  $\beta_{kr,o}$  bo oglato telo zdrsnilo po podlagi, pri še večjem kotu  $\beta_{kr}$  pa bo tudi okroglo telo začelo hkrati s kotaljenjem tudi podrsavati.

Preverimo zgoraj izpeljano enačbo za kotni pospešek tudi z energijo pri kotaljenju. Kinetična energija je:

$$T = \frac{1}{2} (J^* + mR^2) \omega^2 = \frac{1}{2} (1 + C) mR^2 \omega^2.$$



Naj bo na začetku potencialna energija enaka nič, tako da postane pri kotaljenju navzdol negativna:

$$V = -mg|\Delta h^*| = -mgs^* \sin \beta.$$

Spremembo višine središča (težišča) smo označili z  $\Delta h^*$  in pot s  $s^*$ . Pot povežimo z zasukom telesa:  $s^* = R\varphi$ . Na začetku je skupna energija  $E = T + V = 0$  in ostane nič na poti navzdol:

$$\frac{1}{2}(1 + C)mR^2\omega^2 - mgR\varphi \sin \beta = 0.$$

Izrazimo kvadrat kotne hitrosti s kotom:

$$\omega^2 = 2 \cdot \frac{g \sin \beta}{(1+C)R} \cdot \varphi.$$

Ena od enačb pri enakomerno pospešenem kroženju/vrtenju z začetno kotno hitrostjo nič in s kotnim pospeškom  $\alpha$  je  $\omega^2 = 2\alpha\varphi$ . Zato zgornja enačba ustreza enakomerno pospešenemu vrtenju. Iz nje lahko preberemo tudi kotni pospešek, ki se ujema s tistim, izračunanim z uporabo navora dinamične komponente teže. Kaj natančno pa se dogaja med gibanjem, če gre pri kotaljenju tudi za zdrs, opišimo pri dveh preprostih zgledih na vodoravnih tleh.

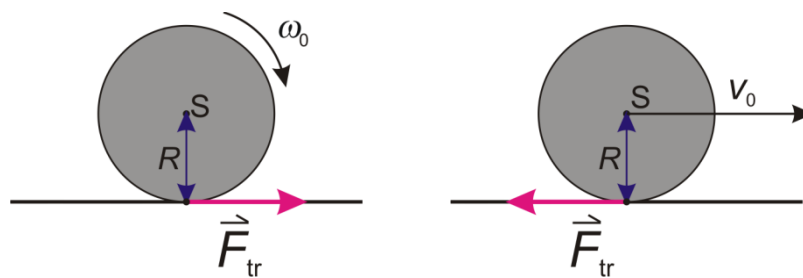


### Računski zgled 33

Valj zavrtimo s kotno hitrostjo  $\omega_0$  in ga narahlo položimo na vodoravno podlago. Kaj se bo dogajalo? Kolikšna bo končna kotna hitrost, ko bo valj prešel v kotaljenje po podlagi brez drsenja?

Ko se valj na tleh vrti na mestu, ne da bi se tudi translacijsko premikal naprej, ali pa dokler je njegova translacijska hitrost še premajhna, deluje med valjem in tlemi sila trenja (Slika 42 levo). Ta sila zaradi negativnega navora po eni strani upočasnjuje rotacijo valja, po drugi strani pa ga pospešuje naprej. Veljata torej enačbi:  $\alpha = -\frac{F_{tr}R}{J}$  in  $a = \frac{F_{tr}}{m}$ . Poenostavili smo zapis in pospešek težišča, ki je na osi valja, označili z  $a$ . Ročica sile trenja je enaka polmeru valja  $R$ . Silo trenja v tako zapisanih enačbah vzamemo pozitivno.

Izrazimo kotno hitrost in hitrost težišča valja:  $\omega = \omega_0 + \alpha t = \omega_0 - \frac{F_{tr}R}{J}t$  in  $v = at = \frac{F_{tr}}{m}t$ . Upočasnjevanje rotacije in pospeševanje translacije poteka toliko časa, dokler ne postane obodna rotacijska hitrost enaka hitrosti težišča:  $R\omega = v \rightarrow R\left(\omega_0 - \frac{F_{tr}R}{J}t\right) = \frac{F_{tr}}{m}t$ . Vstavimo tudi vztrajnostni moment valja za geometrijsko os vrtenja ter izrazimo čas in potem obe hitrosti. Ugotovimo:  $\omega = \frac{1}{3}\omega_0$ . Izraza za silo trenja nismo potrebovali, saj se v končnem rezultatu krajša. Če pa poznamo koeficient trenja in izrazimo silo trenja  $F_{tr} = k_{tr}mg$ , lahko izračunamo tudi čas, v katerem pride do pravega kotaljenja.



Slika 42: Prehod gibanja valja v kotaljenje in sile: a) na začetku je samo rotacija valja; b) na začetku je samo translacija valja. V obeh primerih slika prikazuje začetno stanje.

Napačno bi bilo trditi, da gre za golo pretvorbo dela rotacijske kinetične energije v translacijsko. Del kinetične energije se izgubi zaradi negativnega dela sile trenja. Kvocient med končno in začetno kinetično energijo je:  $\frac{T_{kon}}{T_{zač}} = \frac{J\omega^2 + mv^2}{J\omega_0^2} = \frac{1}{3}$ .



### Računski zgled 34

Valj potisnemo po vodoravni podlagi s hitrostjo  $v_0$ , tako da na začetku samo drsi brez vrtenja. Kaj se bo dogajalo? Kolikšna bo končna hitrost, ko bo valj prešel v kotaljenje po podlagi brez drsenja?

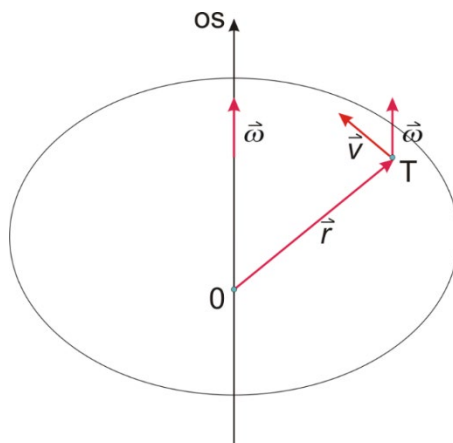
Nalogo rešimo podobno kot pri zgledu 33. Ko se valj translacijsko giblje, ne da bi se tudi vrtel okrog geometrijske osi, ali pa dokler je njegova rotacijska hitrost še premajhna, deluje med valjem in tlemi sila trenja kot v prejšnjem zgledu, samo da kaže v nasprotno smer (Slika 42 desno). Ta sila zaradi pozitivnega navora po eni strani pospešuje rotacijo

valja, po drugi strani pa upočasnjuje njegovo translacijo. Veljata enačbi:  $\alpha = \frac{F_{tr}R}{J}$  in  $a = -\frac{F_{tr}}{m}$ . Spet izrazimo kotno hitrost in hitrost težišča valja:  $\omega = \frac{F_{tr}R}{J}t$  in  $v = v_0 - \frac{F_{tr}}{m}t$ . Podobno kot zgoraj rešimo enačbo  $v = R\omega$  in ugotovimo:  $v = \frac{2}{3}v_0$ . Sedaj je razmerje med končno in začetno kinetično energijo valja  $2/3$ .

Pri obravnavanju kotaljenja smo spoznali, da lahko za trenutno os vrtenja vzamemo različne točke, vendar moramo enačbe gibanja primerno preurediti. Obravnavajmo ta problem splošneje. Najprej si zamišljamo le čisto rotacijo telesa okrog neke fiksne osi. Ta os naj gre skozi izhodišče izbranega koordinatnega sistema. Vse točke telesa se vrtijo z enako kotno hitrostjo  $\omega$  okrog iste osi. Vpeljemo lahko vektor kotne hitrosti  $\vec{\omega}$ , ki ima velikost  $\omega$  in leži na osi vrtenja (oziroma je vzporeden z njo). Še vedno sta mogoči dve smeri  $\vec{\omega}$ , v isto ali v nasprotno smer. Smer naj bo po definiciji takšna, kot ustreza gibanju desnega vijaka: če se telo vrti v neko smer, kaže kotna hitrost v tisto smer, kamor bi se translacijsko gibal vijak pri takšnem vrtenju. Na primer, če se telo vrti okrog osi  $z$ , in sicer tako, da potujejo npr. v prvem kvadrantu ravnine  $(x, y)$ , ki jo telo seka, točke telesa od pozitivnega poltraka osi  $x$  k pozitivnemu poltraku osi  $y$ , potem kaže vektor  $\vec{\omega}$  v pozitivno smer osi  $z$ . Za vsako točko telesa s trenutnim krajevnim vektorjem  $\vec{r}$  lahko trenutno hitrost  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  izrazimo z naslednjim vektorskim produktom:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (5.24)$$

To je izredno uporabna enačba pri rotaciji (Slika 43). Pri tem z vektorjem  $\vec{r}$  na desni strani enačbe ponavadi res mislimo vektor od izhodišča do izbrane točke. Ta vektor lahko razstavimo na dve komponenti,  $\vec{r} = \vec{r}_v + \vec{r}_p$ , kjer je vektor  $\vec{r}_v$  vzporeden z osjo vrtenja;  $\vec{r}_p$  je pravokoten nanjo. Takrat je vektorski produkt  $\vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}_p$ , ker je prispevek z vzporedno komponento enak nič. Zato lahko za vektor  $\vec{r}$  na desni strani enačbe (5.24) vzamemo tudi  $\vec{r}_p$ , ki pomeni vektor od točke na osi, ki je dani točki najbližja, do dane točke. Po podobnem sklepu kot zgoraj je lahko  $\vec{r}$  vektor od **poljubne točke na osi vrtenja** do dane točke. Vendar je zaradi nedvoumnosti najbolje vzeti izhodišče koordinatnega sistema tako, da gre os vrtenja skozenj.



Slika 43: Vektorji za eno točko pri rotaciji telesa. Vektor  $\vec{v}$  je pravokoten na  $\vec{r}$  in  $\vec{\omega}$ .

Enačba (5.24) velja tudi splošneje, to je, če se kotna hitrost spreminja tako po smeri kot po velikosti. Hitrost točke je pravokotna na kotno hitrost. Geometrijsko je to spet najbolj očitno, če se telo vrti okrog osi  $z$ . Takrat ima kotna hitrost samo komponento  $\omega_z$ , od nič različni komponenti hitrosti pa sta samo  $v_x$  in  $v_y$ , saj se koordinata  $z$  vseh točk pri tem vrtenju ohranja. V naslednjem računskem zgledu pokažimo pravilnost enačbe (5.24) v tem primeru.



### Računski zgled 35

Preverimo enačbo (5.24) po komponentah, če se telo vrti okrog osi  $z$  v pozitivni smeri (nasprotno od urinega kazalca).

Kotna hitrost je  $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$ . Za preprostejši dokaz vzemimo konstantno kotno hitrost, tako da se krajevni vektor neke točke, oddaljene  $\rho$  od osi  $z$ , spreminja s časom na naslednji način:  $\vec{r} = (\rho \cos(\omega t), \rho \sin(\omega t), z)$ . Polmer  $\rho$  je velikost vektorja  $\vec{r}_\rho$ , ki smo ga že omenili. Na prvi način izračunamo hitrost točke z odvodom  $\vec{r}$  po času:  $\vec{v} = \rho\omega(-\sin(\omega t), \cos(\omega t), 0)$ . Z enačbo (5.24) dobimo enak rezultat.

Če enačbo (5.24) še enkrat odvajamo po času, izrazimo tudi pospešek poljubne točke vrtečega se telesa:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (5.25)$$

Kotna hitrost se lahko spreminja s časom, in od tod je prvi člen. Pri drugem členu pri odvajanju  $\vec{r}$  še enkrat upoštevamo (5.24).

Naredimo pomembno posplošitev obravnave rotacije. Primerjajmo gibanji dveh točk ( $T_1$  in  $T_2$ ) togega telesa, ki ju podajata trenutna krajevna vektorja  $\vec{r}_1$  in  $\vec{r}_2$ . Zanima nas njun relativni krajevni vektor  $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  in prav tako relativna hitrost  $\vec{v}_{12} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ . Enačba (5.24) velja za vsako od teh dveh točk posebej in če ustrezni enačbi odštejemo, hitro ugotovimo, da velja enaka enačba za razliki vektorjev oziroma za oba relativna vektorja:  $\vec{v}_{12} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{12}$ . Iz te enačbe izhaja:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{\omega} \times \vec{r}_{12}. \quad (5.26)$$

Hitrost neke točke  $T_2$  telesa je vsota dveh členov: hitrosti neke »referenčne« točke  $T_1$  in vektorskega produkta kotne hitrosti z relativnim krajevnim vektorjem od prve do druge točke. Vendar v nasprotju z enačbo (5.24) enačba (5.26) velja tudi, če se telo ob rotaciji giblje tudi translacijsko. Pri dodatni translaciji se namreč vse točke telesa gibljejo translacijsko enako hitro. Zato se v enačbi, ki v bistvu podaja razliko hitrosti dveh točk, translacija ne pozna neposredno.

Ker pa lahko točki  $T_1$  in  $T_2$  izbiramo poljubno, ju lahko izberemo tako, da točki  $T_1$  »naprtimo« zgolj čisto translacijo in se dodatno vse druge točke vrtijo okrog  $T_1$ . Najbolj naravno je, da za točko  $T_1$  vzamemo masno središče telesa. Takrat velja:

$$\vec{v} = \vec{v}^* + \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (5.27)$$

Hitrost poljubne točke togega telesa je vsota hitrosti masnega središča telesa in vektorskega produkta med kotno hitrostjo in vektorjem med masnim središčem in to točko. Ponavadi z razdelitvijo sestavljenega gibanja na translacijo in rotacijo mislimo zapis hitrosti z enačbo (5.27). Vendar lahko v konkretnih praktičnih zgledih uporabimo splošnejšo enačbo (5.26) za kak drug par točk oziroma drugo referenčno točko namesto masnega središča. Enačbi (5.26) in (5.27) veljata splošno ne glede na način spreminjanja hitrosti referenčne točke in kotne hitrosti. Inačica enačbe (5.26) za pospešek je:

$$\vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{12} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (5.28)$$



### Računski zgled 36

Togo telo se vrti okrog osi  $z$ , razen tega pa se tudi translacijsko giblje. Podani sta trenutni legi masnega središča  $T_1(x_1, y_1, z_1)$  in dodatne točke  $T_2(x_2, y_2, z_2)$ , in ob tem tudi njuni trenutni hitrosti  $\vec{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y}, v_z)$  in  $\vec{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y}, v_z)$ . Komponenti  $v_z$  nismo pripisali indeksa, ker mora biti ta komponenta za obe hitrosti enaka; pojavi se samo zaradi translacijskega gibanja obeh točk. Kolikšna je kotna hitrost vrtenja? Ali mora veljati še kak dodaten pogoj za komponente hitrosti obeh točk?

Translacijska hitrost je kar hitrost masnega središča  $\vec{v}_1$ . Kotna hitrost je  $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$ . Uporabimo vektorsko enačbo (5.26). To so tri skalarne enačbe, od katerih je enačba za razliko komponent hitrosti  $v_z$  avtomatično izpolnjena, enačbi za prvi dve komponenti razlik hitrosti pa sta:  $v_{2x} - v_{1x} = -\omega(y_2 - y_1)$  in  $v_{2y} - v_{1y} = \omega(x_2 - x_1)$ . Ta sistem je očitno preveč determiniran, ker imamo dve enačbi za eno samo neznaniko  $\omega$ . Kotno hitrost zapišemo na dva načina:  $\omega = \frac{v_{2y} - v_{1y}}{x_2 - x_1} = -\frac{v_{2x} - v_{1x}}{y_2 - y_1}$ . Enakost obeh ulomkov, vključno z negativnim predznakom pri drugem, je samo drugačen zapis za pravokotnost vektorjev:  $(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = 0$ . Ta pogoj je neposredno razviden iz enačbe (5.26), pomeni pa, da ni relativnega gibanja med točkami v radialni smeri. Povejmo tudi drugače: telo je togo in se razdalje med njegovimi točkami ne spreminjajo.

Nazadnje povežimo kinetično energijo telesa z enačbo (5.27). Izračunamo jo z integralom po masi telesa:

$$T = \frac{1}{2} \int |\vec{v}^* + \vec{\omega} \times \vec{r}|^2 dm.$$

Po kvadriranju izraza v oklepaju razpade integral na tri dele, ki jih zapišimo vsakega posebej:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} m (v^*)^2. \\ T_2 &= \vec{v}^* \cdot \left( \vec{\omega} \times \int \vec{r} dm \right) = 0 \\ T_3 &= \frac{1}{2} \int |\vec{\omega} \times \vec{r}|^2 dm. \end{aligned}$$

Povsod smo pred integral izpostavili, kar se je dalo. V prvem členu  $T_1$  prepoznamo translacijsko kinetično energijo, to je, kot če bi bila vsa masa telesa zbrana v težišču. Člen  $T_2$  je enak nič, ker je integral v njem enak nič. S tem integralom namreč po enačbi (1.10 a) iščemo krajevni vektor masnega središča v težiščnem sistemu samem. Člen  $T_3$  pa je rotacijska kinetična energija za vrtenje okrog masnega središča, ki smo jo že zapisali z enačbo (5.15) kot  $\frac{1}{2}J^*\omega^2$ , le da tukaj z zvezdico pri vztrajnostnem momentu poudarimo, da gre za težiščno vrtilno os. Kinetična energija je torej vsota translacijske in rotacijske energije glede na masno središče:

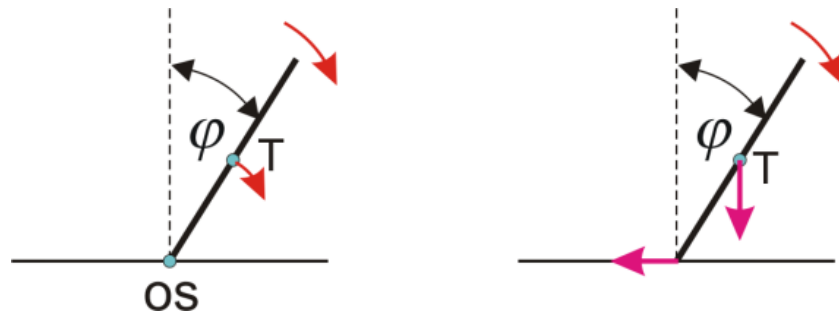
$$T = \frac{1}{2}m(v^*)^2 + \frac{1}{2}J^*\omega^2. \quad (5.29)$$

Pri analitični mehaniki ta enačba za dinamiko pri rotaciji in translaciji tega telesa zadošča tam, kjer lahko dinamične probleme elegantno rešujemo z uporabo Lagrangiana ali Hamiltoniana. To lepo velja za konservativne sile. Mimogrede, enačba (5.29) je poseben primer znanega splošnejšega načela za sistem točkastih teles (ne glede na to, ali so točke tega povezane med seboj ali ne), da lahko skupno kinetično energijo sistema razstavimo na kinetično energijo masnega središča sistema in na kinetično energijo relativnega gibanja teles glede na masno središče. Nekaj podobnega smo naredili tudi pri sestavi dveh točkastih teles z enačbo (3.4), le da je bil člen, ki ustreza relativnemu gibanju dveh teles glede na skupno masno središče, napisan drugače: kot  $\frac{1}{2}m_r v^2$  namesto kot vsota dveh členov za obe kinetični energiji teles glede na masno središče.



### Računski zgled 37

Ravna tanka homogena palica dolžine  $l$ , ki stoji na tleh, lahko pade na tla na dva načina in oba obravnavajmo hkrati. V prvem primeru je lepenje s tlemi veliko, tako da je spodnji konec palice, ki se dotika tal, ves čas pri miru. To je čista rotacija okrog spodnje točke palice. V drugem primeru je lepenje in trenje s tlemi zanemarljivo, tako da spodnji konce palice drsi »nazaj« med padcem palice »naprej«. To gibanje lahko obravnavamo kot kombinacijo translacije in rotacije okrog masnega središča palice. Pri tem se giblje masno središče (težišče, sredina palice) navpično navzdol, ker ni vodoravnih komponent sil nanjo. Kakšne so enačbe gibanja v obeh primerih? Če nas zanima tudi časovni potek kota med palico in navpičnico, predpostavimo, da palica na začetku ni v labilni navpični ravnovesni legi (v kateri bi lahko v principu vztrajala neskončno dolgo), temveč je začetni kot med palico in navpičnico  $\varphi_0$  različen od nič.



Slika 44: Padec palice na dva načina. Pri prvem načinu se masno središče (težišče T) giblje po krožnem tiru, spodnji konec palice pa je os vrtenja. Pri drugem načinu se T giblje navpično navzdol, spodnji konec palice pa v levo.

Geometrija pri obeh padcih je prikazana na Sliki 44. Obakrat si bomo pomagali z zakonom o ohranitvi vsote kinetične in potencialne energije, generalizirana koordinata pa bo trenutni kot palice glede na navpičnico  $\varphi$ . Zaradi krajšega izražanja recimo prvemu padcu »spotik«, drugemu pa »zdrs«, kot če bi se človek v prvem primeru spotaknil ob nekaj in padel togo naprej, v drugem primeru pa bi mu zdrsnilo na ledu.

Prvi primer s spotikom je lažji in ga obdelajmo najprej (leva slika). Kinetična energija je samo rotacijska, vendar računana glede na spodnji konec palice:  $T = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{6}ml^2\omega^2$ . Pri računu vztrajnostnega momenta za vrtenje okrog krajišča palice  $J = \frac{1}{3}ml^2$  si pomagamo s Steinerjevim izrekom, če je vztrajnostni moment za vrtenje okrog masnega središča  $J^* = \frac{1}{12}ml^2$ . Potencialna energija je podana z lego težišča T:  $V = \frac{1}{2}mgl \cos \varphi$ . Pri začetnem kotu  $\varphi_0$  je bila kinetična energija nič, zato velja naslednja enačba za ohranitev energije:

$$\frac{1}{2}mgl \cos \varphi + \frac{1}{6}ml^2\omega^2 = \frac{1}{2}mgl \cos \varphi_0.$$

Tako lahko izrazimo neposredno zvezo med kotom in kotno hitrostjo:

$$\omega = \sqrt{3 \frac{g}{l} (\cos \varphi_0 - \cos \varphi)}.$$

Če vzamemo  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , izračunamo, s kolikšno kotno hitrostjo udari palica ob tla in kolikšna je v tem trenutku hitrost zgornjega konca palice:



$$\omega_k = \sqrt{3 \frac{g}{l} \cos \varphi_0}$$

$$v_k = l\omega_k = \sqrt{3gl \cos \varphi_0}.$$

Če izberemo začetni kot  $\varphi_0 = 0$ , čemur ustreza padec iz labilne ravnovesne lege, dobimo rezultat  $v_k = \sqrt{3gl}$ , čeprav je čas padanja teoretično neskončen. Tukaj se srečamo s podobnim fizikalnim problemom kot pri računskem zgledu 9 s kroglico na vrteči se prečki. Seveda moramo palico nekoliko izmakniti iz labilne lege, da sploh pade, čas padanja pa je zelo dolg, če je začetna lega palice zelo blizu labilni. Zanimivo je, da udari zgornji konec palice ob tla z večjo hitrostjo, kot če bi prosto padel z enake višine:  $v_p = \sqrt{2gl}$ . To je morda dobro vedeti, če se prevrnemo z masivno lestvijo. Če hočemo ugotoviti tudi časovni potek kota, zapišemo zgornjo enačbo za kotno hitrost v diferencialni obliki in jo integriramo:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{3 \frac{g}{l} (\cos \varphi_0 - \cos \varphi)}$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi_0 - \cos \varphi}} = \sqrt{3 \frac{g}{l}} \cdot t.$$

Integral na levi strani enačbe moramo rešiti numerično in je takšen kot pri nitnem nihalu. Izračunamo pa lahko približno rešitev za majhne čase, ko sta tudi kota  $\varphi$  in  $\varphi_0$  blizu. Za približek kosinusa kota  $\varphi$  lahko uporabimo kar linearni diferencial, če je začetni kot večji od nič. Takrat je  $\cos \varphi \approx \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0 \cdot (\varphi - \varphi_0)$ . Če vstavimo to v zgornji integral, le-tega rešimo in izrazimo kot, le-tega izračunamo za majhne čase:

$$\varphi \approx \varphi_0 + \frac{3}{4} \cdot \frac{g}{l} \cdot \sin \varphi_0 \cdot t^2.$$

Vrtenje je na začetku enakomerno pospešeno s kotnim pospeškom  $\alpha = \frac{3g}{2l} \sin \varphi_0$ , v skladu z enačbo  $\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{2} \alpha t^2$ .

Lotimo se drugega dela naloge z zdrsom. Za izračun skupne kinetične energije palice po enačbi (5.26) potrebujemo tako kotno hitrost  $\omega$  kot tudi hitrost težišča  $v^*$ . Vendar je iz desne Slike 44 razvidno, da morata biti ti dve hitrosti enolično povezani. Kot pri prejšnjem računu za spotik izrazimo najprej višino težišča nad tlemi s kotom naklona palice:  $h = \frac{l}{2} \cos \varphi$ . Težišče se giblje navzdol in njegova hitrost je  $v^* = \frac{dh}{dt} = -\frac{l}{2} \sin \varphi \cdot$

$\omega$ . Skupna kinetična energija je vsota dveh členov:  $L = \frac{1}{2}(m(v^*)^2 + J^*\omega^2) = \frac{1}{24}(1 + 3 \sin^2 \varphi)ml^2\omega^2$ . Izraz za potencialno energijo je enak kot zgoraj. Z energijskim zakonom pridemo do analogne enačbe za kotno hitrost kot pri spotiku:

$$\omega = \sqrt{3 \frac{g}{l} (\cos \varphi_0 - \cos \varphi) \cdot \frac{4}{1+3 \sin^2 \varphi}}.$$

V primeru dotika tal, ko je  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , sta izraza za kotno hitrost pri spotiku in zdrsu enaka. Zato sklepamo, da palica v obeh primerih udari z enako kotno hitrostjo ob tla.

Kolikšna pa je pri zdrsu hitrost drsenja spodnjega konca palice  $v_d$ , ki jo na desni Sliki 44 ponazarja vodoravna puščica ob tleh? Pomagamo si s trigonometrijo, podobno kot zgoraj pri iskanju zveze med  $v^*$  in  $\omega$ . Označimo pomik spodnjega konca palice v levo z  $x$ . To je hkrati razdalja med levim koncem palice in tisto točko, kamor na koncu pade težišče. Iz ustreznega pravokotnega trikotnika razberemo:  $x = \frac{l}{2} \sin \varphi$ . Z odvajanjem koordinate po času izrazimo hitrost drsenja v levo:  $v_d = \frac{l}{2} \cos \varphi \cdot \omega$ .

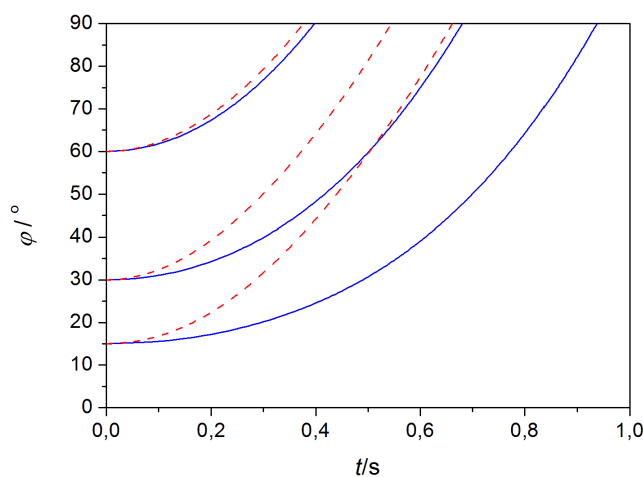
Račun trenutne hitrosti zgornjega palice v vmesnih legah pri zdrsu ni tako preprost kot pri spotiku, ker je gibanje sestavljeno iz translacije in rotacije. Pomagamo si z enačbo (5.24). Če nas zanima hitrost zgornjega konca palice samo ob udarcu na tla, lahko naredimo bližnjico. Ko je palica že zelo položna, tik pri tleh, se njen spodnji konec skoraj ne giblje več, kar je razvidno iz enačbe za hitrost  $v_d$ , ker gre kosinus kota proti nič. Če pa spodnji konec palice na koncu praktično miruje, računamo hitrost zgornjega konca palice tako kot pri spotiku. Ker sta tudi kotni hitrosti ob padcu na tla enaki, je končni sklep: pri spotiku in zdrsu udari zgornji konec palice z enako hitrostjo ob tla.

Ne glede na podobnosti pri obeh padcih je kinematika, to je odvisnost  $\varphi(t)$ , v obeh primerih različna. Podobno kot zgoraj pri spotiku prepišemo enačbo za kotno hitrost v diferencialno enačbo, preuredimo in nazadnje dobimo:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\frac{1}{2}\sqrt{1+3 \sin^2 \varphi}}{\sqrt{\cos \varphi_0 - \cos \varphi}} d\varphi = \sqrt{3 \frac{g}{l}} \cdot t.$$

Enačba je zapisana tako, da jo lažje primerjamo z ustrežno enačbo za spotik. Razlika pri obeh enačbah je dodatni koren v števcu pod integralom na levi strani v primeru zdrsa. Ta koren je vedno manjši od 1, razen tik pred dotikom tal. To pomeni, da čas s kotom

počasneje raste v primeru zdrsa, ali če obrnemo, pri zdrsu kot hitreje raste s časom kot pri spotiku. Palica ob zdrsu prej udari ob tla kot ob spotiku. To je dober poduk tudi za človeka; če nam zdrsne na ledu, potrebujemo hitrejša refleksa kot ob spotiku. Za približek pri majhnih časih lahko preprosto nadomestimo kot  $\varphi$  pri sinusu v zgornjem korenu z začetno vrednostjo  $\varphi_0$ . Potem je cel koren konstanten in ga lahko prestavimo. Naprej je račun povsem analogen kot prej pri spotiku. Pri zdrsu je torej za majhne kote vrtenje okrog masnega središča spet enakomerno pospešeno, le kotni pospešek je za koeficient  $\frac{4}{1+\sin^2 \varphi_0}$  večji kot pri spotiku. Razlika pri časih padanja pri obeh padcih se dobro pozna, če je začetni kot majhen. Kot zanimivost primerjamo na Sliki 45 numerično izračunano časovno odvisnost kota za oba padca pri začetnih kotih  $15^\circ$ ,  $30^\circ$  in  $60^\circ$ . Višina palice je 2 m.

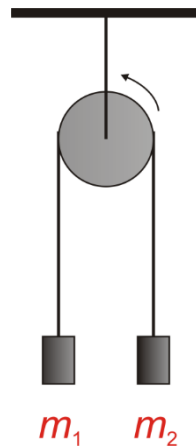


Slika 45: Grafi časovne odvisnosti kota pri obeh vrstah padca: spotik (polne modre krivulje), zdrs (rdeče črtkane krivulje). Čas je merjen v sekundah.

Nazadnje kot preprost zgled sestavljenega gibanja omenimo Atwoodov stroj, to je pritrjeni škripec z dvema utežema, prikazan na Sliki 46. Zanima nas pospešek uteži, če je  $m_2 > m_1$  in če zanemarimo trenje pri škripcu. Masa škripca v obliki preprostega polnega valja je  $m_\xi$  in jo moramo upoštevati tudi pri pospešenem gibanju. Pospešek je potem:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + \frac{1}{2}m_\xi} g.$$

Enačbe ni težko izpeljati, če rešimo sistem enačb za gibanje vseh treh teles. Koeficient polovica pri masi škripca je zaradi vztrajnostnega momenta valja  $J = \frac{1}{2}mR^2$ .



Slika 46: Atwoodov stroj

## 5.6 Enakomerno vrtenje koordinatnega sistema

Z enačbo (5.24) oziroma z njeno analogijo si pomagamo tudi pri jedrnatni izpeljavi systemskega pospeška in systemske (navidezne) sile pri vrtenju koordinatnega sistema. Za ponazoritev obravnavajmo najpreprostejši zgled, ko se koordinatni sistem  $S'$  vrti okrog osi  $z$  s konstantno kotno hitrostjo  $\omega$  glede na inercialni sistem  $S$ . Pri tem naj obe osi  $z$  sovpadata in prav tako koordinatno izhodišče. Dovolj je obravnavati 2D koordinatni sistem, brez koordinate  $z$ , pri tem pa primerjamo koordinati  $x$  in  $y$  ter ustrezne komponente hitrosti in pospeška v obeh sistemih. Nalogo se da rešiti na več načinov, mi pa bomo začeli z zapisom krajevnega vektorja v naslednji napol vektorski obliki:

$$\vec{r} = x'\vec{i} + y'\vec{j}. \quad (5.30)$$

Pri tem se koordinati  $x'$  in  $y'$  nanašata na vrteči se sistem  $S'$ ,  $\vec{i}$  in  $\vec{j}$  pa sta enotska vektorja v smeri koordinatnih osi vrtečega se sistema. Torej se vektorja  $\vec{i}$  in  $\vec{j}$  ves čas vrtita glede na inercialni sistem  $S$  s kotno hitrostjo  $\omega$ . Za njuna časovna odvoda veljata enačbi, ki sta povsem analogni enačbi (5.24):  $\frac{d\vec{i}}{dt} = \omega \times \vec{i}$  in  $\frac{d\vec{j}}{dt} = \omega \times \vec{j}$ . Odvajajmo krajevni vektor po času dvakrat:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}'\vec{i} + \dot{y}'\vec{j} + x'\vec{\omega} \times \vec{i} + y'\vec{\omega} \times \vec{j} \\ \vec{a} &= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{x}'\vec{i} + \ddot{y}'\vec{j} + 2\dot{x}'\vec{\omega} \times \vec{i} + 2\dot{y}'\vec{\omega} \times \vec{j} + x'\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{i}) + \\ & y'\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{j}). \end{aligned}$$

Z drugim odvajanjem smo sicer dobili 8 členov, vendar sta dva para enaka, od tukaj dvojki pri tretjem in četrtem členu. Tretji in četrti ter peti in šesti člen lahko združimo po parih:

$$\vec{a} = \dot{x}'\vec{i} + \dot{y}'\vec{j} + 2\vec{\omega} \times (\dot{x}'\vec{i} + \dot{y}'\vec{j}) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (x'\vec{i} + y'\vec{j})).$$

Vsebino zadnje enačbe interpretirajmo na fizikalni način. Na levi strani enačbe je resnični pospešek točkastega telesa, to je pospešek glede na inercialni sistem. Pri prvem paru členov na desni strani enačbe sta druga odvoda koordinat glede na sistem  $S'$ , zato lahko ta par interpretiramo kot pospešek telesa v vrtečem se sistemu  $\vec{a}'$ . Podobno gre pri izrazu v oklepaju srednjega para členov za hitrost telesa glede na  $S'$ , to je  $\vec{v}'$ . V zadnjem oklepaju pa je krajevni vektor, ki se trenutno ujema v obeh sistemih, zato ga zapišemo brez črtice:  $\vec{r}$ . Tako lahko celoten pospešek zapišemo še bolj strnjeno, vendar raje izrazimo pospešek v vrtečem se sistemu:

$$\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (5.31)$$

Čeprav smo začeli obravnavo v 2D sistemu, velja enačba (5.31) na splošno v treh dimenzijah. Srednji člen imenujemo **Coriolisov** (sistemski) pospešek in zadnji člen **centrifugalni** (sistemski) pospešek, da ga po imenu razlikujemo od centripetalnega pospeška. Da bosta velikosti in smeri obeh sistemskih pospeškov še bolj očitni, zapišimo ustrezne vektorje po komponentah. Naj bo v izbranem trenutku telo na osi  $x$ :  $\vec{r} = (x, 0, 0)$ , tudi osi obeh koordinatnih sistemov naj bodo takrat poravnane. Trenutna hitrost naj bo  $\vec{v}' = (v'_x, v'_y, 0)$  glede na  $S'$ . Kotna hitrost sistema  $S'$  je  $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$ . Centrifugalni pospešek je  $(\omega^2 x, 0, 0)$  in ima enako velikost, kot bi ga imel centripetalni pospešek, če bi telo glede na  $S'$  mirovalo pri stalni razdalji  $x$  od središča vrtenja. Vendar pa ima centrifugalni pospešek nasprotno smer kot analogni centripetalni pospešek: pozitivni predznak prve komponente pove, da kaže centrifugalni pospešek radialno navzven, stran od osi vrtenja. Coriolisov pospešek je odvisen od hitrosti telesa glede na vrteči se sistem in je v našem primeru enak  $\omega(-v'_y, v'_x, 0)$ . Posebej Coriolisov pospešek zaradi vrtenja Zemlje zelo vpliva na podnebje in vreme, ker je med drugim v zvezi s pasatnimi vetrovi v ekvatorialnem pasu in s kroženjem zraka v ciklonih in anticiklonih.

## 5.7 Precesija vrtavke

Vrtavka je zanimiva fizikalna igrača, zato ji namenimo kratek razdelek. Opisali bomo samo njeno precesijo. Vrtavka je ponavadi podolgovato telo s cilindrično simetrijo, ki ga postavimo s konico na tla in hitro zavrtimo okrog geometrijske osi. Vzemimo približek konstantnega nagiba geometrijske osi gleda na tla (kot  $\theta$  na Sliki 47), čeprav se pri gibanju tudi ta kot ponavadi spreminja, npr. pri pojavu nutacije. Kotno hitrost vrtenja vrtavke vpeljimo kot vektor  $\vec{\omega}$ . Precesija pomeni vrtenje geometrijske osi vrtavke in hkrati kotne hitrosti  $\vec{\omega}$  okrog navpične osi s precesijsko kotno hitrostjo  $\vec{\omega}_p$ , ki je po velikosti ponavadi veliko manjša od  $\vec{\omega}$ . Predpostavimo, da je stičišče vrtavke s tlemi pri tem pri miru, čeprav se sicer tudi to lahko premika po tleh. Vzrok za precesijo vrtavke je navor sile teže. Namesto da bi vrtavka preprosto padla na tla, se spreminja njena vrtilna količina po smeri. Zaradi cilindrične simetrije kaže vektor vrtilne količine v isto smer kot kotna hitrost:  $\vec{L} = J\vec{\omega}$ , vztrajnostni moment  $J$  je ob tem kar skalar. Vektor od stičišča s tlemi do masnega središča vrtavke je  $\vec{r}^*$ . Gibalna enačba je:

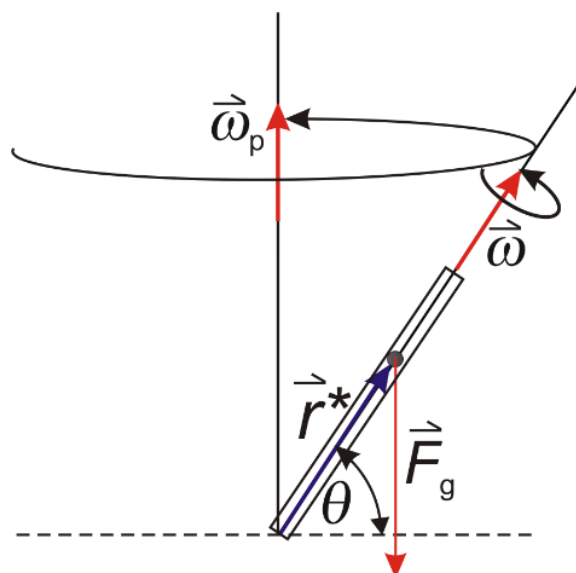
$$\begin{aligned}\vec{M} &= \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega}_p \times \vec{L} \\ \vec{r}^* \times m\vec{g} &= \vec{\omega}_p \times J\vec{\omega}.\end{aligned}$$

Pri tem je  $m$  masa vrtavke in  $\vec{g}$  težni pospešek. Uporabili smo tudi enačbi (1.1 b) in (5.19) ter enačbi (5.24) analogno enačbo, kjer smo nadomestili  $\vec{r} \rightarrow \vec{L}$ . Vektorja na obeh straneh zgornje enačbe se ujemata po smeri in velikosti, zato nadaljujemo le z velikostjo obeh vektorskih produktov:

$$mgr^* \cos \theta = \omega_p J \omega \cos \theta$$

$$\omega_p = \frac{mgr^*}{J\omega}. \quad (5.32)$$

Precesijska krožna frekvenca  $\omega_p$  je obratno sorazmerna s krožno frekvenco rotacije vrtavke  $\omega$ , ni pa odvisna od kota  $\theta$ . Čim večji je vztrajnostni moment vrtavke in čim hitreje se vrti, tem počasnejša je precesija. Precesija je odziv vrtavke na navor sile teže, namesto da bi se preprosto zvrnila na tla. To se nazadnje vseeno zgodi zaradi sile trenja, ki upočasnjuje rotacijo.



Slika 47: Količine pri rotaciji in precesiji vrtavke. S krožcem je označeno masno središče vrtavke, ki je ponazorjeno s pravokotnikom.





## 6 Nihanje

### 6.1 Enostavno sinusno nihanje

Diferencialna enačba sinusnega nihanja je:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (6.1)$$

Simbol  $\omega$  označuje lastno krožno frekvenco, ki je takole povezana s frekvenco nihanja in nihajnim časom:  $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{t_0}$ . Splošna rešitev enačbe (6.1) je:

$$x = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t). \quad (6.2)$$

Koeficienta  $A$  in  $B$  sta odvisna od začetnih pogojev. Enačbo (6.2) lahko zapišemo tudi drugače:

$$x = x_0 \sin(\omega t + \delta). \quad (6.3)$$

Če upoštevamo adicijski izrek  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ , dobimo zveze med koeficientoma  $A$  in  $B$  ter amplitudo nihanja  $x_0$  in faznim premikom  $\delta$  v obe smeri:

$$A = x_0 \cos \delta, \quad B = x_0 \sin \delta. \quad (6.4 \text{ a})$$

$$x_0 = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \delta = \arctan \frac{B}{A}. \quad (6.4 \text{ b})$$



### Računski zgled 38

Na vodi z gostoto  $1 \text{ kg/dm}^3$  plava splav iz lesa z gostoto  $0,7 \text{ kg/dm}^3$ . Debelina splava je  $0,5 \text{ m}$ . Na splav skoči z višine  $2 \text{ m}$  človek. Splav ima 4-krat večjo maso od človeka. S kolikšnim nihajnim časom in amplitudo zaniha splav? Dušenje nihanja zaradi vodnega upora zanemarimo. Ali si bo človek zmočil noge? Kaj pa, če samo stopi na splav?

Podatke označimo tako:  $\rho_v = 1 \text{ kg/dm}^3$ ,  $\rho_l = 0,7 \text{ kg/dm}^3$ ,  $d = 0,5 \text{ m}$ ,  $k = \frac{m_s}{m_\xi} = 4$ ,  $h = 2 \text{ m}$ . Iz podatka za razmerje mas splava in človeka lahko izrazimo osnovno ploskev splava  $S$  z maso človeka:  $\rho_l S d = k m_\xi \rightarrow S = \frac{k m_\xi}{\rho_l d}$ . Enačbo za nihanje izpeljemo iz drugega Newtonovega zakona, masa splava in človeka skupaj je  $m = (k + 1)m_\xi$ .

Ko je splav (skupaj s človekom na njem) v ravnovesju, sta sila teže  $F_g$  in sila vzgona  $F_v$  nasprotno enaki. Označimo trenutni odklik splava iz ravnovesne lege navzgor z  $x$ . Sila teže ostane nespremenjena, sila vzgona pa se zmanjša, in ta razlika je rezultanta sil, ki kaže navzdol, proti ravnovesni legi:  $F_R = -\rho_v S x g$ . Upoštevali smo zmanjšanje volumna izpodrinjene vode za produkt  $Sx$ . Zato velja:  $ma = -\rho_v S x g$ , ali nekoliko drugače:

$$\ddot{x} + \frac{\rho_v S g}{m} x = 0.$$

To se sklada z enačbo (6.1), koeficient pred  $x$  je kvadrat krožne frekvence. Izrazimo nihajni čas:

$$t_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho_v S g}} = 2\pi \sqrt{\frac{\rho_l}{\rho_v} \cdot \frac{k+1}{k} \cdot \frac{d}{g}}.$$

Upoštevali smo zgoraj izpeljano enačbo za ploščino osnovne ploskve splava. Z danimi podatki izračunamo  $t_0 = 1,33 \text{ s}$ .

Človek skoči na splav s hitrostjo  $v_1 = \sqrt{2gh}$ . Pri doskoku gre za plastični trk, po katerem je hitrost splava in človeka skupaj (ohrani se skupna gibalna količina, če zanemarimo reakcijo vode):  $v_0 = \frac{m_\xi v_1}{m} = \frac{v_1}{k+1}$ . To hitrost razumemo kot amplitudo nihanja hitrosti, ki je povezana z amplitudo odmika:  $v_0 = \omega x_0 = \frac{2\pi x_0}{t_0}$ . Zaradi

enostavnejše obravnave problema privzamemo, da je čas trka zaradi doskoka človeka zelo majhen, v tem času čoln s človekom vred vseeno doseže ravnovesno lego, za katero smo izračunali amplitudo hitrosti, nato izračunamo začetno amplitudo nihanja splava s človekom:

$$x_0 = \frac{\sqrt{2gh} \cdot t_0}{2\pi(k+1)}.$$

Dobimo rezultat  $x_0 = 0,265$  m. Da ugotovimo, ali si človek zmoči noge, moramo izračunati, za koliko je potopljen splav v ravnovesni legi. Izenačimo silo vzgona in silo teže in velja:

$$d_{pot} = \frac{k+1}{k} \cdot \frac{\rho_l}{\rho_v} d.$$

Debelina potopljenega dela splava v ravnovesju je  $d_{pot} = 0,4375$  m. Torej ga od celotne debeline pol metra gleda iz vode samo 6,25 cm. Pri amplitudi nihanja okrog 26,5 cm si neprevidni človek zmoči noge. Dodaten vzgon zaradi majhnega potopljenega dela nog človeka lahko pri računih mirno zanemarimo. Vendar moramo poudariti, da pri takšni amplitudi nihanja, kjer je del nihajnega časa cel splav pod vodo, zgornji račun za nihajni čas ni več točen, ker je v tem delu nihajnega časa vzgon konstanten in gre za enakomerno pojemajoče gibanje ( $a = \text{konst}$ ), ne za sinusno odvisnost odmika od časa! Račun bi lahko popravili tako, da razlikujemo oba dela gibanja splava.

Ali kaj pomaga, če človek previdno stopi na splav? Zdaj računamo amplitudo nihanja drugače. Poglejmo, koliko splava gleda iz vode, preden stopi človek nanj. Za potopljeni del splava velja sedaj  $d_1 = \frac{\rho_l}{\rho_v} \cdot d = 35$  cm. Iz vode gleda torej 15 cm splava. Ker je to sedaj najvišja lega splava pri nihanju, dobimo amplitudo nihanja  $15 \text{ cm} - 6,25 \text{ cm} = 8,75$  cm. To je spet več kot 6,25 cm, torej si človek tudi v tem primeru zmoči noge. V resnici pa bi morali za točno vrednost amplitude spet ponoviti račun, tako da bi za del gibanja (ko je splav cel pod vodo) upoštevali konstantni pospešek. Vendar sklep, da si človek zmoči noge, ostane nespremenjen. Splav je za človeka preprosto premajhen in razmerje njunih mas bi moralo biti večje pri lesu s tolikšno gostoto. ♦



### Računski zgled 39

Izračunajte nihajni čas nihala z maso  $m$  za majhne odmike okrog ravnovesne lege  $x = 0$ , če ima odvisnost potencialne energije (na kratko potenciala) od koordinate obliko hiperboličnega kosinusa:  $V(x) = V_0 \cosh(kx)$ .

Pri zapisu funkcije v bližini značilne točke, npr. okrog minimuma, si pomagamo s Taylorjevim razvojem. Funkciji  $\cosh x$  in  $\sinh x$  sta ena drugi odvod:  $\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$ ,  $\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$ . Upoštevajmo tudi vrednosti  $\cosh 0 = 1$  in  $\sinh 0 = 0$  in je Taylorjev razvoj za hiperbolični kosinus preproste oblike:

$$\cosh x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \dots$$

Razvoj je podoben kot pri kosinusni funkciji, le da pri kosinusu predznaki členov alternirajo. Potencial je torej:

$$V(x) = V_0 \left[ 1 + \frac{1}{2} (kx)^2 + \frac{1}{24} (kx)^4 + \dots \right].$$

Sila je negativni odvod potenciala po koordinati:

$$F(x) = -V_0 \left( k^2 x + \frac{1}{6} k^4 x^3 + \dots \right).$$

Za majhne odmike  $x$ , ko je  $kx \ll 1$ , obdržimo pri sili samo prvi člen:  $F \approx -k^2 V_0 x$ . Iz Newtonovega zakona  $ma = F$  izhaja diferencialna enačba:

$$\ddot{x} + \frac{k^2 V_0}{m} x = 0.$$

To je enačba (6.1) s kvadratom krožne frekvence  $\omega^2 = \frac{k^2 V_0}{m}$ . Nihajni čas je:

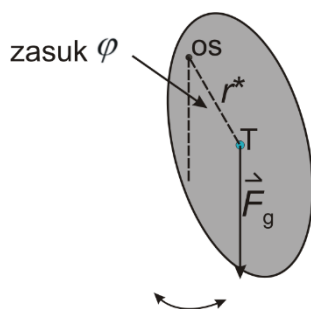
$$t_0 = \frac{2\pi}{k} \sqrt{\frac{m}{V_0}}.$$

Vzmetno nihalo, to je na vijačni vzmeti s koeficientom  $k$  obešena utež z maso  $m$ , je značilen prototip preprostega sinusnega nihanja. Ker je v ravnovesju vzmet že raztegnjena, označimo z  $x$  dodaten raztezek vzmeti oziroma odmik uteži od ravnovesne lege navzdol. Takrat je rezultanta sile teže in sile vzmeti različna od nič, ker se sila vzmeti poveča:  $F = -kx$ . Predznak minus pomeni, da kaže rezultanta v nasprotno smer, kot se premakne utež. Iz enačbe  $ma = -kx$ , ki je spet (6.1), ugotovimo tudi kvadrat krožne frekvence:  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ .

Drugi pomemben zgled je fizikalno nihalo. To je sučno nihalo, os vrtenja je vodoravna, zato je nihanje v navpični ravnini (Slika 48). Nihalo niha zaradi navora teže, če ga odmaknemo iz ravnovesne lege (v kateri je težišče nihala natančno pod osjo vrtenja – nihanja). Nihalo ima glede na dano os vztrajnostni moment  $J$ . Navor teže pri zasuku za  $\varphi$  iz ravnovesne lege je enak:  $M = -mgr^* \sin \varphi$ . Količina  $r^*$  pomeni razdaljo med osjo in težiščem nihala. Po enačbi za vrtenje  $M = J\alpha = J\ddot{\varphi}$  je nihajna enačba:  $J\ddot{\varphi} = -mgr^* \sin \varphi$ . Za velike kotne odmike nihanje ni sinusno. Če pa so koti manjši od okrog  $10^\circ$ , približno velja  $\sin \varphi \approx \varphi$ , in zato dobimo enačbi (6.1) analogno enačbo:  $\ddot{\varphi} = -\frac{mgr^*}{J} \varphi$ . Nihanje je približno sinusno s krožno frekvenco:

$$\Omega = \sqrt{\frac{mgr^*}{J}}.$$

Nihajni čas je  $t_0 = \frac{2\pi}{\Omega}$ . Krožno frekvenco pri sučnem nihalu smo namesto z  $\omega$  raje označili z veliko črko  $\Omega$ , da tega ne bi zamenjali s kotno hitrostjo. Da je to priporočljivo, uvidimo, če zapišemo značilne enačbe pri sinusnem sučnem nihanju: kot je  $\varphi = \varphi_0 \sin(\Omega t)$ , kotna hitrost ali časovni odvod kota je  $\omega = \Omega \varphi_0 \cos(\Omega t)$ , kotni pospešek je odvod kotne hitrosti po času:  $\alpha = -\Omega^2 \varphi_0 \sin(\Omega t) = -\Omega^2 \varphi$ .

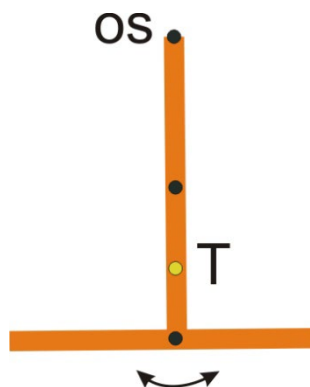


Slika 48: Fizikalno nihalo



## Računski zgled 40

Fizično nihalo sestavimo iz dveh enakih tankih palic dolžine  $l$ , tako da ju spojimo v črko T (Slika 49). Os vrtenja je na zgornjem koncu zgornje palice. Kolikšen je nihajni čas?



Slika 49: Fizično nihalo v obliki črke T

Najprej izračunamo lego masnega središča sestava palic po enačbi (1.9 a), če si zamišljamo npr. namesto koordinate  $y^*$  kar  $r^*$ , legi težišč obeh palic glede na vrtilno os sta  $y_1 = \frac{l}{2}$  in  $y_2 = l$ . Tako je:

$$r^* = \frac{my_1 + my_2}{2m} = \frac{3}{4}l,$$

kar je zaradi simetrije tudi takoj razvidno tudi s slike. Vztrajnostni moment je vsota prispevkov obeh palic, kjer moramo upoštevati tudi Steinerjev izrek:

$$J = 2 \cdot \frac{1}{12}ml^2 + m(y_1^2 + y_2^2) = \frac{17}{12}ml^2.$$

Nihajni čas je:

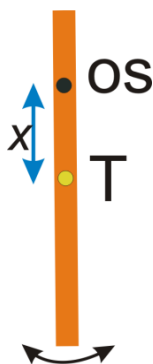
$$t_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{2mgr^*}} = 2\pi \sqrt{\frac{17l}{18g}}.$$

Pozor: V imenovalcu smo morali za maso vzeti  $2m$ , ker mora tam biti skupna masa nihala.



## Računski zgled 41

Tanko palico z dolžino  $l$  uporabimo kot fizično nihalo in spreminjamo lego njene osi vrtenja. Razdaljo med osjo vrtenja in težiščem označimo tukaj z  $x$  (Slika 50). Kako je nihajni čas palice  $t_0$  odvisen od spremenljivke  $x$ ?



Slika 50: Palica – fizikalno nihalo za poljubno lego osi vrtenja

Vztrajnostni moment palice za podano os je:  $J = m \left( \frac{1}{12} l^2 + x^2 \right)$ . Nihajni čas je:

$$t_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgx}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g} \left( x + \frac{l^2}{12x} \right)}.$$

Očitno ima nihajni čas pri neki vrednosti razdalje  $x$  minimum. Ker je korenska funkcija monotono naraščajoča, ni treba minimizirati celotnega izraza za  $t_0$ , ampak je dovolj poiskati minimum funkcije  $y(x) = x + \frac{l^2}{12x}$ . Postavimo  $\frac{dy}{dx} = 0$  in dobimo  $x = x_{min}$  za minimalni čas in potem minimalni čas sam:

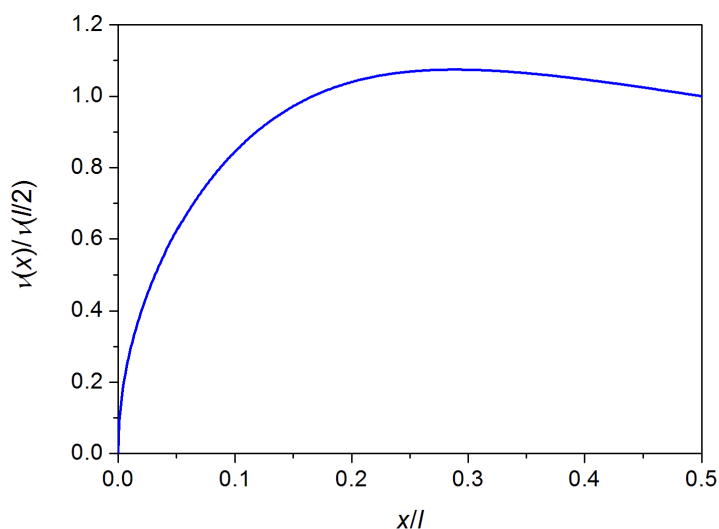
$$x_{min} = \frac{l}{\sqrt{12}} \approx 0,29l$$

$$t_{0,min} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g\sqrt{3}}}.$$

Prikažimo graf (Slika 51), kjer namesto nihajnega časa obravnavamo frekvenco  $\nu = \frac{1}{t_0}$ .

Kjer ima  $t_0$  neskončno vrednost (pol), to je pri  $x = 0$ , ima frekvenca vrednost nič. Kjer pa ima nihajni čas minimum, ima frekvenca maksimum. Očitno je tudi, da frekvenca ali

nihajni čas kot funkcija parametra  $x$  ni bijektivna: pri dveh različnih vrednostih  $x$  na določenem intervalu ima nihajni čas enako vrednost.



Slika 51: Frekvenca nihanja palice kot funkcija razdalje  $x$ . Frekvenca je normalizirana glede na frekvenco pri  $x = \frac{l}{2}$ , to je takrat, ko obesimo palico za njeno krajišče. Razviden je maksimum frekvence pri  $\frac{x}{l} \approx 0,29$ .

Matematično ali nitno nihalo je le poseben primer fizikalnega nihala. Ker je spodaj na nitki z zanemarljivo maso majhna utež, v kateri je zbrana vsa masa nihala, vzamemo  $r^* = l$ . Razdalja med osjo nihanja in težiščem je kar dolžina vrvice  $l$ . Za vztrajnostni moment vzamemo vztrajnostni moment točkastega telesa pri razdalji  $l$  od osi:  $J = ml^2$ . Zato je krožna frekvenca:

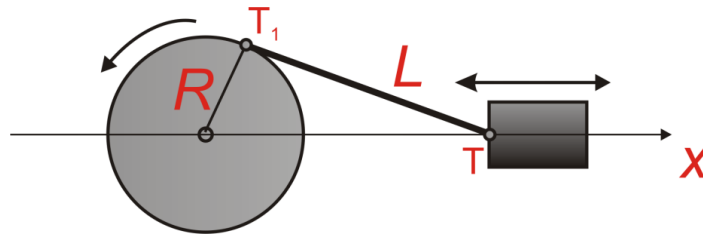
$$\Omega = \sqrt{\frac{mgr^*}{J}} = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Lep zgled nihanja je tudi pri kolenskem prenosu, kjer gred z dolžino  $L$  povezuje enakomerno vrteče se kolo in bat, ki se lahko premika samo v vodoravni smeri. Levo krajišče gredi je vpeto pri razdalji  $R$  od središča kolesa (Slika 52). Zanima nas enačba gibanja bata (odmik  $x$ ), če se kolo vrti s kotno hitrostjo  $\omega$ . Nihanje bata ni sinusno, izračunamo ga tako, da je razdalja med točkama  $T_1$  in  $T$  ves čas enaka  $L$ . Rezultat je:

$$x = R \cos(\omega t) + \sqrt{L^2 - R^2 \sin^2(\omega t)}.$$



S to enačbo podamo koordinato točke T glede na središče kolesa. Pri  $t = 0$  je  $x = L + R$ , kar pomeni skrajno desno lego točke T in tudi točke  $T_1$ , ko leži gred na osi  $x$ . Nihanje bata je približno sinusno, če velja  $L \gg R$ , ko lahko zanemarimo drugi člen pod korenem v enačbi za  $x$ .



Slika 52: Kolenski prenos

## 6.2 Dušeno nihanje

Enačba preprostega nihala pri dušenem nihanju je:

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (6.5)$$

Prvi člen je v zvezi z Newtonovim zakonom, drugi podaja dušenje po linearnem zakonu upora (sila je sorazmerna s hitrostjo telesa pri počasnem gibanju skozi viskozno tekočino), zadnji člen pa vrača nihalo v ravnovesno lego. Razmišljamo o mehanskem nihalu, čeprav najdemo podobno enačbo tudi drugje, npr. v električnem nihajnem krogu. Koeficient  $\beta$  je koeficient dušenja, količina  $\omega_0$  pa bi se ujemala s krožno frekvenco nihala, če ne bi bilo dušenja. Videli bomo, da je pri dušenju krožna frekvenca nihanja manjša od  $\omega_0$ .

Enačba (6.5) je navadna linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti. Je homogena (desna stran je enaka nič). Takšne enačbe rešujemo z nastavkom za eksponentno funkcijo  $x = C e^{\lambda x}$  s še neznano konstanto  $\lambda$  v eksponentu. Če vstavimo eksponentno funkcijo v enačbo (6.5), dobimo kvadratno enačbo za  $\lambda$ :

$$\lambda^2 + \beta \lambda + \omega_0^2 = 0$$

z rešitvama:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - \omega_0^2}.$$

Glede diskriminante imamo tri možnosti: ali je negativna, nič ali pozitivna. Nihanje v pravem pomenu dobimo pri negativni diskriminanti (podkritično dušenje). Zato najprej obravnavajmo to možnost, kjer sta koeficienta kompleksna. Izberemo lahko takšni konstanti pred eksponentnima funkcijama, da dobimo zaradi Eulerjeve formule  $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$  kosinusno in sinusno funkcijo. Rešitev v končni obliki je:

$$x = e^{-\frac{\beta}{2}t} \cdot [C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t)]. \quad (6.6)$$

s krožno frekvenco dušenega nihanja:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2}. \quad (6.7)$$

V primeru  $\beta \ll \omega_0$  velja, prvič, da je krožna frekvenca (6.7) samo malo manjša od nedušene vrednosti  $\omega_0$ , in drugič, da se eksponentni faktor v enačbi (6.6) spreminja le počasi v primerjavi z nihajočim izrazom v oglatem oklepaju. To pomeni, da efektivna amplituda nihanja pada s časom eksponentno:  $A(t) = A(0) \exp\left(-\frac{\beta t}{2}\right)$  oziroma da energija nihanja, ki je sorazmerna s kvadratom amplitude, pada kot  $E(t) = E(0) \exp(-\beta t)$ .

V primeru nadkritičnega dušenja, ko velja  $\frac{\beta}{2} > \omega_0$ , imamo namesto oscilirajočih rešitev par realnih padajočih eksponentnih funkcij:

$$x = e^{-\frac{\beta}{2}t} \cdot [C_1 e^{+\kappa t} + C_2 e^{-\kappa t}], \quad (6.8)$$

kjer je:

$$\kappa = \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - \omega_0^2}. \quad (6.9)$$

Zaradi popolnosti rešitve problema je zanimiv tudi mejni primer,  $\frac{\beta}{2} = \omega_0$ , čeprav je, fizikalno gledano, to golo naključje in je verjetnost, da velja takšna enakost, zanemarljiva. Lahko začnemo z izrazi (6.6) ali (6.8) in preračunamo limitni primer  $\omega \rightarrow 0$  ali  $\kappa \rightarrow 0$ . Kotni oziroma eksponentni funkciji razvijemo v Taylorjevo vrsto samo do linearnega člena. V obeh primerih dobimo:

$$x = e^{-\frac{\beta}{2}t}(C_1 + C_2t) \quad x = e^{-\frac{\beta}{2}t} \cdot (C_1 + C_2t), \quad (6.10)$$

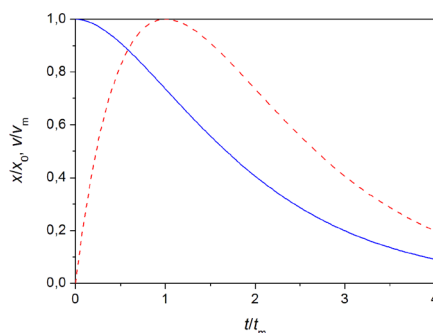
kjer sta  $C_1$  in  $C_2$  novi konstanti. Izraz (6.10) smo sicer našli kot približek, a ga lahko matematično preverimo, če ga vstavimo v enačbo (6.5) skupaj s pogojem  $\frac{\beta}{2} = \omega_0$ , se res vse ujema.

Pri vseh treh obravnavanih možnostih smo dobili po dve prosti konstanti,  $C_1$  in  $C_2$ . Rešujemo namreč diferencialno enačbo drugega reda, zato potrebujemo za natančno določitev rešitve še dva začetna pogoja: začetno lego  $x(0)$  in začetno hitrost  $v(0)$ . Ni nujno, da podamo dodatno informacijo prav v takšni obliki; lahko bi podali lego v dveh različnih časih itd. A podajanje začetne lege in hitrosti je fizikalno najbolj naravno. Poglejmo na primer, kaj pove enačba (6.10) za mejni primer kritičnega dušenja, če imamo tudi začetna pogoja  $x(0) = x_0$  in  $v(0) = 0$ . Za drugi pogoj moramo iz enačbe izraziti tudi hitrost. Zapišimo končni rezultat za odmik in hitrost:

$$x = x_0 e^{-\frac{\beta}{2}t} \cdot \left(1 + \frac{\beta}{2}t\right)$$

$$v = -x_0 \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 t \cdot e^{-\frac{\beta}{2}t}.$$

Hitrost je enaka nič samo pri času nič in v limiti neskončnega časa, sicer je ves čas negativna. To pomeni, da nihalo niti enkrat ne zaniha sem in tja. Telo gre samo počasi iz začetne lege v ravnovesno lego  $x = 0$ , za kar teoretično potrebuje neskončen čas. Pozitivna koordinata pomeni odmik nihala v desno, negativna hitrost pa gibanje nazaj proti izhodišču. Hitrost ima največjo absolutno vrednost, ko je pospešek nič. V tem trenutku so čas, hitrost in koordinata enaki:  $t_m = \frac{2}{\beta}$ ,  $v_m = \frac{\beta x_0}{2e}$  in  $x_m = \frac{2x_0}{e}$ . Grafa za časovno odvisnost koordinate in hitrosti sta prikazana na Sliki 53, dodaten račun je v računskem zgledu 41.



**Slika 53:** Brezdimenzijski grafi časovne odvisnosti koordinate (polna modra krivulja) in hitrosti (črtkana rdeča krivulja) pri mejnem kritičnem primeru dušenja, ko je začetna hitrost nič. Zaradi lažje primerjave smo vzeli absolutno vrednost hitrosti.



## Računski zgled 42

Pri kritičnem dušenem nihanju je največja hitrost nihala  $v_m = 0,5$  m/s, ko je odmik od ravnovesne lege enak  $x_m = 4$  cm. Kolikšna je nedušena krožna frekvenca? Če je to nihanje vzmetnega nihala (kroglica na vzmeti) v viskozni tekočini, zapišite pogoj za kritično dušenje s parametri tega nihala.

Napišimo razmerje med maksimalno hitrostjo in ustreznim odklikom:

$$\frac{v_m}{x_m} = \frac{\beta x_0 / (2e)}{2x_0 / e} = \frac{\beta}{4} = \frac{\omega_0}{2}.$$

Iz tega izračunamo  $\omega_0 = 25$  s<sup>-1</sup>. Pri vzmetnem nihalu z maso kroglice  $m$  in koeficientom vzmeti  $k$  je krožna frekvenca:  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Na kroglico s polmerom  $R$ , ki se giblje s hitrostjo  $v$  skozi tekočino z viskoznostjo  $\eta$ , deluje po Stokesovem zakonu sila upora:  $F_u = -6\pi R \eta v$ , kar ustreza drugemu členu v enačbi (6.5). Ker je to Newtonov zakon, je  $\beta = \frac{6\pi R \eta}{m}$  in  $\omega_0 = \frac{\beta}{2}$ . Enačba za kritično dušenje je:

$$\frac{3\pi R \eta}{m} = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \eta = \frac{\sqrt{km}}{3\pi R}.$$

Kritično viskoznost tekočine smo tukaj izrazili s koeficientom vzmeti ter maso in polmerom kroglice.

### 6.3 Vsiljeno dušeno nihanje

Enačba preprostega nihala pri vsiljenem dušenem nihanju je:

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \cos(\omega_1 t). \quad (6.11)$$

Dodali smo sinusno nihajoči člen na desno stran enačbe. Ta člen je posledica sinusno nihajoče dodatne zunanje sile s krožno frekvenco  $\omega_1$ . Konstanta  $a_0$  ima enoto pospeška. Za razliko od enačb (6.1) in (6.5) je enačba (6.11) nehomogena. Njeno rešitev sestavimo

iz dveh delov: prvi ustreza homogeni enačbi (6.5), drugi člen je partikularna (posebna) rešitev, ki ustreza desni strani (6.11). Zanima nas nihanje, ki se vzpostavi po daljšem času. Odmik, ki ustreza homogeni enačbi, eksponentno pojema s časom, zato ga lahko po dovolj dolgem času zanemarimo. Dovolj je najti le partikularno rešitev, poskusimo pa z nastavkom:

$$x = A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t). \quad (6.12)$$

To je res pravi nastavek, ker se z odvajanjem mešata med seboj kosinusna in sinusna funkcija. Nastavek vstavimo v enačbo (6.11) in posebej izenačimo del enačbe, ki vsebuje kosinusne člene, in posebej za sinusne člene (to mora veljati zato, ker sta si kosinusna in sinusna funkcija linearno neodvisni). Iz dveh enačb dobimo oba neznana koeficienta:

$$A = \frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + (\beta \omega_1)^2} \cdot a_0. \quad (6.13 \text{ a})$$

$$B = \frac{\beta \omega_1}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + (\beta \omega_1)^2} \cdot a_0. \quad (6.13 \text{ b})$$

Rešitev (6.12) lahko zapišemo tudi drugače:

$$x = x_0 \cos(\omega_1 t + \delta). \quad (6.14)$$

Vpeljali smo polno amplitudo  $x_0$  in fazni premik  $\delta$  glede na vzbujevalni člen na desni strani enačbe (6.11). Če v enačbi (6.14) upoštevamo adicijski izrek za kosinusno funkcijo in oba člena primerjamo s tistima v enačbah (6.12), sta nova parametra povezana z delnima amplitudama  $A$  in  $B$  takole:  $x_0 = \sqrt{A^2 + B^2}$  in  $\delta = -\arctan \frac{B}{A}$ , tako da sta

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + (\beta \omega_1)^2}} \cdot a_0. \quad (6.15 \text{ a})$$

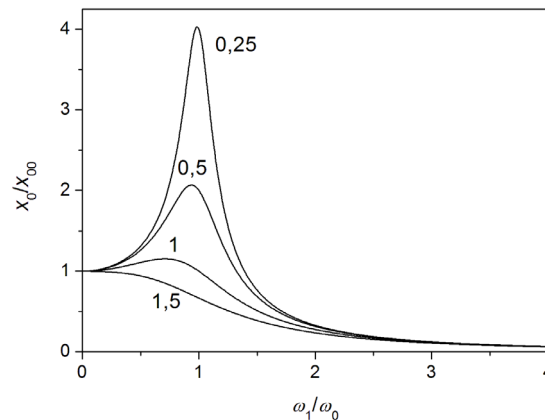
$$\delta = -\arctan \frac{\beta \omega_1}{\omega_0^2 - \omega_1^2}. \quad (6.15 \text{ b})$$

Vzemimo stalni vrednosti  $\omega_0$  in  $\beta$  ter opazujemo odvisnost  $x_0$  in  $\delta$  od frekvence  $\omega_1$ . V primeru šibkega dušenja,  $\beta \ll \omega_0$ , ima funkcija  $x_0(\omega_1)$  izrazit maksimum. Lega maksimuma je približno pri  $\omega_1 \approx \omega_0$ . Izračunajmo maksimum natančno s postavitvijo  $\frac{dx_0}{d\omega_1} = 0$ . Tako izračunamo neodvisno in odvisno spremenljivko:

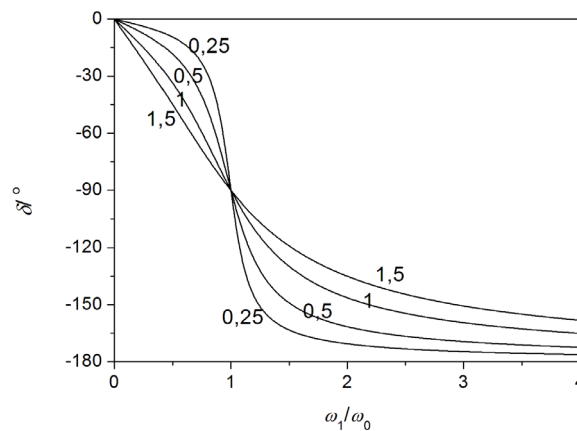
$$\omega_{1M} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{2}\beta^2}. \quad (6.16 \text{ a})$$

$$x_{0M} = \frac{a_0}{\beta\omega_d}. \quad (6.16 \text{ b})$$

V drugi enačbi je  $\omega_d$  iz enačbe (6.7). Opazimo:  $\omega_{1M} < \omega_d < \omega_0$ . Če je dušenje preveliko (prevelik parameter  $\beta$ ), funkcija  $x_0(\omega_1)$  nima več maksimuma, ampak je monotono padajoča funkcija. To spoznamo že po izrazu (6.16 a) za ustrezno frekvenco. Če smo dosledni, moramo preveriti tudi drugi odvod  $\frac{d^2x_0}{d\omega_1^2}$ , ki mora biti negativen za maksimum funkcije. Pokažemo lahko, da se lokalni maksimum zlije z minimumom pri  $\omega_1 = 0$ , ko velja  $\beta^2 = 2\omega_0^2$ . Grafi odvisnosti  $x_0$  in  $\delta$  od razmerja krožnih frekvenc  $\frac{\omega_1}{\omega_0}$  za različne vrednosti  $\frac{\beta}{\omega_0}$  so prikazani na Slikah 54 in 55.



Slika 54: Brezdimenzijski grafi odvisnosti  $x_0$  od  $\omega_1$ . Izbrane vrednosti  $\frac{\beta}{\omega_0}$  so 0,25, 0,5, 1 in 1,5. Grafi so normalizirani na količnik  $\frac{x_0}{x_{00}}$ , kjer je  $x_{00} = x_0(0) = \frac{a_0}{\omega_0^2}$ .



Slika 55: Grafi odvisnosti  $\delta$  od  $\frac{\omega_1}{\omega_0}$ . Vrednosti  $\frac{\beta}{\omega_0}$  so enake kot pri Sliki 54. Fazni premik je podan kar v stopinjah in je vedno negativen. Vsi grafi se sekajo pri  $\omega_1 = \omega_0$ , kjer je fazni premik  $-90^\circ$ . Čim večji je parameter  $\frac{\beta}{\omega_0}$ , tem položnejši je graf okrog presečiščne točke.



## Računski zgled 43

Preprost električni nihajni krog sestavljajo zaporedno vezani kondenzator s kapaciteto  $C$ , tuljava z induktivnostjo  $L$ , upornik z uporom  $R$  in generator sinusne napetosti  $U = U_0 \sin(\omega_1 t)$ . Kolikšna je amplituda jakosti električnega toka in kolikšen je njegov fazni zamik za napetostjo?

Vsota napetosti na vseh 4 elementih je nič:  $U + U_k + U_t + U_u = 0$ . Pri nadaljnji izpeljavi moramo paziti na predznake členov. Zamislimo si, da smo v tistem delu nihajnega kroga, ko tok narašča. Takrat se kondenzator polni in zapišemo  $U_k = -\frac{e}{C}$ , velja pa tudi  $I = \frac{de}{dt}$ . Na tuljavi je napetost  $U_t = -L \cdot \frac{dI}{dt}$ , na uporniku pa  $U_u = -RI$ . Zato pridemo do enačbe:

$$U_0 \sin(\omega_1 t) - \frac{e}{C} - L \frac{dI}{dt} - RI = 0.$$

Enačbo odvajamo po času, tako da drugi člen z nabojem pretvorimo v zapis s tokom:

$$U_0 \omega_1 \cos(\omega_1 t) - \frac{I}{C} - L \frac{d^2 I}{dt^2} - R \frac{dI}{dt} = 0,$$

kar prepišemo nekoliko drugače:

$$\ddot{I} + \frac{R}{L} \dot{I} + \frac{1}{LC} I = \frac{\omega_1 U_0}{L} \cos(\omega_1 t).$$

Zadnja enačba je ekvivalentna enačbi (6.11). Ustrezni koeficienti so:  $\beta = \frac{R}{L}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ , pospešku analogna količina je  $a_0 = \frac{\omega_1 U_0}{L}$ . V skladu z enačbami (6.14) in (6.15) sta amplituda toka in fazni premik:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega_1} - L\omega_1\right)^2}},$$

$$\delta = -\arctan \frac{RC\omega_1}{1 - LC\omega_1^2}.$$

Naj bodo sedaj vsi drugi parametri stalni, spreminjamo samo  $\omega_1$  in iščemo največjo možno amplitudo toka  $I_0$ . V nasprotju s prejšnjim problemom iskanja maksimuma za  $x_0$  je sedaj maksimum natančno pri  $\omega_1 = \omega_0$ , kar da  $I_0 = \frac{U_0}{R}$ . Člena v oklepaju pod korenem v imenovalcu v enačbi za  $I_0$  se sedaj izničita. Pri električnem krogu je spremenljiva krožna frekvenca  $\omega_1$  tudi kot dodaten koeficient na desni strani diferencialne enačbe za električni tok, medtem ko v enačbi (6.11) tega koeficienta ni.

## 6.4 Sklopljeno nihanje

Obravnavajmo samo primer, ko so vse sile konservativne, to je, izhajajo iz potencialne energije. Uporabimo spet generalizirane koordinate  $q_i$ . Takrat je generalizirana sila:

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (6.17)$$

V ravnovesni legi velja  $Q_i = 0$ . Zato razvijemo vse generalizirane koordinate okrog njihovih ravnovesnih vrednosti:  $q_i = q_{i0} + \eta_i$ . Ravnovesne vrednosti  $q_{i0}$  so take, da je izpolnjena enačba  $Q_i = 0$  za vsak  $i$ , odmiki od teh leg pa so  $\eta_i$ .

Celotno potencialno energijo razvijemo v Taylorjevo vrsto. Pri tem zaradi ravnovesja odpadejo linearni členi v odmikih. Razen tega lahko štejemo potencialno energijo tako, da je enaka nič, ko postavimo vse generalizirane koordinate na ravnovesne vrednosti. Razvoj potencialne energije v Taylorjevo vrsto se zato začne s kvadratnimi členi v odmikih, medtem ko člene višjega reda zanemarimo (vsota po  $i$  in  $j$ ):

$$V = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \cdot \eta_i \eta_j. \quad (6.18)$$

ali zapisano krajše:

$$V = \frac{1}{2} V_{ij} \eta_i \eta_j. \quad (6.19)$$

Matrika  $V_{ij}$  je simetrična. Vzamemo samo primere, ko generalizirane koordinate niso odvisne eksplicitno od časa, zato je kinetična energija enaka:



$$T = \frac{1}{2} m_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j. \quad (6.20)$$

Efektivne mase, ki so tudi funkcije generaliziranih koordinat, lahko spet same po sebi razvijemo v Taylorjevo vrsto. Zadostuje pa prvi, konstantni člen v razvoju, ki ga označimo  $T_{ij}$  po analogiji z  $V_{ij}$ . Tako je Lagrangian oblike:

$$L = \frac{1}{2} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - \frac{1}{2} V_{ij} \eta_i \eta_j. \quad (6.21)$$

Vendar se da v praktično pomembnih primerih izbrati generalizirane koordinate tako, da so v izrazu za kinetično energijo različni od nič samo diagonalni elementi matrike, ki jih na kratko označimo z enim samim indeksom:  $T_i \equiv T_{ii}$ , torej:

$$L = \frac{1}{2} T_i \dot{\eta}_i^2 - \frac{1}{2} V_{ij} \eta_i \eta_j. \quad (6.22)$$

Ustrezne Euler-Lagrangejeve enačbe so:

$$T_i \ddot{\eta}_i + V_{ij} \eta_j = 0. \quad (6.23)$$

To je sklopljeni sistem diferencialnih enačb drugega reda, za vsak indeks  $i$  od 1 do  $f$  posebej, če je  $f$  število vseh generaliziranih koordinat. Poskusimo z nastavkom:

$$\eta_i = C a_i e^{i\omega t}. \quad (6.24)$$

Tako smo prešli na reševanje sistema enačb v kompleksnem obsegu števil, vendar se da, kot bomo videli, vedno dobiti realne vrednosti  $\eta_i$ , ki so fizikalno smiselne. Gremo z nastavkom (6.24) v sistem enačb (6.23), pridelamo naslednji sistem navadnih linearnih enačb za neznane koeficiente  $a_i$ :

$$-T_i \omega^2 a_i + V_{ij} a_j = 0. \quad (6.25)$$

Konstanta  $C$  se je krajšala. Prepišimo sistem teh enačb v matrično obliko. Zaradi nazornosti vzemimo za število prostostnih stopenj 3 (to nima neposredne zveze z dimenzijo prostora, ampak s tem, koliko enodimenzionalnih nihali imamo v sistemu):

$$\begin{bmatrix} V_{11} - T_1 \omega^2 & V_{12} & V_{13} \\ V_{12} & V_{22} - T_2 \omega^2 & V_{23} \\ V_{13} & V_{23} & V_{33} - T_3 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = 0. \quad (6.26)$$

Ta sistem ima od nič različne rešitve za koeficiente samo, če je determinanta matrike enaka nič. Tako pravzaprav dobimo neznano krožno frekvenco  $\omega$ , in sicer v tem primeru nasplošno (razen v primeru degeneracije zaradi kake simetrije) 3 različne vrednosti, vsaka od teh treh vrednosti ima lahko oba predznaka. Če torej vzamemo po definiciji  $\omega > 0$ , lahko nastavek (6.24) dopolnimo:

$$\eta_i = C(a_i e^{i\omega t} + b_i e^{-i\omega t}). \quad (6.27)$$

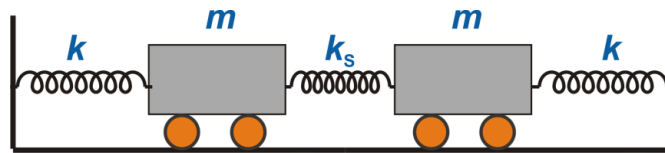
Z izbiro kompleksnih koeficientov  $b_i = a_i^*$  in z realnim  $C$  dosežemo, da je  $\eta_i$  zares realen. Hkrati iz enačbe (6.26), ki je enačba za lastne vektorje, razberemo, da so koeficienti  $b_i$  med seboj povezani na enak način kot  $a_i$ . Če namreč obrnemo predznak krožne frekvence, se v enačbi nič ne spremeni.

Za lažjo orientacijo označimo pozitivne vrednosti krožne frekvence z  $\omega^{(i)}$  za  $i$  od 1 do 3. Koeficiente za vsako krožno frekvenco posebej dobimo, ko vstavimo rešitev za krožno frekvenco v enačbo (6.26) in rešimo sistem enačb za koeficiente. Tiste, ki ustrezajo prvi krožni frekvenci, označimo npr. tako:  $a_1^{(1)}$ ,  $a_2^{(1)}$  in  $a_3^{(1)}$ , ter podobno za drugi dve frekvenci. Ker pa je enačba (6.26) degenerirana, lahko enega od koeficientov, npr.  $a_1^{(1)}$ , poljubno izberemo. Druga dva sta potem določena z njim. Zavedati se moramo tudi, da je  $a_1^{(1)}$  kompleksno število in ga določata dve komponenti, realna in imaginarna. Konstanto  $C$  lahko postavimo na vrednost 1. Neodvisnih konstant imamo tako pravzaprav samo 6: po dve za vsako pozitivno rešitev za krožno frekvenco. To ustreza splošnemu pravilu, da potrebujemo za natančno določitev sistema z  $s$   $f$  prostostnimi stopnjami  $2f$  konstant, ki jih dobimo iz  $2f$  začetnih pogojev, npr. »začetno hitrost« in »začetni pospešek« za vsako generalizirano koordinato posebej.



#### Računski zgled 44

Preprosto sklopljeno nihalo je sestav dveh vozičkov z enakima masama po  $m$ , ki lahko brez trenja drsita po vodoravni podlagi, ter treh vzmeti: leva in desna naj imata koeficient  $k$ , srednja pa  $k_s$  (Slika 56). Kolikšni sta lastni vrednosti krožne frekvence in kakšni so ustrezni nihajni načini?



Slika 56: Sklopljeno vzmetno nihalo

Tega problema ni treba reševati z zgoraj opisano metodo, ker si lahko pomagamo s simetrijo sestava. Zamislimo si premik  $x_1$  levega vozička iz ravnovesne lege proti desni,  $x_2$  pa premik desnega prav tako proti desni in predpostavimo  $x_2 > x_1$ . Da je sklepanje še lažje, naj bodo dolžine vseh treh vzmeti prav takšne, da v ravnovesni legi nobena ni niti skrčena niti raztegnjena. Pri predpostavljenih premikih vozičkov je potem leva vzmet raztegnjena, srednja tudi, desna vtmet je skrčena. Na levi voziček deluje leva vzmet s silo proti levi, srednja vzmet pa proti desni, na desni voziček delujeta tako srednja kot desna vzmet s silama proti levi. Sedaj lahko zapišemo Newtonov zakon za oba vozička:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kx_1 + k_s(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 &= -kx_2 - k_s(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Uvedemo novi spremenljivki:  $x_+ = x_2 + x_1$  in  $x_- = x_2 - x_1$ . Enačbi prvič seštejemo, drugič odštejemo, upoštevamo definiciji novih spremenljivk in dobimo razklopljeni enačbi za posamezni sinusni nihanji:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_+ &= -kx_+ \\ m\ddot{x}_- &= -(k + 2k_s)x_-. \end{aligned}$$

Ustrezni krožni frekvenci sta:

$$\begin{aligned} \omega_+ &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_- &= \sqrt{\frac{k+2k_s}{m}}. \end{aligned}$$

Tako niha spremenljivka  $x_+$  s krožno frekvenco  $\omega_+$ , spremenljivka  $x_-$  pa s krožno frekvenco  $\omega_-$ . Zapišemo lahko enačbo za odmik z obema členoma, sinusnim in kosinusnim, za obe spremenljivki, potem pa se vrnemo k  $x_1$  in  $x_2$ . Na splošno je:

$$\begin{aligned} x_1 &= A \sin(\omega_+ t) + B \cos(\omega_+ t) - C \sin(\omega_- t) - D \cos(\omega_- t) \\ x_2 &= A \sin(\omega_+ t) + B \cos(\omega_+ t) + C \sin(\omega_- t) + D \cos(\omega_- t). \end{aligned}$$

Konstante  $A$ ,  $B$ ,  $C$  in  $D$  dobimo s štirimi začetnimi pogoji: to sta oba odmika in obe hitrosti vozičkov v času nič. S fizikalnega vidika so zanimive predvsem tri kombinacije začetnih pogojev, kjer bomo vedno vzeli začetne hitrosti nič. Oba vozička na nek način odmaknemo iz ravnovesne lege in opazujemo, kaj se dogaja. Z odvajanjem enačb za oba odmika po času dobimo tudi obe hitrosti in vstavimo  $t = 0$ . Če naj bosta obe začetni hitrosti nič, mora biti  $A = C = 0$  in ostaneta samo kosinusni funkciji.

Način 1: Oba vozička odmaknemo za enak odmik  $x_{20} = x_{10}$  v desno in izpustimo. Ker sta odmika v  $t = 0$  enaka, velja:  $B + D = B - D \rightarrow D = 0$ . To pomeni, da nihajni način s krožno frekvenco  $\omega_-$  sploh ni prisoten. Odmika  $x_1$  in  $x_2$  sta enaka ves čas, ne samo na začetku. Srednja vzmet ni nikoli napeta in razumljivo je, da je v končnem rezultatu le krožna frekvenca  $\omega_+$ , kjer je prisoten samo koeficient  $k$  za levo in desno vzmet. Ta izid bi lahko uganili brez računanja: vozička z levo in desno vzmetjo pravzaprav nihata kot samostojni nihali, kot da sploh ne bi bilo srednje vzmeti.

Način 2: Oba vozička odmaknemo za nasprotno enaka odmika  $x_{20} = -x_{10}$  in izpustimo. Velja:  $B + D = -(B - D) \rightarrow B = 0$ . Zdaj nihajni način s krožno frekvenco  $\omega_+$  ni prisoten in imamo samo večjo krožno frekvenco  $\omega_-$ . Odmika sta ves čas nasprotno enaka, ne samo na začetku. Tudi srednja vzmet se v skladu z nihanjem obeh vozičkov izmenično razteza in krči in zato vpliva na krožno frekvenco: poveča jo, ker »pomaga« levi in desni vzmeti pri vračanju vozičkov nazaj v ravnovesno lego.

Način 3: Samo prvi voziček odmaknemo za odmik  $x_{10}$  v desno in izpustimo, medtem ko je bil začetni odmik drugega vozička nič. Velja:  $B - D = x_{10}$  in  $B + D = 0$ , zato morata biti koeficienta  $B = -D = \frac{1}{2}x_{10}$ . Dogajanje je precej bolj zanimivo kot pri prvih dveh načinih nihanja. Zapišimo spet enačbi za odmika glede na izračunane koeficiente in uporabimo tudi obratni adicijski izrek za kosinusno funkcijo:

$$x_1 = \frac{1}{2}x_{10}[\cos(\omega_+t) + \cos(\omega_-t)] = x_{10} \cos\left(\frac{\omega_- + \omega_+}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_- - \omega_+}{2}t\right)$$

$$x_2 = \frac{1}{2}x_{10}[\cos(\omega_+t) - \cos(\omega_-t)] = x_{10} \sin\left(\frac{\omega_- + \omega_+}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_- - \omega_+}{2}t\right).$$

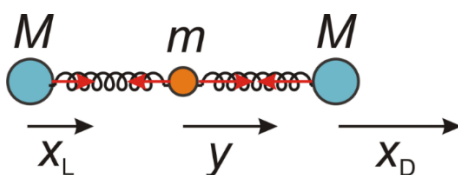
Najbolj nazoren je pomen zapisanih enačb, če je srednja vzmet precej šibkejša od leve in desne:  $k_s \ll k$ . Takrat se krožni frekvenci  $\omega_+$  in  $\omega_-$  ne razlikujeta veliko in drugi koeficient pri obeh odmikih, to je tisti s polovično razliko frekvenc, niha precej

počasneje od prvega. Zamislimo si, da oba vozička nihata s krožno frekvenco  $\frac{1}{2}(\omega_+ + \omega_-)$  in amplituda nihanja oscilira s frekvenco  $\frac{1}{2}(\omega_- - \omega_+)$ . Ko niha prvo nihalo najmočneje, drugo praktično miruje, in obratno. Energija nihanja se torej ves čas prenaša iz enega nihala na drugo in obratno.



### Računski zgled 45

Nihanje atomov v ravni molekuli  $\text{CO}_2$  obravnavamo z mehanskim modelom. Na sredini je ogljikov atom z maso  $m$ , levo in desno od njega sta kisikova atoma z maso po  $M$ . Med ogljikovim in vsakim kisikovim atomom je vijačna vzmet s koeficientom  $k$  (Slika 57). Ravnovesna razdalja C–O je  $a$  (ta podatek v računu sploh ne igra nobene vloge), in to je hkrati dolžina nenapete vzmeti. Obravnavajte linearno nihanje teh atomov.



**Slika 57:** Molekula  $\text{CO}_2$  kot sistem treh teles in dveh vzmeti; prikazani so odmiki v desno. Vsi trije odmiki hkrati v desno so dovoljeni, če ob nihanju vključimo tudi translacijo molekule. Sile vzmeti na telesa so prikazane z rdečimi puščicami.

Označimo odmik levega kisikovega atoma od ravnovesne lege v desno z  $x_L$ , odmik desnega kisikovega atoma v desno je  $x_D$ , odmik ogljikovega pa  $y$ . Za lažjo obravnavo enačb si zamislimo naraščajoče odmike v desno:  $x_L < y < x_D$ . Takrat sta obe vzmeti raztegnjeni, tako da se skušata zaradi sile vzmeti spet skrčiti in delujeta z ustreznimi silami na atome (Slika 57). Zapišimo drugi Newtonov zakon za vse tri atome:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_L &= k(y - x_L) \\ m\ddot{y} &= -k(y - x_L) + k(x_D - y) \\ M\ddot{x}_D &= k(y - x_D). \end{aligned}$$

Pri kisikovem atomu smo morali upoštevati obe vzmeti: leva ga vleče v levo (negativna sila), desna pa v desno (pozitivna sila). Predznaki v enačbah so pravilni, če je pri odmiku, ki ustreza pospešku v isti enačbi, negativen predznak. Pričakujemo, da nihajo vsi trije

atomi z enako frekvenco, vendar z različno amplitudo in faznim premikom. Najbolj praktično je odmike zapisati kompleksno:  $x_L = A \exp(i\omega t)$ ,  $y = B \exp(i\omega t)$ ,  $x_D = C \exp(i\omega t)$ , pri čemer so lahko kompleksne tudi amplitude  $A$ ,  $B$  in  $C$ . Še pred uporabo teh nastavkov za odmike vse tri enačbe delimo z ustrežno maso in definiramo krožni frekvenci za vzmetno nihalo s koeficientom vzmeti  $k$  in maso  $M$  ali  $m$ :  $\omega_M = \sqrt{\frac{k}{M}}$  in  $\omega_m = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Kisikova atoma imata večjo maso od ogljikovega, zato velja neenakost  $\omega_M < \omega_m$ . Zgornje tri diferencialne enačbe se prelevijo v navadne enačbe za koeficiente (amplitude):

$$\begin{aligned} -\omega^2 A &= \omega_M^2 (B - A) \\ -\omega^2 B &= \omega_m^2 (A + C - 2B) \\ -\omega^2 C &= \omega_M^2 (B - C). \end{aligned}$$

To je sistem treh homogenih linearnih enačb, ki jih prepisemo v matrično obliko:

$$\begin{bmatrix} \omega^2 - \omega_M^2 & \omega_M^2 & 0 \\ \omega_m^2 & \omega^2 - 2\omega_m^2 & \omega_m^2 \\ 0 & \omega_M^2 & \omega^2 - \omega_M^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = 0.$$

Ob koeficientih  $A$ ,  $B$  in  $C$  je neznana tudi krožna frekvenca  $\omega$ , ki pa jo v tem sistemu enačb gledamo kot parameter in ne kot neznanko. Homogeni sistem linearnih enačb ima od nič različne rešitve samo, če je determinanta matrike sistema enaka nič. Pridelamo enačbo tretje stopnje za neznanko  $\omega^2$ :

$$\omega^2 [\omega^4 - 2(\omega_M^2 + \omega_m^2)\omega^2 + \omega_M^2(\omega_M^2 + 2\omega_m^2)] = 0.$$

Prva rešitev,  $\omega = 0$ , pomeni samo translacijo celotne molekule, zato ni zanimiva. Hitro se prepričamo, da ji ustrezajo enaki premiki:  $A = B = C$ . Zapišimo pozitivni rešitvi, ki resnično pomenita nihanje in sta enostavni:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_M \\ \omega_2 &= \sqrt{\omega_M^2 + 2\omega_m^2}. \end{aligned}$$

Fizikalna interpretacija obeh rešitev je preprosta, če vstavimo ti frekvenci v zgornji sistem enačb in izrazimo zveze med koeficienti. V primeru  $\omega = \omega_1$  ugotovimo:  $C = -A$ ,  $B = 0$ . To pomeni, da ogljikov atom miruje (zato v enačbi za to krožno frekvenco ni mase tega atoma), kisikova pa nihata v nasprotni stopnji; to je fizikalno smiselno, saj ostaja pri takšnem nihanju težišče molekule pri miru. V primeru  $\omega = \omega_2$  nihajo vsi trije atomi:  $C = A$ ,  $B = -\frac{2M}{m}A$ . Kisikova atoma nihata z enako fazo, ogljikov atom pa gre v nasprotno smer in njegov odmik ima večjo amplitudo. Spet ostaja težišče molekule pri miru:  $M(A + C) + mB = 0$ .

Čeprav lastnih frekvenc ne moremo izračunati neposredno, ker bi morali poznati koeficient vzmeti oziroma ustrezne medatomske sile, je njuno razmerje neodvisno od  $k$ :

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{1 + \frac{2M}{m}}.$$

Količnik frekvenc, ki ga lahko preverimo eksperimentalno, npr. z absorpcijo elektromagnetnega valovanja primernih valovnih dolžin, je odvisen samo od razmerja znanih mas atomov obeh vrst,  $\frac{M}{m} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$ , kar nam da količnik 1,91.

## 6.5 Nihanje kristalne mreže

Pomemben zgled sklopljenega nihanja v fiziki trdne snovi je koherentno nihanje atomov v kristalni mreži urejene trdne snovi. Zato mu namenimo cel razdelek. Obravnava se ponavadi začne v okviru klasične fizike, in nato preidemo na kvantnomehanski opis nihanja. Takšna nihanja kristalne mreže imenujemo fononska nihanja, posameznim nihajnim vzbuditvam pa fononi. Za nazorno predstavitev naredimo najprej dva računa z enodimenzionalnim (1D) kristalom. Kot pri zgornjem zgledu z nihanjem molekule  $\text{CO}_2$  ponazorimo medatomske sile med sosednjimi atomi z linearnimi vijačnimi vzmetmi.



### Računski zgled 46

Sklopljeno nihanje atomov v kristalni mreži in hkrati longitudinalno komponento valovanja kot zvok prikažemo s preprostim 1D modelom. Z njim obravnavamo  $N$  enakih atomov z maso  $m$  in z ravnovesno medsebojno razdaljo  $a$ . Med sosednjima atomoma je vijačna vzmet s koeficientom  $k$ . Umetno privzamemo, da sta z vzmetjo

povezana tudi prvi (najbolj levi) in zadnji (najbolj desni) atom. To je samo matematična poenostavitev, ki sicer zaradi velikega števila atomov nima nobenega fizikalnega vpliva na sistem. Obravnavajmo linearno nihanje teh atomov in hkrati longitudinalni val ter izrazimo zvočno hitrost.

Označimo odmik  $j$ -tega atoma od ravnovesne lege v desno z  $x_j$ . Namesto nastavka za nihanje kot pri prejšnjem zgledu uporabimo nastavek za longitudinalni ravni val, najprej v zveznem približku:  $\Delta x = A \exp[i(\omega t - qx)]$ . Prehod k diskretni sliki ali nihanju posameznih atomov naredimo z nadomestitvijo  $x \rightarrow x_j = (j - 1)a$ , če je prvi atom pri  $x = 0$ . Torej je nastavek v diskretnem modelu:  $x_j = A \exp[i(\omega t - q(j - 1)a)]$ . Newtonov zakon pove:

$$m\ddot{x}_j = -k(x_j - x_{j-1}) + k(x_{j+1} - x_j) = k(x_{j+1} + x_{j-1} - 2x_j).$$

Uporabimo omenjeni nastavek za  $x_j$ , krajšamo skupni koeficient  $A$  in tudi časovni del eksponentne funkcije in tudi krajevni del  $\exp[-iq(j - 1)a]$ , potem delimo z  $-m$ . Nazadnje dobimo zvezo:

$$\omega^2 = -\frac{k}{m} [e^{-iqa} + e^{iqa} - 2]$$

ali

$$\omega^2 = \frac{2k}{m} [1 - \cos(qa)] = \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{qa}{2}.$$

Ta problem je v matematičnem smislu drugačen kot problem nihanja molekule  $\text{CO}_2$ . Zdaj izrazimo krožno frekvenco kot funkcijo valovnega števila  $q$ :

$$\omega = 2\omega_0 \sin \frac{qa}{2}. \quad (6.28)$$

Uporabili smo krožno frekvenco enostavnega vzmetnega nihala:  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Fazna hitrost valovanja je:

$$c_f = \frac{\omega}{q} = \frac{2\omega_0}{q} \sin \frac{qa}{2}. \quad (6.29 \text{ a})$$



Grupna (skupinska) hitrost je:

$$c_g = \frac{d\omega}{dq} = \omega_0 a \cdot \cos \frac{qa}{2}. \quad (6.29 \text{ b})$$

V primeru dolgih valov ali majhnega valovnega vektorja  $q = \frac{2\pi}{\lambda}$  velja  $\frac{1}{2}qa \ll 1$  in se fazna in grupna hitrost ujemata, to pomeni, da ni disperzije:

$$c_f = c_g \approx \omega_0 a.$$

Kako bi to izrazili tudi drugače, z makroskopskimi parametri snovi, namesto s tremi mikroskopskimi parametri ( $m$  = masa atoma,  $k$  = medatomska vez, podana kot konstanta vzmeti,  $a$  = ravnovesna razdalja med sosednjima atomoma)? Povedano drugače: kako bi se vrnil k zvezni, makroskopski sliki valovanja v snovi, s katero smo reševanje problema pravzaprav začeli? Namesto vzmeti si zamislimo kar ravno tanko palico s prerezom  $S$  in dolžino  $a$ . Youngov modul palice je  $E$ , Hookov zakon zanjo je oblike:  $F = kx = \frac{ESx}{a}$ . Temu ustreza konstanta vzmeti  $k = \frac{ES}{a}$ . Namesto da bi bila masa zbrana v kroglicah (atomih) med vzmetmi, je enakomerno porazdeljena kar po tanki palici, ki je hkrati vzmet:  $m = \rho V = \rho Sa$ . Zložimo vse skupaj za dolge valove:

$$c = \omega_0 a = \sqrt{\frac{ka^2}{m}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

To je hitrost zvoka v trdni snovi.



### Računski zgled 47

Spet obravnavajmo 1D model fononskega nihanja, le da imamo sedaj v vsaki kristalni celici po dva različna atoma. Vzamemo  $N$  parov atomov, kjer ima v vsaki celici levi atom maso  $m_1$ , desni pa  $m_2$ . Ravnovesna razdalja med levim in desnim atomom v isti celici naj bo  $a_1$ , med desnim atomom ene celice in levim atomom naslednje celice na desni pa  $a_2$ . Pravzaprav bo pri našem računu pomembna skupna velikost celice:  $a = a_1 + a_2$ . Razdaljama  $a_1$  in  $a_2$  ustrezata nenapeti vzmeti s koeficientoma  $k_1$  in  $k_2$ . Spet

privzamemo ciklično povezavo, to je, da sta z vzmetjo s koeficientom  $k_2$  povezana tudi prvi in zadnji atom.

Račun združuje obravnavo prejšnjih dveh zgledov, molekule CO<sub>2</sub> in 1D mreže z enakimi atomi. Označimo odmik levega atoma v  $j$ -ti celici od ravnovesne lege v desno z  $x_j$ , desnega atoma pa z  $y_j$ . Nastavek za odmike obeh vrst atomov je analogen tistemu v prejšnjem računskem zgledu:  $x_j = A \exp[i(\omega t - q(j-1)a)]$  in  $y_j = B \exp[i(\omega t - q(j-1)a)]$ . Po drugem Newtonovem zakonu je:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_j &= -k_2(x_j - y_{j-1}) + k_1(y_j - x_j) \\ m_2 \ddot{y}_j &= k_2(x_{j+1} - y_j) - k_1(y_j - x_j). \end{aligned}$$

Koristna je vpeljava štirih značilnih krožnih frekvenc:  $\omega_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{k_\alpha}{m_\beta}}$ , kjer sta indeksa  $\alpha$  in  $\beta$  lahko 1 ali 2. Uporabimo nastavek za odmike, krajšamo dele eksponentne funkcije podobno kot pri prejšnjem zgledu, in dobimo sistem dveh enačb za amplitudi  $A$  in  $B$ :

$$\begin{aligned} [\omega_{21}^2 + \omega_{11}^2 - \omega^2]A - [\omega_{21}^2 e^{iqa} + \omega_{11}^2]B &= 0 \\ -[\omega_{22}^2 e^{-iqa} + \omega_{12}^2]A + [\omega_{12}^2 + \omega_{22}^2 - \omega^2]B &= 0. \end{aligned}$$

To je homogen sistem enačb in ima od nič različno rešitev le, če je determinanta matrike sistema enaka nič. Od tukaj izhaja kvadratna enačba za kvadrat krožne frekvence:

$$\begin{aligned} \omega^4 + b\omega^2 + c &= 0 \\ b &= -(\omega_{11}^2 + \omega_{12}^2 + \omega_{21}^2 + \omega_{22}^2) \\ c &= 2(\omega_{11}^2 \omega_{22}^2 (1 + \cos(qa)) + \omega_{11}^2 \omega_{12}^2 + \omega_{22}^2 \omega_{21}^2). \end{aligned}$$

Vsi koeficienti so realni, kot morajo biti, ne glede na kompleksni nastavek za odmike atomov. Da smo iz obeh eksponentnih funkcij z imaginarnima eksponentoma  $\pm iqa$  dobili realno kosinusno funkcijo, smo si pomagali tudi z enakostjo  $(\omega_{12}\omega_{21})^2 = (\omega_{11}\omega_{22})^2$ , ki izhaja iz definicije teh količin. Pri korenjenju obeh rešitev za  $\omega^2$  vzamemo pozitivni koren, tako da sta rešitvi:

$$\omega = \sqrt{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}}.$$

Koeficient  $b$  je negativen, tako da sta obe rešitvi smiselni. Ne bomo ju zapisali bolj eksplicitno, s podanima masama in koeficientoma vzmeti, ker bi bil izraz nepregleden.

Narejena računsko zgleđa sta primeren uvod za splošnejšo teorijo fononskega nihanja. V kristalni mreži je gradbena enota osnovna celica, ki se ponavlja po celem kristalu. Obravnavamo samo idealni monokristal trdne snovi. Naj vsebuje kristal  $N$  osnovnih celic, vsaka od njih naj ima  $K$  atomov. Ker se lahko vsak atom giblje neodvisno v treh pravokotnih smereh, je skupno število vseh prostostnih stopenj enako  $f = 3NK$ . Vendar ne opazujemo neurejena gibanja, kjer se giblje vsak atom po svoje, temveč kolektivna harmonična nihanja kot v dveh zgornjih primerih z 1D mrežo. Če torej izberemo določeni 3D valovni vektor  $\vec{q}$ , potem bo število prostostnih stopenj takšnih sklopljenih nihanj samo  $f = 3K$  namesto  $3NK$ . Število prostostnih stopenj kolektivnega nihanja (rečemo tudi število vej; ime veja bomo razložili v nadaljevanju) je tolikšno, kot je število rešitev za krožno frekvenco pri izbranem  $\vec{q}$ . Zgornja zgleđa za 1D problem sklopljenega nihanja to potrjujeta: za mrežo s po 1 atomom v celici imamo samo eno vrednost krožne frekvence, za mrežo z 2 atomoma v celici pa dve. V 3D moramo to število pomnožiti s 3. Pri analizi nihanja bomo uporabljali pri seštevanju naslednje indekse:  $n$  za osnovno celico,  $k$  za kateregakoli od  $K$  atomov v isti celici in  $j$  za vejo. Krožna frekvenco, ki je tako kot  $\vec{q}$  enaka za vse atome, saj gre za usklajeno nihanje, je odvisna samo od valovnega vektorja  $\vec{q}$  in veje  $j$ . Zato jo lahko označimo z  $\omega_{\vec{q}j}$  ali še bolj nazorno  $\omega_j(\vec{q})$ . Zdaj lahko razumemo pomen termina veja. Če obravnavamo nihanje klasično, ima vektor  $\vec{q}$  poljubno vrednost, je zvezna spremenljivka. Če si zdaj zamislimo 2 fiksirani komponenti  $\vec{q}$ , lahko gledamo na  $\omega$  pri izbrani veji kot na zvezno funkcijo variabilne komponente vektorja  $\vec{q}$ . Temu ustreza določen graf  $\omega_j(q)$ , če s  $q$  označimo neko komponento valovnega vektorja v izbrani, ponavadi simetrijski smeri. Za različne  $j$  dobimo različne krivulje – veje. Vsaka od vej je v diagramu  $\omega(q)$ , kjer je spremenljivka  $q$  na vodoravni osi, zvezna funkcija  $q$ , različne veje pa ležijo ena nad drugo.

Naj bo trenutni odmik  $k$ -tega atoma v  $n$ -ti osnovni celici od ravnovesne lega enak  $\vec{u}_{nk}$ . Za opis leg osnovnih celic samih (ne glede na atome v njih) uporabljamo mrežne vektorje, če si nekje v kristalni strukturi izberemo izhodišče koordinatnega sistema. Lego  $n$ -te celice podaja mrežni vektor  $\vec{R}_n$ . ponavadi zaradi praktičnosti vzamemo, da gre ta vektor od izhodišča do izbrane robne točke  $n$ -te celice. Zaradi translacijske simetrije in polnosti kristala (seveda ne sme biti niti lukenj niti prekrivanja osnovnih celic) mora

namreč imeti osnovna celica obliko paralelepipeda. Lagrangian za nihanje vseh atomov je:

$$L = \frac{1}{2} m_k |\vec{u}_{nk}|^2 - \frac{1}{2} \vec{u}_{nk} \cdot (D_{nk,n'k'} \vec{u}_{n'k'}). \quad (6.30)$$

Pri členu s kinetično energijo seštevamo po vseh  $n$  in  $k$ , pri členu s potencialno energijo tudi po indeksih  $n'$  in  $k'$ . Pri tem je  $m_k$  masa  $k$ -tega atoma v celici,  $D_{nk,n'k'}$  pa ogromen tenzor s 4 indeksi in skupaj  $9N^2K^2$  elementi. Pika v drugi vsoti v (6.30) pomeni skalarni produkt. Tenzor  $D$  je povezan s potencialno energijo, podobno kot  $V_{ij}$  v enačbah (6.18) in (6.19). Iz Lagrangiana (6.30) izhaja sistem ELE (za vsak par  $n$  in  $k$  posebej, medtem ko je na desni strani enačb vsota po  $n'$  in  $k'$ ):

$$m_k \frac{d^2}{dt^2} \vec{u}_{nk} = -D_{nk,n'k'} \vec{u}_{n'k'}. \quad (6.31)$$

Poskusimo s harmoničnim nastavkom za vse odmike:

$$\vec{u}_{nk} = \frac{1}{\sqrt{Nm_k}} \vec{\varepsilon}_{kj} \cdot \exp[i(\vec{q} \cdot \vec{R}_n - \omega_j t)]. \quad (6.32)$$

Z indeksom  $j$  pri normirani amplitudi  $k$ -tega atoma  $\vec{\varepsilon}_{kj}$  in pri krožni frekvenci  $\omega_j$  poudarimo, da gre za  $j$ -to vejo. Seveda sta obe količini odvisni tudi od valovnega vektorja, vendar tega ne bomo posebej poudarjali. Ob vstavitvi nastavka (6.32) v enačbo (6.31) pridemo na naslednje enačbe (vsota po indeksih  $n'$  in  $k'$ ):

$$\omega_j^2 \vec{\varepsilon}_{kj} = \frac{1}{\sqrt{m_k m_{k'}}} D_{nk,n'k'} \cdot \exp[i\vec{q} \cdot (\vec{R}_{n'} - \vec{R}_n)] \vec{\varepsilon}_{k'j}. \quad (6.33)$$

Enačbo (6.33) lahko napišemo v kompaktnejši obliki, če na njeni desni strani najprej seštejemo po indeksu  $n'$  in definiramo nov matrični element:

$$D_{k,k'} = \frac{1}{\sqrt{m_k m_{k'}}} D_{nk,n'k'} \cdot \exp[i\vec{q} \cdot (\vec{R}_{n'} - \vec{R}_n)]. \quad (6.34)$$

Čeprav se sprva pojavi na desni strani enačbe tudi indeks  $n$ , matrični element zaradi translacijske simetrije ne more biti odvisen od njega. Tako nazadnje dobimo dinamično enačbo za nihanje, neodvisno od indeksa  $n$ :

$$\omega_j^2 \vec{\varepsilon}_{kj} = D_{k,k'} \vec{\varepsilon}_{k'j}. \quad (6.35)$$

Ta enačba sklaplja le nihanje atomov v isti osnovni celici, hkrati je to enačba za lastno vrednost krožne frekvence. V celici je  $K$  atomov, zato lahko pri istem valovnem vektorju  $\vec{q}$  dobimo  $3K$  rešitev (vej) za krožno frekvenco  $\omega_j$ . Od teh vej so tri tako imenovane akustične, preostale so optične veje. Tri akustične veje se od optičnih razlikujejo po tem, da velja v limiti  $\omega(q \rightarrow 0) \rightarrow 0$ ; hkrati z velikostjo valovnega vektorja gre k nič tudi krožna frekvenca. Podrobnejša analiza na osnovi simetrijskih lastnosti tenzorja  $D_{nk,n'k'}$  zaradi translacijske simetrije kristala pokaže, da je pri treh akustičnih vejah pri majhnih velikostih valovnega vektorja krožna frekvenca nihanja sorazmerna z njegovo velikostjo:  $\omega_j(\vec{q}) \approx c_j q$ . Pri tem je  $c_j$  fazna hitrost, ki je za vsako od treh vej različna. Pri optičnih vejah za majhne  $q$  približno velja padajoča kvadratna odvisnost:  $\omega_j(\vec{q}) \approx A_j - B_j q^2$ , kjer sta koeficienta  $A_j$  in  $B_j$  pozitivna.

Za konec omenimo tudi nekaj zanimivosti. Tenzor  $D_{nk,n'k'}$  je povezan tako s translacijsko kot s točkovno simetrijo kristalne strukture. Te simetrijske lastnosti lahko opišemo v okviru teorije grup, naš tenzor je v tem pogledu upodobitveni tenzor. Pri kvantnomehanski obravnavi fononov (kolektivnih mrežnih nihanj) vzamemo za izhodišče zgornji klasični opis. Fononi so povezani tudi z gibanjem prevodnih elektronov pri superprevodnikih, kar moramo obravnavati povsem v okviru kvantne mehanike. V okviru teorije BCS (po avtorjih Bardeen, Cooper, Schrieffer; Nobelova nagrada za fiziko) za klasične superprevodnike so kvantno-mehansko povezani pari elektronov (Cooperjevi pari) na zapleten način povezani s fononi, kar omogoči, da pade električni upor superprevodnih snovi na vrednost nič pri temperaturi prehoda večji od nič.



## 7 Posebna teorija relativnosti (PTR)

Teorijo je razvil Albert Einstein in je nadgradnja Newtonove klasične fizike v primerih, ko se telesa gibljejo z velikimi hitrostmi, to je, primerljivimi s svetlobno hitrostjo  $c$ . Posebna teorija relativnosti (PTR) se nanaša na primere, ko ni močne gravitacije in tudi ni prevelikih pospeškov teles, zato je prostor skoraj raven. Splošna teorija relativnosti (STR) obravnava tudi gravitacijo in močno ukrivljeni prostor zaradi gravitacije. Tukaj se bomo omejili na PTR. Posebnost te teorije v primerjavi z Newtonovo mehaniko je med drugim pojmovanje časa. Čas v relativnostni teoriji ni samostojen in od fizikalnega dogajanja neodvisen parameter, temveč se s tremi prostorskimi koordinatami povezuje v štiridimenzionalen (4D) prostor. Imenujemo ga prostor Minkowskega. Seveda mora biti ne glede na poseben značaj časovne komponente njena fizikalna enota usklajena z enoto drugih treh (»prostorskih«) komponent. Prostor Minkowskega je raven. To pomeni, da za njegov tridimenzionalni »prostorski« del velja evklidska geometrija. To je geometrija, na katero smo navajeni iz šole (npr., da je vsota kotov v trikotniku enaka vsoti dveh pravih kotov). Teorija PTR je nastala zaradi težav v predhodni teoretični fiziki; ključna pa je ta, da je svetlobna hitrost v vakuumu enaka v vseh nepospešenih (inercialnih) opazovalnih sistemih, medtem ko naj bi se po Galilejevi transformaciji po prehodu iz enega sistema v drugega spremenila.

Zato je med glavnimi cilji PTR pravilna transformacija med različnimi inercialnimi koordinatnimi sistemi pri hitrostih, primerljivih s  $c$ . Med drugim tudi čas ni več inerten, kot smo že namignili zgoraj, temveč se transformira. Današnja natančna deklarirana vrednost svetlobne hitrosti je:  $c = 2,99\,792\,458 \cdot 10^8$  m/s. To seveda ne pomeni, da je

raziskovalcem uspelo izmeriti svetlobno hitrost z absolutno natančnostjo in da so »slučajno« od zadnje osmice naprej same ničle, temveč da so morali na novo definirati nekaj drugega. Bralec naj si ogleda današnje definicijo za enoto meter. Je pa svetlobna hitrost fizikalno povezana z elektromagnetizmom ter influenčno in indukcijsko konstanto :  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ . Osnovna postulata PRT sta: I) vsi zakoni narave so enaki v vseh inercialnih koordinatnih sistemih; II)  $c$  je enaka v vseh inercialnih sistemih (pravimo, da je  $c$  invarianta).

## 7.1 Lorentzova transformacija

Osnovni in najbolj znan model za PTR je, da se koordinatni sistem  $S'$  giblje premo enakomerno s hitrostjo  $v_0$  v smeri osi  $x$  glede na inercialni sistem  $S$ , v času  $t = 0$  obe koordinatni izhodišči sovpadata. Pri tem osi  $x$  ves čas sovpadata, druge osi v obeh sistemih pa so paroma vzporedne. S to geometrijo najhitreje izpeljemo ustrezne transformacijske enačbe na osnovi invariantne vrednosti svetlobne hitrosti. Transformacijske enačbe v prostoru Minkowskega imenujemo Lorentzova transformacija. Ta je bila znana že pred razvojem PTR, nanašala se je na enačbe v elektromagnetizmu. Zato lahko imamo elektromagnetizem in Maxwellove enačbe, ki so invariantne na Lorentzovo transformacijo, za predhodnika PTR. Za majhne hitrosti relativnega gibanja dveh inercialnih koordinatnih sistemov,  $v_0 \ll c$ , je uporabna Galilejeva transformacija kot izhodišče za bolj zapleteno Lorentzovo transformacijo:

$$\begin{aligned}x' &= x - v_0 t \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= t.\end{aligned}$$

Pri tem so simboli brez črtice koordinate poljubnega točkastega telesa v »mirujočem« sistemu  $S$  in  $t$  je čas, merjen kjerkoli v starem sistemu. Simboli s črtico se nanašajo na »gibajoči se« sistem  $S'$ . Besedi »mirujoči« in »gibajoči« smo namenoma dali med navednice, ker je samo stvar dogovora, kateri inercialni sistem postavimo za mirujočega. V zgornji transformaciji se spremeni samo koordinata  $x$ . Iz teh enačb sledijo enačbe za transformacijo hitrosti kakega telesa:

$$\begin{aligned}v'_x &= v_x - v_0 \\v'_y &= v_y \\v'_z &= v_z.\end{aligned}$$



Z vidika postulata o enakosti  $c$  so te enačbe napačne, ker bi se po njih spremenila hitrost delca s svetlobno hitrostjo, npr. fotona, v novem sistemu. Einsteinove transformacijske enačbe (Lorentzova transformacija) so tako spremenjene Galilejeve enačbe, da: 1) še vedno spominjajo nanje, 2) v limiti  $v_0 \ll c$  preidejo Einsteinove enačbe nazaj v Galilejeve, 3) je hitrost  $c$  v obeh sistemih enaka. Vpeljimo tudi količnik hitrosti  $\beta_0 = \frac{v_0}{c}$ . Lorentzove enačbe so:

$$x' = \gamma_0(x - \beta_0 ct) \quad (7.1 \text{ a})$$

$$y' = y \quad (7.1 \text{ b})$$

$$z' = z \quad (7.1 \text{ c})$$

$$t' = \gamma_0 \left( t - \beta_0 \frac{x}{c} \right). \quad (7.1 \text{ č})$$

Vpeljali smo relativistični koeficient:

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}. \quad (7.2)$$

Zakaj smo temu koeficientu dodali tudi indeks 0, bomo razložili kasneje. Koristne so tudi inverzne enačbe, ki ustrezajo (7.1), to je, kako iz količin s črtico dobimo količine brez črtice. Prečni koordinati  $y$  in  $z$  sta trivialni. Koordinato  $x$  in čas  $t$  lahko izračunamo na dva načina: 1) iz sistema enačb (7.1 a) in (7.1 č); 2) da zamenjamo vlogi obeh koordinatnih sistemov in hkrati zamenjamo predznak hitrosti  $v_0$ , in s tem koeficienta  $\beta_0$ . Če se namreč sistem  $S'$  giblje glede na  $S$  v desno, se sistem  $S$  giblje glede na  $S'$  v levo. V obeh primerih dobimo enak rezultat, kar potrjuje enačbo (7.2) za  $\gamma_0$ . Zapišimo torej inverzne enačbe:

$$x = \gamma_0(x' + \beta_0 ct') \quad (7.3 \text{ a})$$

$$y = y' \quad (7.3 \text{ b})$$

$$z = z' \quad (7.3 \text{ c})$$

$$t = \gamma_0 \left( t' + \beta_0 \frac{x'}{c} \right). \quad (7.3 \text{ č})$$

Uvedimo kompleksni krajevni vektor četverec (na kratko 4–vektor), ki vsebuje tako čas kot koordinate:  $x^{(4)} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ , kjer pomenijo  $x^0 = ict$ ,  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$  in  $x^3 = z$ . Posebnost je imaginarna prva komponenta. To je le eden od načinov prikaza

4–vektorjev. Tedaj lahko zapišemo Einsteinove enačbe v matrični obliki:  $x^{(4)'} = T x^{(4)}$ , kjer zapišemo matriko  $4 \times 4$  v bločni obliki z dvema matrikama  $2 \times 2$ :

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix} \quad (7.4 \text{ a})$$

$$T_1 = \gamma_0 \begin{bmatrix} 1 & -i\beta_0 \\ i\beta_0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.4 \text{ b})$$

$$Id = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.4 \text{ c})$$

Tudi »ničli« v matriki (7.4 a) sta pravzaprav matriki  $2 \times 2$  z vsemi elementi 0. Transformacijska matrika  $T$  se imenuje Lorentzova matrika (tenzor) in je hermitska:  $T^{*t} = T$ . Znak  $*$  pomeni kompleksno konjugacijo (imaginarna komponenta števila spremeni predznak) in  $t$  pomeni transponiranje matrike (zrcaljenje preko diagonale ali zamenjava vrstic in stolpcev). Velja tudi ortogonalnost:  $T^t = T^{-1}$ , to je, transponirana matrika je enaka inverzni. Tenzor ohranja skalarni produkt četverca samega s sabo:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2. \quad (7.5)$$

Pomembna enačba (7.5) se da preveriti neposredno iz enačb (7.1). Skalarni produkti v 4D prostoru Minkowskega so takšni, da ima »časovni« člen negativen predznak.

Transformacijo komponent hitrosti dobimo tako, da poiščemo diferencialne  $dx'$ ,  $dy'$ ,  $dz'$  in  $dt'$  in z njimi izračunamo nove komponente hitrosti, npr.  $v'_x = \frac{dx'}{dt'}$ . Tako dobimo enačbe:

$$v'_x = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}} \quad (7.6 \text{ a})$$

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma_0 \left(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}\right)} \quad (7.6 \text{ b})$$

$$v'_z = \frac{v_z}{\gamma_0 \left(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}\right)}. \quad (7.6 \text{ c})$$

Za vajo vzemimo naslednji dve možnosti:  $\vec{v} = (c, 0, 0)$  in  $\vec{v} = (0, c, 0)$ . V obeh primerih lahko preverimo, da je velikost transformirane hitrosti spet  $c$ . Lahko pa to z enačbami (7.6) dokažemo tudi v splošnejšem primeru: če velja  $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = c^2$ , velja enaka enačba tudi za vsoto kvadratov transformiranih komponent hitrosti.

## 7.2 Posebni učinki Lorentzove transformacije

Poglejmo nekaj posebnosti v zvezi z danimi transformacijami.

### Neohranitev sočasnosti dogodkov na različnih mestih

Če sta dva dogodka pri različnih koordinatah v  $S$  zgodita v istem času  $t$ , potem ustrezna časa  $t'$  v novem sistemu nista več enaka. Na primer:  $x_1 \neq x_2$ ,  $t_1 = t_2$ . Kolikšen je časovni premik sistemov je  $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ ? Izračun pokaže:  $\Delta t' = -\frac{\gamma_0 v_0 \Delta x}{c^2}$ , kjer je  $\Delta x = x_2 - x_1$ .

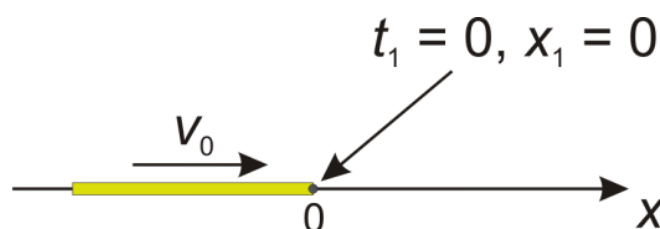
### Podaljšanje časa

Naj se dva dogodka zgodita na istem mestu v dveh različnih časih v  $S$ :  $x_1 = x_2$ ,  $t_1 \neq t_2$ . Račun pokaže drugačen časovni interval v sistemu  $S'$ :  $\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma_0(t_2 - t_1)$ . Časovni intervali se v  $S'$  povečajo. Zaradi relativnosti gibanja (kaj miruje in kaj se giblje?) pride do navideznih protislovij, če stvari ne razložimo pravilno. Zato poskusimo to interpretirati pri enem od znanih fizikalnih sistemov. Mioni so nestabilni električno nabiti delci, podobni elektronom, vendar so masivnejši. Njihov razpadni čas po nastanku, npr. pri jedrskih poskusih, je  $2,2 \mu\text{s}$ . Toliko časa »živi« povprečen mirujoči mion, preden razpade. Kaj pa, če mione pospešimo do zelo velikih hitrosti, blizu svetlobne hitrosti? Ker smo jih morali pospešiti, novi inercialni sistem  $S'$ , ki se giblje skupaj z enim od mionov, ni enakovreden laboratorijskemu sistemu  $S$ . Če bi se lahko vživel v »kožo« miona in se gibal skupaj z njim, bi opazili, da mion sam prav nič ne »občuti«, da se giblje skoraj s hitrostjo  $c$ . Z njegove lastne perspektive bo živel prav tako v povprečju  $2,2 \mu\text{s}$ , kot če bi miroval (glede na laboratorijski sistem). Vendar mi, ki mirujemo v laboratorijskemu sistemu, v resnici opazimo, da živi zelo hitri mion veliko dlje. Podobno je s človekom, ki ga pospešimo do skoraj svetlobne hitrosti in pošljemo v vesolje. Zmotna je misel, da si tako vesoljec glede na svojo lastno perspektivo podaljša življenje! Samo mi, »zunanjci« opazovalci, **posredno** ugotovimo, da njegov čas (torej tudi njegove misli in občutki) z našega vidika teče počasneje. To nakazuje, da je smiselno govoriti o **lastnem času**  $\tau$ , ki je invarianta (neodvisen od koordinatnega sistema). Natančneje morda lahko zapišemo takole: lastni čas za neko točkasto telo je identičen času v izhodišču koordinatnega sistema, ki se giblje skupaj s telesom (translacijsko in rotacijsko) in ki ima to telo ves čas v izhodišču, ne glede na to, ali je gibanje telesa pospešeno ali nepospešeno (glede na katerikoli drug opazovalni sistem), ne glede na

gravitacijo in nehomogenost gravitacijskega polje, v katerem je telo, itd. Lastni čas je najkrajši čas, to je, krajši od vseh transformiranih časov.

### Skrčenje dolžin v smeri gibanja

Dolžine se skrčijo za isti relativistični koeficient, kot se podaljša čas. Neposredno je to povezano z ohranitvijo svetlobne hitrosti. Vendar moramo bit tudi tukaj natančni, tako kot pri pojavu podaljšanega časa. Za katerega opazovalca (v katerem sistemu) in glede na kaj se dolžine skrčijo? Interpretacija merjenja dolžine je morda še nekoliko zahtevnejša kot interpretacija časovnih intervalov. Recimo, da vemo, da se mimo nas (mirujočega opazovalca) giblje palica z zelo veliko hitrostjo  $v_0$ . Dolžine ne moremo izmeriti kar tako, da čakamo z metriskim trakom. Pomagamo si posredno, z merjenjem časa, ko pride mimo nas najprej sprednji in potem zadnji konec palice. Torej spet začnemo s koordinatnim sistemom  $S$ . Opazovalec čaka s štoparico v izhodišču  $S$ . Naj ima zanj palica dolžino  $l$  (v resnici on izračuna  $l$  šele s primerjavo časov, ampak pri tej izpeljavi obrnimo zaradi nazornosti začetne podatke drugače). Najprej v trenutku  $t_1 = 0$  (takrat opazovalec ponastavi štoparico na nič) pride sprednji konec palice, ki se giblje v desno, v izhodišče, torej  $x_1 = 0$ . Takrat je zadnji konec palice še na negativnem poltraku osi  $x$ , za dolžino  $l$  levo od izhodišča (Slika 58). Palica se giblje enakomerno, zato pride v izhodišče ( $x_2 = 0$ ) zadnji konec palice v trenutku  $t_2 = \frac{l}{v_0}$ . Transformirajmo zdaj koordinati  $x$  po enačbi (7.1 a), medtem ko nas ustrezna časa ne zanimata. Ker sta tako  $x_1$  kot  $t_1$  enaka nič, dobimo tudi  $x'_1 = 0$ . Za drugi dogodek je  $x'_2 = \gamma_0(x_2 - v_0 t_2) = -\gamma_0 l$ . Zato dolžino palice glede na  $S'$  vzamemo kot absolutno vrednost  $x'_2$ , to je,  $l' = \gamma_0 l$ . Lastna dolžina palice je za koeficient  $\gamma_0$  večja od dolžine v sistemu  $S$ , ali obratno: dolžina palice v sistemu  $S$  je za koeficient  $\gamma_0$  manjša od lastne dolžine v  $S'$ . Pri relativističnih učinkih je treba biti zaradi pomanjkanja intuicije natančen, in to je edini način, kako natančno in nedvoumno definirati dolžino za hitra telesa.



Slika 58: Meritev dolžine gibajoče se palice v sistemu  $S$ . Prikazan je »ničelni«  
trenutek  $t_1 = 0$ , ko je desni konec palice že v izhodišču, levi konec pa še levo od izhodišča in ga bo dosegel v poznejšem času  $t_2 > 0$ .

Zdaj, ko imamo pred seboj Sliko 58, bodimo pozorni. Opazovalec ne more pravilno meriti hkrati dva konca gibajoče se palice, kot morda zavaja pogled na sliko. V trenutku  $t_1 = 0$ , ko je sprednji (desni) konec palice v izhodišču, opazovalec, ki je tudi v izhodišču (ali pa ima tam oči), ne more v istem trenutku neposredno razsojati o njenem zadnjem (levem) koncu, že zato ne, ker svetloba potrebuje nekaj časa, da pride od levega konca palice do njegovih oči. Ta čas se pri celotnem času pozna, če je palica zelo hitra.

### 7.3 Relativistična gibalna količina in energija

Relativistična gibalna količina ter mirovna, kinetična in polna energija točkastega telesa z maso  $m$  in hitrostjo  $\vec{v}$  in ustreznim parametrom  $\beta = \frac{v}{c}$  so:

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad (7.7 \text{ a})$$

$$E_0 = mc^2 \quad (7.7 \text{ b})$$

$$T = (\gamma - 1)mc^2 \quad (7.7 \text{ c})$$

$$E = E_0 + T = \gamma mc^2 \quad (7.7 \text{ č})$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (7.7 \text{ d})$$

Relativistični koeficient  $\gamma$  smo definirali podobno kot  $\gamma_0$  v enačbi (7.2). Vendar zdaj  $\gamma$  ni povezan s transformacijo koordinatnega sistema, temveč s hitrostjo telesa. Videli bomo tudi, kako se koeficient  $\gamma$  spremeni, ko gremo iz inercialnega sistema  $S$  v nov sistem  $S'$ ; ta sprememba je res povezana tudi z  $\gamma_0$ . Za izračun gibanja nabitega delca v električnem ali magnetnem polju si lahko pomagamo kar z gibalno količino in kinetično energijo, namesto da bi računali s silami. Pravilnost enačb (7.7) bomo morali še dokazati.

Izračunamo lahko npr., kako se giblje proton ali elektron v homogenem električnem polju, če je njegova začetna hitrost enaka nič. Gibanje je takrat 1D in ne potrebujemo vektorskega zapisa. Razlika med delcema je v masi in v tem, da se giblje elektron v nasprotno od smeri električnega poja (ustrezni negativni predznak bomo ignorirali). Tudi v relativistični mehaniki je električna sila  $F = e_0 E$ , prav tako velja enačba  $dp = F dt$  za infinitezimalno spremembo gibalne količine delca. Iz enačbe  $p = e_0 E t$  in enačbe (7.7 a) izračunamo hitrost, pri tem bodimo pozorni, da se hitrost skriva tudi v koeficientu  $\gamma$ . Potem z integriranjem hitrosti po času izračunamo tudi odvisnost poti delca od časa. Nazadnje lahko izpeljemo tudi neposredno zvezo med hitrostjo in potjo, če odpravimo čas. Zapišimo vse tri enačbe:

$$v = \frac{e_0 E t}{m \sqrt{1 + \left(\frac{e_0 E t}{m c}\right)^2}} \quad (7.8 \text{ a})$$

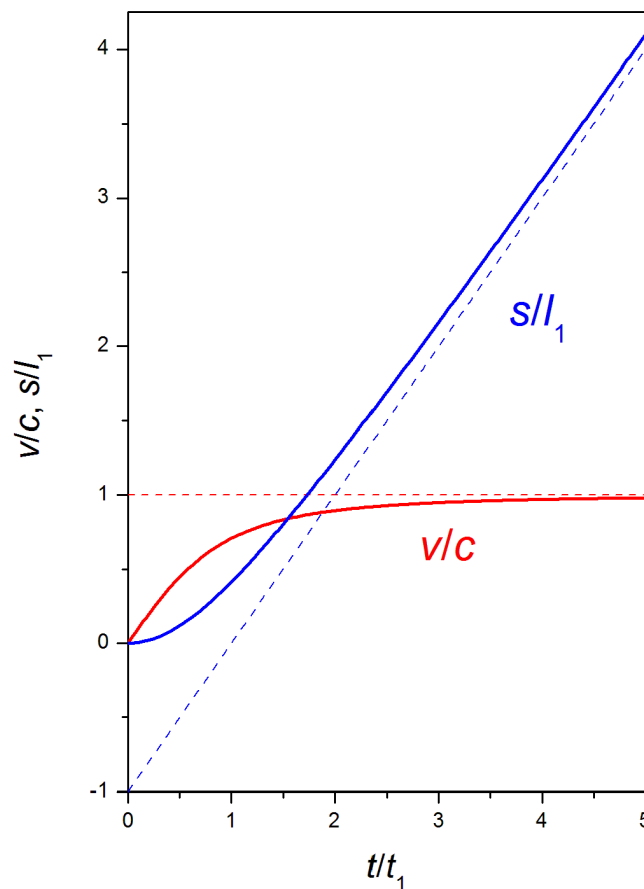
$$s = \frac{m c^2}{e_0 E} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{e_0 E t}{m c}\right)^2} - 1 \right] \quad (7.8 \text{ b})$$

$$s = \frac{m c^2}{e_0 E} [\gamma - 1]. \quad (7.8 \text{ c})$$

V zadnji enačbi se hitrost skriva v relativističnem koeficientu  $\gamma$ . Vendar se da to enačbo dobiti tudi neposredno iz enačbe za kinetično energijo in električno delo:

$$T = (\gamma - 1) m c^2 = e_0 E s.$$

Tudi za delo velja pri konstantni sili klasična enačba  $A = F s$ , ne glede na hitrost, ki jo pridobi delec. Že izračun poti na dva načina je prvi namig za skladnost enačb (7.7). Grafa za časovno odvisnost hitrosti in poti sta prikazana na Sliki 59.



Slika 59: Brezdimenzijska grafa  $\frac{v}{c} \left(\frac{t}{t_1}\right)$  in  $\frac{s}{l_1} \left(\frac{t}{t_1}\right)$  za gibanje nabitega delca v homogenem električnem polju. Črtkani ravni črti sta asimptoti za hitrost in pot delca pri velikih časih. Značilni čas  $t_1$  in značilna dolžina  $l_1$  sta razložena spodaj.

Komentirajmo najprej hitrost. Za majhne čase lahko v korenu izraza (7.8 a) pustimo le člen 1 in dobimo preprost rezultat za enakomerno pospešeno gibanje:  $v = at = \frac{e_0 E}{m} t$ . Nasprotno za velike čase zanemarimo 1 pod korenem in je  $v = c$ . Podobno sklepamo o poti. Za majhne čase razvijemo koren v izrazu v Taylorjevo vrsto do linearnega člena v času in dobimo spet klasični rezultat  $s = \frac{e_0 E}{2m} t^2$ . Za zelo velike čase pa je  $s \approx ct$ , saj se delec večino časa giblje skoraj s svetlobno hitrostjo. Natančneje, premica za pot je premaknjena iz izhodišča  $s = ct - \frac{mc^2}{e_0 E}$ . Premik asimptote navzdol je zato, ker je hitrost manjša od svetlobne. Če definiramo značilni čas  $t_1 = \frac{mc}{e_0 E}$  in značilno dolžino  $l_1 = ct_1$ , potem lahko narišemo brezdimenzijska grafa za odvisnost hitrosti in poti od časa:  $\frac{v}{c} \left( \frac{t}{t_1} \right)$  in  $\frac{s}{l_1} \left( \frac{t}{t_1} \right)$ . Še konkretni podatki: za elektron v električnem polju jakosti 1 kV/m je značilni čas  $t_1 = 1,71 \mu\text{s}$  in značilna dolžina  $l_1 = 512 \text{ m}$ .

Zanimiv je tudi pospešek delca v našem primeru. Najprej izračunamo kvadrat relativističnega koeficienta iz enačbe (7.8 a) za hitrost:

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1 + \left( \frac{Ft}{mc} \right)^2.$$

Pospešek je odvod hitrosti po času in račun pokaže:

$$a = \frac{F}{m \left( 1 + \left( \frac{Ft}{mc} \right)^2 \right)^{3/2}} = \frac{F}{\gamma^3 m}.$$

Izraz za mirovno energijo delca, ki jo podaja v poljudni znanosti najbolj znana Einsteinova enačba zgoraj,  $E_0 = mc^2$ , lahko potrdimo s poskusi. Na primer, nastanek novih delcev, predvsem para delec + antidelec, omogočajo trkalniki, ki morajo podeliti delcem dovolj veliko kinetično energijo. Ko trčita npr. dva protona iz nasprotnih smeri, lahko nastane še dodaten par delcev, kot sta proton in antiproton. Gibalno količino in kinetično energijo preverimo v limiti majhnih hitrosti, ko relativistične enačbe preidejo v Newtonove. Pri majhnih hitrostih lahko pri gibalni količini (7.7 a) postavimo  $\gamma = 1$ , in smo pri klasičnem izrazu. Pri kinetični energiji (7.7 c) pa razvijemo relativistični koeficient v binomskem razvoju samo do prvih dveh členov:

$$T = (\gamma - 1)mc^2 = \left[ \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} - 1 \right] mc^2$$

$$T \approx \left[ \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} \right) - 1 \right] mc^2 = \frac{1}{2} mv^2.$$

V enačbi (7.7 a) in (7.7 č) vstavimo  $\gamma$  iz (7.7 d), odpravimo hitrost in dobimo neposredno zvezo med polno energijo in gibalno količino:

$$E = \sqrt{E_0^2 + (cp)^2}. \quad (7.9)$$

#### 7.4 Kovariantni zapis vektorjev četvercev

V splošni relativnostni teoriji in v kvantni teoriji polja je značilna uporaba kovariantnega zapisa vektorjev četvercev (drugi slovenski termin: štirivektorjev), in prav tako tenzorjev višjega reda. Takšen zapis poveča preglednost enačb in olajša posplošitve teorij. Zapis je uporaben, če hočemo računati 4–vektorje samo z realnimi komponentami in za časovno komponento ne potrebujemo imaginarne enote.

Kot smo omenili, se časovna komponenta vektorjev marsikje vede drugače kot prostorske komponente. Primer za to je račun skalarnega produkta dveh takšnih vektorjev. Če imata vektorja samo realne komponente, potem moramo pri skalarnem produktu v vsoti produktov komponent vzeti produkt časovnih komponent z negativnim predznakom. Razlikujemo kovariantno (spodnji indeksi) in kontravariantno (zgornji indeksi) indeksiranje vektorjev ne glede na dimenzijo (ponavadi 3D ali 4D). Recept je preprost: časovna (»ničta«) komponenta štirivektorja ima v kontravariantnem zapisu nasproten predznak kot v kovariantnem. Za zgled vzemimo četverec krajevnega vektorja, ki ga zapišemo v kovariantni in kontravariantni obliki takole:

$$x_\mu = (-ct, \vec{r}) \quad (7.10 \text{ a})$$

$$x^\mu = (ct, \vec{r}). \quad (7.10 \text{ b})$$

Opustili smo oznako (4) za vektor četverec. Izbrali smo zapis, kjer ima pozitivno časovno komponento kontravariantni vektor. Zato moramo biti povsod pozorni na predznake, tudi pri transformacijskih matrikah, ker uporabljajo različni viri različne zapise.



Pri tenzorjih drugega ranga (to je, pri matrikah) je lahko indeksiranje tudi mešano (en spodnji in en zgornji indeks), v obeh mogočih vrstnih redih. Tako imamo 4 možnosti zapisa indeksov. Pri tenzorjih še višjega ranga je seveda kombinacij spodnjega/zgornjega indeksiranja še več.

Zapis v enačbah (7.10) je nekoliko nenavaden, ko ga srečamo prvič. S simbolom  $\mu$  lahko po eni strani mislimo določeno komponento vektorja, po drugi strani pa je v zgornjem zapisu označen cel vektor. V drugem primeru ima simbol  $\mu$  predvsem namen, da po njegovi legi vemo, ali gre za kovariantni ali kontravariantni vektor. V fizikalnem smislu je oboje isti vektor. Navada je, da v teorijah polj za indekse uporabljamo grške črke, posebej priljubljeni sta prav  $\mu$  in  $\nu$ . Uporabljali bomo indekse od 0 (časovna komponenta) do 3. Da bo vse povsem razumljivo, zapišimo vse štiri komponente posamično:  $x_0 = -x^0 = -ct$ ,  $x_1 = x^1 = x$ ,  $x_2 = x^2 = y$ ,  $x_3 = x^3 = z$ .

Razlika v kovariantnem in kontravariantnem zapisu istega štirivektorja poenostavi zapis skalarnega produkta.

V strokovni literaturi je tudi navada, da če vzamemo za indeks latinsko črko namesto grške, npr.  $i$ , s tem mislimo eno od prostorskih komponent (od 1 do 3) štirivektorja. Zato lahko pravilno zapišemo skalarni produkt zgornjega vektorja v prostoru Minkowskega takole:  $x_\mu x^\mu = x_i x^i - (x_0)^2 = r^2 - (ct)^2$ . Še vedno se uporablja Einsteinova konvencija seštevanja po dvakrat ponovljenem indeksu, vendar tokrat še bolj sistematično: enkrat mora biti isti indeks spodaj in enkrat zgoraj. Tako smo naredili s skalarnim produktom krajevnega vektorja. Einsteinovo pravilo seštevanja velja, če indeks ni konkreten, npr.  $i$ , ne pa 2. Pri eksplicitno zapisanem indeksu, v našem primeru 2, smo lahko kdaj v zadregi, ali pomeni res indeks, če je zgoraj, ali potenco. Vendar je razvidno iz konteksta, kaj je prav: v našem primeru pomeni 2 kvadriranje v zadnji enačbi, medtem kot 2 v oznaki  $x^2$  zgoraj res pomeni indeks. Za skalarni produkt poljubnih dveh fizikalno smiselnih vektorjev četvercev posplošimo enačbo (7.5) takole:

$$a_\mu b^\mu = (a_0, \vec{a}) \cdot (b^0, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - a_0 b_0. \quad (7.11)$$

Pri tem smo oba vektorja četverca spet zapisali tako, da smo ločili krajevni in časovni del. Z navadnim vektorjem s strešico smo označili 3D krajevni del, za katerega velja navadni skalarni produkt. Predznak časovnega dela z indeksom 0 je odvisen tudi od lege indeksa, zato velja enakost:  $a_0 b^0 = -a_0 b_0 = -a^0 b^0$ .

Med tenzorji drugega ranga omenimo najprej metrični tenzor, ki je v primeru prostora Minkowskega preprost:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.12)$$

Enak je v povsem kovariantnem (oba indeksa spodaj) in povsem kontravariantnem (oba indeksa zgoraj) zapisu. Z njim lahko pretvarjamo med obema zapisoma poljubnega 4-vektorja, npr. krajevnega vektorja:

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \quad (7.13 \text{ a})$$

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu. \quad (7.13 \text{ b})$$

V obeh primerih seštevamo po indeksu  $\nu$  od 0 do 3. Upoštevali smo pravilo, naj bo pri seštevanju po tem indeksu na desni strani enačbe en indeks spodaj in en zgoraj. Nasplošno se držimo tudi pravila, da je lega istega indeksa  $\mu$ , po katerem ne seštevamo, enaka na obeh straneh enačbe. Indeksi so tako v obeh enačbah (7.13) ustrezno postavljeni. Hitro se tudi prepričamo, da je metrični tenzor v mešanem zapisu,  $g_\mu{}^\nu$  ali  $g^\mu{}_\nu$ , kar enotska matrika v 4D prostoru. To je prav, saj analogno z enačbama (7.13) ta matrika spremeni vektor v isti vektor, in sicer v istem zapisu, kovariantnem ali kontravariantnem. Zaradi doslednosti dopolnimo enačbi (7.13), čeprav dodatni enačbi ne pomenita nič drugega kot prepis vektorja vase:

$$x^\mu = g^\mu{}_\nu x^\nu \quad (7.13 \text{ c})$$

$$x_\mu = g_\mu{}^\nu x_\nu. \quad (7.13 \text{ č})$$

Pri metričnem tenzorju je vseeno, kateri indeks je pri mešanem zapisu zgoraj in kateri spodaj, nasplošno pa moramo biti pri zapisu pazljivi.

V splošni teoriji relativnosti, ko so gravitacijske sile velike, je metrični tenzor bolj zapleten, to pomeni, da ima tudi od nič različne elemente izven diagonale, njegovi elementi pa so funkcije kraja in časa. To nakazuje ukrivljenost 4D prostora, med drugim je vloga tega tenzorja, da z njim na praktičen način izrazimo diferencialni ločni element v tem prostoru (v vsaki točki prostora posebej). Izrazimo kar kvadrat ločnega elementa:

$$(ds)^2 = dx_\mu dx^\mu = g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu. \quad (7.14)$$

Tukaj imamo vsoto po indeksih  $\mu$  in  $\nu$ . Upoštevali smo enačbo (7.13 a) za dvig indeksa. V primeru tenzorja (7.12) za ravni prostor dobimo rezultat, podoben izrazu (7.5), le da gre za diferencialne elemente:  $(ds)^2 = -(cdt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$ , s tem mislimo razdaljo med bližnjima točkama v 4D prostoru Minkowskega.

Metrični tenzor (7.12) je preprost primer tenzorjev drugega ranga in imajo njegove komponente enake vrednosti, če sta oba indeksa kovariantna (spodaj) ali kontravariantna (zgoraj). Vendar je ta enakost tenzorja v obeh zapisih posledica njegove preproste zgradbe. Kaj pa lahko sklepamo o tenzorjih drugega ranga nasplošno? Pomagamo si lahko z značilno izgradnjo tenzorja drugega ranga v fiziki, s tenzorskim (neposrednim) produktom dveh vektorjev. Vzemimo za zgled tenzor  $c_{\mu\nu} = a_\mu b_\nu$ . Preizkusimo tudi druge tri kombinacije leg obeh indeksov. Govorimo o »dviganju« indeksov tenzorja. Najprej preverimo možnost  $c^\mu{}_\nu$ , ko dvignemo prvi indeks:  $c^\mu{}_\nu = a^\mu b_\nu$ . Če ima prvi indeks katero vrednost od 1 do 3, velja  $a^\mu = a_\mu$  in se element tenzorja ne spremeni. Če pa je  $\mu = 0$ , se zaradi  $a^0 = -a_0$  spremeni predznak elementa celega tenzorja drugega ranga, saj pri vektorju  $b_\nu$  ni bilo sprememb. Sklep je: če dvignemo prvi indeks tenzorja drugega ranga, se spremeni predznak elementov celotne ničte vrstice, drugi elementi pa ostanejo enaki. Formalno zapišemo:  $c^0{}_\nu = -c_{0\nu}$  in  $c^\mu{}_\nu = c_{\mu\nu}$  za  $\mu > 0$ . Na podoben način ugotovimo s pretvorbo zapisa drugega vektorja, da če dvignemo drugi indeks tenzorja, se spremeni le predznak elementov ničtega stolpca:  $c_\mu{}^0 = -c_{\mu 0}$  in  $c_\mu{}^\nu = c_{\mu\nu}$  za  $\nu > 0$ . Ostane še tenzor z obema kontravariantnima indeksoma. Tenzor  $c^{\mu\nu}$  ima enake elemente kot tenzor  $c_{\mu\nu}$ , le v ničti vrstici in ničtem stolpcu, z izjemo elementa  $c^{00}$ , se elementom spremeni predznak. Veljavnost  $c^{00} = c_{00}$  izhaja iz tega, da se je elementu  $c_{00}$  dvakrat zamenjal predznak pri dvigu obeh indeksov.

Za zgled najprej zapišimo Lorentzov tenzor v realnem kovariantnem zapisu namesto tistega v enačbi (7.4), ki ustreza imaginarni časovni komponenti, in sicer za vse štiri mogoče postavitev indeksov. Uporabimo spet bločno obliko z matrikami  $2 \times 2$  (enačba 7.4 a):

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix}$$

$$(T_1)^{\mu\nu} = \gamma_0 \begin{bmatrix} -1 & -\beta_0 \\ \beta_0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.15 \text{ a})$$

$$(T_1)_{\mu\nu} = \gamma_0 \begin{bmatrix} -1 & \beta_0 \\ -\beta_0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.15 \text{ b})$$

$$(T_1)^\mu{}_\nu = \gamma_0 \begin{bmatrix} 1 & -\beta_0 \\ -\beta_0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.15 \text{ c})$$

$$(T_1)_{\mu}{}^\nu = \gamma_0 \begin{bmatrix} 1 & \beta_0 \\ \beta_0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.15 \text{ č})$$

Enotska matrika  $Id$  je enaka kot prej. Najbolj se uporabljata zapisa (7.15 c) in (7.15 č): prvi za pretvarjanje med kontravariantnima vektorjema v sistemih  $S$  in  $S'$ ; drugi za ustrezna kovariantna vektorja. Vendar se da zapisati tudi pretvorbe v mešani obliki. Štirje zapisi (7.15) sicer fizikalno istega Lorentzovega tenzorja torej ponujajo tudi štiri zapise Lorentzove transformacije:

$$x'^{\mu} = T^{\mu\nu} x_{\nu} \quad (7.16 \text{ a})$$

$$x'_{\mu} = T_{\mu\nu} x^{\nu} \quad (7.16 \text{ b})$$

$$x'^{\mu} = T^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \quad (7.16 \text{ c})$$

$$x'_{\mu} = T_{\mu}{}^{\nu} x_{\nu} \quad (7.16 \text{ č})$$

Morda si je najlažje zapomniti matriko (7.15 č), ker je simetrična in brez predznakov, ki pretvarja kovariantne vektorje tipa (7.10 a).

Zapišimo na kovariantni način tudi nekaj vektorjev in zvez med njimi. Na primer, štirivektor hitrosti lahko definiramo kot kovariantni vektor  $v_{\mu} = \frac{dx_{\mu}}{d\tau}$  ali pa kot kontravariantni vektor  $v^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau}$ . Krajevni vektor četverec smo odvajali po lastnem času, ki je invarianten. Ker je zdaj razlika med obema zapisoma znana, zapišimo značilne fizikalne vektorje iz kinematike in dinamike samo v kovariantni obliki. Hitrost četverec je:

$$v_{\mu} = \gamma(-c, \vec{v}) \quad (7.17)$$

Razmislimo, kako smo od definicije  $v_{\mu} = \frac{dx_{\mu}}{d\tau}$  prišli do zadnje enačbe, ko vsebuje četverec hitrosti v primerjavi s četvercem (7.10 a) še dodatni relativistični koeficient  $\gamma$ . Pri krajevnem delu četverca je dovolj preveriti prvo komponento  $v_1 = \frac{dx_1}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \gamma v_x$ . Upoštevali smo relativistično zvezo med laboratorijskim in lastnim časom  $dt = \gamma d\tau$  in tudi definicijo  $x_1 = x$ . Tukaj se relativistični koeficient  $\gamma$  ujema s koeficientom

$\gamma_0$  v pomenu, da je transformacija koordinatnega sistema prirejena gibanju delca samega. Nasplošno bomo morali paziti na razliko med  $\gamma$  in  $\gamma_0$ . Prvi koeficient je povezan s hitrostjo delca in drugi s splošnejšo transformacijo koordinatnega sistema. Nato moramo biti pozorni tudi na to, da ne zamenjujemo resnične komponente hitrosti delca, npr.  $v_x$ , z ustrezno komponento vektorja četverca  $v_1$ : razlikujeta se po koeficientu  $\gamma$ . Preverimo tudi časovno komponento četverca hitrosti:  $v_0 = \frac{dx_0}{d\tau} = \frac{d(-ct)}{d\tau} = -\gamma v$ . Enačba (7.17) je pravilna. Čeprav vemo, da se četverec (7.17) pravilno vede v prostoru Minkowskega, ker smo ga dobili z odvajanjem četverca po invariantni količini (lastnem času), naredimo dodatni koristen test. Pokažimo, da je skalarni produkt tega četverca zares invarianten, to je neobčutljiv za Lorentzovo transformacijo. Skalarni produkt je:  $v_\mu v^\mu = \gamma^2(v^2 - c^2) = -c^2$ . Torej ni samo invarianten, temveč celo konstanten. V najpreprostejšem primeru, ko delec miruje, je njegova hitrost nič,  $\gamma = 1$ , pa je takoj razviden rezultat  $v_\mu v^\mu = -c^2$ . V naslednjem računskem zgledu preverimo, da transformacija četverca hitrosti (7.17) z Lorentzovim tenzorjem (7.15 č) po enačbi, analogni (7.16 č), zares pripelje do enačb (7.6) za pretvorbo kartezičnih komponent hitrosti.



### Računski zgled 48

Dokažimo, da Lorentzova transformacija kovariantnega 4-vektorja hitrosti s tenzorjem (7.15 č) vodi do enačb (7.6).

Tukaj moramo biti še bolj previdni glede pomena relativističnega koeficienta  $\gamma$ . Opraviti imamo pravzaprav s tremi takšnimi koeficienti, ki jih vnaprej označimo z  $\gamma$ ,  $\gamma'$  in  $\gamma_0$ . Prvi je povezan z velikostjo 3D hitrosti telesa v sistemu S (enačba (7.2) brez indeksa 0), drugi z ustrezno hitrostjo v sistemu S', tretji pa s hitrostjo  $v_0$  za relativno gibanje S' glede na S. Enačbe  $v'_\mu = T_\mu{}^\nu v_\nu$  zapišemo po komponentah:

$$-\gamma'c = \gamma_0(-\gamma c) + \beta_0\gamma_0(\gamma v_x) \quad (*0)$$

$$\gamma'v'_x = \beta_0\gamma_0(-\gamma c) + \gamma_0(\gamma v_x) \quad (*1)$$

$$\gamma'v'_y = \gamma v_y \quad (*2)$$

$$\gamma'v'_z = \gamma v_z. \quad (*3)$$

Najprej iz enačbe (\*0) izrazimo koeficient  $\gamma'$  in ga potem vstavimo v druge tri enačbe. Res potrdimo enačbe (7.6).

Posplošimo simetrično matriko (7.15 č), če se sistem S' giblje glede na sistem S s hitrostjo v poljubni smeri, osi obeh sistemov pa so še vedno paroma vzporedne in v začetnem trenutku izhodišči sovpadata. Vloge kartezičnih koordinat so sedaj enakovredne, zato posplošeni Lorentzov tenzor nima več bločne oblike:

$$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) \quad (7.18 \text{ a})$$

$$\vec{\beta}_0 = \frac{\vec{v}_0}{c} = (\beta_{0x}, \beta_{0y}, \beta_{0z}) \quad (7.18 \text{ b})$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - |\vec{\beta}_0|^2}} \quad (7.18 \text{ c})$$

$$T_\mu^\nu = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \beta_{0x}\gamma_0 & \beta_{0y}\gamma_0 & \beta_{0z}\gamma_0 \\ \beta_{0x}\gamma_0 & 1 + \frac{(\beta_{0x}\gamma_0)^2}{\gamma_0+1} & \frac{\beta_{0x}\beta_{0y}\gamma_0^2}{\gamma_0+1} & \frac{\beta_{0x}\beta_{0z}\gamma_0^2}{\gamma_0+1} \\ \beta_{0y}\gamma_0 & \frac{\beta_{0x}\beta_{0y}\gamma_0^2}{\gamma_0+1} & 1 + \frac{(\beta_{0y}\gamma_0)^2}{\gamma_0+1} & \frac{\beta_{0y}\beta_{0z}\gamma_0^2}{\gamma_0+1} \\ \beta_{0z}\gamma_0 & \frac{\beta_{0x}\beta_{0z}\gamma_0^2}{\gamma_0+1} & \frac{\beta_{0y}\beta_{0z}\gamma_0^2}{\gamma_0+1} & 1 + \frac{(\beta_{0z}\gamma_0)^2}{\gamma_0+1} \end{bmatrix}. \quad (7.18 \text{ č})$$

Simetrični tenzor (7.18 č) je funkcija 3D vektorja (7.18 b), saj se tudi relativistični koeficient (7.18 c) izraža s tem vektorjem. Z daljšim računom lahko pokažemo, da sta si tenzorja z nasprotno predznačenim argumentom inverzna:

$$T_\mu^\tau(\vec{\beta}_0)T_\tau^\nu(-\vec{\beta}_0) = \delta_\mu^\nu. \quad (7.19 \text{ a})$$

S Kroneckerjevim simbolom na desni strani enačbe smo ozačili tudi enotsko matriko  $4 \times 4$ . To je prav, ker njuno zaporedno delovanje pomeni, da se sistem S' ne giblje relativno glede na S. Enačbo (7.19 a) lahko zapišemo tudi malo drugače, ker če tenzorju (7.18 č) zamenjamo legi obeh indeksov (prvega dvignemo, drugega spustimo), je enako, kot če 3D vektorju (7.18 b) zamenjamo predznak. Elementi ničte vrstice in ničtega stolpca namreč zamenjajo predznak. Tako velja tudi:

$$T_\mu^\tau(\vec{\beta}_0)T_\tau^\nu(\vec{\beta}_0) = \delta_\mu^\nu. \quad (7.19 \text{ b})$$

Primerjava zapisov indeksov in predznakov argumentov, npr. v obeh enačbah (7.19), pokaže, da moramo biti zelo pazljivi. Z lastnostjo (7.19) se da dokazati, da transformacija dveh 4-vektorjev s tem Lorentzovim tenzorjem ohranja 4D skalarni produkt teh vektorjev (7.11):

$$a'_{\mu} = T_{\mu}^{\nu} a_{\nu} \quad (7.20 \text{ a})$$

$$b'_{\mu} = T_{\mu}^{\nu} b_{\nu} \quad (7.20 \text{ b})$$

$$a'_{\mu} b'^{\mu} = a_{\mu} b^{\mu}. \quad (7.20 \text{ c})$$

Dokaz je zelo podoben kot za transformacije z ortogonalnimi matrikami zasukov v 3D prostoru. V 4D prostoru Minkowskega so stvari nekoliko bolj zapletene le zato, ker moramo vedno paziti na predznak časovnih komponent tenzorjev. Tenzor (7.18) lahko s transformacijo obeh koordinatnih sistemov poenostavimo nazaj v obliko (7.15), kar je isto, kot če že takoj usmerimo prvi kartezični osi obeh sistemov v smeri njune relativne hitrosti.



### Računski zgled 49

Prepričajmo se tudi, da tenzor (7.18) pravilno transformira štirivektor hitrosti v posebnem primeru. Naj velja naslednje:

$$v_{\mu} = (-c, 0, 0, 0)$$

$$\vec{v}_0 = -(v_x, v_y, v_z).$$

Kolikšen je nov četverec hitrosti v sistemu S'?

Napišimo pretvorbo v matrični obliki na dolgo:

$$\begin{bmatrix} v'_0 \\ v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \beta_{0x}\gamma_0 & \beta_{0y}\gamma_0 & \beta_{0z}\gamma_0 \\ \beta_{0x}\gamma_0 & 1 + \frac{(\beta_{0x}\gamma_0)^2}{\gamma_0+1} & \frac{\beta_{0x}\beta_{0y}\gamma_0^2}{\gamma_0+1} & \frac{\beta_{0x}\beta_{0z}\gamma_0^2}{\gamma_0+1} \\ \beta_{0y}\gamma_0 & \frac{\beta_{0x}\beta_{0y}\gamma_0^2}{\gamma_0+1} & 1 + \frac{(\beta_{0y}\gamma_0)^2}{\gamma_0+1} & \frac{\beta_{0y}\beta_{0z}\gamma_0^2}{\gamma_0+1} \\ \beta_{0z}\gamma_0 & \frac{\beta_{0x}\beta_{0z}\gamma_0^2}{\gamma_0+1} & \frac{\beta_{0y}\beta_{0z}\gamma_0^2}{\gamma_0+1} & 1 + \frac{(\beta_{0z}\gamma_0)^2}{\gamma_0+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pri množenju na desni strani pride v poštev samo 0-ti (časovni) stolpec matrike. Namesto  $\gamma_0$  bomo pisali kar  $\gamma$ . Pri vektorju upoštevamo  $\beta_{0x} = -\frac{v_x}{c}$  in podobno za drugi dve komponenti. Transformirani četverec hitrosti zapišimo spet kot vrstico:  $v'_{\mu} = \gamma(-c, v_x, v_y, v_z)$ . Dobili smo kar navadni četverec hitrosti (7.17).

Razmislimo zdaj fizikalno, kaj smo pravzaprav naredili. V sistemu  $S$  je hitrost enaka nič, saj so vse tri krajevne komponente nič, temu pa ustreza prvotni koeficient  $\gamma = 1$ . Sistem  $S'$  se glede na  $S$  giblje v smeri  $-\vec{v}$ . Zato je glede na  $S'$  nova hitrost kar  $\vec{v}$ , saj je to hkrati hitrost gibanja izhodišča sistema  $S$  glede na  $S'$ . Zato smo tudi dobili pravo transformirano hitrost.

Vpeljimo tudi druge četverce. Četverec gibalne količine definiramo preprosto kot produkt mase telesa in četverca hitrosti:

$$p_\mu = \gamma m(-c, \vec{v}). \quad (7.21)$$

V nasprotju s četvercem hitrosti je krajevni del četverca (7.21) zares relativistična gibalna količina v 3D prostoru v skladu z enačbo (7.7 a). Intuitivno uvidimo to razliko s tem, da velikost vektorja hitrosti v 3D ne more preseči svetlobne hitrosti, medtem ko lahko gibalna količina narašča brez omejitve. V limiti  $v \rightarrow c$  namreč velja  $\gamma \rightarrow \infty$ . V tem smislu je v osnovni fiziki gibalna količina bolj fundamentalna kot hitrost. Neomejeno rast gibalne količine s časom potrjuje tudi enačba pri konstantni sili:  $\mathbf{p} = \mathbf{F}t$ , če telo na začetku miruje. To smo že upoštevali pri gibanju električno nabitega delca v homogenem zunanem električnem polju. V primeru fotona moramo enačbo (7.21) spremeniti, saj foton nima mase in ima hkrati svetlobno hitrost. Koeficient  $\gamma m$  zdaj nagaja, saj veljata enačbi  $\gamma = \infty$  in  $m = 0$ . Vseeno ima foton tudi krajevni del gibalne količine. Pravo enačbo za foton namesto (7.21) hitro uganemo, če vzamemo, da je polna energija prostega delca enaka  $E = \gamma mc^2$ . Zato se lahko pri fotonu znebimo koeficienta  $\gamma m$  in dobimo:

$$p_\mu = \frac{E}{c} \left( -1, \frac{\vec{p}}{p} \right). \quad (7.22 \text{ a})$$

Ker je energija fotona  $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ , zapišemo (7.22 a) tudi drugače:

$$p_\mu = \frac{h}{\lambda} \left( -1, \frac{\vec{p}}{p} \right). \quad (7.22 \text{ b})$$



Enačbi (7.21) in (7.22 a) lahko združimo v eno enačbo, ki velja tako za masne delce kot za delce brez mase. Zapišimo obe obliki, kovariantno in kontravariantno, 4-vektorja gibalne količine:

$$p_\mu = \left(-\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \quad (7.23 \text{ a})$$

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right). \quad (7.23 \text{ b})$$

Skalarni produkt tega četverca samega s seboj je potem:

$$p_\mu p^\mu = p^2 - \frac{E^2}{c^2}. \quad (7.24)$$

Vemo pa, da je ta skalarni produkt neobčutljiv na Lorentzovo transformacijo. Če gremo v koordinatni sistem, v katerem delec miruje, je v njem  $p = 0$  in  $E = E_0$ . Zato je desna stran enačbe tudi v kakem drugem koordinatnem sistemu vedno enaka  $-\frac{E_0^2}{c^2}$ . Tako se vrnemo k enačbi (7.9), in s tem potrdimo enačbe (7.7), s katerimi smo tudi prišli do (7.9), vendar po drugi poti.

Četverec pospeška ponavadi definiramo tako, da odvajamo četverec hitrosti po lastnem času. Za ta izračun najprej pripravimo časovni odvod relativističnega koeficienta:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &\equiv \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v} \\ \frac{d\gamma}{dv} &= \frac{d}{dv} \left[ \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \right] = \frac{\gamma^3 v}{c^2} \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{d\gamma}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} = \gamma^3 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2}. \end{aligned}$$

Naprej gre tako, da vrinemo posredno odvajanje po laboratorijskem času, podobno kot smo naredili pri izpeljavi četverca hitrosti iz četverca krajevnega vektorja:

$$\begin{aligned} a_\mu &= \frac{d}{d\tau} [\gamma(-c, \vec{v})] = \gamma \cdot \frac{d}{dt} [\gamma(-c, \vec{v})] \\ a_\mu &= \gamma \left[ \frac{d\gamma}{dt} (-c, \vec{v}) + \gamma(0, \vec{a}) \right] \\ a_\mu &= \gamma^2 \left[ \gamma^2 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} (-c, \vec{v}) + (0, \vec{a}) \right]. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Vendar je ta izraz za račune in teorijo manj uporaben. Podobno bi definirali četverec sile kot odvod četverca gibane količine po lastnem času. Bolj nas zanima neposredna zveza med pravim 3D pospeškom in pravo 3D silo. Še vedno velja klasična enačba, da je sila odvod gibalne količine po času. Izpeljava je podobna kot zgoraj za četverec pospeška:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v}) &= \vec{F} \rightarrow \frac{d\gamma}{dt} \vec{v} + \gamma \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m} \\ \vec{a} + \gamma^2 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{v} &= \frac{\vec{F}}{\gamma m}. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Vidimo, da je ta zveza precej bolj zapletena kot pri drugem Newtonovem zakonu, saj je enačba za pospešek podana implicitno. Ker vsebuje drugi člen na levi strani enačbe skalarni produkt hitrosti in pospeška, je enačba (7.26) sistem 3 linearnih enačb za 3 komponente pospeška. Sicer ni težko dobiti eksplicitne rešitve teh enačb, vendar so enačbe nepregledne. Razen tega je pospešek razen od sile odvisen tudi od trenutne hitrosti. V primeru 1D gibanja, ko kažejo vsi trije vektorji v isto smer, je eksplicitna oblika pospeška dokaj enostavna:

$$a = \frac{F}{\gamma m \left(1 + \left(\frac{\gamma v}{c}\right)^2\right)} = \frac{F}{\gamma^3 m}. \quad (7.27)$$

Ta rezultat se ujema s pospeškom, ki smo ga izračunali pri pospeševanju nabitega delca v homogenem električnem polju, le da je enačba (7.27) splošnejša.

Kako se transformirajo tenzorji višjega ranga v 4D prostoru, npr. matrike  $4 \times 4$ , podobno kot pri dviganju indeksov najhitreje ugotovimo, če te tenzorje sestavimo kot neposredne produkte 4-vektorjev. Dokaz je podoben kot za 3D prostor, ko smo preučevali rotacije koordinatnega sistema. Vzemimo matriko  $A_{\mu\nu} = a_\mu b_\nu$ . Ta matrika se transformira takole:

$$\begin{aligned} A'_{\mu\nu} &= a'_\mu b'_\nu = (T_\mu^\tau a_\tau)(T_\nu^\omega b_\omega) \\ A'_{\mu\nu} &= T_\mu^\tau T_\nu^\omega a_\tau b_\omega \\ A'_{\mu\nu} &= T_\mu^\tau T_\nu^\omega A_{\tau\omega}. \end{aligned} \quad (7.28 \text{ a})$$

Seštevamo po indeksih  $\tau$  in  $\omega$ . Zapišimo zadnjo enačbo tudi v kompaktni obliki kot množenje treh matrik:

$$A' = T A T^t, \quad (7.28 \text{ b})$$

kjer. je  $T^t$  transponirana matrika matrike  $T$ . Enačba (7.28 b) je brez indeksov, zato si moramo zapomniti, da je v tem primeru matrika  $T$  kovariantna v obeh indeksih (indeksa spodaj), za Lorentzovo transformacijsko matriko pa smo morali izbrati obliko (7.15 č). Na predznake tukaj ni treba paziti, ker so pri  $v_0 > 0$  vsi od nič različni matrični elementi  $T$  pozitivni. Še več, ker je ta matrika simetrična, lahko transformacijo (7.28 b) zapišemo tudi lepše:  $A' = TAT$ . Posplošitev enačbe (7.28 a) na tenzorje višjega ranga je očitna. Tolikšen kot je rang tenzorja, je seštevalnih indeksov in število koeficientov z Lorentzovo matriko. Lega indeksov alternira. Za primer zapišimo tudi transformacijo tenzorja tretjega ranga s spodnjimi indeksi:  $A'_{\mu\nu\sigma} = T_{\mu}^{\tau} T_{\nu}^{\omega} T_{\sigma}^{\rho} A_{\tau\omega\rho}$ .

## 7.5 Relativistični Lagrangian

Primerna Lagrangeeva funkcija za en sam prosti delec ali telo, na katerega ne delujejo nobene sile, je:

$$L = \frac{1}{2} m (-c^2 \dot{t}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (7.29)$$

Pri tem pika nad simbolom ne pomeni odvoda po laboratorijskem času  $t$ , temveč po lastnem času delca  $\tau$ , medtem ko imamo  $t$  za odvisno spremenljivko ali generalizirano koordinato v nekoliko bolj abstraktnem smislu, tako da je enakovreden kartezičnim koordinatam. Ustrezna akcija, katere ekstrem iščemo, je torej:

$$L = \frac{1}{2} m \int_{\tau_1}^{\tau_2} (-c^2 \dot{t}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) d\tau. \quad (7.30)$$

Izbrali smo integracijski meji za gibanje delca med lastnima časoma  $\tau_1$  in  $\tau_2$ . Pri prvem členu v oklepaju že poznamo odvod laboratorijskega časa po lastnem:  $\dot{t} = \frac{dt}{d\tau} = \gamma$ . V primeru majhnih hitrosti prvi člen ni pomemben, ker je  $t \approx \tau \rightarrow \dot{t} \approx 1$  in je zato konstanten, in zato ne vpliva na enačbe gibanja. Drugi trije členi dajo pri majhnih hitrostih klasično kinetično energijo, kar potrjuje ustreznost izrazov (7.29) in (7.30) v relativistični posplošitvi. Zapišimo Lagrangian tudi v kovariantni obliki z uporabo metričnega tenzorja:

$$L = \frac{1}{2} m g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \cdot \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (7.31)$$

Dokažimo, da je ta Lagrangian pravilen nasplošno tudi za velike hitrosti telesa. Odvod po lastnem času bomo zaradi večje razumljivosti namesto s piko raje napisali na daljši način. Generalizirani impulz je enak:

$$p_{\mu} = \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \right)}. \quad (7.32)$$

Bodimo pozorni na spremembo lege indeksa  $\mu$ . Poskusimo s časovno in prvo krajevno komponento četverca krajevnega vektorja in uporabimo  $\dot{t} = \frac{dt}{d\tau} = \gamma$ .

$$p_0 = \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{dx^0}{d\tau} \right)} = \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{d(ct)}{d\tau} \right)} = -\gamma mc \quad (7.33 \text{ a})$$

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{dx^1}{d\tau} \right)} = \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{dx}{d\tau} \right)} = \gamma m v_x. \quad (7.33 \text{ b})$$

Pri drugi enačbi smo vrinili posredni odvod po času:  $\frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = v_x \cdot \gamma$ . Dobili smo komponenti četverca gibalne količine, in podobno velja za komponenti  $p_2$  in  $p_3$ . Zdaj preverimo tudi enačbe gibanja (ELE). Iz izraza (7.29) je razvidno, da so  $ct$ ,  $x$ ,  $y$  in  $z$  ciklične koordinate, ker so v Lagrangianu samo njihovi odvodi po lastnem času – neodvisni spremenljivki. To pa pomeni, da so ustrezni impulzi konstantni. Vse se ujema: 4-vektor gibalne količine je res konstanten, če ni nobenih sil na telo. Tudi hitrost je konstantna in z njo relativistični parameter  $\gamma$ . Enačbi (7.33) potrjujeta, da so komponente  $p_{\mu}$  konstantne.

Lagrangeeva funkcija (7.29) se zelo poenostavi, če upoštevamo relativistične enačbe. Zaradi relacije  $\dot{t} = \gamma$  lahko spet pri krajevnih členih najprej odvajamo po laboratorijskem času. Računamo podobno kot  $p_0$  in  $p_1$  zgoraj. Zaradi kvadratov odvodov dobimo pri vseh štirih členih koeficient  $\gamma^2$ , in tako je

$$L = \frac{1}{2} m \gamma^2 (v^2 - c^2).$$

Upoštevamo tudi definicijo (7.7 d) za  $\gamma$  in imamo:

$$L = -\frac{1}{2} mc^2 = -\frac{1}{2} E_0. \quad (7.34)$$

Lagrangian je pri gibanju prostega delca konstanten in invarianten.



### Računski zgled 50

Atomsko jedro v mirovanju razpade na dve manjši jedri z masama  $m_1$  in  $m_2$ , pri tem se sprosti kinetična energija  $E_k$ . Kolikšni sta gibalni količini in hitrosti jeder po razpadu?

Ker so mirovne mase že upoštevane pri sprostitvi kinetične energije, moramo namesto s polnimi energijami računati s kinetičnimi:  $E_{k1} + E_{k2} = E_k$ . Gibalni količini nastalih jeder sta nasprotno enaki, ker se gibalna količina ohranja in je na začetku nič. Zato bomo za neznanko pri računu vzeli velikost gibalne količine  $p$  enega jedra. Pri energiji upoštevamo enačbo (7.20 č), le da moramo odšteti tudi mirovno energijo pri vsakem jedru. Uporabimo oznaki  $E_{01} = m_1 c^2$ ,  $E_{02} = m_2 c^2$ , za neznanko pa  $x = (cp)^2$ , in pridemo do enačbe:

$$\sqrt{E_{01}^2 + x} - E_{01} + \sqrt{E_{02}^2 + x} - E_{02} = E_k.$$

To enačbo rešimo npr. tako, da najprej oba korena pustimo na levi strani enačbe in potem kvadriramo. Zaradi dvojnega produkta pri kvadratu binoma dobimo še en koren; tega izoliramo in spet kvadriramo enačbo. Dobimo enostavnejšo enačbo od enačbe četrte stopnje, ker se členi delno izničijo. Rešitev je:

$$x = \frac{\left[\frac{1}{2}E_k^2 + (E_{01} + E_{02})E_k - E_{01}E_{02}\right]^2 - (E_{01}E_{02})^2}{(E_{01} + E_{02} + E_k)^2}.$$

Potem izračunamo  $p = \frac{\sqrt{x}}{c}$ . Iz enačb  $p = \gamma_1 m_1 v_1 = \gamma_2 m_2 v_2$  izračunamo tudi obe hitrosti in ne pozabimo, da sta hitrosti skriti tudi v relativističnih koeficientih ( $i = 1, 2$ ):

$$v_i = \frac{p}{\sqrt{m_i^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2}}.$$

## 7.6 Relativistična teorija v elektromagnetizmu

Oglejmo si posebej delovanje elektromagnetne sile na gibajoči se električno nabiti delec:

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (7.35)$$

Jakost električnega in gostoto magnetnega polja izrazimo z elektromagnetnima potencialoma:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (7.36 \text{ a})$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (7.36 \text{ b})$$

Ponavadni govorimo o skalarnem potencialu  $\varphi$  in vektorskem potencialu  $\vec{A}$ . Upoštevajmo tudi vektorski zvezi:

$$\vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A} \quad (7.37 \text{ a})$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A}. \quad (7.37 \text{ b})$$

Potem namesto s (7.35) zapišemo elektromagnetno silo na delec s potencialoma:

$$\vec{F} = e \left( \nabla(\vec{v} \cdot \vec{A} - \varphi) - \frac{d\vec{A}}{dt} \right). \quad (7.38)$$

Pri enačbi (7.38) moramo biti pozorni na dve stvari: 1) operator  $\nabla$  ne deluje na hitrost delca, ker to ni vektorsko polje; 2) drugi člen v oklepaju je substancialni (totalni) odvod po času. Drugi člen na desni strani enačbe (7.37 b) spominja na adveksijski člen pri Navier-Stokesovi enačbi v hidrodinamiki. Na levi strani enačbe imamo totalni odvod vektorskega potenciala po času, ker sledimo gibanju delca in opazujemo potencial v točki trenutne lege delca.

Iz izraza  $\vec{v} \cdot \vec{A} - \varphi$  v enačbi (7.38) že lahko sklepamo na kovariantno obliko zapisa vektorskega potenciala, torej posplošitve iz 3D v 4D. Predpostavimo, da je krajevni del četverca  $A_\mu$ , torej za komponente z indeksom od 1 do 3, kar enak  $\vec{A}$ , iz česar izhaja skalarni produkt med četvercema hitrosti in potenciala:

$$v_\mu A^\mu = v^\mu A_\mu = \gamma(cA_0 + \vec{v} \cdot \vec{A}).$$

Krajevni del skalarnega produkta v oklepaju že ustreza 3D skalarnemu produktu, iz česar sklepamo, da je  $cA_0 = -\varphi$ . Torej smo našli tudi časovno komponento elektromagnetnega potenciala. Kovariantni četverec je tako:

$$A_\mu = \left(-\frac{\varphi}{c}, \vec{A}\right). \quad (7.39)$$

Pri izpeljavi zadnje enačbe opazimo, da so 4D invariantni skalarni produkti praktičen način posplošitve vektorjev od 3D na 4D kovariantni zapis, če že poznamo kake vektorje v kovariantnem zapisu. V našem primeru smo iz znane oblike četverca hitrosti  $v_\mu$  sklepali na obliko četverca  $A_\mu$ . Zdaj iz četverca  $A_\mu$  izpeljimo četverec  $j_\mu$  kot posplošitev 3D vektorja gostote toka. Kot časovno komponento bomo temu vektorju pridružili tudi gostoto naboja  $\rho$ . Spomnimo se samo pravilne interpretacije obeh gostot: količina  $\vec{j}$  pomeni električni tok na ploščinsko enoto za prerez, pravokoten na lokalno smer tega vektorja,  $\rho$  pa je električni naboj na prostorninsko enoto. V elektrostatiki in magnetostatiki lahko prostorninsko gostoto električne in magnetne energije izrazimo na več načinov, med drugim z enačbama:

$$w_e = \frac{1}{2} \rho \varphi \quad (7.40 \text{ a})$$

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{j} \cdot \vec{A}. \quad (7.40 \text{ b})$$

Odštejmo obe energijski gostoti in že uvidimo, da lahko razliko  $w_m - w_e$  zapišemo kot 4D skalarni produkt dveh vektorjev četvercev:

$$w = w_m - w_e = \frac{1}{2} j_\mu A^\mu. \quad (7.41)$$

S primerjavo časovnega in krajevnih členov skalarnega produkta pridemo do izraza:

$$j_\mu = (-c\rho, \vec{j}). \quad (7.42)$$

Zakaj smo energijski gostoti odšteli in ne sešteli? To je podobno kot pri Lagrangianu, kjer od kinetične energije odšujemo potencialno. Gostota magnetne energije res bolj ustreza kinetični energiji, saj se morajo električno nabiti delci gibati, da ustvarijo okoliško

magnetno polje, medtem ko je gostota električne energije prisotna tudi pri mirujočih nabojih (električna potencialna energija).

Najprej omenimo, da lahko v principu vse enačbe v elektromagnetizmu pripišemo v obliko, ki vsebuje samo četverca  $j_\mu$  (izvir) in  $A_\mu$  (potencial), saj se tudi vektorja  $\vec{E}$  in  $\vec{B}$  izrazita s potencialom. Ob tem za dinamiko, npr. gibanje delcev, uporabimo samo še četverce, na splošno definirane v mehaniki:  $v_\mu, p_\mu$  itd. Če hočemo zajeti vektorski polji  $\vec{E}$  in  $\vec{B}$  v skupni opis, je skupaj 6 njunih komponent preveč za vektor četverec. Zato oba vektorja v kovariantnem zapisu spravimo v matriko  $4 \times 4$ , ki se mora pri Lorentzovi transformaciji vesti kot tenzor ranga 2. Na osnovi tega tenzorja lahko izračunamo transformirane komponente obeh polj pri prehodu iz sistema S v S'. Vendar pa gre neposredna izpeljava te transformacije prek transformirane vrednosti četverca elektromagnetnega potenciala. Tukaj samo zapišimo transformacijske enačbe:

$$E'_x = E_x \quad (7.43 \text{ a})$$

$$E'_y = \gamma_0 (E_y - v_0 B_z) \quad (7.43 \text{ b})$$

$$E'_z = \gamma_0 (E_z + v_0 B_y) \quad (7.43 \text{ c})$$

$$B'_x = B_x \quad (7.43 \text{ č})$$

$$B'_y = \gamma_0 \left( B_y + \frac{v_0}{c^2} E_z \right) \quad (7.43 \text{ d})$$

$$B'_z = \gamma_0 \left( B_z - \frac{v_0}{c^2} E_y \right). \quad (7.43 \text{ e})$$

Nekatere od teh enačb se da preprosto razložiti z nazorno fizikalno sliko, posebej transformacijo komponent jakosti električnega polja, če ni magnetnega polja. Vzemimo najprej ploščati kondenzator s kvadratnima ploščama s stranico  $a$ , pravokotnima na os  $x$ . Jakost električnega polja med ploščama ima takrat samo komponento  $E_x = e/(\epsilon_0 a^2)$ , če je naboj na pozitivni plošči  $e$ . Kondenzator miruje v sistemu S, medtem ko se sistem S' giblje s hitrostjo  $v_0$  v pozitivni smeri osi  $x$ , kot ponavadi. Naboj na ploščah se v novem sistemu ne spremeni, saj je skalar, ki se ohranja. Stranici kvadratnih plošč se tudi ne spremenita, saj sta pravokotni na smer gibanja sistema S', in zato ni skrčitve dolžin. Zato ostane tudi komponenta  $E'_x$  enaka  $E_x$ . v skladu z enačbo (7.34 a). Druge komponente obeh polj ostanejo nič tudi v sistemu S', kot povejo tudi enačbe (7.34). Zdaj pa postavimo plošči kondenzatorja tako, da je ena od njunih stranic vzporedna s smerjo gibanja sistema S', ki se tako kot prej giblje v smeri osi  $x$  glede na sistem S. Jakost električnega polja je zdaj pravokotna na os  $x$ ; denimo, da je od nič različna komponenta  $E_y$ . Zdaj je naboj  $e$  še vedno enak v obeh sistemih, vendar se ena od stranic plošč, tista v



smeri osi  $x$ , v sistemu  $S'$  skrči za relativistični koeficient  $\gamma_0$ . Druga stranica ostane enaka. Zato je komponenta  $E'_y$  v sistemu  $S'$  spremenjena glede na  $E_y$  v sistemu  $S$ :

$$E'_y = \frac{e}{\varepsilon_0 a \frac{a}{\gamma_0}} = \gamma_0 \cdot \frac{e}{\varepsilon_0 a^2} = \gamma_0 E_y.$$

Ta rezultat je v skladu z enačbo (7.43 b). Vendar se zgodi še nekaj, v sistemu  $S'$  je po enačbi (7.43 e) različna od nič tudi komponenta  $B'_z$ :

$$B'_z = -\gamma_0 \frac{v_0}{c^2} E_y = -\gamma_0 \cdot \frac{e v_0}{\varepsilon_0 c^2 a^2}.$$

Poskusimo najti klasično interpretacijo za zadnjo enačbo. Najprej predpostavimo, da je hitrost  $v_0$  dovolj majhna, da lahko vzamemo  $\gamma_0 \approx 1$ . Upoštevajmo tudi  $\varepsilon^2 = 1/(\varepsilon_0 \mu_0)$ , in imamo:

$$B'_z = -\frac{\mu_0 e v_0}{a^2}.$$

Električni naboj na pozitivni plošči se giblje glede na sistem  $S'$  v negativno smer osi  $x$  in tako pomeni električni tok. Ignorirajmo predznak, tok je:

$$I = \frac{e}{t} = \frac{e}{a/v_0} = \frac{e v_0}{a}.$$

Zato lahko enačbo za prečno komponento magnetnega polja brez predznaka minus prepisemo:

$$B'_z = \frac{\mu_0 I}{a}.$$

To je podoben izraz kot za gostoto magnetnega polja okrog dolgega ravnega vodnika s tokom  $I$ . Samo številski koeficient je drugačen zaradi drugačne porazdelitve naboja. Tudi to je prav, da je magnetno polje pravokotno na smer električnega toka. To je intuitivni uvid, da je pojav magnetnega polja izrazito relativističen učinek zaradi medsebojnega gibanja koordinatnih sistemov. Magnetno polje je le drugačen vidik električnega. Kar leto dodatno potrjuje, so Maxwellove enačbe, ki prepletajo obe polji. To se med drugim kaže tudi v elektromagnetnem valovanju.

Tenzor elektromagnetnega polja v kovariantnem zapisu je:

$$B_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & cB_z & -cB_y \\ E_y & -cB_z & 0 & cB_x \\ E_z & cB_y & -cB_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.44)$$

To je antisimetrična matrika in paziti moramo na predznake njenih elementov. Če pri tem tenzorju uporabimo matrično transformacijo (7.28) z Lorentzovim tenzorjem (7.15 č), zares pridemo do enačb (7.43). To preverimo za vseh 16 elementov transformiranega tenzorja (7.44). S tem tenzorjem izpeljemo tudi dve zanimivi ohranitveni enačbi, če postavimo enačbo za njegove lastne vrednosti:

$$|B_{\mu\nu} - \lambda \cdot Id| = 0. \quad (7.45)$$

Z navpičnima črtama smo označili determinanto matrike,  $Id$  je 4D enotska matrika. Po množenju dobimo sekularno enačbo četrte stopnje s sodimi potencami za lastno vrednost  $\lambda$ :

$$\lambda^4 + k_2 \lambda^2 + k_0 = 0 \quad (7.46 \text{ a})$$

s koeficientoma

$$k_2 = (cB)^2 - E^2 \quad (7.46 \text{ b})$$

$$k_0 = (c\vec{E} \cdot \vec{B})^2. \quad (7.46 \text{ c})$$

Pri transformaciji koordinatnega sistema se lastne vrednosti pravega tenzorja ne spremenijo, zato morata ostati enaka tudi koeficienta  $k_0$  in  $k_2$ . To se da neposredno preveriti z enačbami (7.43). Značilni zgled je elektromagnetno valovanje v vakuumu, kjer sta električno in magnetno polje pravokotna med seboj in za njuni velikosti vedno velja  $E = cB$ . Takrat sta oba koeficienta enaka nič.

# Matematični dodatek A: Krivulje in ploskve

## A.1 Krivulje v dveh dimenzijah

Krivulje v 2D obravnavajmo najprej v koordinatnem sistemu s kartezičnima koordinatama  $x$  in  $y$ . Za njihov opis imamo dve glavni možnosti: neposredno funkcijsko odvisnost med koordinatama  $y(x)$  ali pa parametrični zapis, kjer sta koordinati funkciji nekega parametra  $x(t)$  in  $y(t)$ . Parametrični zapis je iz matematikovega pogleda za splošno obravnavo krivulj boljši, ker: 1) ne daje prednosti nobeni od obeh kartezičnih koordinat; 2) je tudi eksplicitni zapis  $y(x)$  samo poseben primer parametričnega zapisa z  $x = t$ ,  $y = y(t)$ ; 3) lahko z njim enolično podamo tudi številne krivulje, kjer funkcija  $y(x)$  ni enolična, npr. pri krožnici, elipsi in spirali. Vendar ima iz fizikovega pogleda parametrični zapis še eno pomembno prednost. Čeprav je lahko parameter  $t$  samo matematični pripomoček in velikokrat nima nobenega fizikalnega pomena, lahko zanj vzamemo kar čas; od tukaj tudi izbira oznake za parameter. Krivulja sama sicer ni odvisna od časa, konkretno od tega, kako hitro se točkasto telo giblje po njej. Vseeno pa lahko tudi pri golih matematičnih zvezah krivuljo obravnavamo fizikalno, to je kot tir gibanja telesa po njej. S to analogijo lahko pridemo po bližnjici do kakih matematičnih lastnosti krivulj, saj je dinamika domača.

Za prvi zgleđ izračunajmo krivinski polmer  $R$  v poljubni točki dane krivulje, kot smo v računskem zgleđu 6 že nakazali za poseben primer – parabolo pri poševnem metu. Tam smo tudi opisali pojem pritisnjene krožnice v dani točki. Zapišimo najprej nasplošno vse tri značilne količine za gibanje telesa po 2D tiru, to je krajevni vektor, hitrost in pospešek:

$$\vec{r} = (x(t), y(t)) \quad (\text{A.1 a})$$

$$\vec{v} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \quad (\text{A.1 b})$$

$$\vec{a} = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)). \quad (\text{A.1 c})$$

Kot ponavadi pike nad simboli označujejo ustrezne časovne odvode. Odslej časovne odvisnosti ne bomo posebej poudarjali s časom v oklepaju. Potem izrazimo oba smerna vektorja, v smeri tangente in normale na krivuljo. Smerni vektor tangente je vzporeden s hitrostjo, tisti za normalo pa je nanj pravokoten:

$$\vec{e}_t = \frac{(\dot{x}, \dot{y})}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \quad (\text{A.2 a})$$

$$\vec{e}_n = \pm \frac{(\dot{y}, -\dot{x})}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}. \quad (\text{A.2 b})$$

S simbolom  $\pm$  smo označili obe mogoči smeri vektorja normale. Katero od njiju vzeti, je stvar dogovora, npr. da naj vektor kaže proti središču prilepljene krožnice. Velikost radialne komponente pospeška dobimo z absolutno vrednostjo projekcije pospeška na smer normale:

$$a_r = |\vec{a} \cdot \vec{e}_n| = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}. \quad (\text{A.3})$$

Ker je radialni pospešek povezan s polmerom prilepljene krožnice,  $a_r = v^2/R$ , lahko iz te enačbe in iz zgornjih enačb za hitrost in radialni pospešek telesa izrazimo krivinski polmer takole:

$$R = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}. \quad (\text{A.4 a})$$

Nazadnje lahko pozabimo, da je  $t$  čas, saj so enačbe (A.2) in (A.4 a) veljavne za katerokoli vpeljavo posrednega parametra  $t$ , ki pravilno podaja krivuljo. Seveda pike nad simboli nasplošno pomenijo prve in druge odvode obeh kartezičnih koordinat po

parametru. Enačba (A.4 a) je nekoliko bolj znana v primeru eksplicitne odvisnosti  $y(x)$ . Takrat vzamemo  $x = t$ , zato sta odvoda  $\dot{x} = 1$  in  $\ddot{x} = 0$ . Pišimo  $y' = dy/dx$  in  $y'' = d^2y/dx^2$  in izrazimo  $R$ :

$$R = \frac{(1+(y')^2)^{3/2}}{|y''|}. \quad (\text{A.4 b})$$

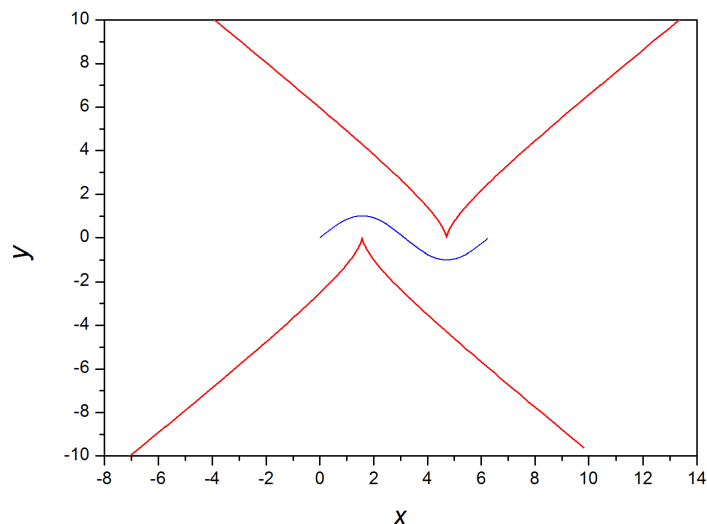
Zadostuje, da preverimo enačbo (A.4 a) v primeru krožnice:  $x = R \cos \varphi$ ,  $y = R \sin \varphi$ . Zaradi geometrijske nazornosti smo parameter preimenovali  $t \rightarrow \varphi$ . Prva odvoda sta  $\dot{x} = -R \sin \varphi$  in  $\dot{y} = R \cos \varphi$ , druga odvoda pa  $\ddot{x} = -R \cos \varphi$  in  $\ddot{y} = -R \sin \varphi$ . Vse štiri odvode vstavimo v (A.4 a) in res dobimo  $R = R$ . Ker pa se pritisnjena krožnica v dani točki ujema s krivuljo zaradi tesnega prileganja tudi v drugih odvodih, enačba za  $R$  ne velja samo za krožnico, temveč za poljubno krivuljo.

Zdaj bi radi poiskali tudi središče v dani točki pritisnjene krožnice. To lahko naredimo tako, da gremo od točke na krivulji v smeri vektorja  $\vec{e}_n$  za polmer  $R$  daleč glede na enačbe (A.1 a), (A.2 b) in (A.4 a). Zato je pomembno, kateri predznak izberemo v enačbi (A.2 b). Poskusimo ugotoviti, ali moramo to izbiro premisliti za vsak primer posebej, ali pa je morda že vnaprej enolično podana. Za test vzemimo spet krožnico s središčem v izhodišču, njen polmer naj bo kar 1. Vendar vzemimo dva različna zapisa glede na kot  $\varphi$  (kar pomeni, da se glede na naraščajoči kot točka na krožnici pomika v nasprotnih smereh): I)  $x = \cos \varphi$ ,  $y = \sin \varphi$ , kot zgoraj; II)  $x = \sin \varphi$ ,  $y = \cos \varphi$ . V obeh primerih je dovolj obravnavati samo 2D vektor v števcu:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & \left( \frac{dy}{d\varphi}, -\frac{dx}{d\varphi} \right) = (\cos \varphi, \sin \varphi) = \vec{r}; \\ \text{II)} \quad & \left( \frac{dy}{d\varphi}, -\frac{dx}{d\varphi} \right) = (-\sin \varphi, -\cos \varphi) = -\vec{r}. \end{aligned}$$

V drugem primeru (gibanje v smeri urinega kazalca) vektor  $\vec{e}_n$  že kaže proti središču krožnice, če vzamemo pozitivni predznak pred celotnim ulomkom v izrazu (A.2 b), v prvem primeru (gibanje nasprotno od smeri urinega kazalca) pa moramo vzeti predznak minus. To pomeni, da moramo v vsakem primeru posebej preverjati predznak v enačbi (A.2 b). Morda bi glede na obdelani zgled krožnice pomislili, da je dovolj preveriti le na začetku, ali se točka glede na naraščajoči parameter giblje po krivulji v smeri urinega kazalca ali nasprotno. Vendar za poljubno krivuljo stvari niso tako preproste. Za zgled obravnavajmo sinusno funkcijo v eksplicitni obliki,  $y = \sin x$ , kjer je parameter kar  $x$ . Koordinata  $x$  naj narašča, tako da gre točka »po sinusni krivulji v desno«, kot smo

navajeni. V konkavnih delih krivulje se točka giblje v smeri urinega kazalca, v konveksnih pa nasprotno. Zato tudi središča ustreznih krožnic »preskakujejo«: nekje so pod sinusno krivuljo, drugje pa nad njo, kot prikazuje Slika 60. Lege središč so bile izračunane po enačbi (A.5 b) spodaj. Krivuljo, na kateri ležijo središča krožnic, imenujemo evoluta.



**Slika 60:** Grafa za sinusno krivuljo (tanka modra črta) in ustrezno krivuljo središč – evoluto (debela rdeča črta) za eno periodo,  $(0, 2\pi)$ . Evoluta ima na sliki prekinitev, ker njene posamezne točke zbežijo v neskončnost, vsak ločen del evolute pa ustreza polovici periode sinusne funkcije.

Kdaj pa se središče pritisnjene krožnice neskončno oddalji od neke točke na krivulji, kot sklepamo tudi pri sinusni krivulji? To je tam, kjer je  $R = \infty$ , po enačbi (A.4 b) je to pri  $y'' = 0$ . Tam krivulja ni ne konveksna ne konkavna, ampak se »zravna« v košček premice. Pri sinusni funkciji ustreza neskončen krivinski polmer točkam, kjer graf seka abscisno os.

Označimo krajevni vektor središča krožnice z  $\vec{r}_S$ , da ga razlikujemo od krajevnega vektorja točke  $\vec{r}$  na krivulji, glede na katero izračunamo to središče. Središče je pri  $\vec{r}_S = \vec{r} + R\vec{e}_n$ . Izraz znotraj absolutne vrednosti v imenovalcu v (A.4 a) je lahko pozitiven ali negativen, medtem ko moramo v (A.2 b) izbrati pravi predznak. Izkaže se, da se predznaki tako kombinirajo, da je nasplošno lega središča pritisnjene krožnice za 2D funkcijo v parametrični in eksplicitni obliki:

$$\vec{r}_S = (x, y) + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x}} (\dot{y}, -\dot{x}) \quad (\text{A.5 a})$$

$$\vec{r}_S = (x, y) - \frac{1 + (y')^2}{y''} (y', -1) \quad . \quad (\text{A.5 b})$$



## Računski zgled 51

Dokažimo, da središče prilepljene krožnice za eksplicitno podano krivuljo po enačbi (A.5 b) res leži na pravi strani krivulje.

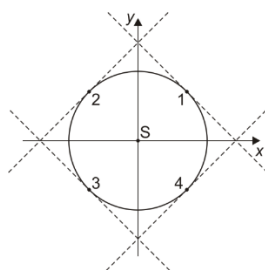
Primerjali bomo lego središča z lego tangente na krivuljo v dani točki (Slika 61). Če je krivulja tam konveksna ( $y'' > 0$ ), leži tangenta pod središčem, če pa je konkavna ( $y'' < 0$ ), leži tangenta nad središčem ne glede na prvi odvod. Zato najprej poiščimo tangento v točki  $(x, y)$ , poljubna točka na tangenti je  $(x_t, y_t)$ . Enačba tangente je  $y_t - y = y' \cdot (x_t - x)$ . Naj bo  $x_t = x_S$  po enačbi (A.5 b) in s primerjavo ordinat  $y_t$  in  $y_S$  pri abscisi  $x_S$  bomo ugotovili, ali je tangenta nad središčem ali pod njim. Ordinata točke na tangenti je:

$$y_t = y - y' \cdot \frac{1+(y')^2}{y''}.$$

Spet uporabimo (A.5 b), tokrat drugo koordinato, in izračunajmo razliko:

$$y_t - y_S = -\frac{[1+(y')^2]^2}{y''}.$$

Za konveksno krivuljo je izraz na desni strani zadnje enačbe negativen, zato je  $y_t < y_S$  in tangenta je pod središčem. Nasprotno velja za konkavno krivuljo. Potrdili smo pravilnost predznakov v enačbi. Na sliki je prikazana krožnica z enačbo z različnima predznakoma za zgornjo in spodnjo polovico:  $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ . Za točke, označene od 1 do 4, skozi katere smo potegnili tangente, lahko na oko preverimo veljavnost zadnjega sklepa.



Slika 61: Lega tangente in središča pritisnjene krožnice. Za krivuljo smo zaradi lepše nazornosti vzeli kar krožnico samo, ki ima seveda eno samo središče. Prikazane so simetrično postavljene štiri tangente nanjo (črtkane črte), kjer se točke med seboj razlikujejo po predznakih prvega in drugega odvoda funkcije  $y(x)$ .

Izrazimo dolžino določenega odseka na krivulji (ali po fizikalno pot, ki jo opravi telo med začetno in končno točko na tiru gibanja). Dolžino odseka označimo z  $l$ , ker bomo oznako  $s$  (tudi v smislu poti) uporabili za nekaj drugega. Dolžino zelo kratkega odseka izračunamo po Pitagorovem izreku:  $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ . V parametričnem zapisu krivulje velja za oba diferenciala:  $dx = \dot{x}dt$  in  $dy = \dot{y}dt$ . Zato je dolžina odseka z začetnim in končnim parametrom  $t_z$  in  $t_k$  enaka:

$$l = \int_{t_z}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \quad (\text{A.6 a})$$

$$l = \int_{x_z}^{x_k} \sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad (\text{A.6 b})$$

Dva pomembna parametrična zapisa krivulje sta polarni zapis in zapis z naravnim parametrom. Opišimo najprej prvega. Pri polarnem zapisu gre za 2D polarni koordinatni sistem s polarnima koordinatama:  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Nasplošno bi s tem opisali lego poljubne točke v ravnini. Ker pa imamo določeno krivuljo, sta koordinati vsake točke na njej povezani. V polarnem zapisu je polmer funkcija polarnega kota  $r = r(\varphi)$ . Torej je doslednejši zapis 2D krivulje v polarni obliki  $x = r(\varphi) \cdot \cos \varphi$ ,  $y = r(\varphi) \cdot \sin \varphi$ . Sedaj lahko uporabimo enačbi (A.4 a) in (A.6 a), le da nadomestimo  $t \rightarrow \varphi$ . Bodimo pozorni na odvajanje produktov funkcij. Enačbi za krivinski polmer in dolžino odseka na krivulji sta:

$$R = \frac{(\dot{r}^2 + r^2)^{3/2}}{|r\ddot{r} - 2\dot{r}^2 - r^2|} \quad (\text{A.7 a})$$

$$l = \int_{\varphi_z}^{\varphi_k} \sqrt{\dot{r}^2 + r^2} d\varphi. \quad (\text{A.7 b})$$

S pikami tukaj mislimo odvode polmera po kotu. Za test lahko spet vzamemo krožnico s konstantnim polmerom  $r = R$ . Odvodi v (A.7) so nič, zato je  $R = R$  in  $l = R(\varphi_k - \varphi_z)$ . Za premico skozi izhodišče polarni zapis ne deluje, ker je kot konstanten, polmer pa se spreminja. Lahko pa zapišemo v polarni obliki vsako drugo premico. Za zgled vzemimo premico, vzporedno z osjo  $x$ , to je  $y = a$ , za katero velja  $r(\varphi) = \frac{a}{\sin \varphi}$ . Takrat lahko preverimo, da je imenovalec v izrazu za krivinski polmer enak nič in  $R = \infty$ , kot mora veljati za premico. Podobno lahko preverimo  $l = |\Delta x|$ .

Pri drugem pomembnem parametričnem zapisu krivulje uporabljamo »naravni parameter«  $s$ , ki ima skoraj enak pomen kot pot pri gibanju telesa. Tako kot pot tudi  $s$  meri dolžino odseka na dani krivulji. Razlika je v tem, da pot merimo med dvema



poljubnima točkama na krivulji, parameter  $s$  pa merimo glede na neko vnaprej izbrano točko na krivulji. Naj bo krajevni vektor te izbrane točke  $\vec{r}_0$ . Če se iz te točke pomaknemo za pot  $s$  v eno smer, enolično pridemo do poljubne točke na krivulji. Zato lahko rečemo, da je poljubni krajevni vektor na krivulji enolična funkcija parametra  $s$ ,  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ . Za razliko od poti ima lahko parameter  $s$  tudi negativni predznak. Točko  $\vec{r}_0$  označuje vrednost  $s = 0$ ; če gremo od te točke po krivulji v eno smer, definiramo  $s > 0$ , v nasprotni smeri pa je  $s < 0$ . Zaradi  $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$  ali zapisano z odvodi  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$  se zgornje enačbe poenostavijo. Na primer krivinski polmer je:

$$R = \frac{1}{|\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}|}.$$

S pikami so mišljeni odvodi koordinat po naravnem parametru. Za izračun dolžine odseka na krivulji ne potrebujemo več enačbe (A.6 a), ampak je  $l$  kar absolutna vrednost razlike vrednosti  $s$  za dve izbrani točki. Je pa ponavadi težava v tem, da ni lahko izraziti koordinat kot funkcij naravnega parametra. Zapis krivulj z naravnim parametrom nam tako bolj koristi pri splošni teoriji kot pri praktičnih primerih.

Na koncu tega razdelka naredimo še en poučen račun, ki nam bo koristil za 3D krivulje v naslednjem razdelku. Kaj dobimo, če odvajamo tangentni smerni vektor (A.2 a) še enkrat po parametru (času)  $t$ ? Odvajamo neodvisno vsako od obeh komponent posebej, in sicer upoštevamo pravilo za odvajanje ulomka, saj moramo upoštevati tudi imenovalec. Časovni odvod vektorja  $\vec{e}_t$  je kolinearen normalnemu vektorju  $\vec{e}_n$ . Sicer pri odvajanju tangentnega vektorja dobimo bolj zapleten izraz s skupnim koeficientom, ki vsebuje tudi druga odvoda koordinat. Vendar lahko ta koeficient ignoriramo, saj lahko normalni smerni vektor normiramo po odvajanju. Tako velja:

$$\vec{e}_n = \frac{\frac{d\vec{e}_t}{dt}}{\left|\frac{d\vec{e}_t}{dt}\right|}.$$

Ta enačba ima nazoren geometrijski in fizikalni pomen. Spomnimo se, kako pri fiziki v srednji šoli ugotovimo smer centripetalnega pospeška pri enakomernem kroženju točke po krožnici, ne da bi bilo treba dvakrat odvajati krajevni vektor po času. V dveh trenutkih v majhnem časovnem razmiku narišemo hitrostni vektor v ustreznih dveh točkah na krožnici (ali pa namesto vektorja hitrosti kar enotski vektor na tangenti). Ko ta dva vektorja postavimo skupaj (enega vzporedno premaknemo, tako da začetka vektorjev sovpadata) ter od smernega vektorja v poznejšem trenutku odštejemo smerni

vektor v predhodnem trenutku, ta razlika vektorjev res kaže proti središču kroženja. Razlika vektorjev  $\vec{e}_t$  v bližnjih trenutkih je kar sorazmerna z odvodom  $d\vec{e}_t/dt$ , kot je zapisan v števcu zadnje enačbe. Pravo smer razlike obeh vektorjev pri grafični konstrukciji, to je proti središču S, dobimo ne glede na smer potovanja točke po krožnici (v smeri urinega kazalca ali nasprotno). To dokazuje, da ima enačba v vsakem primeru pravi predznak in da tako zapisani vektor  $\vec{e}_n$  res kaže proti središču pritisnjene krožnice na krivuljo.

## A.2 Krivulje v treh dimenzijah

Za 3D krivulje ima še bolj kot v primeru 2D parametrični zapis praktično prednost pred neposrednimi zvezami med koordinatami. Spet si za parameter  $t$  najprej zamislimo kar čas in zapišimo:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ . Enačbe za 2D lahko tako z lahkoto posplošimo na 3D. Tangentni smerni in normalni smerni vektor v poljubni točki krivulje sta:

$$\vec{e}_t = \frac{(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \quad (\text{A.8 a})$$

$$\vec{e}_n = \frac{\frac{d\vec{e}_t}{dt}}{\left| \frac{d\vec{e}_t}{dt} \right|}. \quad (\text{A.8 b})$$

Ta dva vektorja določata ravnino v dani točki pritisnjene krožnice. Seveda se lahko ta ravnina spreminja od točke do točke. Tretji smerni vektor, pravokoten na zgornja vektorja, torej pravokoten na ravnino pritisnjene krožnice, pa dobimo kar z vektorskim produktom obeh:

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_t \times \vec{e}_n. \quad (\text{A.8 c})$$

Ta vektor je že normiran, ker sta koeficienta med seboj pravokotna enotska vektorja. Polmer pritisnjene krožnice spet lahko izrazimo kot  $R = \frac{v^2}{a_r}$ . Vendar tukaj izraza ne bomo zapisali po komponentah, ker je predolg. Raje ga najprej izračunajmo v konkretnem primeru 3D vijačnice.



## Računski zgled 52

Kolikšen je krivinski polmer vijajčnice  $R$ ? Njen polmer glede na projekcijo na ravnino  $(x, y)$  je  $r$ , njen hod v smeri osi  $z$  pa je  $h$ .

Zaradi večje nazornosti je parameter vijajčnice kar kot  $\varphi$ . Koordinate njenih točk so potem:

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = \frac{h\varphi}{2\pi}.$$

Ko se kot poveča za polni kot, naraste koordinata  $z$  za hod  $h$ . Tangentni smerni vektor je:

$$\vec{e}_t = \frac{\left(-r \sin \varphi, r \cos \varphi, \frac{h}{2\pi}\right)}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}}.$$

Tukaj imenovalec nasprotno od splošnega izraza (A.8 a) ni odvisen od kota, zato ga lahko pri računu  $\vec{e}_n$  po enačbi (A.8 b) ignoriramo. Normalni smerni vektor je zelo preprost:

$$\vec{e}_n = -(\cos \varphi, \sin \varphi, 0).$$

Ker nima komponente v smeri osi  $z$ , je središče prilepljene krožnice pri istem  $z$  kot točka sama. To še ne pomeni, da leži krožnica sama v vodoravni ravnini, ampak je nagnjena, kot bomo videli. Iz zadnjega izraza uganemo, da leži središče prilepljene krožnice na osi  $z$  in se zato tudi polmera ujemata:  $R = r$ .

Kako bi zadnji trivialni rezultat razložili na fizikalni način? Zamislimo si enakomerno gibanje točkastega telesa po spirali:  $\varphi = \omega t$ . Tukaj je  $t$  resnični čas. V skladu z Galilejevo transformacijo za inercialne sisteme je pospešek enak v vseh teh sistemih. Če torej namesto sistema  $S$ , ki »miruje«, vzamemo sistem  $S'$ , ki se glede na  $S$  enakomerno giblje v smeri osi  $z$  »navzgor« s hitrostjo  $v_0 = \frac{h\omega}{2\pi}$ , pomeni to, da se giblje  $S'$  »navzgor«

enako hitro kot telo. Navpična komponenta hitrosti telesa glede na  $S'$  je nič, kar je enako, kot da telo v tem sistemu samo enakomerno kroži po krožnici s polmerom  $R = r$ .

Normala ravnine prilepljene krožnice ima smerni vektor (A.8 c):

$$\vec{e}_3 = \frac{\left(\frac{h}{2\pi} \sin \varphi, -\frac{h}{2\pi} \cos \varphi, r\right)}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}}.$$

Kot med normalo ravnine krožnice in osjo  $z$  izračunamo s skalarnim produktom vektorjev  $\vec{e}_3$  in  $\vec{k} = (0,0,1)$ . Skalarni produkt je kar tretja komponenta vektorja  $\vec{e}_3$ :

$$\theta = \arccos \frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}} = \arctan \frac{h}{2\pi r}.$$

To je tudi kot med tangentnem smernim vektorjem in ravnino  $(x, y)$  in je enak za vse točke. Zadnji rezultat lahko tudi preprosto razložimo: če vijačnico poravnamo v ravni klanec, potem na vodoravni premik  $2\pi r$  pride navpični premik  $h$ , tangens naklonskega kota pa je res razmerje teh premikov.

Do računa krivinskega polmera in centripetalnega pospeška pelje še nazornejša fizikalna pot. Zadostuje tangentni vektor, ne potrebujemo normalnega. Parameter  $t$  je čas, tangentni smerni vektor je določen s hitrostjo:  $\vec{e}_t = \frac{\vec{v}}{v}$ . Pospešek je  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ . Najprej pokažimo, da je projekcija pospeška na tretji smerni vektor enaka nič:

$$\begin{aligned} a_3 &= \vec{a} \cdot (\vec{e}_t \times \vec{e}_n) \\ a_3 &= \vec{a} \cdot \left( \frac{\vec{v}}{v} \times C \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{v}}{v} \right) \right) \\ a_3 &= \vec{a} \cdot \left( \frac{\vec{v}}{v} \times C \left( \frac{\vec{a}}{v} - \frac{\vec{v}}{v^2} \dot{v} \right) \right). \end{aligned}$$

Upoštevali smo vse tri enačbe (A.8) in  $C$  je normalizacijski kvocient za normalni smerni vektor, ki nas tukaj ne zanima, saj bi radi samo pokazali, da je  $a_3 = 0$ . V notranjem oklepaju je odvod ulomka iz druge vrstice. V zadnjem izrazu je vsota dveh

pseudoskalarne produktov. V obeh produktih sta po dva vektorja enaka, zato je rezultat res enak nič.

Zadnja ugotovitev je pomembna tudi z vidika dinamike točkastega telesa na 3D krivulji. Ko v dani točki poiščemo vse tri smerne vektorje,  $\vec{e}_t$ ,  $\vec{e}_n$  in  $\vec{e}_3$ , leži trenutni pospešek samo v ravnini, ki jo določata prva dva vektorja, kot da bi imeli 2D gibanje. Gledano geometrijsko se v nekem trenutku telo giblje po pritisnjeni krožnici, tako da ima pospešek samo dve pravokotni komponenti: tangencialno in radialno. Torej lahko za račun radialne komponente  $a_r$  v smeri vektorja  $\vec{e}_n$  uporabimo kar Pitagorov izrek in jo v celoti izrazimo z vektorjem hitrosti in njegovim časovnim odvodom:

$$a_r = \sqrt{a^2 - (\vec{a} \cdot \vec{e}_t)^2}$$

$$a_r = \sqrt{\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right|^2 - \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\vec{v}}{v}\right)^2}. \quad (\text{A.9 a})$$

Radialni (centripetalni) pospešek lahko zapišemo tudi v neposredni vektorski obliki. Od celotnega pospeška odštejemo njegovo tangencialno komponento kot vektor:

$$\vec{a}_r = \vec{a} - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{v})}{v^2} \vec{v}. \quad (\text{A.9 b})$$

Tudi krivinski polmer 3D krivulje v neki točki izrazimo s hitrostjo in njenim odvodom:

$$R = \frac{v^2}{\sqrt{\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right|^2 - \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\vec{v}}{v}\right)^2}}. \quad (\text{A.10})$$

Dolžina odseka na 3D krivulji ali pot po njej je:

$$l = \int_{t_z}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt. \quad (\text{A.11})$$

### A.3 Ploskve

Če spet vzamemo 3D kartezični koordinatni sistem, lahko ploskev v 3D prostoru izrazimo na več načinov: 1)  $z = z(x, y)$ , ali ena koordinata točke na ploskvi je funkcija drugih dveh koordinat; 2) v implicitni obliki  $F(x, y, z) = 0$ , kjer je  $F$  znana funkcija; 3) parametrično z dvema parametroma, npr.  $u$  in  $v$ , to je,  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z =$

$z(u, v)$ . Ukvarjali se bomo samo s parametričnim zapisom ploskve, ker je najbolj praktičen, odvisnost vseh treh kartezičnih koordinat od parametrov pa lahko zapišemo krajše:  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ . Parametroma  $u$  in  $v$  pravimo tudi krivočrtni koordinati na ploskvi.

Po ploskvi lahko potekajo različne 3D krivulje, in sicer poteka skozi vsako izbrano točko na ploskvi nešteto takšnih krivulj. En način, kako iz ploskve dobiti določeno krivuljo na njej, je, da postavimo določeno funkcijsko zvezo med parametroma  $u$  in  $v$ , npr.  $v = u^2$ . Takrat je neodvisen parameter samo še  $u$  in gre res za 3D krivuljo. Največkrat pa izberemo dve družini krivulj na naslednji način. V prvi družini izberemo za vsako krivuljo točno določeno vrednost parametra  $v$ :  $v = v_0$ . Potem je  $\vec{r}(u, v_0)$  res 3D krivulja, ker se spreminja samo prvi parameter. Vsaka krivulja te iste družine ima drugo vrednost fiksnega parametra  $v$ . Podobno dobimo tudi drugo družino krivulj, če namesto parametra  $v$  fiksiramo  $u$ :  $u = u_0$ .

Zdaj pa na ploskvi izberimo določeno točko, določata jo izbrani vrednosti obeh parametrov, npr.  $\vec{r}_0 = \vec{r}(u_0, v_0)$ . Ta točka naj bo izhodiščna točka za dve različni krivulji na tej ploskvi, ki gresta skozi to točko in se sekata v njej. V prvem primeru obdržimo fiksirani  $v = v_0$  in sprostimo parameter  $u$ , tako da dobimo krivuljo  $\vec{r}(u, v_0)$ . Ta zagotovo gre skozi to točko, saj je ena od možnih vrednosti parametra  $u$  zanj prav  $u = u_0$ . Podobno dobimo drugo krivuljo skozi to točko, če obdržimo  $u = u_0$  in sprostimo  $v$ :  $\vec{r}(u_0, v)$ . Vsaka od teh krivulj ima svojo tangento v tej točki, smerna vektorja pa sta:

$$\vec{e}_{t1} = \frac{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right)(u_0, v_0)}{\left|\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right)(u_0, v_0)\right|} \quad (\text{A.12 a})$$

$$\vec{e}_{t2} = \frac{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)(u_0, v_0)}{\left|\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)(u_0, v_0)\right|}. \quad (\text{A.12 b})$$

V prvem primeru je bil prosti parameter za odvajanje  $u$ , v drugem primeru pa  $v$ . Zaradi razumljivosti smo v oklepajih posebej poudarili, da vstavimo po odvajanju  $u = u_0$  in  $v = v_0$ . Oba smerna vektorja sta normirana.

Zdaj se pojavi zanimivo vprašanje: kaj je s tangento oziroma njenim smernim vektorjem skozi kako drugo krivuljo (različno od prvih dveh, pri katerih smo fiksirali  $u_0$  ali  $v_0$ ) skozi isto točko  $\vec{r}_0$ , če to krivuljo določimo z zvezo  $v = f(u)$ ,  $f$  pa je znana funkcija? Velja  $f(u_0) = v_0$ . Ta krivulja je potem funkcija  $u$ :  $\vec{r} = \vec{r}(u, f(u))$ . Zapis z dvema

parametoma smo obdržali, ker krivuljo še vedno omejuje ploskev. Smerni vektor tangente izračunamo zdaj z navadnim odvodom krajevnega vektorja po  $u$ :

$$\frac{d\vec{r}}{du} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot f'(u).$$

Vrinili smo posredno odvajanje po prvotnem parametru  $v$  pri drugem členu. Zdaj moramo samo še vstaviti  $u = u_0$  in  $v = v_0$ , in nato normalizirati vektor na 1, da dobimo tangenti smerni vektor. Vendar nas to tukaj ne zanima, temveč opazimo nekaj pomembnejšega. Prvi člen na desni strani enačbe je kolinearen vektorju  $\vec{e}_{t1}$  iz (A.12 a), drugi člen pa vektorju  $\vec{e}_{t2}$  iz (A.12 b). Kolinearnost obeh členov s tangentskima vektorjema (A.12) po normalizaciji na 1 ostane. Zato je naš novi tangenti vektor linearna kombinacija prejšnjih dveh:  $\vec{e}_t = C_1 \vec{e}_{t1} + C_2 \vec{e}_{t2}$ . To pomeni, da ležijo vsi trije vektorji v isti ravnini. To torej pomeni: smerni tangenti vektorji (ali kar tangente same) vseh krivulj na ploskvi, ki gredo skozi njeno izbrano točko, določajo v tej točki isto ravnino. V dani točki na ploskvi obstaja samo ena, točno določena ravnina, ki se dotika ploskve. Za določitev te ravnine je dovolj poiskati smerna tangenta vektorja dveh različnih krivulj na ploskvi skozi to točko, ki se sekata: ponavadi izberemo kar tisti pri konstantnem  $u$  in pri konstantnem  $v$ . Ker torej gre za eno samo ravnino, ki vsebuje tangente vseh ploskovnih krivulj v isti presečiščni točki, ji pravimo tangenta ravnina. Smerni vektor normale na to ravnino (na kratko govorimo kar o normali na ploskev samo namesto na njeno tangenta ravnino) izračunamo kot naslednji normirani vektorski produkt:

$$\vec{n} = \frac{\vec{e}_{t1} \times \vec{e}_{t2}}{|\vec{e}_{t1} \times \vec{e}_{t2}|}. \quad (\text{A.13})$$

Medtem ko enačba (A.13) podaja neposredno zvezo med ustreznimi smernimi vektorji, za računanje ni najbolj praktična, saj smo morali po nepotrebnem izvesti normalizacijo vektorjev trikrat: v obeh enačbah (A.12) in potem tudi v (A.13). Normalo na ploskev zato izračunamo bolj neposredno takole:

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|}. \quad (\text{A.14})$$

Normalizacijo moramo izvesti samo na koncu. Po tej razlagi lahko poenostavimo zapisa s posebnim označevanjem spremenljivk  $u_0$  in  $v_0$ , ki se nanašata na eno točko, in posebej

za  $u$  in  $v$ , ki se nanašata na izbrano krivuljo skozi to točko. Tako točko kot tangentna vektorja v njej naj označujeta kar parametra  $u$  in  $v$ .

Če sta smerna vektorja (A.12) v vseh točkah ploskve pravokotna med seboj, govorimo o **pravokotnem** koordinatnem sistemu na mreži, podani z obema spremenljivkama, čeprav je ta mreža še vedno krivočrtna. Takšen sistem je ugoden, ker včasih olajša reševanje problemov.

Normalo na ploskev, ki je podana v obliki  $F(x, y, z) = 0$ , dobimo takole:

$$\vec{n} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}. \quad (\text{A.15})$$

Pravilnost enačbe (A.15) je očitna, če je ploskev ravnina z enačbo  $ax + by + cz + d = 0$ , kjer so koeficienti  $a$ ,  $b$  in  $c$  že komponente normale.



### Računski zgled 53

Izračunajmo normalo na ploskev v poljubni točki elipsoida s polosmi  $a$ ,  $b$  in  $c$ , in nato tudi za valj in svitek.

Implicitna enačba elipsoida kot ploskve je  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , če je njegovo središče v izhodišču kartezičnega koordinatnega sistema z osmi, poravnanimi s simetrijskimi osmi elipsoida. Zapišimo enačbo parametrično:

$$\vec{r} = (a \sin \theta \cos \varphi, b \sin \theta \sin \varphi, c \cos \theta).$$

Parametra spominjata na sferična kota v krogelnem koordinatnem sistemu, čeprav nimata istega geometrijskega pomena. Odvoda krajevnega vektorja po obeh »kotih« sta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} &= (a \cos \theta \cos \varphi, b \cos \theta \sin \varphi, -c \sin \theta) \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} &= (-a \sin \theta \sin \varphi, b \sin \theta \cos \varphi, 0). \end{aligned}$$



Samo še vektorsko ju zmnožimo in produkt normaliziramo:

$$\vec{n} = \frac{(bc \sin \theta \cos \varphi, ac \sin \theta \sin \varphi, ab \cos \theta)}{\sqrt{c^2 \sin^2 \theta (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) + a^2 b^2 \cos^2 \theta}}.$$

Očitno se v primeru krogle,  $a = b = c = R$ , vektor poenostavi v  $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$ , kot mora biti. Tangentna smerna vektorja pri elipsoidu nasplošno nista pravokotna med seboj. Pravokotna pa sta v primeru krogle ali rotacijskega elipsoida,  $a = b$ , ki ga dobimo z vrtenjem elipse s polosema  $a$  in  $c$  okrog osi  $z$ .

Valj (plašč valja) najbolj praktično zapišemo v parametrični obliki, če je os valja kar koordinatna os  $z$ :

$$\vec{r} = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, z).$$

Tukaj moramo biti nekoliko previdni pri interpretaciji: medtem ko ima kot  $\varphi$  vlogo krivočrtne koordinate  $u$ , je  $z$  hkrati kartezična koordinata in krivočrtna koordinata namesto  $v$ . Ustrezna parcialna odvoda sta:

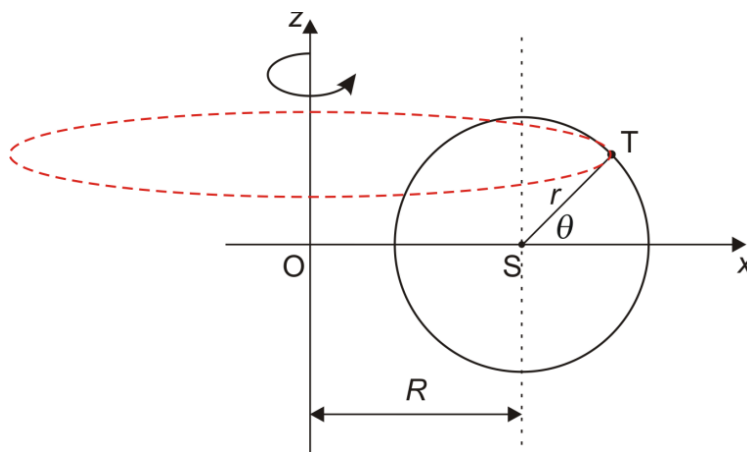
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = R(-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = (0, 0, 1).$$

Smerna vektorja sta med seboj pravokotna. Njun normirani vektorski produkt je po pričakovanju  $\vec{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$  in ustreza normali na krožnico v 2D ravnini. Če namesto navadnega valja vzamemo eliptični valj z enačbo  $\vec{r} = (a \cos \varphi, b \sin \varphi, z)$ , izračunamo na podoben način smerni vektor normale na plašč:  $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} (b \cos \varphi, a \sin \varphi, 0)$ .

Obravnavajmo tudi svitek ali torus. Torus kot ploskev/telo dobimo, če krožnico/krog zavrtimo v 3D za polni kot okrog osi, ki leži v isti ravnini kot prvotni lik, vendar ga ne seka. Zavrtimo krožnico s središčem na osi  $x$  na Sliki 62 okrog prikazane osi  $z$ . Tako res dobimo 3D objekt – ploskev torusa v 3D prostoru z aksialno simetrijo. Torus določata dva polmera:  $r$  je polmer krožnice na sliki in  $R$  oddaljenost njenega središča od osi  $z$ . V 3D lahko rečemo, da je  $R$  glavni polmer torusa,  $r$  pa polmer njegovega prereza.

Kako bi izbrali primerna parametra, ekvivalentna  $u$  in  $v$ ? Prvi je očiten: polarni kot  $\theta$  na sliki. To ni običajni polarni kot v sferičnem ali cilindričnem koordinatnem sistemu. V prikazani ravnini so kartezične koordinate točk na krožnici:  $x_{zac} = R + r \cos \theta$ ,  $y_{zac} = 0$ ,  $z = r \sin \theta$ . Za prvi dve koordinati smo uporabili indeks »zac«, in s tem poudarili, da sta to začetni (izhodiščni) vrednosti koordinat pred vrtenjem. Drugi parameter je azimutni kot  $\varphi$ , za katerega zavrtimo narisan krožnico okrog navpične osi. Koordinata  $z$  se pri tem ne spremeni,  $x$  in  $y$  pa se spremenita pri rotaciji z matriko (5.1 c).



Slika 62: Rotacija krožnice okrog osi  $z$ , da dobimo torus. Črtkana krivulja prikazuje krožnico v 3D, v ravnini, vzporedni z ravnino  $(x, y)$ , v katero se pri rotaciji preslika prikazana točka T na prvotni krožnici v ravnini  $(x, z)$ .

Krajevni vektor, oba odvoda po kotih in normalni vektor na ploskev so potem:

$$\vec{r} = ((R + r \cos \theta) \cos \varphi, (R + r \cos \theta) \sin \varphi, r \sin \theta)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r(-\sin \theta \cos \varphi, -\sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = (R + r \cos \theta)(-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$$

$$\vec{n} = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta).$$

Tukaj  $r$  ni velikost krajevnega vektorja, vendar ni nevarnosti za zamenjavo. Tangentna smerna vektorja sta povsod pravokotna med seboj, tako kot pri valju. Normalni vektor na torus ima podobno obliko kot normala na kroglo, le kotni funkciji kota  $\theta$  sta obrnjeni, saj v krogelnem koordinatnem sistemu definiramo ta kot glede na navpičnico, in ne vodoravnico.

Omenimo tudi nasprotno smer normalnega vektorja. To dobimo, če zamenjamo vrstni red tangentskih smernih vektorjev pri vektorskem produktu. Ponavadi se odločimo za takšno smer normale, da kaže od izbočene strani ploskve navzven. Tako smo naredili tudi v naših treh primerih. V zadnjem primeru torusa dobimo prav nasprotne predznake vseh komponent vektorja  $\vec{n}$ , če vzamemo vrstni red množenja  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}$ . Cel vektor smo zato pomnožili z  $-1$ .

Včasih nas zanima ločni element na ploskvi, če gre za majhen premik od točke, ki jo določa par krivočrtnih koordinat  $(u, v)$ , do točke, kjer se koordinati malo spremenita,  $(u + du, v + dv)$ . Premik je diferencial:  $d\vec{r} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right) du + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right) dv$ . Če ga pomnožimo skalarno samega s seboj in korenimo, dobimo majhen ločni element ali košček poti na ploskvi:

$$ds = \sqrt{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right|^2 (du)^2 + 2 \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dudv + \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|^2 (dv)^2}.$$

Če se točkasto telo premika po določeni krivulji na ploskvi, lahko izračunamo njegovo pot z integriranjem elementa  $ds$ . Spet je ugodno razmišljati na fizikalni način, tako da sta spremenljivki  $u$  in  $v$  znani funkciji časa:  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$ . Tako sta diferenciala teh spremenljivk  $du = \dot{u}dt$  in  $dv = \dot{v}dt$ , zato postane integracijska spremenljivka kar čas:

$$s = \int_{t_z}^{t_k} \sqrt{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right|^2 \dot{u}^2 + 2 \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \dot{u}\dot{v} + \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|^2 \dot{v}^2} \cdot dt. \quad (\text{A.16})$$

Nazadnje se lahko vprašamo, ali lahko tudi za ukrivljene ploskve definiramo krivinski polmer kot za krivulje v 2D in 3D. Pomagamo si lahko kar s krivinskimi polmeri krivulj, ki ležijo na dani ploskvi. Vendar je pri ploskvah problem veliko težji kot pri krivuljah. Skozi dano točko ploskve, kjer nas zanima njena ukrivljenost, namreč poteka nešteto 3D krivulj in vsaka ima v tej točki drugačen krivinski polmer. Celo krivulje, ki imajo v isti točki ploskve isto tangento (torej isto smer), imajo lahko v tej točki različne krivinske polmere. To je zato, ker »ukrivljenost« krivulj na ploskvi ne določa samo ukrivljenost ploskve same, temveč so lahko krivulje še bolj ukrivljene. Ob tem da krivulje sledijo ukrivljenosti ploskve, se lahko krivijo tudi v prečni smeri – znotraj ploskve. Da bo bolj razumljivo, o čem govorimo, omenimo najpreprostejši primer, ko je ploskev kar ravnina. Ravnina sama ni ukrivljena, zato je v vseh njenih točkah in v vseh smereh v vsaki točki krivinski polmer ravnine neskončen. Vendar so 2D krivulje, ki ležijo v tej ravnini, vseeno

ukrivljene. Njihov krivinski polmer torej ne more biti merilo za ukrivljenost ravnine. Krivulje, ki izražajo ravnost ravnine in ki ležijo v njej, seveda poznamo, to so premice.

Tako moramo tudi pri ukrivljenih ploskvah nasplošno poiskati takšne krivulje, ki zares ponazarjajo ukrivljenost ploskve. To so presečišča ploskve z ravninami (vemo, da je presečišče dveh ploskev 3D krivulja). Vendar tudi vse ravnine niso primerne za ta namen. Postopek, kako v dani točki ploskve poiskati krivinske polmere v različnih smereh in med njimi najti najmanjši in največji polmer, podajajo naslednji koraki:

- 1) V točki  $T$  poiščemo normalo na ploskev.
- 2) Vzamemo šop vseh ravnin, ki vsebujejo to normalo. Te ravnine so torej pravokotne na tangentno ravnino ploskve v  $T$ , od ene ravnine do druge pridemo z rotacijo okrog normale.
- 3) Za vsako od teh ravnin poiščemo krivuljo kot presečišče ravnine s ploskvijo. Krivulja gre skozi točko  $T$ .
- 4) Vsaki takšni krivulji izračunamo krivinski polmer v  $T$ .
- 5) Nazadnje od vseh teh polmerov poiščemo najmanjšega  $R_1$  in največjega  $R_2$ . To sta značilna krivinska polmera ploskve v točki  $T$ .

Končne enačbe za  $R_1$  in  $R_2$  so nasplošno precej zapletene, zato bomo tukaj samo podrobneje opisali postopek glede zgornjih pet točk in potem za konkreten zgled vzeli torus. Začeli bomo spet s parametričnim zapisom ploskve  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ . Pri izpeljavi bomo zaradi razumljivosti spet natančnejši pri oznakah. Zato bomo točko  $T$ , kjer iščemo oba krivinska polmera, podali s krajevnim vektorjem  $\vec{r}_0 = \vec{r}(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$ . Prosta parametra  $u$  in  $v$  bosta spet označevala celotno in poljubno krivuljo na ploskvi, ki gre skozi točko  $T$ .

Korak 1. V točki  $T$  poiščemo normalo  $\vec{n}$  po enačbi (A.14) in označimo  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ .

Korak 2. Izberimo poljubno ravnino, ki vsebuje tako točko  $T$  kot normalo. Takrat je normala te ravnine  $\vec{n}_R = (n_{R1}, n_{R2}, n_{R3})$  pravokotna na normalo ploskve  $\vec{n}$ . Njun skalarni produkt je nič:  $n_1 n_{1R} + n_2 n_{2R} + n_3 n_{3R} = 0$ . Zaradi enoličnosti je najbolje vsako takšno ravnino in njeno normalo parametrizirati s kotom zasuka  $\alpha$  glede na eno od teh ravnin (referenčno ravnino). Zadostuje interval  $0 \leq \alpha \leq \pi$ . Naj bodo zdaj  $x, y$  in  $z$  koordinate poljubne točke te ravnine. Enačba ravnine je:  $n_{R1}(x - x_0) + n_{R2}(y - y_0) + n_{R3}(z - z_0) = 0$ .

Korak 3. Kombinirajmo enačbo ploskve  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  in enačbo ravnine iz koraka 2, da dobimo 3D presečiščno krivuljo. To najlaže naredimo tako, da v enačbo ravnine vstavimo parametrično zapisane kartezične koordinate glede na ploskev:

$$n_{R1}(x(u, v) - x_0) + n_{R2}(y(u, v) - y_0) + n_{R3}(z(u, v) - z_0) = 0.$$

Tako dobimo neposredno zvezo med parametroma, ki jo lahko nato zapišemo kot  $v = v(u)$ .

Korak 4. Presečiščna krivulja ploskve in dane ravnine ima zdaj enačbo  $\vec{r} = \vec{r}(u, v(u))$ . Njen krivinski polmer  $R$  izračunamo po enačbi (A.10), kjer vzamemo  $u$  namesto časa  $t$ , in še pišemo vektor hitrosti kot odvod krajevnega vektorja po  $u$ , da hitrosti ne bi zamenjevali s parametrom  $v$ :

$$R = \frac{\left| \frac{d\vec{r}}{du} \right|^2}{\sqrt{\left| \frac{d^2\vec{r}}{du^2} \right|^2 - \left( \frac{d^2\vec{r}}{du^2} \cdot \frac{d\vec{r}}{du} \right)^2}}. \quad (\text{A.17})$$

Korak 5. Če nam uspe vsak takšen krivinski polmer  $R$  eksplicitno izraziti s kotom  $\alpha$ , ki podaja presečno ravnino in z njo tudi »smer« na ploskvi, v kateri iščemo krivinski polmer, potem lahko z zahtevo  $\frac{dR}{d\alpha} = 0$  poiščemo najmanjši in največji krivinski polmer.

Bodimo še natančnejši. Če hočemo v koraku 4 uporabiti enačbo (A.17) z  $u$  kot neodvisnim parametrom, moramo na primeren način izraziti prvi in drugi odvod drugega parametra po prvem:  $dv/du$  in  $d^2v/du^2$ . To lahko naredimo, ne da bi prej izrazili eksplicitno zvezo  $v(u)$  v koraku 3. V večini primerov, tudi za preprosta geometrijska telesa, je namreč ta zveza dokaj zapletena, in nato posledično sta oba odvoda še toliko bolj zapletena. Korak, ki ga bomo naredili zdaj, je zahteven, vendar se izplača, ker olajša računanje v konkretnih zgledih. Izpeljavo naredimo kar v vektorski obliki. Začnimo spet s parametrično obliko krivulje, ki jo določata ploskev in presečna ravnina:  $\vec{n}_R \cdot [\vec{r}(u, v) - \vec{r}(u_0, v_0)] = 0$ . Pri tem se  $u$  spreminja,  $v$  pa je funkcija  $u$ . Odvajajmo to enačbo po  $u$ :

$$\vec{n}_R \cdot \left[ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \frac{dv}{du} \right] = 0$$

$$\frac{dv}{du} = -k(u, v) = -\frac{\vec{n}_R \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}}{\vec{n}_R \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}} \quad (\text{A.18 a})$$

Odvajajmo ta odvod še enkrat:

$$\frac{d^2v}{du^2} = -\frac{\partial k(u, v)}{\partial u} + k(u, v) \cdot \frac{\partial k(u, v)}{\partial v}. \quad (\text{A.18 b})$$

V enačbi (A.17) sta prvi in drugi odvod:

$$\frac{d\vec{r}}{du} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \frac{dv}{du} \quad (\text{A.19 a})$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{du^2} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u \partial v} \cdot \frac{dv}{du} + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2} \cdot \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \frac{d^2v}{du^2}. \quad (\text{A.19 b})$$

Z upoštevanjem enačb (A.18) in (A.19) lahko končno zapišemo oba odvoda:

$$\frac{d\vec{r}}{du} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} - k \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \quad (\text{A.20 a})$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{du^2} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2} - 2k \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u \partial v} + k^2 \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2} + \left(k \frac{\partial k}{\partial v} - \frac{\partial k}{\partial u}\right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}. \quad (\text{A.20 b})$$

Funkcijo  $k$  smo nazadnje pisali brez argumentov. Šele potem, ko imamo izražene vse odvode, lahko identificiramo  $u \equiv u_0$ ,  $v \equiv v_0$  in vstavimo vse skupaj v enačbo (A.17).



### Računski zgled 54

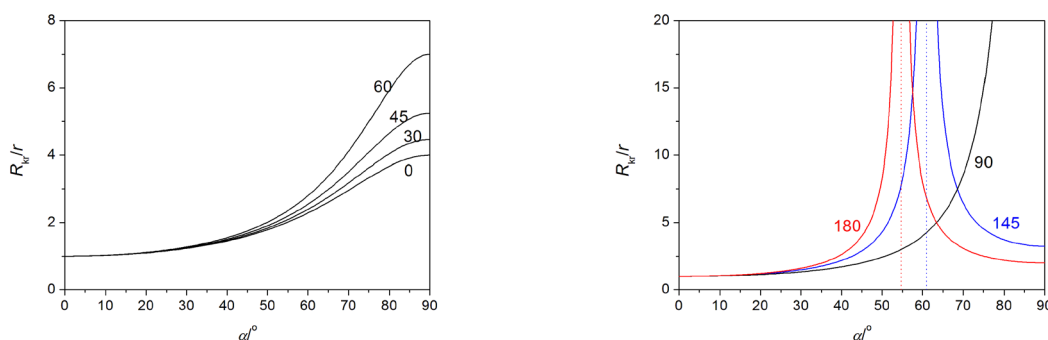
Po opisanem postopku poskusimo ugotoviti oba krivinska polmera v poljubni točki torusa. Kako sta polmera  $R_1$  in  $R_2$  odvisna od parametra  $\theta$  na Sliki 62? Kako je vmesni krivinski polmer odvisen od parametra  $\alpha$ , ki podaja zasuk ravnin, ki vsebujejo isto ploskovno normalo?

Zaradi simetrije je dovolj obravnavati točko v ravnini  $(x, z)$ , kot je prikazana na Sliki 60. Njeni koordinati sta  $x = R + r \cos \theta$ ,  $z = r \sin \theta$ . Zaradi simetrije normale na torus v tej točki ni treba računati, saj očitno leži v tej ravnini in gre v radialni smeri:  $\vec{n} = (\cos \theta, 0, \sin \theta)$ . Referenčna ravnina, ki seka torus, vsebuje točko T in hkrati normalo, je kar prikazana ravnina. Definiramo jo s kotom  $\alpha = 0$ , njena normala je  $\vec{n}_R = (0, 1, 0)$ . Zaradi aksialne simetrije torusa pričakujemo, da bo krivinski polmer krivulje kot

presečišča te ravnine s torusom (to je prikazana krožnica in njen krivinski polmer je enak  $r$ ) enak najmanjšemu polmeru  $R_1$  ali pa največjemu polmeru  $R_2$  ploskve v tej točki. Krivinski polmer označimo z  $R_{kr}$ , da ga razlikujemo od polmera  $R$ .

Krivinski polmeri krivulj v točkah, ki predstavljajo tudi krivinske polmere ploskve same, so očitni samo v dveh primerih: 1) če je presečna ravnina kar omenjena ravnina  $(x, z)$  ali zaradi aksialne simetrije njej ekvivalentne »navpične« ravnine, ki vsebujejo os  $z$ ; 2) če je presečna ravnina  $(x, y)$ . V prvem primeru je presečna krivulja krožnica s polmerom  $r$ , kot je na Sliki 60, ter njej zrcalna krožnica na drugi strani osi  $z$ , zato je krivinski polmer kar  $r$ . V drugem primeru sta presečni krožnici dve: najbolj notranja s polmerom  $R - r$ , ki ustreza točkam s  $\theta = \pi$ , ter najbolj zunanja s polmerom  $R + r$ , ki ustreza točkam s  $\theta = 0$ . Ti dve ravnini sta pravi presečni ravnini, saj vsebujeta lokalno normalo na ploskev v vsaki presečiščni točki. Ugotovili smo, da imajo skrajne točke torusa ( $\theta = 0$  ali  $\pi$ ) naslednja značilna polmera v dveh pravokotnih smereh:  $r$  in  $R \pm r$ .

Naloga s presečnimi ravninami v drugih točkah je težja. Ker vse te ravnine vsebujejo normalo ploskve, gredo skozi središče  $S$  krožnice na Sliki 62. Poskusimo dobiti enačbo kake druge ravnine, ki jo dobimo s 3D zasukom ravnine  $(x, z)$  okrog osi  $\vec{n} = (\cos \theta, 0, \sin \theta)$ . Za enak kot, kakor se zavrti ravnina okrog osi, ki jo sama vsebuje, se zasučje tudi njena normala  $\vec{n}_R$ . Za zasuk začetne normale  $\vec{n}_R = (0, 1, 0)$  okrog  $\vec{n} = (\cos \theta, 0, \sin \theta)$  za kot  $\alpha$  uporabimo enačbo (5.2). Nato po korakih, opisanih zgoraj, izračunamo vse odvode in polmer  $R_{kr}$  za vsak  $\alpha$ . Na Sliki 63 so prikazani izračunani grafi odvisnosti krivinskega polmera od tega kota za različne vrednosti kota  $\theta$ . Vzeli smo primer  $R = 3r$ .



**Slika 63:** Odvisnost krivinskega polmera od sučnega kota  $\alpha$  presečne ravnine glede na začetno ravnino  $(x, z)$ . Izbrali smo polarne kote:  $\theta = 0, 30^\circ, 45^\circ$  in  $60^\circ$  (slika levo, zunanji, v vseh smereh izbočeni del torusa) ter  $\theta = 90^\circ, 145^\circ$  in  $180^\circ$  (slika desno, mejni in notranji del torusa). V primeru točk notranjega dela torusa navpične črtkane črte na grafih prikazujejo asimptoto, kjer  $R_{kr}$  doseže neskončno vrednost; v tem primeri so smeri izbočenosti ploskve pri manjših kotih, smeri vbočenosti pa pri večjih kotih  $\alpha$  glede na te kritične vrednosti kota  $\alpha_c$ .  $R_{kr}$  je normaliziran na polmer  $r$ .

Iz leve Slike 63 je razvidno, da sta v primeru vsestranske izbočenosti ploskve smeri, ki ustrezata najmanjšemu in največjemu krivinskemu polmeru, med seboj pravokotni. Zaradi simetrije tudi ni težko ugotoviti leg središč ustreznih pritisnjenih krožnic. V primeru  $\alpha = 0$ , je to seveda kar središče  $S$  na sliki. Tudi v primeru  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , leži središče pritisnjene krožnice v ravnini  $(x, z)$ , seveda pri obravnavanem kotu  $\varphi = 0$ . To ni v nasprotju s tem, da moramo središče pravzaprav iskati v presečni ravnini, ki je pri  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  pravokotna na ravnino  $(x, y)$ . Vendar se ti dve ravnini sekata v isti premici, prav v premici skozi točko  $T$  in skozi na Sliki 62 prikazano središče  $S$ . Hkrati ta premica vsebuje normalo na torus in vse je v redu. Torej sklenemo: za povsem izbočeno stran torusa, ki jo predstavlja točka  $T$  na Sliki 62, leži središče pritisnjene krožnice, ki ustraza največjemu krivinskemu polmeru, na premici v ravnini  $(x, z)$ , ki gre skozi točki  $T$  in  $S$ , vendar je središče pritisnjene krožnice še nižje na premici, kot je točka  $S$ . Na notranji strani strani torusa so stvari bolj zapletene.



# Matematični dodatek B:

## Grupe

### B.1 Definicija grupe in nekaj pojmov

Grupa  $G$  je končna ali neskončna množica elementov, med katerimi uvedemo binarno (dvočleno) operacijo (označimo jo kar s piko kot za navadno množenje). Zanj veljajo naslednja pravila:

- I) Za poljubna elementa grupe dobimo z njuno binarno operacijo enolično določen element grupe:  $a, b \in G \rightarrow a \cdot b = c \in G$ .
- II) V  $G$  obstaja poseben element, enota  $e$ , ki pri binarni operaciji ohranja vse elemente grupe:  $e \cdot a = a \cdot e = a$ .
- III) Za vsak element grupe  $a \in G$  enolično obstaja inverzni element  $a^{-1}$ , tako da dobimo enoto pri binarni operaciji obeh grupnih elementov:  $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ .
- IV) Binarna operacija je asociativna:  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ .

Pripadnost smo označili z znakom  $\in$ . Odslej bomo (razen v posebnih primerih) binarni operaciji rekli kar množenje, znak za množenje bomo izpuščali. Imena množenje, enota in inverzni element so primerna, ker je najznačilnejši zgled neskončne grupe množica vseh realnih števil brez števila 0. Označimo jo  $R_0$ . Tukaj je navadno množenje zares

grupno množenje, enota je  $e = 1$ , inverzni element pa  $a^{-1} = \frac{1}{a}$ . Število 0 smo morali izpustiti iz množice, ker nima inverznega elementa.

Nasplošno grupa ni komutativna, zato ne smemo kar tako zamenjati vrstnega reda faktorjev pri množenju. Asociativnost pomeni nekaj drugega: po pravilu (IV) lahko prestavljamo oklepaje, to pomeni, kaj prej zmnožimo, ne smemo pa prestavljati vrstnega reda grupnih elementov. Nekatero grupe so komutativne, kot je zgoraj omenjena grupa  $R_0$ . Takšne grupe imenujemo tudi Abelove grupe. Lep primer nekomutativne grupe je neskončna množica neizrojnih kvadratnih matrik enake dimenzije. Takšne matrike lahko poljubno množimo med seboj in vrstni red faktorjev je pomemben. Matrike morajo biti neizrojne (od nič različna determinanta), tako da lahko vsaki matriki poiščemo inverzno matriko. Enota je kar enotska matrika, to je diagonalna matrika s samimi enkami po diagonalni.

Nekaj naslednjih trditev ne bomo dokazovali, ker tukaj ni prostora za to.

Naslednji enačbi za element  $x$  sta enolično rešljivi:

$$ax = b \rightarrow x = a^{-1}b \quad (\text{B.1 a})$$

$$xa = b \rightarrow x = ba^{-1}. \quad (\text{B.1 b})$$

Za inverzni element veljajo naslednja pravila, podobno kot za kvadratne matrike:

$$(a^{-1})^{-1} = a \quad (\text{B.2 a})$$

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \quad (\text{B.2 b})$$

$$(abc)^{-1} = c^{-1}b^{-1}a^{-1}. \quad (\text{B.2 c})$$

Dva elementa  $a$  in  $b$  v  $G$  sta si podobna, če najdemo tretji element  $c$  v  $G$ , da velja  $b = cac^{-1}$ . To zvezo napišemo tudi drugače:  $bc = ca$ . Ni nujno, da je tudi element  $c$  podoben elementoma  $a$  in  $b$ . Podobnost označimo takole:  $b \sim a$ . Podobnost je ekvivalenčna relacija:

1. Element je sam sebi podoben:  $a \sim a$ .
2. Podobnost je povratna:  $a \sim b \rightarrow b \sim a$ .
3. Podobnost je prehodna (tranzitivna):  $(a \sim b), (b \sim c) \rightarrow a \sim c$ .

Kot za vsako ekvivalenčno relacijo razpade grupa na ločene (disjunktne) razrede podobnih elementov (na kratko razrede). To pomeni, da element ne more biti v dveh razredih hkrati. Enota je vedno sama razred zase. Tudi kateri drugi element je sam zase razred, če komutira z vsemi drugimi elementi grupe. Če pa je celotna grupa komutativna, potem je vsak element razred zase. Ena od pomembnih lastnosti vsake grupa je prav njena razdelitev na razrede.

Podmožica  $H$  grupe  $G$  je njena podgrupa za isto grupno množenje, če ostane produkt poljubnih dveh elementov iz  $H$  spet v  $H$ .  $H$  mora vsebovati tudi enoto in z vsakim elementom tudi inverzni element. Zato zgoraj omenjeni razredi niso podgrupe, z izjemo enote kot razreda. Priročen način dokazovanja, da je  $H$  podgrupa  $G$ , je naslednji: če za poljubna dva elementa  $a$  in  $b$  iz  $H$  velja, da je tudi produkt  $ab^{-1}$  v  $H$ , potem vemo, da je  $H$  podgrupa. Če je grupa  $G$  končna, je število njenih elementov (moč grupe) vedno deljivo s številom elementov katerekoli podgrupe. Kot primer neskončne grupe omenimo spet grupo neizrojenih kvadratnih matrik iste dimenzije, njena podgrupa (spet neskončna) pa je npr. podmnožica matrik z determinanto 1. Podgrupa podgrupe takšnih matrik so rotacijske matrike, opisane v poglavju o rotaciji teles. Tudi te matrike imajo determinanto 1 in tudi dodatne lastnosti.

Če zberemo skupaj vse elemente grupe, ki komutirajo z vsemi elementi, je ta množica tudi podgrupa. Imenujemo jo center celotne grupe.

V teoriji grup je pomemben tudi pojem odsek grupe  $G$  po kateri od njenih podgrup  $H$ . Za lažje sklepanje naj bosta obe grupi končni, število elementov  $G$  naj bo  $N$ , število tistih  $H$  pa  $M < N$ . Odsek je množica elementov iz  $G$ , ki jih tudi je  $M$ , kakor v  $H$ . Razlikujemo leve in desne odseke, dobimo pa jih na naslednji način. Desni odsek po podgrupi  $H$ , katerega zastopnik je element  $a$ , označimo  $aH$ . Ta oznaka pomeni, da vsakega od elementov iz  $H$  z leve strani pomnožimo z izbranim elementom  $a$ . Poljubni element tega odseka  $b$  lahko zato zapišemo kot  $b = ah$ , kjer  $h \in H$ . Tudi  $a$  spada v ta odsek, ker velja  $a = ae$ . Lažje si zapomnimo pojem **desnega odseka**, če rečemo, da izbrani element  $a$  z desne pomnožimo z vsemi elementi iz  $H$ . Število različnih desnih odsekov je manjše od  $N$ , ker ni nujno, da dasta dva različna elementa  $a_1$  in  $a_2$  različna odseka. Lahko je tudi  $a_1H = a_2H$ . Res je, da produkta  $a_1$  in  $a_2$  z istim elementom dasta dva različna elementa, vendar vrstni red v množici ni pomemben. Število različnih odsekov je  $N/M$ , ker imajo vsi odseki po  $M$  elementov in cela grupa  $G$  razpade na odseke. To hkrati pomeni, da je moč grupe  $N$  vedno deljiva z močjo neke podgrupe  $M$ ,

kot smo že omenili. Odseki sami niso podgrupe. Podgrupa je edino desni odsek  $eH$ , ki edini vsebuje tudi enoto in ki je kar enak podgrupi  $H$ . Nekaj konkretnih zgledov bomo podali v zvezi z grupami simetrijskih operacij, ki so v fiziki najpomembnejše. Množico vseh različnih desnih odsekov označimo  $G/H$  in jo imenujemo (desni) faktorski prostor  $G$  po  $H$ .

Podobno definiramo **levi odsek**  $Ha$ . Za leve odseke veljajo podobne lastnosti kot za desne odseke. Tudi njihovo število je  $N/M$ . Ker grupa  $G$  nasplošno ni komutativna, tudi levi in desni odsek z istim zastopnikom  $a$ , to je,  $Ha$  in  $aH$ , nista med seboj vedno enaka. Vemo samo, da je element  $a$  v obeh. Če pa slučajno velja za vsak element  $a \in G$ , da je  $Ha = aH$ , pravimo, da je  $H$  **podgrupa edinka**. Ni nujno, da mora biti cela grupa  $G$  ali pa vsaj podgrupa  $H$  komutativna, da bi bila  $H$  edinka. Če je  $H$  center grupe (njeni elementi komutirajo z vsemi elementi  $G$ , čeprav celotna grupa  $G$  ni komutativna), potem je  $H$  že avtomatsko edinka. Tako je center grupe že podgrupa edinka, ni pa vsaka podgrupa edinka center grupe.

Od splošnih grupnih relacij in zakonitosti omenimo še dve za fiziko zelo pomembni. To je homomorfizem grup in njegova posebna skupina – upodobitve. Homomorfizem  $f$  slika iz grupe  $G$  v grupo  $K$  in njegove lastnosti spominjajo na linearne preslikave. Lahko sta grupi enaki, vzemimo splošni primer, ko sta različni. Homomorfizem ni nujno bijektivna preslikava, je pa enoličen. Vsak element  $g \in G$  se preslika v točno določen element iz  $K$ :  $f(g) = k$ . Po definiciji preslika homomorfizem produkta v produkt homomorfizmov:  $f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2)$ . Pazimo: elementa  $g_1$  in  $g_2$  zmožimo v  $G$ , njuni preslikavi  $f(g_1)$  in  $f(g_2)$  pa v  $K$ . Analogno velja za linearno preslikavo v istem vektorskem prostoru ali pa iz enega vektorskega prostora v drugega:  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ . Z vidika grupne teorije je tudi ta preslikava homomorfizem, če si zamišljamo seštevanje kot grupno binarno operacijo.

Iz te definicije homomorfizma izhajajo nekaj lastnosti, ki jih je lahko dokazati. Enota v  $G$  se preslika v enoto v  $K$ . Če obe enoti označimo drugače, npr.  $e_G$  in  $e_K$ , potem je  $f(e_G) = e_K$ . Inverzni element se preslika v inverzni element:  $f(g^{-1}) = (f(g))^{-1}$ , ali zapisano drugače:  $f(g) f(g^{-1}) = e_K$ .

Če homomorfizem ni surjektivna preslikava, potem definiramo njegovo sliko  $\text{Im } f = f(G)$ . S homomorfizmom delujemo nad vsemi elementi iz  $G$  in opazujemo dobljeno podmožico v  $K$ . Izkazuje se, da je  $\text{Im } f$  podgrupa v  $K$ . Podobno, če homomorfizem ni

injektivna preslikava, definiramo njegovo jedro  $\text{Ker } f$ . To so vsi elementi iz  $G$ , ki jih  $f$  preslika v enoto  $e_K$  v drugi grupi. Seveda pripada množici  $\text{Ker } f$  tudi enota  $e_G$  v prvi grupi, izkaže pa se, da je jedro podgrupa edinka v  $G$ .

Upodobitev je tisti homomorfizem, ki grupo  $G$  preslika v množico neizrojenih kvadratnih matrik izbrane dimenzije, npr. v matrike  $3 \times 3$  (ali kar pomeni isto, v množico linearnih preslikav vektorskega prostora vase). Povedali smo že, da je tudi množica takšnih matrik grupa, če je grupno množenje kar množenje matrik.

## B.2 Zgledi grup

Omenili bomo dve skupini grup: grupo permutacij in grupo simetrijskih operacij, kot so rotacija, zrcaljenje in translacija za mrežne vektorje v kristalih. Grupo permutacij za  $n$  elementov, ki jih označimo s številkami od 1 do  $n$ , imenujemo tudi polna simetrična grupa in označimo  $S_n$ . Moč te grupe je  $n!$ , ker je toliko možnih razvrstitev elementov. Grupa ni komutativna. Eden od zapisov vsakega elementa te grupe je v obliki tablice (razpredelnice), ki pove, kako se premešajo elementi, npr.

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

To pomeni, da na prvo mesto pride 2 namesto 1, na drugo mesto 1, 3 pa ostane na mestu. To je eden od 6 elementov grupe  $S_3$ . Omenjeni element grupe  $g$  je tudi primer, ko se zamenjata samo dve številki med seboj. Za poljubno permutacijo je značilno, da se da razstaviti na zaporedje samih takih dvočlenih zamenjav. To zaporedje ni enolično, vseeno pa velja, da se permutacija da razstaviti na samo liho število ali samo sodo število dvočlenih zamenjav. Glede na to ji rečemo liha ali soda permutacija. Vzemimo še en zgled za permutacijo iz grupe  $S_5$ :

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Vidimo, da smo naredili ciklično permutacijo prvih treh števil. Tukaj najprej zamenjamo med sabo prva dva elementa, potem pa drugega in tretjega, zato je to soda permutacija.

Grupno množenje pomeni tukaj zaporedno izvedbo dveh permutacij. Enota je permutacija, ki ohranja vrstni red vseh števil. Tudi pri grupi permutacij lahko iščemo razrede, podgrupe in odseke. Omenimo samo razdelitev na razrede. Tako kot lahko

vsako permutacijo razstavimo na same zamenjave parov elementov, jo lahko tudi razstavimo na same cikle. Cikel dolžine  $r$  pomeni, da zamenjamo prvi element z drugim, drugi s tretjim, in tako do  $r$ -tega, ki se zamenja s prvim. Tako smo imeli pri elementu  $g$  zgoraj za permutacijo 5 števil en cikel dolžine 3. Števili 4 in 5 sta vsaka v svojem ciklu z dolžino 1. Če zapišemo permutacijo s samimi cikli, zapišemo zgornjo permutacijo takole:  $g = (1, 2, 3)(4)(5)$ . Cikel sam lahko ciklično permutiramo, ker se ponavlja po večkratnem izvajanju, tako da je vseeno, katero število napišemo na prvo mesto. Tako je npr. za naš primer pravilen tudi zapis:  $g = (2, 3, 1)(4)(5)$ .

Izkaže se, da sta dve permutaciji v istem razredu podobnosti natanko takrat, ko imata cikle enakih dolžin ne glede na to, kako so v ciklih razporejena števila. Obravnavajmo nekoliko podrobneje permutacijsko grupo  $S_3$ , ki ima samo 6 elementov. Zapisali bomo vse njene elemente, omenili generatorje grupe, prikazali tablico množenja ter razdelitev na cikle in razrede.

Elementi so v običajnem zapisu in v ciklih:

$$p_1 = e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3) \quad (\text{B.3 a})$$

$$p_2 = a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1,2,3) \quad (\text{B.3 b})$$

$$p_3 = b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(2,3) \quad (\text{B.3 c})$$

$$p_4 = a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1,3,2) \quad (\text{B.3 č})$$

$$p_5 = ba = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1,3)(2) \quad (\text{B.3 d})$$

$$p_6 = ba^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1,2)(3) \quad (\text{B.3 e})$$

Permutacije  $p_3$ ,  $p_5$  in  $p_6$  so lihe,  $p_1$ ,  $p_2$  in  $p_4$  pa sode. Nasploh imamo v vsaki množici z vsaj dvema elementa natanko pol permutacij lihih in pol sodih. Ob enoti smo posebej označili elementa  $a$  in  $b$ . To sta **generatorja grupe**. Tako imenujemo tistih nekaj elementov, s katerimi lahko s potencami in množenjem sestavimo vse druge elemente grupe. Elementi so tako razdeljeni po razredih:  $\{p_1\}\{p_3, p_5, p_6\}\{p_2, p_4\}$ . Enota ima tri cikle dolžine 1; drugi razred s tremi permutacijami en cikel dolžine 1 in en cikel dolžine 2; tretji razred z dvema permutacijama pa en sam cikel dolžine 3. Nasplošno ima grupa permutacij toliko razredov, na kolikor načinov lahko razdelimo število elementov

množice na vsoto naravnih števil. V našem primeru množice s 3 elementi, nad katerimi izvajamo vse permutacije, je to:  $3 = 3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$ ; to so 3 mogoče vsote.

Tablica množenja ima v našem primeru 6 vrstic in 6 stolpcev. V njej zapišemo rezultat produktov za vse mogoče pare elementov v grupi. Ker grupa ni komutativna, je pomembno, da ne zamenjamo med seboj vrstic in stolpcev. Dogovorimo se, da vrsticam ustreza prvi faktor, stolpcem pa drugi faktor produkta. Vendar pazimo, da podobno kot pri izvedbi operatorjev na argumente najprej pri razvrščanju elementov neke množice najprej izvedemo drugo permutacijo v produktu, šele potem prvo permutacijo. Tablica množenja je podana v Preglednici 1.

**Peglednica 1: Tablica množenja elementov permutacijske grupe  $S_3$**

$p \downarrow \cdot p \rightarrow$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$
$p_1$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$
$p_2$	$p_2$	$p_4$	$p_6$	$p_1$	$p_3$	$p_5$
$p_3$	$p_3$	$p_5$	$p_1$	$p_6$	$p_2$	$p_4$
$p_4$	$p_4$	$p_1$	$p_5$	$p_2$	$p_6$	$p_3$
$p_5$	$p_5$	$p_6$	$p_4$	$p_3$	$p_1$	$p_2$
$p_6$	$p_6$	$p_3$	$p_2$	$p_5$	$p_4$	$p_1$

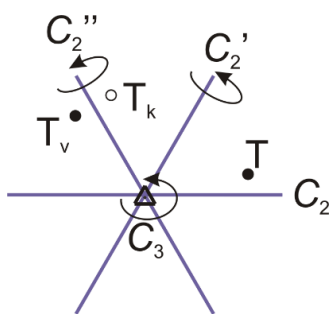
Produkte smo dobili z neposrednim množenjem in z upoštevanjem zgornjih zvez med generatorjema in drugimi elementi. Dodaten test pravilnosti tablice (razpredelnice) je, da mora biti v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu posebej vseh 6 elementov grupe, čeprav v različnem vrstnem redu. S to tablico množenja se lahko dodatno prepričamo o zgornji razdelitvi grupe na razrede. Na primer, podobnostna relacija med elementoma  $p_3 = b$  in  $p_5 = ba$  iz drugega razreda, ki imata poleg permutacije  $p_6$  dva cikla dolžin 1 in 2, je naslednja:  $ba = aba^{-1}$  ali  $p_5 = p_2 p_3 p_2^{-1}$ . Čeprav je element  $a$  v tretjem razredu, povezuje omenjena elemeta iz drugega razreda.

Za fiziko je zanimivejša grupa operacij z vektorji v prostoru. Obravnavajmo najprej ciklično grupo  $C_n$ . To je grupa zasukov okrog ene same  $n$ -števne osi v 3D. Osnovna operacija, to je element, ki mu pravimo tudi generator grupe, vrti za kot  $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ . Tej operaciji ali elementu grupe damo ponavadi kar isto oznako  $C_n$ , kot jo ima cela grupa. Vendar tukaj zaradi večje preglednosti ta element označimo preprosto  $a$ . Vsi drugi elementi grupe so potence tega elementa (kar pomeni večkratne zasuke za kot  $\alpha$ ). Zato je  $a$  generator grupe. Velja  $a^n = e$  (enota), tako da so elementi grupe:

$$C_n = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}.$$

Grupa je komutativna, ima  $n$  elementov in prav toliko razredov, ker je vsak element svoj razred.

Še zanimivejše so grupe, kjer imamo več različnih osi vrtenja v 3D. Takšne grupe niso komutativne, pojavljajo pa se v zvezi s točkovno simetrijo kristalov. Te simetrije in ustrezne grupe moramo upoštevati pri različnih fizikalnih opisih kristalov, npr. pri mrežnih nihanjih. Ena od skupin tako imenovanih grup točkovnih simetrijskih operacij so grupe  $D_n$ . Kot pri grupi  $C_n$  je osnovni kot vrtenja  $\alpha = \frac{2\pi}{n}$  okrog  $n$ -števne osi. Naravno število  $n$  ni poljubno, ampak dopušča translacijska simetrija kristala le vrednosti  $n = 1, 2, 3, 4$  in  $6$ . Pravokotno na glavno  $n$ -števno os so postavljene tudi 2-števne osi, kot med sosednjima 2-števna osema v isti ravnini je enak polovičnemu osnovnemu kotu vrtenja  $\alpha$ . Za zgled vzemimo grupo  $D_3$ . Osnovni kot je  $\alpha = 120^\circ$ , 3 dvoštevne osi (ali 6 njihovih poltrakov) pa so v pravokotni ravnini in kot med sosedama je  $60^\circ$ . Grupa ima 6 elementov, grupa  $C_3$  s tremi od teh elementov, vključno z enoto, je njena podgrupa. Trije dodatni grupni elementi so zasuki za  $180^\circ$  okrog vsake od treh dvoštevni osi. Razredi so trije:  $\{e\}\{C_3, C_3^2\}\{C_2, C_2', C_2''\}$ .



Slika 64: Kompozitum dveh vrtenj: najprej okrog 3-števne osi (točka  $T$  se preslika v vmesno točko  $T_v$ ), potem okrog 2-števne osi  $C_2''$  (točka  $T_v$  se preslika v končno točko  $T_k$ ). Enak rezultat (preslikava iz  $T$  neposredno v  $T_k$ ) da zasuk okrog osi  $C_2'$ . Trištevna os, pravokotna na ravnino slike, je označena z majhnim trikotnikom v presečišču dvoštevni osi.

Elemente smo označili takole:  $C_3$  je zasuk za  $120^\circ$ ,  $C_3^2$  pa za  $240^\circ$  okrog 3-števne osi,  $C_2$ ,  $C_2'$  in  $C_2''$  so zasuki za  $180^\circ$  okrog različnih 2-števni osi. Grupa mora biti popolna, zato mora biti produkt katerihkoli dveh elementov spet v grupi. Kot primer Slika 63 prikazuje, da je produkt (v bistvu kompozitum) vrtenja za  $120^\circ$  okrog 3-števne osi in vrtenja za  $180^\circ$  okrog ene od 2-števni osi spet vrtenje, in sicer za  $180^\circ$  okrog druge 2-števne osi:  $C_2'' C_3 = C_2'$ . Pazimo na zaporedje: najprej zasuk okrog 3-števne osi in potem



okrog 2-števne osi. Na sliki je 3-števna os prikazana s trikotnikom (kot je navada v literaturi), os pa je pravokotna na podano ravnino. Vse tri 2-števne osi so v tej ravnini. Polni krogec označuje lego točke nad ravnino, prazni krogec pa pod njo.

V zvezi z grupo  $D_3$  prikažimo tudi njene upodobitve. Kot smo omenili, se grupni elementi preslikajo v ustrezne kvadratne matrike, vendar tako, da se produkt ohranja. To med drugim pomeni, da se enota preslika vedno v enotsko matriko. Med upodobitvami so v teoriji pomembne nerazcepne upodobitve. Tukaj ni prostora za obširno razlago, omenimo samo, da se v primeru nerazcepnih upodobitev matrike nasplošno ne dajo zapisati kot bločne matrike. Število neodvisnih nerazcepnih upodobitev in dimenzije ustreznih matrik so omejeni z močjo grupe. Število neodvisnih nerazcepnih upodobitev je kar enako številu razredov, v našem primeru 3. Dimenzije ustreznih matrik določa enačba, da je vsota kvadratov dimenzij enaka številu elementov grupe. V našem primeru je edina možnost:  $1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$ . Tako sta dve neodvisni upodobitvi 1D (matrika je kar število), ena je 2D (matrika  $2 \times 2$ ). Vendar pazimo, za vsako nerazcepno upodobitev imamo 6 različnih matrik (ali za 6 števil za 1D upodobitev), to je, za vsak grupni element posebej. Kakšne so matrike, ni popolnoma enolično določeno, vendar se mora vse skupaj lepo ujemati. Zapišimo vsej šest 2D matrik za tretjo nerazcepno upodobitev. Preslikavo grupnega elementa bomo označili z  $D(g)$ .

$$D(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4 a})$$

$$D(C_3) = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4 b})$$

$$D(C_3^2) = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4 c})$$

$$D(C_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4 č})$$

$$D(C_2') = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4 d})$$

$$D(C_2'') = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.4 e})$$

Matrike nimajo takega neposrednega geometrijskega pomena, npr. niso rotacijske matrike. Da so pravilne, lahko preizkusi bralec sam. Na primer, kvadrat matrike iz (B.4 b) je matrika (B.4 c), ker dvakratni operaciji  $C_3$  ustreza operacija  $C_3^2$ . Kvadrat matrik od (B.4 č) do (B.4 e) pa mora biti enotska matrika, ker dvakratni operaciji  $C_2$  ustreza identiteta, saj dvakratni zasuk za  $180^\circ$  vrne točko na isto mesto. Z množenjem vseh

parov matrik lahko bralec naredi podobno tablico množenja kar za grupne elemente, kot je tablica množenja za grupo  $S_3$  zgoraj.

Kaj pa preprostejši 1D nerazcepni upodobitvi? Tukaj je namesto matrike kar eno število, kar je spet isto kot sled matrike. V teoriji je pomembna značilna kar sled matrike za vsako upodobitev in za vsak grupni element. Sledi zgornjih matrik za 2D upodobitev takoj preberemo. Preglednica sledi elementov po upodobitvah in razredih je spodaj. Sledi matrike upodobitvene matrike enega grupnega elementa rečemo **karakter elementa**. Cel razred elementov ima enak karakter pri isti upodobitvi (Preglednica 2)

Preglednica 2: Prikaz karakterjev elementov grupe  $D_3$

Upod/el.	$e$	$C_3$	$C_3^2$	$C_2$	$C_2'$	$C_2''$
$\Gamma_1$ (1D)	1	1	1	1	1	1
$\Gamma_2$ (1D)	1	1	1	-1	-1	-1
$\Gamma_3$ (2D)	2	-1	-1	0	0	0

Vidimo, da je prva upodobitev zelo preprosta: vsakemu grupnemu elementu podeli vrednost 1. Seveda se tudi množenje teh števil ujema z grupnim množenjem, saj je rezultat vedno  $1 \cdot 1 = 1$ . Druga 1D upodobitev daje vrednosti 1 in  $-1$ , tako da je treba bolj paziti, da se grupno množenje pretvori v pravilno množenje obeh števil. Vedno pa velja še eno pravilo, če vzamemo vrstice karakterjev v preglednici kot komponente 6D vektorjev, potem so skalarni produkti različnih vektorjev (vrstic) enaki 0, skalarni produkt vektorja samega s seboj je 6. To pravilo pomaga pri postavitvi smiselnih vrednosti upodobitvenih matrik ali pa števil za vse mogoče nerazcepne upodobitve.

# Matematični dodatek C: Pravokotni koordinatni sistemi

## C.1 Definicija pravokotnih koordinatnih sistemov

Obravnavajmo 3D prostor. Pravokotni koordinatni sistemi so takšni, da so v vsaki točki prostora vsi trije smerni vektorji pravokotni med seboj. Definicija velja tudi v primerih, ko se smeri teh vektorjev spreminjajo od točke do točke. Tukaj nas zanimata samo dva sistema: cilindrični in sferični koordinatni sistem. Ob kartezičnega ju v fiziki najbolj uporabljajo, čeprav so znani tudi drugi sistemi, npr. parabolični.

## C.2 Pretvorba koordinat

Trojice kartezičnih, cilindričnih in sferičnih koordinat naj bodo  $(x, y, z)$ ,  $(\rho, \varphi, z)$  in  $(r, \theta, \varphi)$ . Navedli bomo pretvorbe med koordinatami v obe smeri za para kartezični-cilindrični in kartezični-sferični koordinatni sistem. Pri cilindričnem sistemu se koordinate pretvarjajo takole:

$$x = \rho \cos \varphi \quad (\text{C.1 a})$$

$$y = \rho \sin \varphi \quad (\text{C.1 b})$$

$$z = z \quad (\text{C.1 c})$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{C.2 a})$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x} \quad (\text{C.2 b})$$

$$z = z. \quad (\text{C.2 c})$$

Cilindrična koordinata  $\rho$  pomeni razdaljo točke od osi  $z$ , ki sovpada v obeh sistemih, kartezičnem in cilindričnem. Azimutni kot  $\varphi$  je kot med osjo  $x$  in pravokotno projekcijo zveznice med izhodiščem in točko na ravnino  $(x, y)$ . Pravokotna projekcija cilindričnega sistema na ravnino  $(x, y)$  je polarni 2D koordinatni sistem.

Pri sferičnem sistemu so pretvorbe naslednje:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad (\text{C.3 a})$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi \quad (\text{C.3 b})$$

$$z = r \cos \theta \quad (\text{C.3 c})$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\text{C.4 a})$$

$$\theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (\text{C.4 b})$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}. \quad (\text{C.4 c})$$

Sferična koordinata  $r$  pomeni razdaljo točke od izhodišča. Azimutni kot  $\varphi$  ima enak pomen kot pri cilindričnem koordinatnem sistemu, kot  $\theta$  je kot med osjo  $z$  in zveznico med izhodiščem in točko. Z odvajanjem kartezičnih koordinat po času izrazimo tudi ustrezne kartezične komponente hitrosti s časovnimi odvodi koordinat v obeh sistemih. Za cilindrični sistem izračunamo:

$$v_x = \dot{\rho} \cos \varphi - \rho \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \quad (\text{C.5 a})$$

$$v_y = \dot{\rho} \sin \varphi + \rho \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \quad (\text{C.5 b})$$

$$v_z = \dot{z}. \quad (\text{C.5 c})$$

Za sferični sistem so komponente hitrosti:

$$v_x = \dot{r} \sin \theta \cos \varphi + r \cos \theta \cos \varphi \cdot \dot{\theta} - r \sin \theta \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \quad (\text{C.6 a})$$

$$v_y = \dot{r} \sin \theta \sin \varphi + r \cos \theta \sin \varphi \cdot \dot{\theta} + r \sin \theta \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \quad (\text{C.6 b})$$

$$v_z = \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \cdot \dot{\theta}. \quad (\text{C.6 c})$$

Komponent pospeška ponavadni ni treba računati, ker raje rešujemo dinamiko gibanja z ELE ali s Hamiltonovimi enačbami.

### C.3 Smerni vektorji ter prostorninski, ploskovni in ločni element

Smerni vektorji so enotski vektorji, ki jih izračunamo najprej z odvajanjem kartezičnih koordinat po koordinatah v drugem koordinatnem sistemu in jih nato normaliziramo. Tako je v cilindričnem koordinatnem sistemu trojica teh vektorjev:

$$\vec{e}_\rho = \left( \frac{\partial x}{\partial \rho}, \frac{\partial y}{\partial \rho}, \frac{\partial z}{\partial \rho} \right) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \quad (\text{C.7 a})$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{1}{\rho} \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right) = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \quad (\text{C.7 b})$$

$$\vec{e}_z = \left( \frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial z}{\partial z} \right) = (0, 0, 1). \quad (\text{C.7 c})$$

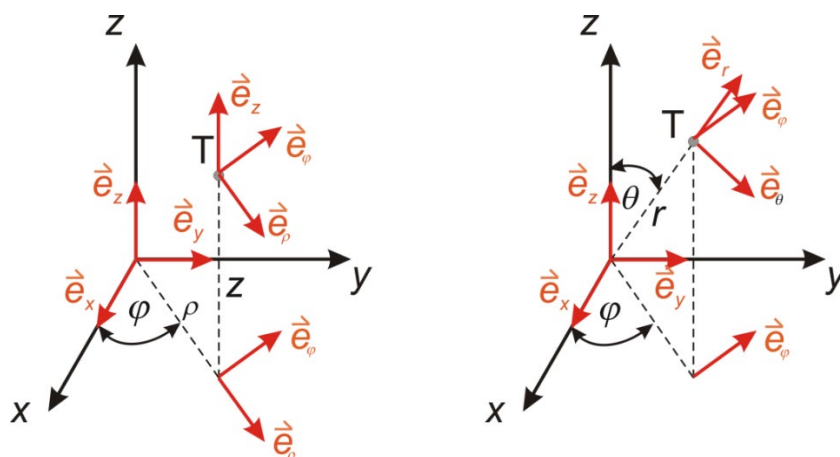
V sferičnem sistemu so smerni vektorji:

$$\vec{e}_r = \left( \frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial r} \right) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \quad (\text{C.8 a})$$

$$\vec{e}_\theta = \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta) \quad (\text{C.8 b})$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right) = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0). \quad (\text{C.8 c})$$

S skalarnimi produkti lahko preverimo, da so pri obeh koordinatnih sistemih vsi trije vektorji zares paroma pravokotni: pri vseh parih so skalarni produkti enaki nič. Koordinate in smerni vektorji obeh sistemov so prikazani na Sliki 65.



Slika 65: Koordinate in smerni vektorji za cilindrični (levo) in sferični (desno) sistem

Pogosto potrebujemo tudi infinitezimalni prostorninski element, na primer pri računanju vztrajnostnega momenta telesa, kjer integriramo po njegovi prostornini. Izračunamo ga z uporabo 3D Jacobijeve determinante, ki ima za elemente vseh 9 odvodov kartezičnih

koordinat po drugih koordinatah. Te odvode smo že uporabili v enačbah (C.7) ali (C.8), le da zdaj ni nobene normalizacije. Za zgled pokažimo le račun za sferični sistem:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ r \cos \theta \cos \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \\ -r \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta$$

Račun takšne trivrstne determinante si olajšamo tako, da iz druge vrstice izpostavimo koeficient  $r$ , iz tretje pa  $r \sin \theta$ . Če dobimo negativno vrednost  $J$ , vzamemo njeno absolutno vrednost. Za izračun prostorninskega elementa vrednost  $J$  tudi pomnožimo s produktom diferencialov koordinat. Tako izpeljemo za cilindrični sistem

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz, \quad (\text{C.9 a})$$

za sferični sistem pa

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \quad (\text{C.9 b})$$

Izpeljana volumna prostorninskih elementov za oba sistema ne smemo poistovetiti z elementom  $dV = dx dy dz$  v kartezičnih koordinatah, ker so vsi trije delčki prostora orientirani drugače. Ploskovne elemente računamo nasplošno drugače. Navedimo le posebna primera, skladna s cilindrično ali sferično simetrijo. Iz enačbe (C.9 a) je razvidno, da je ploskovni element na plašču valja s polmerom  $\rho$  enak  $dS = \rho d\varphi dz$ . Ploskovni element na površini krogle s polmerom  $r$  je v skladu z enačbo (C.9 b) enak  $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ . Za tanko valjno lupino namreč velja preprosta zveza  $dV = \rho dS$ , za tanko krogelno lupino pa  $dV = r dS$ . Zapišimo ploskovna elementa še enkrat:

$$dS = \rho d\varphi dz \quad (\text{C.10 a})$$

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (\text{C.10 b})$$

Kvadrata ločnih elementov za oba sistema sta:

$$(ds)^2 = (d\rho)^2 + \rho^2 (d\varphi)^2 + (dz)^2 \quad (\text{C.11 a})$$

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\varphi)^2. \quad (\text{C.11 b})$$

Izpeljemo ju npr. tako, da v enačbi  $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$  upoštevamo diferencialne vse kartezične koordinate. Pri seštevanju vseh členov se izničijo tisti z mešanimi produkti diferencialov koordinat v drugem sistemu. To je v skladu s pravokotnostjo smernih vektorjev.





## Viri in literatura

Lawrence E. Goodman, William H. Warner: Dynamics, Dover Publications, inc. NY 1961.  
Herbert Goldstein, Charles Poole, John Safko: Classical mechanics, Addison Wesley, 2002.  
D. Morin: Introduction to classical mechanics, Cambridge University Press, 2008.  
T. Fliessbach: Mehanik, Lehrbuch zur Theoretischen Physik I., Springer, 2020.  
Andrej Čadež: Teorija gravitacije, DMFA založništvo, Ljubljana 2011.  
Janez Žitnik: Univerzitetne fizikalne naloge, I. del, Tehniška založba Slovenije, Ljubljana 2002.  
Spletna predavanja Classical Mechanics (Leonard Susskind, Stanford), dostopno na:  
<https://www.youtube.com/watch?v=ApUFtLCrU90&list=PL47F408D36D4CF129>



DOI

[https://doi.org/  
10.18690/um.fnm.4.2023](https://doi.org/10.18690/um.fnm.4.2023)

ISBN

978-961-286-805-5

# ANALITIČNA MEHANIKA

MILAN AMBROŽIČ,<sup>1</sup> ARBRESHA HÖLBL<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Osnovna šola Solkan, Solkan, Slovenija  
[milan.ambrozic.prenosnik@gmail.com](mailto:milan.ambrozic.prenosnik@gmail.com)

<sup>2</sup> Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Maribor, Slovenija  
[arbresha.hoelbl@um.si](mailto:arbresha.hoelbl@um.si)

Pri predmetu Analitična mehanika obravnavamo številne probleme iz mehanike, predvsem dinamike, na bolj matematično sistematičen način, kot je navada pri običajnih fizikalnih nalogah, npr. v zvezi z drugim Newtonovim zakonom. S tem lahko vključimo tudi kompleksnejše geometrije pri gibanju teles. Ključni del analitične mehanike je vpeljava generaliziranih koordinat kot neodvisnih spremenljivk gibanja, s katerimi izrazimo Lagrangeovo funkcijo ali pa Hamiltonian. Nazadnje moramo rešiti ustrezne diferencialne enačbe, da najdemo časovno odvisnost generaliziranih koordinat. Gravitacija in nihanje sta značilni področji, kjer koristno uporabimo matematični formalizem analitične mehanike.

**Ključne besede:**

Lagrangeova funkcija,  
Hamiltonian,  
Euler-Lagrangeove  
enačbe,  
mehanika,  
variacijski račun,  
enostavna telesa in  
sistemi teles

DOI

<https://doi.org/>

10.18690/um.fnm.4.2023

ISBN

978-961-286-805-5

**Keywords:**

Lagrange function,  
Hamiltonian,  
Euler-Lagrange  
equations,  
mechanics,  
variational calculus,  
simple bodies and  
systems of bodies

# SYSTEM ADMINISTRATION IN LINUX

MILAN AMBROŽIČ,<sup>1</sup> ARBRESHA HÖLBL<sup>2</sup>

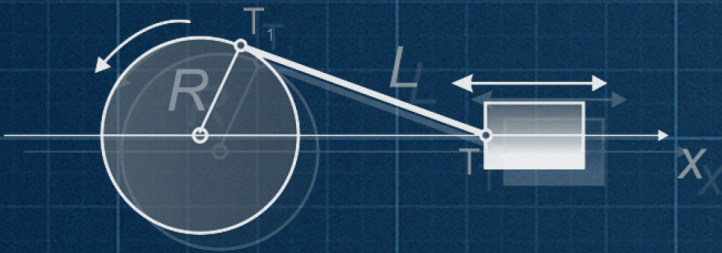
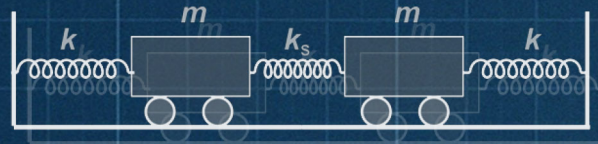
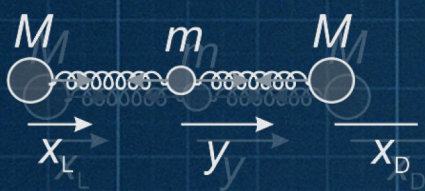
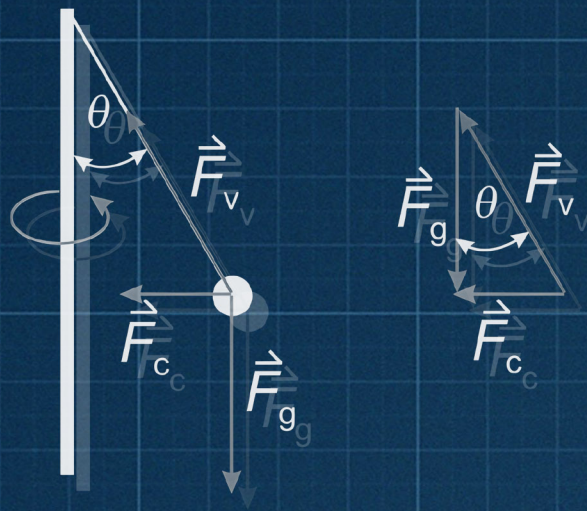
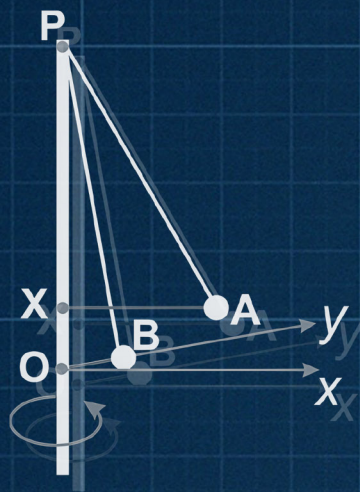
<sup>1</sup> Solkan Primary School, Solkan, Slovenija  
milan.ambrozic.prenosnik@gmail.com

<sup>2</sup> University of Maribor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Maribor, Slovenia  
arbresha.hoelbl@um.si

In the course Analytical mechanics numerous problems in mechanics, particularly topics from dynamics, are treated in a more systematic way, as compared to ordinary physical problems, e.g., in relation to second Newton law. In this way, we can also include more complex geometries in the motion of bodies. The key part of analytical mechanics is introduction of generalized coordinates as independent variables of motion, used to express either Lagrange function or Hamiltonian. Finally, the corresponding differential equations must be solved in order to find the time development of generalized coordinates. Gravitation and oscillation are typical areas where the mathematical formalism of analytical mechanics can be used.







Univerza v Mariboru

Fakulteta za naravoslovje  
in matematiko

Pri predmetu Analitična mehanika obravnavamo številne probleme iz mehanike, predvsem dinamike, na bolj matematično sistematičen način, kot je navada pri običajnih fizikalnih nalogah, npr. v zvezi z drugim Newtonovim zakonom. S tem lahko vključimo tudi kompleksnejše geometrije pri gibanju teles. Ključni del analitične mehanike je vpeljava generaliziranih koordinat kot neodvisnih spremenljivk gibanja, s katerimi izrazimo Lagrangeovo funkcijo ali pa Hamiltonian. Nazadnje moramo rešiti ustrezne diferencialne enačbe, da najdemo časovno odvisnost generaliziranih koordinat. Gravitacija in nihanje sta značilni področji, kjer koristno uporabimo matematični formalizem analitične mehanike.