UNIVERZA V MARIBORU

FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

Oddelek za matematiko in računalništvo

MAGISTRSKO DELO

Darina Cvetrežnik

Maribor, 2023

UNIVERZA V MARIBORU
FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO
Oddelek za matematiko in računalništvo

Magistrsko delo

GRAFI Z ENOLIČNO γ-MNOŽICO

na magistrskem študijskem programu
Izobraževalna matematika - enopredmetna

Mentorica:
doc. dr. Tanja Dravec

Kandidatka:
Darina Cvetrežnik

Maribor, 2023

ZAHVALA

Le tisoč in stoti prehojen delček na moji je poti.
Kaj me še čaka, še sama ne vem,
včasih strmina, včasih ravnina,
morda črn prepad, morda pisana pomlad.
Mnogo poti pred nami stoji,
a izbrati ta pravo ni kar tako, zna biti težko.
Nikdar na mestu ne stoj, poglej kdaj za seboj in
se vrni tja, kjer pot se je križala.
Dovoli, da so ti bližnji in družina v pomoč,
v pravo smer sigurno zaneslo te bo nekoč.

Najlepša hvala vsem mojim bližnjim, predvsem družini in seveda tudi vsem prijateljem in sorodnikom za vso podporo, ki ste mi jo nudili v času študija, za vaše potrpljenje ter pomoč, ko sem jo potrebovala.

Hvala tudi vsem profesorjem, docentom in asistenom, ki ste se zares trudili na predavanjih in vajah ter mi predali ogromno znanja.

Posebna in največja zahvala gre v zadnjih dveh letih mentorici, doc. dr. Tanji Dravec. Iz srca se Vam zahvaljujem za vso pomoč in podporo pri pisanju magistrske naloge, za vse vzpodbudne besede, za odzivnost ter za čas, ki ste mi ga namenili.

Vsem se iskreno zahvaljujem.

Grafi z enolično γ-množico

program magistrskega dela

V magistrskem delu naj bodo raziskane lastnosti γ-enoličnih grafov, to je grafov, ki imajo natanko eno najmanjšo dominantno množico. Predstavljeni naj bodo tako potrebni kot zadostni pogoji γ-enoličnih grafov. Za posebne družine grafov, kot so drevesa in bločni grafi, naj bodo dokazane karakterizacije. Predstavljene naj bodo čim boljše zgornje meje za število povezav v γ-enoličnih grafih.

Osnovni viri:

1. G. Gunther, B. Hartnell, L.R. Markus, D. Rall, Graphs with unique minimum dominating sets, Congressus Numerantium, (1994) 55–63.

2. M. Fischermann, Block graphs with unique minimum dominating sets, Discrete Mathematics, 240 (2001) 247–251.

3. M. Fischermann, D. Rautenbach, L. Volkmann, Maximum graphs with a unique minimum dominating set, Discrete mathematics, 260 (2003) 197–203.

doc. dr. Tanja Dravec

CVETREŽNIK, D.: Grafi z enolično γ-množico.
Magistrsko delo, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Oddelek za matematiko in računalništvo, 2023.

IZVLEČEK

V magistrskem delu podrobneje obravnavamo grafe z enolično γ-množico oziroma γ-enolične grafe. To so grafi, ki imajo natanko eno najmanjšo dominantno množico.

Sprva zapišemo nekaj osnovnih definicij in trditev o grafih, nato posebej obravnavamo dve družini grafov, in sicer drevesa ter bločne grafe.

Podrobneje opišemo dominantno množico in dominantno število grafa. Dokažemo nekaj potrebnih in nekaj zadostnih pogojev za grafe z natanko eno γ-množico. Nato se osredotočimo na drevesa. Predstavimo dve karakterizaciji γ-enoličnih dreves ter obe karakterizaciji posplošimo na γ-enolične bločne grafe.

Nazadnje opišemo konstrukcijo γ-enoličnih grafov oziroma zapišemo štiri operacije, ki jih lahko uporabimo nad γ-enoličnimi grafi, da bo na novo dobljen graf ponovno γ-enoličen.

Ključne besede: dominantna množica, γ-enolični grafi, drevesa, bločni grafi.

Math. Subj. Class. (2020): 05C05, 05C69, 05C76.

CVETREŽNIK, D.: Graphs with unique γ-sets.
Master Thesis, University of Maribor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Department of Mathematics and Computer Science, 2023.

ABSTRACT

The thesis aims to give an in-depth insight into graphs with a unique γ-sets (known as γ-unique graphs), that is, graphs with exactly one minimum dominating set.

Initially, we present fundamental theoretical concepts and principles of graphs, and examine two distinct classes of graphs, namely trees and block graphs.

Subsequently, we provide a detailed description of the dominating set and the domination number of a graph. Then we give some necessary and some sufficient conditions of γ-unique graphs. γ-unique trees are then studied in more details. We present two characterizations of γ-unique trees and extend these characterizations to γ-unique block graphs.

In the concluding segment of the thesis, the construction of γ-unique graphs will be explained by using four graph operations that can be applied on γ-unique graph, such that the resulting graph is again γ-unique.

Keywords: dominating set, γ-unique graphs, trees, block graphs.

Math. Subj. Class. (2020): 05C05, 05C69, 05C76.

Kazalo

Uvod

Tema magistrskega dela spada pod že več kot 200-let staro vejo matematike, ki se imenuje teorija grafov.

Graf je v osnovi množica vozlišč in povezav, lahko pa ima različne lastnosti, recimo, je usmerjen ali neusmerjen, končen ali neskončen, enostaven, ima utežene povezave,... Grafe srečujemo v mnogih panogah kot so kemija, molekularna biologija, družboslovje, kombinatorika, gospodarstvo, prav tako se grafi pojavljajo v raznih igrah, omrežjih, itd.

Magistrsko delo je razdeljeno v 6 poglavij.

V prvih treh poglavjih so zapisane osnovne definicije pojmov, trditve, izreki, leme in posledice, ki ji uporabljamo v nadaljnjih poglavjih. V prvem poglavju so opisani splošni pojmi o grafih kot so graf, podgraf, sprehod, pot, obhod, cikel, polni graf, dvodelni graf, najmanjša in največja stopnja grafa, red grafa, zaprta in odprta soseščina, presečno vozlišče, povezanost grafa, osnovna lema teorije grafov, itd. V drugem poglavju se osredotočimo le na povezane grafe brez ciklov, torej drevesa. Na koncu poglavja so zapisane še karakterizacije, ki nam pomagajo preveriti ali je nek graf drevo. Tretje poglavje zajema posebno družino grafov, in sicer bločne grafe, ki so v petem poglavju podrobneje obravnavani v sklopu teme magistrskega dela.

Četro poglavje zajema definicije, ki nam pomagajo v celoti razumeti naslov magistrskega dela. V tem poglavju spoznamo pojme kot so dominantna množica, dominantno število grafa, γ-množica, privatni sosed in privatna soseščina.

V petem poglavju obravnavamo temo magistrskega dela, torej grafe z enolično γ-množico oziroma grafe, ki imajo natanko eno najmanjšo dominantno množico. Peto poglavje je razdeljeno v 3 podpoglavja.
Prvo podpoglavje opisuje lastnosti γ-enoličnih grafov nasploh. Izvemo, da je poljuben graf G γ-enoličen, če zanj velja, da za vsako vozlišče x iz γ-množice D grafa G velja, da je $\gamma(G - \{x\}) > \gamma(G)$.
Drugo podpoglavje se navezuje le na γ-enolična drevesa. γ-enolična drevesa lahko karakteriziramo na več načinov. Na primer, drevo T je γ-enolično natanko tedaj, ko ima γ-množico

D, kjer za vsako vozlišče x iz množice D velja, da ima vsaj 2 privatna soseda, različna od vozlišča x.
V tretjem podpoglavju posplošimo rezultate iz drugega podpoglavja še na γ-enolične bločne grafe, saj velja, da je vsako drevo tudi bločni graf. Torej, bločni graf G je γ-enoličen z enolično γ-množico D natanko tedaj, ko je D γ-množica grafa G in za vsako vozlišče x iz množice D velja, da ima vsaj 2 privatna soseda, različna od vozlišča x, ki ne ležita v istem bloku grafa G. Velja še splošnejši pogoj, da je bločni graf G γ-enoličen z enolično γ-množico D natanko tedaj, ko je D dominantna množica grafa G in za vsako vozlišče x iz množice D velja, da ima vsaj 2 privatna soseda, različna od vozlišča x, ki ne ležita v istem bloku grafa G.

V zadnjem, šestem poglavju spoznamo štiri operacije nad γ-enoličnimi grafi, ki nam povedo, kako konstruirati γ-enolični graf iz dveh γ-enoličnih grafov. Izvemo tudi, da lahko odstranimo določene povezave v γ-enoličnem grafu in ohranimo γ-enoličnost grafa.

Poglavje 1

Osnovni pojmi

Poglavje je povzeto po [4] in zajema definicije osnovnih pojmov ter nekatere izreke in posledice, ki jih bomo potrebovali za razumevanje naslednjih poglavij.

Graf: Graf $G = (V(G), E(G))$ je urejen par množice vozlišč $V(G)$ in množice povezav $E(G)$. Povezavo med vozliščema a in b zapišemo kot $\{a, b\}$. V nadaljevanju bomo zaradi krajšega zapisa povezavo $\{a, b\}$ zapisali kot ab oziroma kot ba.

Končni graf: Graf, ki ima končno mnogo vozlišč.

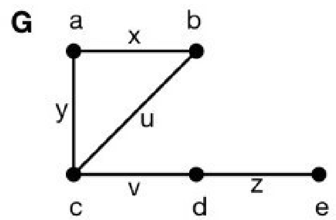
Neusmerjen graf: Graf, pri katerem je množica povezav množica neurejenih parov vozlišč.

Zanka: Zanka je povezava, ki povezuje vozlišče s samim seboj, torej povezava oblike $\{a, a\}$.

Enostaven graf: Graf, ki nima zank in nima več kot ene povezave med poljubnima paroma vozlišč.

V tem magistrskem delu bomo obravnavali le končne neusmerjene enostavne grafe.

Na sliki 1.1 je narisan graf G z $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$, $E(G) = \{ab, ac, bc, cd, de\} = \{x, y, u, v, z\}$



Slika 1.1: Končni neusmerjen enostavni graf G

Krajišči povezave: Vsaka povezava v enostavnem grafu je množica dveh različnih vozlišč, ki jima rečemo krajišči povezave.

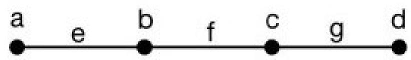
Incidenčno vozlišče in incidenčna povezava: Rečemo, da je vozlišče a incidenčno s povezavo e, če je vozlišče a krajišče povezave e. V tem primeru rečemo tudi, da je povezava e incidenčna z vozliščem a.

Na sliki 1.2 je narisana povezava e s krajiščema a in b. Vozlišči a in b sta incidenčni s povezavo e, povezava e pa je incidenčna z vozliščema a in b.

Slika 1.2: Krajišči povezave

Sosedni in nesosedni povezavi: Povezavi e_1 in e_2 sta sosedni, če imata skupno krajišče, sicer sta nesosedni.

Na sliki 1.3 sta povezavi e in f sosedni (prav tako povezavi f in g), povezavi e in g pa sta nesosedni.



Slika 1.3: Sosedni in nesosedni povezavi

Sosedni in nesosedni vozlišči ter sosed: Vozlišči $x, y \in V(G)$ sta sosedni, če je xy povezava v grafu G, sicer sta nesosedni. Vozlišče $x \in V(G)$ je sosed vozlišča $y \in V(G)$, če je xy povezava v grafu G, oziroma $xy \in E(G)$.

Odprta soseščina: Odprta soseščina vozlišča $x \in V(G)$ je množica vseh sosedov vozlišča x. Odprto soseščino vozlišča x označimo z $N(x)$ ali $N_G(x)$ (če želimo poudariti kateremu grafu pripada vozlišče x), torej $N(x) = \{y \in V(G); xy \in E(G)\}$. Odprto soseščino množice $M \subseteq V(G)$ definiramo kot $N(M) = (\bigcup_{x \in M} N(x)) \setminus M$ (lahko označimo tudi kot $N_G(M)$).

Zaprta soseščina: Zaprta soseščina vozlišča $x \in V(G)$ zajema poleg odprte soseščine vozlišča x še vozlišče x. Zaprto soseščino vozlišča x označimo z $N[x]$ ali $N_G[x]$ (če želimo poudariti kateremu grafu pripada vozlišče x), torej $N[x] = N(x) \cup \{x\}$. Zaprto soseščino množice $M \subseteq V(G)$ definiramo kot $N[M] = \bigcup_{x \in M} N[x]$ (lahko označimo tudi kot $N_G[M]$).

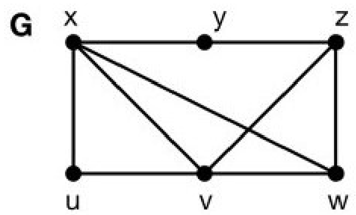
Stopnja vozlišča: Stopnja vozlišča $x \in V(G)$ je število povezav grafa G, ki imajo x za krajišče oziroma je moč odprte soseščine vozlišča x. Stopnjo vozlišča x označimo z $deg(x)$ ali $deg_G(x)$, torej $deg(x) = |N(x)|$.

Najmanjša stopnja grafa: Najmanjša stopnja grafa je enaka stopnji vozlišča grafa, ki ima najmanjšo stopnjo izmed vseh vozlišč grafa. Najmanjšo stopnjo grafa G označimo z $\delta(G)$, torej $\delta(G) = \min_{x \in V(G)}\{deg(x)\}$.

Največja stopnja grafa: Največja stopnja grafa je enaka stopnji vozlišča grafa, ki ima največjo stopnjo izmed vseh vozlišč grafa. Največjo oziroma maksimalno stopnjo grafa G označimo z $\Delta(G)$, torej $\Delta(G) = \max_{x \in V(G)}\{deg(x)\}$.

Red grafa: Graf G je reda n, če ima n vozlišč oziroma je $|V(G)| = n$.

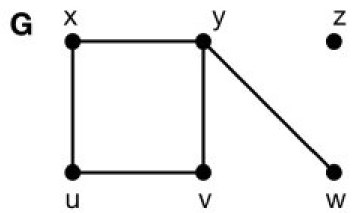
Na sliki 1.4 je narisan graf G reda 6 ($|V(G)| = 6$) v katerem so vozlišča y, u, v in w sosedje vozlišča x. $N(x) = \{y, u, v, w\}$ je odprta soseščina vozlišča x, $N[x] = \{x, y, u, v, w\}$ je zaprta soseščina vozlišča x, $deg(x) = 4$ je stopnja vozlišča x ($deg(y) = 2$, $deg(z) = 3$, $deg(u) = 2$, $deg(v) = 4$, $deg(w) = 3$), $\delta(G) = 2$ je najmanjša stopnja grafa G, $\Delta(G) = 4$ pa največja stopnja grafa G.



Slika 1.4: Graf G reda 6

Izolirano vozlišče: Vozlišče $x \in V(G)$ grafa G je izolirano, če je $deg(x) = 0$.

Na sliki 1.5 je narisan graf G reda 6, v katerem je vozlišče z izolirano, saj je $deg(z) = 0$.



Slika 1.5: Izolirano vozlišče z

Spodnji lemi 1.1 rečemo tudi **osnovna lema teorije grafov**.

Lema 1.1 $2|E(G)| = \sum_{v \in V(G)} deg(v)$.

Dokaz. V dokazu osnovne leme teorije grafov bomo uporabili princip dvojnega preštevanja.

Naj ima nek graf G m povezav ($|E(G)| = m$), ki jih označimo z $e_1, e_2, \ldots, e_m$ in n vozlišč ($|V(G)| = n$), ki jih označimo z $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Narišimo tabelo, kot je prikazana spodaj, kjer v prvo vrstico zapišemo vse povezave grafa G, v prvi stolpec pa vsa vozlišča grafa G. Če je vozlišče v_i krajišče povezave e_j za nek $1 \leq i \leq n$ in $1 \leq j \leq m$, naredimo v stolpcu, kjer je povezava e_j in v vrstici, kjer je vozlišče v_i kljukico oziroma znak $\checkmark$. Opazimo, da če seštejemo vse kljukice v i-ti vrstici, dobimo $deg(v_i)$ kljukic za vsak $1 \leq i \leq n$. Vemo tudi, da ima vsaka povezava natanko 2 krajišči, torej bosta v vsakem stolpcu, kjer je povezava e_j natanko dve kljukici za vsak $1 \leq j \leq m$. Če seštejemo vse kljukice po vrsticah, dobimo $\sum_{v_i \in V(G)} deg(v_i)$ kljukic, če pa preštejemo kljukice po stolpcih, pa dobimo $2m$ oziroma $2|E(G)|$ kljukic iz česar sledi, da je $2|E(G)| = \sum_{v \in V(G)} deg(v)$.

$V(G) \backslash E(G)$	e_1	e_2	$\ldots$	e_j	$\ldots$	e_m	
v_1							$deg(v_1)$
v_2							$deg(v_2)$
$\vdots$							$\vdots$
v_i				$\checkmark$			$deg(v_1)$
$\vdots$							$\vdots$
v_n							$deg(v_n)$
	2	2	$\ldots$	2	$\ldots$	2	$2\lvert E(G)\rvert \setminus \sum_{v_i \in V(G)} deg(v_i)$

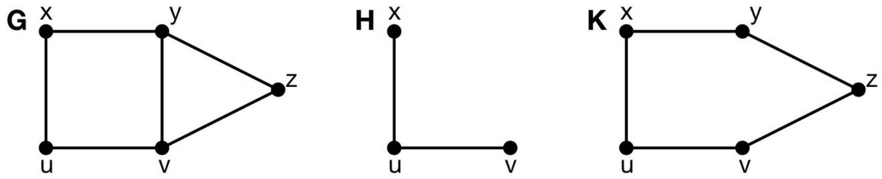
□

Podgraf: Graf H je podgraf grafa G, kar označimo kot $H \subseteq G$, če velja $V(H) \subseteq V(G)$ in $E(H) \subseteq E(G)$.

Inducirani podgraf: Graf H je inducirani podgraf grafa G, če je podgraf grafa G in $\forall x, y \in V(H) : xy \in E(G) \Rightarrow xy \in E(H)$. Rečemo tudi, da je inducirani podgraf H grafa G induciran z množico $V(H)$, kar zapišemo kot $H = G[V(H)]$, oziroma v splošnem, za množico $S \subseteq V(G)$, $G[S]$ označuje podgraf grafa G, induciran z množico S.

Vpeti podgraf: Graf H je vpeti podgraf grafa G, če je podgraf grafa G in če je $V(H) = V(G)$.

Na sliki 1.6 je graf H inducirani podgraf grafa G, ni pa vpeti podgraf grafa G, saj ne vsebuje vozlišč y in z. Graf K je vpeti podgraf grafa G, ni pa inducirani, saj povezava $vy \in E(G)$, vendar $vy \notin E(K)$. Prav tako je graf H inducirani podgraf grafa K.

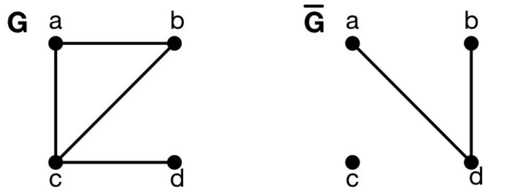


Slika 1.6: Graf G in njegova podgrafa H in K.

Maksimalen podgraf: Podgraf H grafa G je maksimalen z neko lastnostjo $*$, če $\forall H' \subseteq G$, $H \subset H'$ velja, da H' nima lastnosti $*$.

Komplement grafa: Komplement grafa G je graf $\overline{G}$ za katerega velja, da je $V(\overline{G}) = V(G)$ in $\forall x, y \in V(\overline{G}) : xy \in E(\overline{G}) \Leftrightarrow xy \notin E(G)$.

Na sliki 1.7 je graf G in njegov komplement, graf $\overline{G}$.



Slika 1.7: Graf G in njegov komplement $\overline{G}$

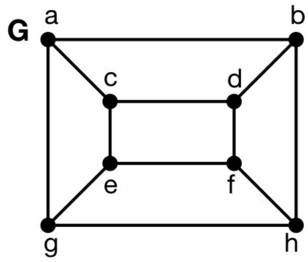
Sprehod: Sprehod v grafu G med vozliščema x_1 in x_k je zaporedje vozlišč $x_1, x_2, \ldots, x_k$ grafa G, kjer $x_i \in V(G)$ za $\forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ in kjer velja, da je $x_i x_{i+1} \in E(G)$ za $\forall i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$. Vozliščema x_1 in x_k rečemo krajišči sprehoda.

Pot: Pot v grafu je sprehod, katerega vsa vozlišča so različna. Podgraf grafa G induciran z vozlišči poti, prav tako imenujemo pot. Pot, ki vsebuje n vozlišč označimo s P_n.

Obhod: Obhod je sklenjen sprehod v grafu. Začne in konča se v istem vozlišču.

Cikel (sode in lihe dolžine): Cikel je obhod v grafu, katerega vsa vozlišča so različna. Cikel je lihe dolžine oziroma lih, če vsebuje liho število povezav oziroma liho število vozlišč. Cikel je sode dolžine oziroma sod, če vsebuje sodo število povezav oziroma sodo število vozlišč.

Na sliki 1.8 lahko opazimo:
- primer sprehoda v grafu G: a, b, d, f, h, b, d
- primer poti v grafu G: a, b, d, f, h
- primer obhoda v grafu G: a, b, d, f, h, b, a
- primer cikla v grafu G: a, b, h, g, e, c, a

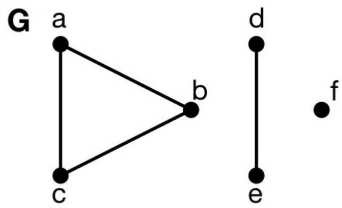


Slika 1.8: Graf G

Povezanost grafa: Graf je povezan, če med poljubnima dvema vozliščema tega grafa obstaja pot, sicer je graf nepovezan. Graf reda 1 (torej graf z enim vozliščem, brez povezav) je prav tako povezan graf.

Komponenta grafa: Komponenta grafa je podgraf danega grafa, ki je povezan in ni del nobenega večjega povezanega podgrafa.

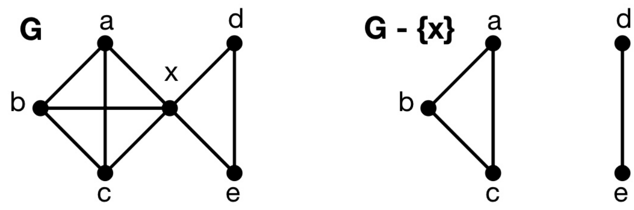
Na sliki 1.9 je prikazan graf G, ki ni povezan (recimo, ne obstaja pot od vozlišča a do vozlišča e), je pa sestavljen iz treh komponent. Prva komponentna je inducirani podgraf grafa G, ki vsebuje vozlišča a, b, c, druga komponenta je inducirani podgraf grafa G, ki vsebuje vozlišči e in d, tretja komponenta pa je izolirano vozlišče f.



Slika 1.9: Nepovezan graf G in njegove komponente

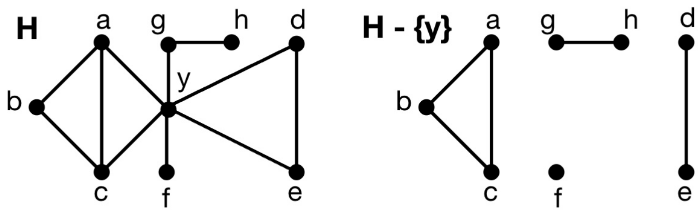
Presečno vozlišče: Naj bo G nek povezan graf. Vozlišče $x \in V(G)$ je presečno vozlišče grafa G, če zanj velja, da če ga odstranimo iz grafa G (pri čemer odstranimo tudi vse povezave, incidenčne z vozliščem x), bo dobljen graf $G - \{x\}$ nepovezan oziroma bo graf G razpadel na dve ali več komponent. Lahko bi tudi rekli, da bosta po odstranitvi vozlišča x iz grafa G obstajala vsaj 2 soseda od vozlišča x, ki bosta v grafu $G - \{x\}$ pripadala različnima komponentama. Očitno je, da je stopnja presečnega vozlišča večja od 1.

Na sliki 1.10 je vozlišče x presečno vozlišče v grafu G, saj če ga odstranimo iz grafa, graf G razpade na dve komponenti.



Slika 1.10: Graf G in presečno vozlišče x

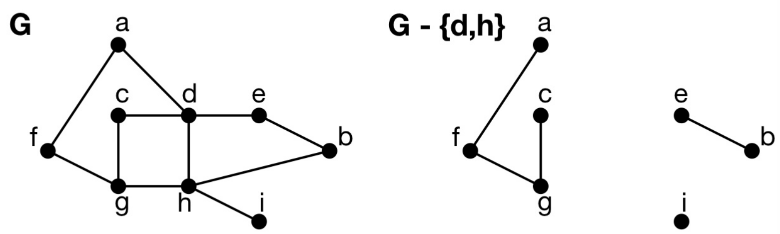
Na sliki 1.11 je vozlišče y presečno vozlišče v grafu H, saj če ga odstranimo iz grafa, graf H razpade na štiri komponente.



Slika 1.11: Graf H in presečno vozlišče y

Separator: Separator vozlišč a in b, ki pripadata isti komponenti grafa G, je množica $S \subseteq V(G)$, za katero velja, da vozlišči a in b pripadata različnima komponentama grafa $G - S$.

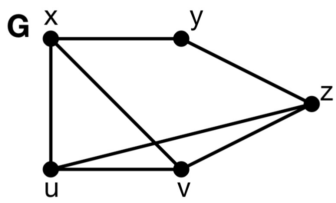
Na sliki 1.12 je množica $S = \{d, h\} \subseteq V(G)$ separator vozlišč a in b. Naštejmo še nekaj separatorjev vozlišč a in b v grafu G: $\{c, d, e, h\}, \{e, h\}, \{d, f, g\}, \ldots$



Slika 1.12: Separator

2-povezan graf: Graf G je 2-povezan, če je $|V(G)| \geq 3$ in če zanj velja, če katerokoli vozlišče iz njega odstranimo, bo dobljen graf še vedno ostal povezan. Oziroma, graf na vsaj 3 vozliščih je 2-povezan, če je povezan in ne vsebuje presečnega vozlišča.

Na sliki 1.13 je 2-povezan graf G, saj ima več kot 2 vozlišči (ima jih pet) in zanj velja, če katerokoli vozlišče odstranimo iz grafa, bo dobljeni graf ostal povezan.



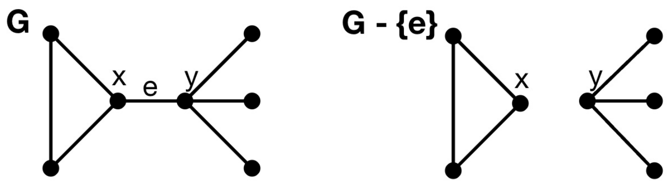
Slika 1.13: 2-povezan graf G

Most: Povezava $e = xy$ grafa G je most, če vozlišči x in y ležita v različnih komponentah grafa $G - \{e\}$. Opazimo, da ima graf $G - \{e\}$ natanko eno komponento več kot graf G.

Posledica 1.2 *Naj bo G povezan graf. Če je povezava e most, potem je graf $G - \{e\}$ nepovezan.*

Dokaz. Posledica 1.2 sledi neposredno iz definicije mosta. □

Na sliki 1.14 je povezava $e = xy$, ki je most v grafu G. Če povezavo e odstranimo iz grafa G, bosta vozlišči x in y ležali v različnih komponentah grafa $G - \{e\}$ oziroma bo dobljen graf nepovezan.



Slika 1.14: Most e v grafu G

Izrek 1.3 *Povezava e grafa G je most natanko tedaj ko e ne leži na nobenem ciklu grafa G.*

Dokaz.
($\Rightarrow$) Dokažimo najprej, če je povezava e grafa G most, potem e ne leži na nobenem ciklu grafa G oziroma, če povezava e grafa G leži na nekem ciklu grafa G, potem ni most.

Predpostavimo torej, da povezava $e = xy; x, y \in V(G)$ leži na nekem ciklu C grafa G, ki ga lahko predstavimo kot zaporedje naslednjih vozlišč iz grafa G:

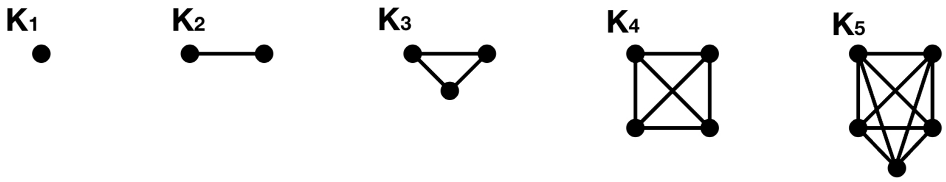
$$C : x, v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k, y, x; v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k \in V(G), k \in \mathbb{N}$$

Če povezavo e, ki pripada ciklu C odstranimo iz grafa, bomo med vozliščema x in y našli pot, ki poteka po vozliščih $x, v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k, y$, ki so pripadala ciklu C, kar pa pomeni, da povezava e ni bila most.

($\Leftarrow$) Dokažimo še, če povezava e grafa G ne leži na nobenem ciklu grafa G, potem je povezava e most.
Če povezava $e = xy; x, y \in V(G)$ ne leži na nobenem ciklu grafa G, potem je povezava e edina pot med vozliščema x in y v grafu G (če bi obstajala še kakšna druga pot med vozliščema x in y bi to pomenilo, da povezava e leži na nekem ciklu). Torej, če povezavo e iz grafa G odstranimo, med vozliščema x in y ni nobene poti, ki bi ju povezovala, zato bo graf $G - \{e\}$ nepovezan. Iz tega sledi, da je povezava e grafa G most. $\square$

Polni graf: Polni graf na n vozliščih, označimo s K_n, je graf, kjer je vsako vozlišče povezano z vsemi ostalimi. Lahko tudi rečemo, da komplement polnega grafa ne vsebuje nobene povezave ($|E(\overline{K_n})| = 0$). Polni grafi na vsaj 3 vozliščih so 2-povezani grafi. Za grafa K_1 in K_2 pa velja, da sta povezana grafa, nista pa 2-povezana.

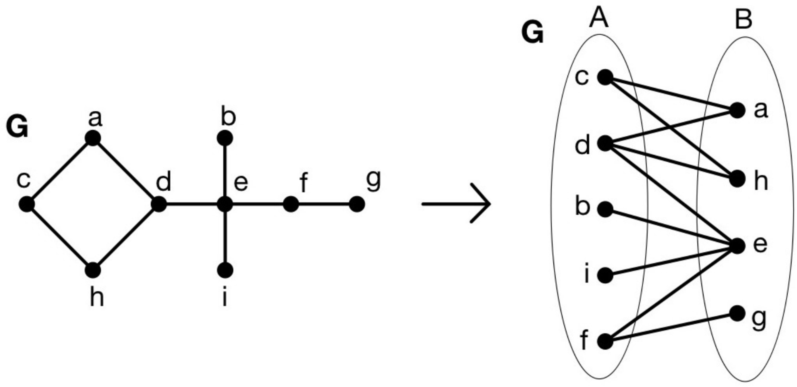
Na sliki 1.15 je prikazanih prvih pet polnih grafov. To so K_1, K_2, K_3, K_4 in K_5.



Slika 1.15: Primeri polnih grafov

Dvodelen graf: Graf G je dvodelen, če lahko množico vozlišč $V(G)$ razbijemo na množici A in B tako, da je $V(G) = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ in velja, da sta podgraf induciran z množico A in podgraf induciran z množico B grafa brez povezav (vsaka povezava grafa G ima eno krajišče v množici A in drugo krajišče v množici B).

Na sliki 1.16 je prikazan dvodelni graf G ter razbitje množice $V(G)$ na množici A in B.



Slika 1.16: Dvodelni graf

Izrek 1.4 *Graf G je dvodelen natanko tedaj, ko nima lihih ciklov.*

Dokaz.
($\Rightarrow$) Dokažimo najprej, če je graf G dvodelen, potem nima lihih ciklov.
Če je graf G dvodelen z množicama vozlišč A in B, potem iz definicije dvodelnega grafa sledi, da ima vsaka povezava eno krajišče v množici A in drugo krajišče v množici B. Če želimo iz nekega vozlišča tvoriti cikel tako, da pridemo ponovno v isto vozlišče, bomo za to potrebovali sodo število povezav, torej so edini možni cikli v dvodelnih grafih sodi.

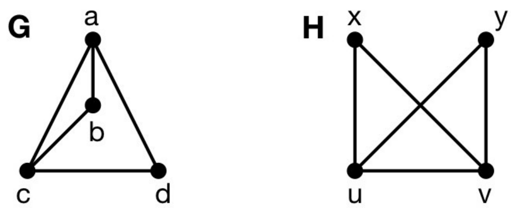
($\Leftarrow$) Dokažimo še, če graf G nima lihih ciklov, potem je dvodelen.
Naj bo $x \in V(G)$ poljubno vozlišče. Tvorimo sedaj naslednje množice:
$N_0 = \{x\}$, množica z enim elementom, z vozliščem x,
$N_1 = \{v \in V(G); xv \in E(G)\}$, množica vseh sosedov od vozlišča x,
$N_2 = \{v \in V(G); uv \in E(G) \wedge u \in N_1\} \setminus N_0$, množica vseh sosedov od vozlišč iz množice N_1 brez množice N_0,
$N_3 = \{v \in V(G); uv \in E(G) \wedge u \in N_2\} \setminus N_1$,
$\vdots$
Množice tvorimo tako dolgo, dokler ne zajamemo vseh vozlišč iz grafa G. Množic bo končno mnogo, saj obravnavamo le končne grafe.
Povezav znotraj tvorjenih množic ni, saj bi sicer dobili lihe cikle v grafu G.
Prav tako ni povezav med tvorjenimi množicami, kjer se indeksa razlikujeta za več kot ena (recimo, če bi obstajala povezava med vozliščem $u \in N_1$ in $v \in N_3$, bi bili v protislovju s tem, da bi morali vsi sosedje od vozlišča u biti v množici N_2, torej tudi vozlišče v).
Sedaj lahko tvorimo razbitje grafa G na množici $A = N_0 \cup N_2 \cup N_4 \cup \ldots$ (unija vseh tvorjenih množic s sodimi indeksi) in $B = N_1 \cup N_3 \cup N_5 \cup \ldots$ (unija vseh tvorjenih množic z lihmi indeksi). Presek množic A in B je očitno prazen. Povezav znoraj množic A in B ni, saj ni povezav znotraj posameznih tvorjenih množic in prav tako ni povezav med tvorjenimi

množicami, ki so v unijah, saj se indeksi razlikujejo za več kot ena. Edine množne povezave so torej med množicama A in B kar pa pomeni, da je graf G dvodelen. $\square$

Polni dvodelen graf: Polni dvodelni graf $K_{r,s}$ je dvodelni graf, kjer je $V(K_{r,s}) = A \cup B$, $|A| = r$ in $|B| = s$ v katerem $\forall a \in A, \forall b \in B$ velja, da $ab \in E(K_{r,s})$.

Izomorfizem grafov: Izomorfizem grafov G in H je bijektivna preslikava $f : V(G) \to V(H)$ za katero velja, da $\forall x, y \in V(G) : xy \in E(G) \Leftrightarrow f(x)f(y) \in E(H)$. Rečemo, da je graf G izomorfen grafu H oziroma, da sta grafa G in H med sabo izomorfna, označimo kot $G \cong H$, če obstaja izomorfizem med njima.

Na sliki 1.17 sta izomorfna grafa G in H, saj obstaja bijektivna preslikava $f : V(G) \to V(H)$, ki preslika: $a \mapsto v$, $b \mapsto x$, $c \mapsto u$, $d \mapsto y$, $ab \mapsto f(a)f(b) = vx$, $ac \mapsto f(a)f(c) = vu$, $ad \mapsto f(a)f(d) = vy$, $bc \mapsto f(b)f(c) = xu$, $cd \mapsto f(c)f(d) = uy$.

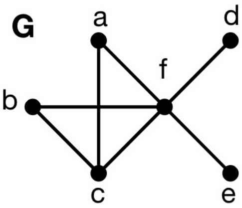


Slika 1.17: Izomorfna grafa G in H

Klika: Množica $K \subseteq V(G)$ je klika v grafu G, če je $G[K]$ polni podgraf grafa G.

Na sliki 1.18 je graf G. Primeri klik v grafu G:
- $\{a\}$ je klika v grafu G, saj je $G[\{a\}] \cong K_1$ (vsako vozlišče v grafu G je samo po sebi klika).
- $\{b, f\}$ je klika v grafu G, saj je $G[\{b, f\}] \cong K_2$.
- $\{a, c, f\}$ je klika v grafu G, saj je $G[\{a, c, f\}] \cong K_3$.

Recimo, množica $\{a, b, c, f\}$ ni klika, saj manjka povezava med vozliščema a in b. Prav tako množica $\{d, e, f\}$ ni klika, saj manjka povezava med vozliščema d in e.



Slika 1.18: Primeri klik v grafu G

Poglavje 2

Drevesa

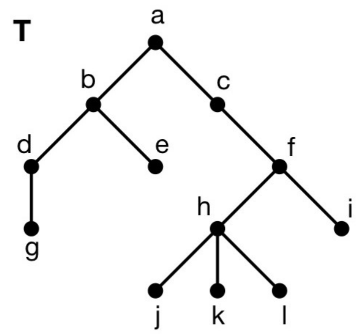
Poglavje je povzeto po [4] in zajema definicije, trditve, posledici in izrek, ki se nanašajo na drevesa.

Drevo: Drevo je povezan graf brez ciklov.

Trivialno in netrivialno drevo: Drevo je trivialno, če je izomorfno grafu K_1. Ostala drevesa so netrivialna.

Listi in notranja vozlišča drevesa: Listi so vozlišča drevesa, ki so stopnje 1, vsa ostala vozlišča stopnje vsaj 2 pa so notranja vozlišča drevesa. Trivialno drevo nima ne listov in ne notranjih vozlišč.

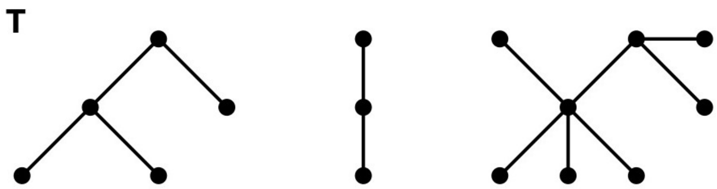
Na sliki 2.1 je drevo T, katerega vozlišča a, b, c, d, f in h so notranja vozlišča, vozlišča e, g, i, j, k in l, pa so listi drevesa T.



Slika 2.1: Drevo T

Gozd: Gozd je graf brez ciklov. Komponente gozda so drevesa. Vsako drevo je hkrati tudi gozd.

Na sliki 2.2 je gozd T, ki ga sestavljajo tri komponente (drevesa).



Slika 2.2: Gozd T

Trditev 2.1 *Netrivialna drevesa so dvodelni grafi.*

Dokaz. Iz definicije drevesa sledi, da drevesa nimajo ciklov iz česar očitno sledi, da nimajo lihih ciklov. Iz izreka 1.4 sledi, da so netrivialna drevesa dvodelni grafi. □

Trditev 2.2 *V drevesu T je vsaka povezava most.*

Dokaz. Dokaz sledi neposredno iz definicije drevesa in izreka 1.3. □

Posledica 2.3 *Če drevesu T odstranimo poljubno povezavo $e \in E(T)$, bo dobljen graf $T - \{e\}$ nepovezan (oziroma dobimo gozd z dvema drevesoma).*

Dokaz. Dokaz sledi neposredno iz trditve 2.2 ter definicije mosta. □

Trditev 2.4 *Vsako notranje vozlišče v drevesu je tudi presečno vozlišče.*

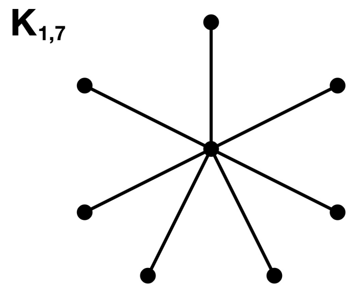
Dokaz. Naj bo T drevo, ki ima notranje vozlišče v. Pokažimo, da je vozlišče v tudi presečno vozlišče drevesa T.
Ker je v notranje vozlišče, ima vsaj dva soseda (sicer bi bilo vozlišče v list ali bi bilo drevo T trivialno z vozliščem v). Če odstranimo vozlišče v iz drevesa T to pomeni, da smo s tem odstranili tudi vse povezave, katerih krajišče je bilo vozlišče v. Ker smo s tem odstranili vsaj dve povezavi, po posledici 2.3 sledi, da bo dobljen graf $T - \{v\}$ nepovezan, torej bo notranje vozlišče v po definiciji presečnega vozlišča presečno. □

Posledica 2.5 *Če drevesu T odstranimo poljubno notranje vozlišče $v \in E(T)$, bo dobljen graf $T - \{v\}$ nepovezan (oziroma dobimo gozd z dvema ali več drevesi).*

Dokaz. Dokaz sledi neposredno iz trditve 2.4 ter definicije presečnega vozlišča. □

Zvezda: Zvezda $K_{1,n}; n \in \mathbb{N}$ je posebna oblika drevesa, je polni dvodelni graf, kjer je n vozlišč (listov) stopnje 1 in eno centralno vozlišče stopnje n. Torej, n vozlišč je povezanih z enim centralnim vozliščem, zato je videti, da je graf v obliki zvezde.

Na sliki 2.3 je zvezda oziroma polni dvodelni graf $K_{1,7}$. To je drevo z enim notranjim vozliščem in s sedmimi listi.



Slika 2.3: Zvezda $K_{1,7}$

Trditev 2.6 *Za vsako netrivialno drevo velja, da je $\delta(T) = 1$. Lahko rečemo tudi, da ima vsako netrivialno drevo vsaj en list.*

Dokaz. Dokazati želimo, da ima vsako netrivialno drevo vsaj en list. Dokazali bomo še več, in sicer, da ima vsako netrivialno drevo vsaj dva lista.
Naj bo T poljubno drevo. Vzemimo poljubno vozlišče $v \in V(T)$. Vozlišče v mora imeti soseda, recimo v_1, saj drevo T ni trivialno.
Če v_1 nima soseda različnega od vozlišča v, je vozlišče v_1 list in dokaz je končan.
Če ima vozlišče v_1 soseda različnega od vozlišča v, recimo v_2, potem vozlišče v_1 ne sme biti sosedno z vozliščem v, saj bi dobili cikel in graf T ne bi bilo drevo. Če v_2 nima soseda različnega od vozlišča v_1, je vozlišče v_2 list in dokaz je ponovno končan.
Če pa ima vozlišče v_2 soseda različnega od vozlišča v_1, recimo v_3, postopek podobno nadaljujemo.
Ker je drevo T končno (obravnavamo le končne grafe), sigurno pridemo do nekega vozlišča $v_n; n \in \mathbb{N}$, ki ne more več imeti soseda različnega od vozlišča v_{n-1} kar pomeni, da je vozlišče v_n list in dokaz je končan.

Če vozlišče v nima soseda različnega od vozlišča v_1, bo vozlišče v poleg vozlišča v_n tudi list v drevesu T. Če pa ima vozlišče v soseda različnega od vozlišča v_1, potem po že znanem postopku slej kot prej pridemo (zaradi končnega drevesa T) do še enega lista, kar pomeni, da ima vsako netrivialano drevo vsaj 2 lista. $\square$

Drevesa so precej preprosta družina grafov, za katera obstaja veliko karakterizacij, ki nam pomagajo tem hitreje preveriti ali je nek graf drevo. Nekaj teh karakterizacij naštejmo, tokrat brez dokaza, v naslednjem izreku.

Izrek 2.7 *Naslednje trditve so za graf G med seboj ekvivalentne:*

1. *Graf G je drevo.*
2. *Graf G je povezan in $|E(G)| = |V(G)| - 1$.*
3. *G je graf brez ciklov in $|E(G)| = |V(G)| - 1$.*
4. *Graf G je povezan in vsaka povezava v grafu G je most.*
5. *Za vsak par vozlišč v grafu G obstaja natanko ena pot med njima.*

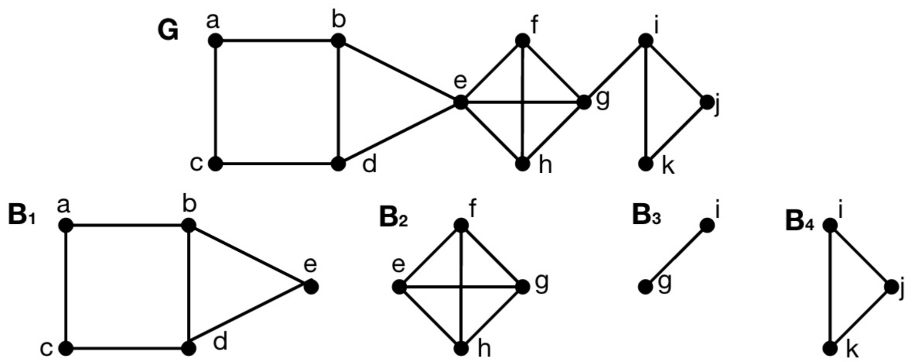
Poglavje 3

Bločni grafi

Poglavje povzeto po [4] in [1] in opisuje bločne grafe ter zajema osnovne definicije, trditve in lemo.

Blok: Blok grafa G je maksimalen povezan podgraf grafa G, ki nima presečnih vozlišč.

Na sliki 3.1 je graf G, ki ima 3 presečna vozlišča e, g in i ter štiri bloke B_1, B_2, B_3 in B_4.



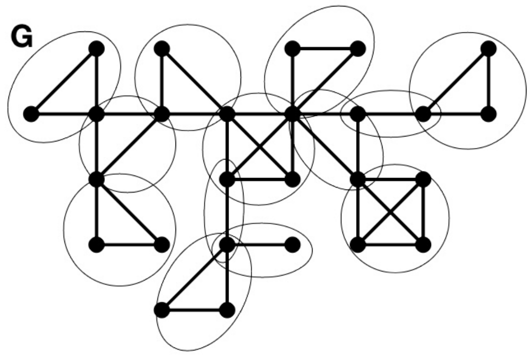
Slika 3.1: Graf G in njegovi bloki

Trditev 3.1 *Vsako vozlišče nekega grafa G pripada vsaj enemu bloku grafa G.*

Dokaz. Če je vozlišče $v \in V(G)$ izolirano vozlišče v grafu G, vozlišče v samo po sebi tvori en blok grafa G.
Če vozlišče v v grafu G ni izolirano, naj bo B maksimalen povezan podgraf grafa G, ki nima presečnih vozlišč in vsebuje vozlišče v. To pomeni, da vozlišče v pripada bloku B. $\square$

Bločni graf: Graf G je bločni graf, če so vsi bloki grafa G polni grafi. Razen bločnih grafov K_1 in K_2, so vsi bločni grafi 2-povezani.

Na sliki 3.2 je bločni graf G. Vsi njegovi bloki so polni grafi in so na sliki obkroženi.



Slika 3.2: Bločni graf G

Trditev 3.2 *Drevesa so bločni grafi.*

Dokaz. Trivialno drevo je bločni graf sestavljen iz enega bloka, in sicer bloka K_1.
Drevo izomorfno grafu K_2 (drevo na dveh vozliščih) je bločni graf sestavljen iz enega bloka, in sicer bloka K_2.
Za vsako drevo na vsaj 3 vozliščih po trditvi 2.4 velja, da je vsako notranje vozlišče drevesa presečno. Vemo tudi, da je vsak list v drevesu povezan natanko z enim notranjim vozliščem v drevesu (če bi bil en list povezan z drugim listom, bi bilo drevo izomorfno grafu K_2). Ker so bloki po definiciji grafi brez presečnih vozlišč to pomeni, da vsaki dve različni povezavi v drevesu pripadata različnima blokoma oziroma število blokov je enako številu povezav v drevesu. Torej, drevesa so sestavljena le iz blokov, ki so izomorfni polnemu grafu K_2 iz česar sledi, da so drevesa bločni grafi. $\square$

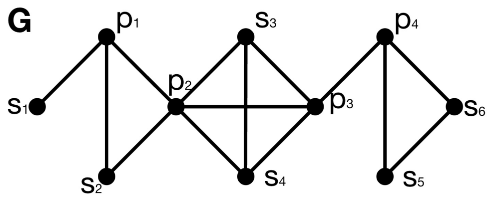
Simplicialno vozlišče: Vozlišče v grafa G je simplicialno vozlišče, če je $N[v]$ (zaprta soseščina vozlišča v) klika v grafu G.

Trditev 3.3 *V bločnem grafu G je vsako vozlišče bodisi presečno vozlišče bodisi simplicialno vozlišče.*

Dokaz. Vzemimo poljubno vozlišče v bločnega grafa G.
Če je vozlišče v izolirano, potem je simplicialno, saj je $N[v] = \{v\}$ klika v grafu G.

Če vozlišče v ni izolirano in je po odstranitvi vozlišča v iz grafa G graf $G - \{v\}$ nepovezan, je vozlišče v presečno vozlišče bločnega grafa G.
Naj vozlišče v ne bo presečno ali izolirano. Po trditvi 3.1 sledi, da vozlišče v pripada nekemu bloku B grafa G. Če vozlišče v ni presečno, bodo vsi njegovi sosedi v bloku B. Ker je graf G bločni, so vsi bloki izomorfni nekemu polnemu grafu iz česar sledi, da je blok B polni graf. Torej, $N[v] \subseteq V(B)$, zato je $N[v]$ klika in posledično je vozlišče v simplicialno. □

Na sliki 3.3 je bločni graf G. Presečna vozlišča so označena s p_1, p_2, p_3 in p_4, vsa simplicialna vozlišča pa s s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 in s_6.
- $N[s_1] = \{s_1, p_1\}$ je klika v grafu G, saj je $G[N[s_1]] \cong K_2$.
- $N[s_2] = \{s_2, p_1, p_2\}$ je klika v grafu G, saj je $G[N[s_2]] \cong K_3$.
- $N[s_3] = \{s_3, p_2, p_3, s_4\}$ je klika v grafu G, saj je $G[N[s_3]] \cong K_4$.
- $N[s_4] = \{s_4, p_2, p_3, s_3\}$ je klika v grafu G, saj je $G[N[s_4]] \cong K_4$.
- $N[s_5] = \{s_5, p_4, s_6\}$ je klika v grafu G, saj je $G[N[s_5]] \cong K_3$.
- $N[s_6] = \{s_6, p_4, s_5\}$ je klika v grafu G, saj je $G[N[s_6]] \cong K_3$.



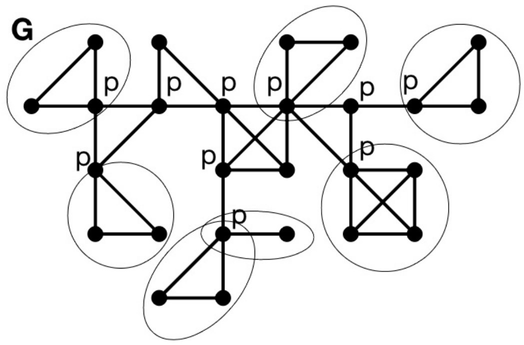
Slika 3.3: Simplicialna in presečna vozlišča v bločnem grafu G

Trditev 3.4 *Listi v drevesih so simplicialna vozlišča.*

Dokaz. Po trditvi 3.2 so drevesa bločni grafi in po trditvi 2.4 so vsa notranja vozlišča dreves presečna. Listi drevesa seveda niso presečna vozlišča, saj če odstranimo en list iz drevesa, bo dobljeno drevo še vedno povezano. Iz trditve 3.3 sledi, da so vozlišča dreves, ki niso presečna, torej listi, simplicialna vozlišča. □

Končni blok: Blok B bločnega grafa G je končni blok, če B vsebuje največ eno presečno vozlišče grafa G.

Na sliki 3.4 je bločni graf G. Vsa presečna vozlišča so označena s črko p. Vsi končni bloki so obkroženi in vsebujejo največ eno presečno vozlišče.



Slika 3.4: Končni bloki v bločnem grafu G

Lema 3.5 *Naj bo G povezan graf z vsaj enim presečnim vozliščem. Če so $B_1, B_2, \ldots, B_t; t \in \mathbb{N}$ vsi bloki grafa G, potem velja sledeče:*

1. *$|V(B_i) \cap V(B_j)| \leq 1$, kjer $i, j \in \mathbb{N}, 1 \leq i, j \leq t; i \neq j$ oziroma dva različna bloka grafa G imata največ eno skupno vozlišče.*

2. *$E(B_i) \cap E(B_j) = \emptyset$, kjer $i, j \in \mathbb{N}, 1 \leq i, j \leq t; i \neq j$ in $E(G) = E(B_1) \cup E(B_2) \cup \ldots \cup E(B_t)$ oziroma vsaka povezava v grafu G pripada natanko enemu bloku grafa G.*

3. *Če vozlišče $x \in V(B_i) \cap V(B_j)$, kjer $i, j \in \mathbb{N}, 1 \leq i, j \leq t; i \neq j$ oziroma, če vozlišče x pripada dvema različnima blokoma grafa G, potem je x presečno vozlišče grafa G.*

4. *Če je vozlišče x presečno vozlišče grafa G, potem vozlišče x pripada vsaj dvema različnima blokoma grafa G.*

5. *Če vozlišči a in b grafa G ne pripadata istemu bloku grafa G, potem vsaka pot od vozlišča a do vozlišča b vsebuje takšno presečno vozlišče $x \neq a, b$ grafa G, da vozlišči a in b ležita v različnih komponentah grafa $G - \{x\}$.*

Dokaz.
Naj bo G povezan graf z vsaj enim presečnim vozliščem in naj bodo $B_1, B_2, \ldots, B_t; t \in \mathbb{N}$ vsi bloki grafa G.

Dokažimo alinejo 1: $|V(B_i) \cap V(B_j)| \leq 1$, kjer $i, j \in \mathbb{N}, 1 \leq i, j \leq t; i \neq j$. Želimo pokazati, da imata dva različna bloka grafa G največ eno skupno vozlišče.
Recimo, da bi 2 različna bloka B_i in B_j grafa G imela vsaj 2 skupni vozlišči. Poglejmo si graf $G' = G[V(B_i) \cup V(B_j)]$. Graf G' je povezan, namreč, njemu inducirana podgrafa B_i in B_j sta oba povezana zaradi definicije bloka, sta pa grafa B_i in B_j tudi med sabo povezana, saj imata vsaj 2 skupni vozlišči. Prav tako graf G' nima presečnih vozlišč, saj zaradi definicije bloka, grafa B_i in B_j ne vsebujeta presečnih vozlišč, vozlišča, ki so grafoma B_i in B_j skupna

pa prav tako niso presečna, saj, če odstranimo katerokoli izmed skupnih vozlišč, recimo naj bo to vozlišče $x \in V(B_i) \cap V(B_j)$, bosta grafa $B_i - \{x\}$ in $B_j - \{x\}$ ostala povezana še vsaj z enim skupnim vozliščem iz $V(B_i) \cap V(B_j)$. To pomeni, da smo našli podgraf G' grafa G, ki je povezan, nima presečnih vozlišč in vsebuje B_i in B_j. Dobimo protislovje s tem, da sta grafa B_i in B_j v grafu G maksimalna povezana podgrafa brez presečnih vozlišč oziroma, da sta bloka. Torej smo pokazali, da je $|V(B_i) \cap V(B_j)| \leq 1$.

Dokažimo alinejo 2: $E(B_i) \cap E(B_j) = \emptyset$, kjer $i, j \in \mathbb{N}, 1 \leq i, j \leq t; i \neq j$ in $E(G) = E(B_1) \cup E(B_2) \cup \ldots \cup E(B_t)$. Recimo, da obstaja $e = xy \in E(B_i) \cap E(B_j); i, j \in \mathbb{N}, 1 \leq i, j \leq t; i \neq j$. Potem $x, y \in V(B_i) \cap V(B_j)$, kar je v protislovju z alinejo 1. Pokažimo še, da je $E(G) = E(B_1) \cup E(B_2) \cup \ldots \cup E(B_t)$. Ker velja, da je $E(B_i) \cap E(B_j) = \emptyset$, kjer $i, j \in \mathbb{N}, 1 \leq i, j \leq t; i \neq j$ pomeni, da so $E(B_1), E(B_2), \ldots, E(B_t)$ disjunktne množice. Če bi obstajala takšna povezava e grafa G, da $e \notin E(B_1) \cup E(B_2) \cup \ldots \cup E(B_t)$, bi obstajal maksimalen podgraf B grafa G brez izoliranih vozlišč, ki vsebuje povezavo e in je različen od blokov $B_1, B_2, \ldots B_t$. Ker je graf B po definiciji tudi blok grafa G, smo v protislovju s tem, da so $B_1, B_2, \ldots, B_t$ vsi bloki grafa G. Torej, pokazali smo, da je $E(G) = E(B_1) \cup E(B_2) \cup \ldots \cup E(B_t)$.

Dokažimo alinejo 3: Če vozlišče $x \in V(B_i) \cap V(B_j)$, kjer $i, j \in \mathbb{N}, 1 \leq i, j \leq t; i \neq j$, potem je x presečno vozlišče grafa G.
Naj bo $x \in V(B_i) \cap V(B_j)$, kjer sta B_i in B_j različna bloka grafa G. Recimo, da vozlišče x ni presečno v gafu G. Potem bo graf $G - \{x\}$ še vedno povezan graf. Iz tega sledi, da v grafu $G - \{x\}$ obstajala pot P, ki poteka skozi vozlišča $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kjer $n \in \mathbb{N}, n > 1, x_1 \in V(B_i), x_n \in V(B_j), x_2, x_3, \ldots, x_{n-1} \in V(G) \setminus (V(B_i) \cup V(B_j))$. Vozlišče x_1 ne more biti enako vozlišču x_n, saj bi sicer obstajalo še eno vozlišče v grafu G poleg vozlišča x, ki bi pripadalo tako bloku B_i kot tudi bloku B_j, kar ni možno zaradi že dokazane alineje 1. Poglejmo sedaj podgraf G', grafa G, kjer je $V(G') = V(B_i) \cup V(B_j) \cup V(P)$ in $E(G') = E(B_i) \cup E(B_j) \cup E(P)$. Graf G' je povezan, saj so njemu inducirani podgrafi B_i, B_j in P vsi povezani (zaradi definicije bloka in poti), so pa tudi med sabo povezani, saj vozlišče x pripada grafoma B_i in B_j, vozlišče x_1 pripada grafoma B_i in P, vozlišče x_n pa pripada grafoma P in B_j. Graf G' prav tako nima presečnih vozlišč, saj zaradi definicije bloka, grafa B_i, B_j ne vsebujeta presečnih vozlišč, vozlišča $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pa prav tako niso presečna v grafu G', saj obstaja pot v $G' - \{x_i\}$ med poljubnima vozliščema grafa $G' - \{x_i\}$ za vsak $i = 1, 2, \ldots, n$ (takšna pot bo inducirani podgraf cikla, ki ga inducirajo pot P, pot od vozlišča x_1 do vozlišča x v grafu B_i ter pot od vozlišča x do vozlišča x_n v grafu B_j). Iz tega sledi, da smo našli podgraf G' grafa G, ki je povezan in nima presečnih vozlišč, katerega grafa B_i in B_j sta podgrafa, kar pomeni da smo v protislovju s tem, da sta grafa B_i in B_j v grafu G maksimalna povezana podgrafa brez presečnih vozlišč oziroma da sta bloka. Torej, pokazali smo, če je vozlišče $x \in V(B_i) \cap V(B_j)$, potem je x presečno vozlišče grafa G.

Dokažimo alinejo 4: Če je vozlišče x presečno vozlišče grafa G, potem vozlišče x pripada vsaj dvema različnima blokoma grafa G.
Naj bo x presečno vozlišče grafa G. Po trditvi 3.1 sledi, da vozlišče x pripada vsaj enemu bloku v grafu G. Recimo, da vozlišče x pripada natanko enemu bloku B_i v grafu G. Potem vsi sosedi vozlišča x pripadajo bloku B_i. Če vozlišče x iz grafa G odstranimo, bosta (zaradi tega, ker je x presečno vozlišče) obstajala vsaj 2 soseda vozlišča x, recimo naj bosta to vozlišči u in v, ki bosta pripadali različnim komponentam grafa $G-\{x\}$ oziroma to pomeni, da ne bo obstajala pot med vozliščema u in v v grafu $G-\{x\}$. Iz tega sledi, da potemtakem tudi v grafu $B_i - \{x\}$, ki je podgraf grafa $G - \{x\}$, ne bo obstajala pot med vozliščema u in v, ki pripadata grafu B_i kar pomeni, da bo x tudi presečno vozlišče v povezanem grafu B_i. To pa je protislovje s tem, da je B_i blok grafa G kar pomeni, da ne vsebuje presečnih vozlišč. Torej, pokazali smo, da če je vozlišče x presečno vozlišče grafa G, potem vozlišče x pripada vsaj dvema različnima blokoma grafa G.

Dokažimo alinejo 5: Če vozlišči a in b grafa G ne pripadata istemu bloku grafa G, potem vsaka pot od vozlišča a do vozlišča b vsebuje takšno presečno vozlišče $x \neq a, b$ grafa G, da vozlišči a in b ležita v različnih komponentah grafa $G - \{x\}$.
Alinejo 5 lahko z upoštevanjem zveze $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ dokažemo tudi na sledeči način: Če obstaja pot od vozlišča a do vozlišča b v grafu G, kjer za vsako vozlišče $x \neq a, b$ iz te poti velja, da vozlišči a in b ležita v isti komponenti grafa $G - \{x\}$, potem vozlišči a in b pripadata istemu bloku grafa G.
Naj obstaja pot $P : a = x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b; n \in \mathbb{N}, n > 1$ v grafu G od vozlišča a do vozlišča b, kjer $\{x_i\}$ ni separator vozlišč a in b v grafu G za vsak $i = 2, \ldots, n-1$, torej vozlišči a in b ležita v isti komponenti grafa $G - \{x_i\}$ za vsak $i = 2, 3, \ldots, n-1$.
Naj bo $n = 2$. Potem sta vozlišči a in b med sabo povezani, torej je ab povezava v grafu G in je pot P enaka $P : a, b$. Ker po alineji 2 vsaka povezava v grafu G pripada natanko enemu bloku grafa G sledi, da vozlišči a in b, ki sta krajišči povezave ab, pripadata istemu bloku grafa G in dokaz je končan.
Naj bo sedaj $n > 2$. Ker $\{x_i\}$ ni separator vozlišč a in b za vsak $i = 2, 3, \ldots, n-1$ to pomeni, da v grafu $G - \{x_i\}$ obstaja pot P_i od vozlišča a do vozlišča b za vsak $i = 2, 3, \ldots, n-1$. Naj bo $S = V(P) \cup \bigcup_{i=2}^{n-1} V(P_i)$. Inducirani podgraf $G[S]$ grafa G je povezan graf brez presečnih vozlišč, ki vsebuje vozlišči a in b. Naj bo B maksimalen povezan podgraf grafa G, ki vsebuje graf $G[S]$. Po definiciji je graf B blok grafa G. Ker vozlišči a in b pripadata grafu B sledi, da pripadata istemu bloku grafa G in dokaz je končan. □

Trditev 3.6 *Vsak induciran podgraf bločnega grafa je bločni graf.*

Dokaz. Zadošča dokazati, da je graf $G - \{x\}$ bločni graf, za poljuben $x \in V(G)$ (vozlišča lahko namreč enega za drugim induktivno odstranjujemo).

Naj bo torej x poljubno vozlišče bločnega grafa G. Iz trditve 3.3 sledi, da je x bodisi simplicialno bodisi presečno vozlišče.

Naj bo najprej x simplicialno vozlišče in B blok grafa G, ki vsebuje vozlišče x. Potem je vsak blok grafa $G - \{x\}$ še vedno polni graf, saj so vsi bloki enaki kot v grafu G, razen bloka B, ki je v grafu G izomorfen grafu $B - \{x\}$. Ker je $B - \{x\}$ prav tako polni graf, je $G - \{x\}$ bločni graf.

Naj bo sedaj x presečno vozlišče, ki leži v blokih $B_1, \ldots, B_k$; $k \in \mathbb{N}$ grafa G. Le-ti so izomorfni polnim grafom, saj je G bločni graf. Vsi bloki grafa $G - \{x\}$ so enaki, kot v G, razen blokov $B_1, \ldots, B_k$, ki so v grafu $G - \{x\}$ izomorfni grafom $B_1 - \{x\}, B_2 - \{x\}, \ldots, B_k - \{x\}$. Ker so vsi ti še vedno polni grafi, je $G - \{x\}$ bločni graf. $\square$

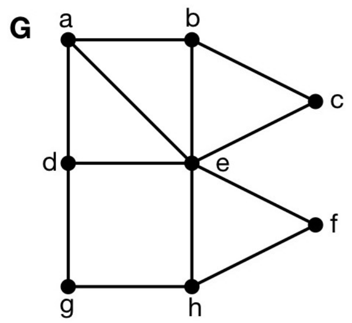
Poglavje 4

Dominantno število grafa

Poglavje je povzeto po [4] in opisuje dominantno število grafa, ki je ena od intenzivno raziskovanih grafovskih invariant. Invarianta je lastnost grafa, ki se ohranja z izomorfizmi.

Dominantna množica: Naj bo G nek graf. Množica $D \subseteq V(G)$ je dominantna množica grafa G, če za vsako vozlišče, ki ni v množici D, obstaja povezava do vozlišča, ki je v množici D ($\forall x \in V(G) \setminus D, \exists y \in D \ni: xy \in E(G)$) oziroma, če je $N[D] = V(G)$. Rečemo, da dominantna množica D dominira graf G. Če $y \in D, x \notin D$, in $xy \in E(G)$ rečemo, da vozlišče y dominira vozlišče x in prav tako vozlišče y dominira samega sebe.

Na sliki 4.1 je graf G. Primeri nekaterih dominantnih množic grafa G so:
- $D_1 = \{a, c, g, f\}$,
- $D_2 = \{b, e, g\}$,
- $D_3 = \{d, e\}$,
- $D_4 = V(G)$.



Slika 4.1: Primeri dominantnih množic grafa G

Dominantno število: Z $\gamma(G)$ označimo dominantno število grafa G. Dominantno število grafa je velikost oziroma moč najmanjše dominantne množice ($\gamma(G) = min\{|D|; D$ dominantna množica grafa G $\}$).

γ-množica: Dominantno množico D grafa G za katero velja $|D| = \gamma(G)$ imenujemo γ-množica grafa G.

Trditev 4.1 *Naj bo G poljuben graf in $G' = G - \{x\}; x \in V(G)$. Potem je dominantno število grafa G' bodisi manjše, bodisi enako, bodisi večje od dominantnega števila grafa G.*

Dokaz. Pokažimo, da obstaja graf, ki se mu z odstranitvijo enega vozlišča dominantno število zmanjša, graf, ki se mu z odstranitvijo enega vozlišča dominantno število poveča ter graf, ki se mu z odstranitvijo enega vozlišča dominantno število ohrani. Naj bo G nek graf in $G' = G - \{x\}; x \in V(G)$.

- Primer, ko je $\gamma(G') < \gamma(G)$: Naj bo $G = P_4$ in naj bo vozlišče $x \in V(P_4)$ list v grafu P_4. Graf $P_4 - \{x\}$ je enak grafu P_3 in velja, da je $\gamma(P_4) = 2$ in $\gamma(P_3) = 1$.
- Primer, ko je $\gamma(G') > \gamma(G)$: Naj bo $G = K_{1,8}$ zvezda in naj bo vozlišče $x \in V(K_{1,8})$ centralno vozlišče grafa $K_{1,8}$. Potem je $\gamma(K_{1,8}) = 1$ in $\gamma(K_{1,8} - \{x\}) = 8$.
- Primer, ko je $\gamma(G') = \gamma(G)$: Naj bo $G = P_3$ in naj bo vozlišče $x \in V(P_3)$ list v grafu P_3. Graf $P_3 - \{x\}$ je enak grafu P_2 in velja, da je $\gamma(P_3) = \gamma(P_2) = 1$.

□

Trditev 4.2 *Naj bo G poljuben graf in $G' = G - \{x\}; x \in V(G)$. Če je $\gamma(G') < \gamma(G)$, potem je $\gamma(G') = \gamma(G) - 1$.*

Dokaz. Naj bo G poljuben graf in $G' = G - \{x\}; x \in V(G)$, kjer je $\gamma(G') < \gamma(G)$. Če je D' γ-množica grafa G', potem je $D' \cup \{x\}$ dominantna množica grafa G, torej je $\gamma(G) \leq \gamma(G') + 1$. Ker je zaradi začetnega pogoja $\gamma(G') < \gamma(G)$ oziroma $\gamma(G) \geq \gamma(G') + 1$, po drugi strani pa smo pokazali, da mora biti $\gamma(G) \leq \gamma(G') + 1$ sledi, da je $\gamma(G) = \gamma(G') + 1$ oziroma $\gamma(G') = \gamma(G) - 1$. □

Trditev 4.3 *Naj bo G poljuben graf in $G' = G - \{e\}; e \in E(G)$. Potem je $\gamma(G) \leq \gamma(G') \leq \gamma(G) + 1$.*

Dokaz. Naj bo G poljuben graf in $G' = G - \{e\}; e \in E(G)$. Naj bo D γ-množica grafa G in D' γ-množica grafa G'.

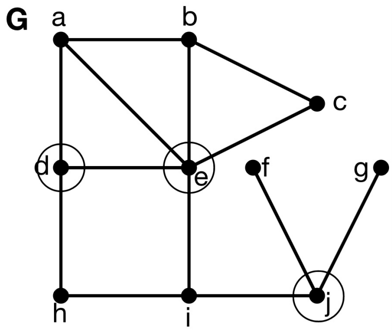
Pokažimo najprej, da je $\gamma(G) \leq \gamma(G')$.
Če množica D' dominira vsa vozlišča v grafu G', potem bo množica D' očitno dominirala tudi vsa vozlišča v grafu $G' \cup \{e\}$, kar pomeni, da je D' dominantna množica grafa G. Torej je $\gamma(G') \leq |D'| = \gamma(G')$.

Pokažimo sedaj še, da je $\gamma(G') \leq \gamma(G) + 1$.
Naj povezava e povezuje vozlišči $x, y \in V(G)$, ki ne pripadata množici D. To pomeni, da vozliši x in y dominira vsaj eno vozlišče različno od vozlišč x in y, ki je v množici D. Iz tega sledi, da množica D dominira tudi vsa vozlišča v grafu $G - \{e\}$ kar pomeni, da bo množica D dominantna množica grafa G', torej bo $\gamma(G') \leq |D| = \gamma(G)$. Iz slednje neenakosti in že dokazane neenakosti $\gamma(G) \leq \gamma(G')$ sledi, da bo v tem primeru $\gamma(G') = \gamma(G)$.
Naj povezava e sedaj povezuje vozlišči $x, y \in V(G)$, ki obe pripadata množici D. Če iz grafa G odstranimo povezavo e, bo množica D ponovno dominantna množica grafa G', saj bosta vozlišči x in y iz množice D sigurno dominirali sami sebe v grafu G'. Po enakem premisleku kot prej sledi, da bo $\gamma(G') = \gamma(G)$.
Preostane nam obravnavati še primer, ko natanko eno krajišče povezave e pripada množici D. Brez izgube za splošnost naj bo $e = xy; x \in D \wedge y \notin D$. Če je vozlišče y dominirano s strani vsaj enega vozlišča iz množice D, ki je različno od vozlišča x, potem bo množica D spet dominantna množica grafa G' iz česar sledi, $\gamma(G') = \gamma(G)$. Če je vozlišče y dominirano le s strani vozlišča x in nobenega drugega vozlišča iz množice D, potem množica D ne bo dominantna množica v grafu G', saj bo vozlišče y ostalo edino nedominirano vozlišče. Primer dominantne množice grafa G' bi bila množica $D'' = D \cup \{y\}$ moči $|D''| = |D| + 1$ kar pomeni, da bo $\gamma(G') \leq |D| + 1 = \gamma(G) + 1$.

Če dodamo že dokazano neenakost, dobimo, da je $\gamma(G) \leq \gamma(G') \leq \gamma(G) + 1$. D □

Privatni sosed in privatna soseščina: Naj bo D poljubna dominantna množica grafa G in $x \in D$. Privatni sosed vozlišča x (glede na dominantno množico D) je vsako vozlišče u, ki je dominirano s strani vozlišča x in ga hkrati ne dominira nobeno drugo vozlišče iz D. To pomeni, da $u \in N[x] \setminus N[D \setminus \{x\}]$. Privatna soseščina vozlišča x je množica $P(x, D) = N[x] \setminus N[D \setminus \{x\}]$ (lahko označimo tudi kot $P_G(x, D)$). Če vozlišče x ni sosedno z nobenim vozliščem v množici D, potem je vozlišče x sam sebi privatni sosed ($x \in P(x, D)$). Opazimo, da množica $P(x, D)$ vsebuje vozlišča iz $V(G) \setminus D$, razen morda vozlišče x.

Na sliki 4.2 je graf G. Eno izmed γ-množic grafa G sestavljajo vozlišča d, e in j, ki so na sliki obkrožena. Naj bo $D = \{d, e, j\}$ izbrana γ-množica grafa G (tudi množici $\{e, h, j\}$ in $\{e, i, j\}$ sta γ-množici grafa G).
Velja, $\gamma(G) = |D| = 3$.
Vozlišče d dominira vozlišča a, d, e in h, vozlišče e dominira vozlišča a, b, c, d, e in i, vozlišče j pa dominira vozlišča f, g, i in j.
$P(d, D) = \{h\}$, $P(e, D) = \{b, c\}$, $P(j, D) = \{f, g, j\}$
Vozlišče h je privatni sosed vozlišča d, vozlišči b in c sta privatna soseda vozlišča e, vozlišča f, g in j pa so privatni sosedje vozlišča j.



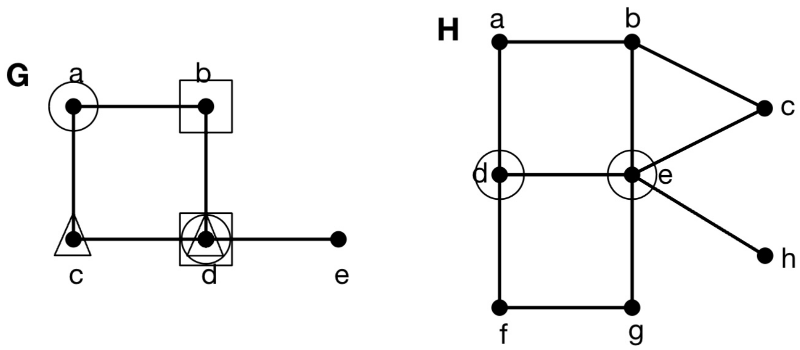
Slika 4.2: Primeri γ-množic grafa G

Poglavje 5

Grafi z enolično γ-množico

V tem poglavju nas bodo zanimali le **grafi z enolično γ-množico**. Torej grafi, ki imajo natanko eno najmanjšo dominantno množico oziroma natanko eno γ-množico. Takšnim grafom rečemo **γ-enolični grafi**.

Na sliki 5.1 sta grafa G in H. Dominantno število grafa G bo večje od 1, saj nobeno vozlišče ni sosedno z vsemi ostalimi. V grafu G lahko najdemo dominantno množico moči 2 (recimo množico $\{a, d\}$), zato bo $\gamma(G) \leq 2$ oziroma $\gamma(G) = 2$. Graf G ni γ-enoličen graf, saj lahko najdemo kar tri γ-množice: $D_1 = \{a, d\}$, $D_2 = \{b, d\}$, $D_3 = \{c, d\}$. Dominantno število grafa H bo prav tako večje od 1, saj nobeno vozlišče ni sosedno z vsemi ostalimi. Množica $\{d, e\}$ je v grafu H dominantna množica iz česar sledi, da bo $\gamma(H) = 2$. Graf H je γ-enoličen graf, saj ima le eno γ-množico $D = \{d, e\}$ (le ti dve vozlišči dominirata cel graf H).



Slika 5.1: Graf G, ki ni γ-enoličen in γ-enoličen graf H

Sprva bomo zapisali nekaj splošnih lastnosti γ-enoličnih grafov, nato pa bomo posebej obravnavali drevesa in bločne grafe. Predstavili bomo karakterizacije γ-enoličnih dreves, dobljene rezultate pa bomo posplošili še na bločne grafe.

OPOMBA: V nadaljevanju bomo obravnavali le grafe brez izoliranih vozlišč. Če ima nek graf izolirana vozlišča, morajo le ta pripadati vsaki dominantni množici tega grafa. Očitno je, da izolirana vozlišča ne bodo vplivala na enoličnost γ-množice v nekem grafu.

Prvi so γ-enolične grafe študirali G. Gunther, B. Hartnell, L. R. Markus in D. Rall [3]. Predstavili so nekaj lastnosti γ-enoličnih grafov in dokazali zadostni pogoj za graf G, ki je γ-enoličen. Grafe z eno samo γ-množico so podrobneje raziskovali v družini dreves. Ti rezultati so predstavljeni v poglavjih 5.1 in 5.2, povzetih po [3].

5.1 Lastnosti γ-enoličnih grafov

Lema 5.1 *Naj bo G γ-enoličen graf reda vsaj 3 brez izoliranih vozlišč z γ-množico D. Potem za vsako vozlišče x iz množice D velja, da ima vsaj 2 privatna soseda, različna od vozlišča x.*

Dokaz. Začetna predpostavka: Naj bo G graf z enolično γ-množico D.

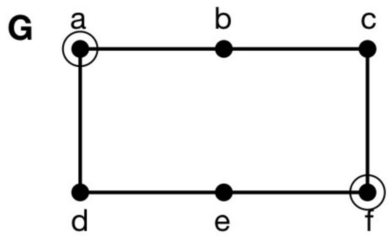
- Recimo, da $\exists x \in D$, ki nima nobenega privatnega soseda, različnega od vozlišča x. Ker graf G nima izoliranh vozlišč in ima vsaj 3 vozlišča, $\exists y \in V(G)$, ki je sosed od vozlišča x.
  Če vozlišče $y \in D$, potem vozlišče y dominira vozlišče x. Ker vozlišče x nima nobenega privatnega soseda različnega od x, so vsa vozlišča iz $V(G) \setminus \{x\}$ (tudi vozlišče y) dominirana z $D \setminus \{x\}$ kar vodi v protislovje, saj bi to pomenilo, da je $D \setminus \{x\}$ dominantna množica grafa G.
  Torej, $y \notin D$. Definirajmo sedaj množico $D' = (D \setminus \{x\}) \cup \{y\}$, torej $D' \neq D$. Ker je $|D'| = |D|$, je D' še ena γ-množica grafa G, kar je protislovje z začetno predpostavko.
  Sedaj smo pokazali, da $\forall x \in D$ velja, da ima vozlišče x vsaj enega privatnega soseda, različnega od vozlišča x.

- Recimo, da $\exists x \in D$, ki ima natanko enega privatnega soseda, različnega od vozlišča x. Naj bo ta privatni sosed vozlišče z. Definirajmo množico $D'' = (D \setminus \{x\}) \cup \{z\}$, torej $D'' \neq D$. Ker je $|D''| = |D|$, je D'' še ena γ-množica grafa G, kar je protislovje z začetno predpostavko.

Iz zgornjih dveh alinej sledi, da $\forall x \in D$ velja, da ima vozlišče x vsaj 2 privatna soseda, različna od vozlišča x. $\square$

Sedaj s protiprimerom pokažimo, da obrat leme 5.1 v splošnem ne velja. Torej, če imamo nek graf G reda vsaj 3 brez izoliranih vozlišč z γ-množico D ter $\forall x \in D$ velja, da ima vozlišče x vsaj 2 privatna soseda, različna od vozlišča x, iz tega v splošnem ne sledi, da bo graf G γ-enoličen.

PRIMER:
Na sliki 5.2 je narisan graf G z $\gamma(G) = 2$. Ker nobeno vozlišče ni povezano z vsemi ostalimi vozlišči grafa (nobeno vozlišče ne dominira celega grafa), je $\gamma(G) \geq 2$. Ker je množica $D = \{a, f\}$ dominantna množica grafa G, je $\gamma(G) = 2$ oziroma množica D je γ-množica grafa G. Privatna soseda vozlišča a, različna od a sta vozlišči b in d, privatna soseda vozlišča f, različna od f pa sta vozlišči c in e, torej ima vsako vozlišče iz množice D vsaj 2 privatna soseda, ki sta različna od vozlišč a in f. Graf G pa ni γ-enoličen, saj obstajata še dve γ-množici, ki sta različni od množice D, to sta $D_1 = \{b, e\}$ in $D_2 = \{c, d\}$.



Slika 5.2: Obrat leme 5.1 ne velja

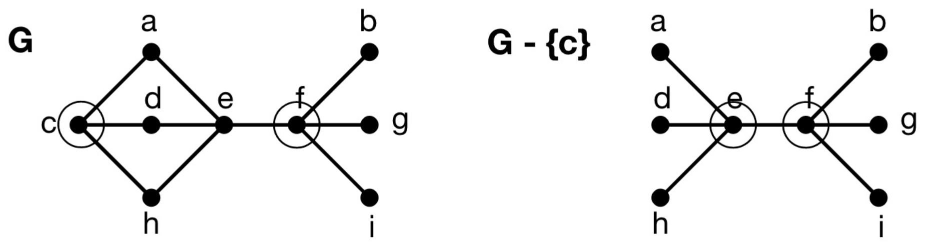
Lema 5.2 *Naj bo D γ-množica nekega grafa G. Če za vsako vozlišče x iz množice D velja, da je $\gamma(G - \{x\}) > \gamma(G)$, potem je graf G γ-enoličen z γ-množico D.*

Dokaz. Naj bo D γ-množica nekega grafa G in naj $\forall x \in D$ velja: $\gamma(G - \{x\}) > \gamma(G)$. Predpostavimo, da obstaja $D' \neq D$, še ena γ-množica grafa G. Ker $D' \neq D$, obstaja nek $y \in D \setminus D'$ in množica D' dominira tako graf G kot tudi graf $G - \{y\}$. Iz tega sledi, da je $\gamma(G - \{y\}) \leq |D'| = |D| = \gamma(G)$, kar je v protislovju s predpostavko, da je $\gamma(G - \{y\}) > \gamma(G)$. Dokazali smo, da je torej množica D edina γ-množica grafa G kar pomeni, da je graf G γ-enoličen. $\square$

S protiprimerom pokažimo, da tudi obrat leme 5.2 v splošnem ne velja. Torej, če je graf G γ-enoličen z γ-množico D iz tega v splošnem ne sledi, da $\forall x \in D$ velja, da je $\gamma(G - \{x\}) > \gamma(G)$.

PRIMER:
Na sliki 5.3 je narisan graf G z $\gamma(G) = 2$. Ker nobeno vozlišče ne dominira celega grafa G, je $\gamma(G) \geq 2$. Ker je množica $D = \{c, f\}$ dominantna množica grafa G, je $\gamma(G) = 2$. Če

pregledamo vse pare vozlišč hitro opazimo, da je množica D edina dominantna množica grafa G moči 2, zato je graf G γ-enoličen. Če vozlišče c odstranimo iz grafa G, bo dominantno število grafa $G - \{c\}$ še vedno 2, saj nobeno vozlišče ne dominira celega grafa $G - \{c\}$, najdemo pa dominantno množico $D' = \{e, f\}$ grafa $G - \{c\}$, ki je moči 2.



Slika 5.3: Obrat leme 5.2 ne velja

Lema 5.3 *Naj bo D γ-množica nekega grafa G reda vsaj 3 brez izoliranih vozlišč. Če za vsako vozlišče x iz množice D velja, da je $\gamma(G - \{x\}) > \gamma(G)$, potem za vsako vozlišče x iz množice D velja, da ima vsaj 2 privatna soseda, različna od vozlišča x.*

Dokaz. Naj bo D γ-množica nekega grafa G reda vsaj 3 brez izoliranih vozlišč in naj $\forall x \in D$, $\gamma(G - \{x\}) > \gamma(G)$. Po lemi 5.2 sledi, da je tak graf G γ-enoličen z γ-množico D. Če je nek graf G z γ-množico D γ-enoličen ter reda vsaj 3 brez izoliranih vozlišč, potem po lemi 5.1 sledi, da za vsako vozlišče x iz množice D velja, da ima vsaj 2 privatna soseda, različna od vozlišča x in tako je dokaz končan. $\square$

Obrat leme 5.3 v splošnem ne velja. Torej, če je graf G γ-enoličen z γ-množico D reda vsaj 3 brez izoliranih vozlišč ter za vsako vozlišče x iz množice D velja, da ima vsaj 2 privatna soseda, različna od vozlišča x, potem v splošnem ne sledi, da $\forall x \in D$ velja, da je $\gamma(G - \{x\}) > \gamma(G)$. Poglejmo si na primeru.

PRIMER:

Ponovno si poglejmo sliko 5.3. Graf G na vsaj 3 vozliščih brez izoliranih vozlišč ima γ-množico $D = \{c, f\}$, torej je $\gamma(G) = 2$. Vozlišče c ima vsaj 2 privatna soseda različna od vozlišča c, ima celo 3 takšne privatne sosede (to so vozlišča a, d in h). Tudi vozlišče f ima vsaj 2 privatna soseda različna od vozlišča f, ima celo 4 takšne privatne sosede (to so vozlišča b, e, g in i). Torej, graf G ustreza začetnim pogojem. Če grafu G odstranimo vozlišče $c \in D$, potem smo našli vozlišče za katerega ne bo veljalo, da je $\gamma(G - \{x\}) > \gamma(G) = 2$, namreč, v tem primeru bo $\gamma(G - \{x\}) \leq \gamma(G) = 2$, saj smo našli dominantno množico $D' = \{e, f\}$ grafa $G - \{x\}$, ki je moči 2.

Iz zgornjih lem sledi, da so naslednje 3 trditve med seboj precej povezane za nek graf G reda vsaj 3 brez izoliranih vozlišč.

(i) Graf G je γ-enoličen oziroma ima enolično γ-množico.

(ii) Graf G ima γ-množico D in za vsako vozlišče x iz množice D velja, da ima vsaj 2 privatna soseda, različna od vozlišča x.

(iii) Graf G ima γ-množico D in za vsako vozlišče x iz množice D velja, da je $\gamma(G-\{x\}) > \gamma(G)$.

Lema 5.1 nam pove, da iz (i) $\Rightarrow$ (ii).
Lema 5.2 nam pove, da iz (iii) $\Rightarrow$ (i).
Lema 5.3 nam pove, da iz (iii) $\Rightarrow$ (ii).

Po trditvi 4.1 že vemo, da se lahko z odstranitvijo enega vozlišča iz poljubnega grafa, dominantno število dobljenjega grafa poveča, zmanjša ali ostane enako. V naslednjih dveh lemah bomo opazili, da se v γ-enoličnih grafih omenjena lastnost poenostavi.

Lema 5.4 *Naj bo G γ-enoličen graf reda vsaj 3 brez izoliranih vozlišč z γ-množico D. Potem za vsako vozlišče x iz množice D velja, da je $\gamma(G-\{x\}) \geq \gamma(G)$.*

Dokaz. Naj bo G γ-enoličen graf reda vsaj 3 brez izoliranih vozlišč z γ-množico D.
Naj bo $x \in D$ poljuben. Recimo, da je $\gamma(G-\{x\}) < \gamma(G)$. Naj bo D' γ-množica grafa $G-\{x\}$, torej velja, da je $|D'| < |D|$ in D' seveda dominira vsa vozlišča iz $P(x, D) - \{x\}$. Vendar, sedaj je $D' \cup \{x\}$ γ-množica γ-enoličnega grafa G, kjer vozlišče x nima nobenega privatnega soseda različnega od vozlišča x, kar pa je v protislovju z lemo 5.1. Torej, $\forall x \in D$ bo $\gamma(G-\{x\}) \geq \gamma(G)$. $\square$

Lema 5.5 *Naj bo G γ-enoličen graf z γ-množico D. Potem za vsako vozlišče x iz $V(G)-D$ velja, da je $\gamma(G-\{x\}) = \gamma(G)$.*

Dokaz. Začetna predpostavka: Naj bo G γ-enoličen graf z γ-množico D.
Naj bo $x \in V(G) - D$ poljuben. Očitno množica D dominira graf $G - \{x\}$ in zato je $\gamma(G-\{x\}) \leq \gamma(G)$. Če bi veljalo, da je $\gamma(G-\{x\}) < \gamma(G)$, potem bi obstajala neka dominantna množica D', manjša od množice D ($|D'| < |D|$), ki bi dominira graf $G - \{x\}$. Takšna množica D' pa ne more obstajati, saj bi sicer $D' \cup \{x\}$ bila še ena γ-množica grafa G ($D \neq D' \cup \{x\}$, saj vozlišče $x \in D' \cup \{x\}$ in $x \notin D$), kar je v protislovju z

začetno predpostavko. Torej smo pokazali, da je edina množnost, da je $\forall x \in V(G) - D$, $\gamma(G - \{x\}) = \gamma(G)$. $\square$

Če ima graf G dominantno število vsaj 2, potem je število povezav v tem grafu največ $\frac{1}{2}(|V(G)| - \gamma(G))(|V(G)| - \gamma(G) + 2)$ [2].

Po drugi strani, so lahko grafi z dominantnim številom enakim 1 zelo gosti (imajo veliko povezav), saj je poljuben polni graf graf z $\gamma(K_n) = 1; n \in \mathbb{N}$ in v tem primeru torej zgornja meja za število povezav v grafih z dominantnim številom enakim 1 ne obstaja. Vseeno pa gosti grafi z dominantnim številom 1 ne morejo biti γ-enolični. Namreč, če ima graf G več kot eno vozlišče stopnje $\Delta(G) = |V(G)| - 1$, potem graf G ni γ-enoličen, saj katerokoli od teh vozlišč predstavlja γ-množico grafa G. Lahko pa navzgor omejimo število povezav v γ-enoličnih grafih G reda n z $\gamma(G) = 1$ takole:
Naj bo G γ-enoličen graf reda n z γ-množico $\{x\}$ in naj bo $H = G - \{x\}$. Ker ima graf G samo eno vozlišče x stopnje $n-1$, je $\Delta(H) \leq \Delta(G) - 2 = n - 1 - 2 = n - 3$. Uporabimo osnovno lemo teorije grafov oziroma lemo 1.1, ki pravi, da je $2|E(H)| = \sum_{v \in V(H)} deg(v) \leq |V(H)|(n-3) = (n-1)(n-3)$. Torej, $|E(H)| = n - 1 + \frac{(n-1)(n-3)}{2} = \frac{2n-2+n^2-4n+3}{2} = \frac{n^2-2n+1}{2} = \frac{(n-1)^2}{2}$, kar je ravno zgornja meja za število povezav v γ-enoličnih grafih G reda n z $\gamma(G) = 1$.

Podrobnejše zgornje meje za število povezav v γ-enoličnih grafih so bile raziskane v [2].

5.2 γ-enolična drevesa

Čeprav smo v podpoglavju 5.1 pokazali, da trditve (i), (ii), (iii) v splošnem (za poljubne grafe) niso ekvivalentne, lahko γ-enolična drevesa karakteriziramo z naslednjim izrekom.

Izrek 5.6 *Naj bo T drevo reda 3 ali več. Potem so si naslednje trditve ekvivalentne:*

(i) Drevo T je γ-enolično oziroma ima enolično γ-množico.

(ii) Drevo T ima γ-množico D in za vsako vozlišče x iz množice D velja, da ima vsaj 2 privatna soseda, različna od vozlišča x.

(iii) Drevo T ima γ-množico D in za vsako vozlišče x iz množice D velja, da je $\gamma(T - \{x\}) > \gamma(T)$.

Dokaz. V podpoglavju 5.1 smo že dokazali, da veljajo implikacije (i) $\Rightarrow$ (ii), (iii) $\Rightarrow$ (i) in (iii) $\Rightarrow$ (ii) za poljuben graf, torej veljajo tudi za drevesa. Dokazati je potrebno še implikacije (ii) $\Rightarrow$ (i), (i) $\Rightarrow$ (iii) in (ii) $\Rightarrow$ (iii).

(ii) $\Rightarrow$ (i)
Naj bo T drevo reda vsaj 3, ki ima γ-množico D in $\forall x \in D$ velja, da ima vsaj 2 privatna soseda, različna od vozlišča x.
Z indukcijo po številu vozlišč drevesa T ($|V(T)|$) dokažimo, da je T γ-enolično drevo.
Baza indukcije je, ko je $|V(T)| = 3$, torej je $T = P_3$. V tem primeru je $\gamma(P_3) = 1$. Ker je množica, ki vsebuje edino vozlišče stopnje 2 v drevesu P_3 edina γ-množica, je P_3 γ-enolično drevo.
Sledi indukcijska predpostavka. Naj bo $p \in \mathbb{N}$. Naj za vsako drevo T reda vsaj 4 ter manj kot p velja: Će ima drevo T γ-množico D, tako da $\forall x \in D$ velja, da ima vsaj 2 privatna soseda, različna od vozlišča x, potem ima drevo T enolično γ-množico.
Naj bo sedaj T drevo na p vozliščih, reda vsaj 4, ki ima γ-množico D in $\forall x \in D$ velja, da ima vsaj 2 privatna soseda, različna od vozlišča x. Naš cilj je dokazati, da je T γ-enolično drevo.
V dokazu ločimo dve možnosti.

1. MOŽNOST: Obstajata vozlišči $u, v \in V(T) \setminus D$, da je uv povezava v drevesu T ($uv \in E(T)$). Če drevesu T odstranimo povezavo uv, po posledici 2.3 sledi, da bo dobljen graf $T - \{uv\}$ nepovezan (oziroma sestavljen iz dveh komponent). Naj bo $T(u)$ komponenta drevesa $T - \{uv\}$, ki vsebuje vozlišče u in $T(v)$ komponenta drevesa $T - \{uv\}$, ki vsebuje vozlišče v. Naj bo $D(u) = D \cap V(T(u))$ in $D(v) = D \cap V(T(v))$. Ker $v \notin D$ in je v edini sosed od u, ki ne leži v $T(u)$, je vozlišče u dominirano z nekim vozliščem iz $T(u)$, torej je $D(u)$ dominantna množica drevesa $T(u)$. Še več, če bi v $T(u)$ obstajala manjša dominantna množica D' ($|D'| < |D(u)|$), potem bi bila $D' \cup D(v)$ dominantna množica drevesa T, ki je manjša od D, kar je v protislovju s tem, da je D γ-množica drevesa T. Zato je $D(u)$ najmanjša dominantna množica (γ-množica) drevesa $T(u)$. Podobno je $D(v)$ γ-množica drevesa $T(v)$. Nadalje, $\forall x \in D(u)$, množica $P(x, D(u))$ pripada drevesu $T(u)$. Ker v drevesu T velja, da ima $\forall x \in D$ vsaj 2 privatna soseda, različna od vozlišča x, potem sledi, da ima tudi v drevesu $T(u)$ vsako vozlišče $x \in D(u)$ vsaj 2 privatna soseda, različna od vozlišča x. Analogno, v drevesu $T(v)$ velja, da ima vsako vozlišče $x \in D(u)$ vsaj 2 privatna soseda, različna od vozlišča x. Ker je $|T(u)| < p$ ($v \notin V(T(u))$) in $|T(v)| < p$ ($u \notin V(T(v))$), po indukcijski predpostavki sledi, da je drevo $T(u)$ γ-enolično z edino γ-množico $D(u)$ in drevo $T(v)$ γ-enolično z edino γ-množico $D(v)$.
   Sedaj predpostavimo, da obstaja $D' \neq D$, še ena γ-množica drevesa T. Naj bo $D'(u) = D' \cap V(T(u))$ in $D'(v) = D' \cap V(T(v))$. Če D' ne vsebuje niti vozlišča u niti vozlišča v, potem mora zaradi γ-enoličnosti dreves $T(u)$ in $T(v)$ veljati, da je $D'(u) = D(u)$ in $D'(v) = D(v)$. Med drugim je očitno, da je $D(u) \cup D(v) = D$ in $D'(u) \cup D'(v) = D'$. Iz dobljenega sledi, da je $D' = D'(u) \cup D'(v) = D(u) \cup D(v) = D$,

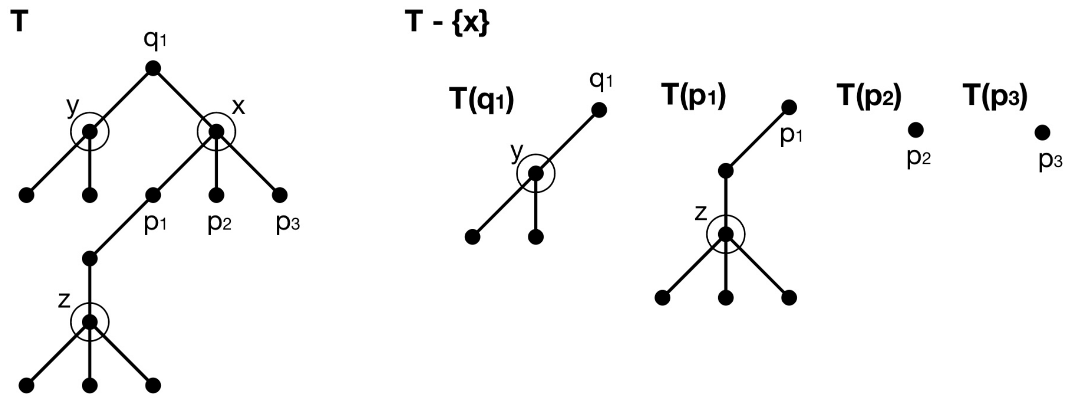
kar pa je v protislovju, z izbiro D'. Torej, brez izgube za splošnost predpostavimo, da D' vsebuje vozlišče v. Potem mora $D'(u)$ dominirati drevo $T(u) - \{u\}$ in očitno velja, da je $D'(u)$ γ-množica drevesa $T(u) - \{u\}$. Z upoštevanjem že zapisanega in leme 5.4 sledi, da je $|D'(u)| = |\gamma(T(u) - \{u\})| \geq |\gamma(T(u))| = |D(u)|$. Tudi $D'(v)$ mora dominirati $T(v)$. Ker vozlišče $v \in D'(v)$ in ker $D(v)$ kot enolična γ-množica drevesa $T(v)$ ne vsebuje vozlišča v, sledi, da mora biti $|D'(v)| > |D(v)|$ (če bi $|D'(v)| < |D(v)|$, potem $D(v)$ ne bi bila najmanjša dominantna množica drevesa $T(v)$ in če bi $|D'(v)| = |D(v)|$, potem $D(v)$ ne bi bila enolična γ-množica drevesa $T(v)$). Torej, ker velja, da je $|D'(u)| \geq |D(u)|$ in $|D'(v)| > |D(v)|$, iz tega sledi, da je $|D'| = |D'(u)| + |D'(v)| > |D(u)| + |D(v)| = |D|$, kar je pa v protislovju s tem, da sta D in D' obe γ-množici drevesa T.
Torej, v tem primeru je množica D res edina γ-množica drevesa T kar pomeni, da je T γ-enolično drevo.

2. MOŽNOST: Drevo T ne vsebuje nobene povezave uv, kjer sta $u, v \in V(T) \setminus D$. Vemo že, da ima vsako vozlišče $x \in D$ vsaj 2 privatna soseda različna od vozlišča x. Lahko pa povemo še več, v tem primeru ima vsako vozlišče $x \in D$ vsaj 2 privatna soseda, različna od vozlišča x, ki sta lista drevesa T. Če to ne bi veljalo, bi obstajalo vsaj eno vozlišče $y \in V(T) \setminus D$, ki bi bilo privatni sosed vozlišča $x \in D$ in ne bi bilo list v drevesu T, zato bi moralo biti vozlišče y povezano vsaj še z enim vozliščem $z \in V(T) \setminus D$. Torej bi vozlišči $y, z \in V(T) \setminus D$ bili povezani ($yz \in E(T)$), kar pa je v protislovju s predpostavko, da takšnih povezav v drevesu T ni. V bistvu smo pokazali, da morajo biti vsi privatni sosedje poljubnega vozlišča $x \in D$, ki so različni od vozlišča x, listi drevesa T. Torej, vsak $x \in D$ ima vsaj 2 lista, ki sta sosedna z vozliščem x, kar pomeni, da je D enolična γ-množica drevesa T. Če bi $\exists D' \neq D$, še ena γ-množica drevesa T, bi $\exists x \in D$ in $x \notin D'$. Ker $x \notin D'$ in ker sta vsaj 2 lista sosedna z voziščem x, sledi, da mora D' vsebovati vsaj ta dva lista, kar pa bi pomenilo, da je $|D'| > |D|$, to pa je v protislovju, da sta D in D' obe γ-množici drevesa T.
Tudi v tem primeru smo pokazali, da je T γ-enolično drevo.

(i) $\Rightarrow$ (iii)
Naj bo T γ-enolično drevo reda vsaj 3 z γ-množico D. Pokažimo, da je potem $\forall x \in D, \gamma(T - \{x\}) > \gamma(T)$.
Naj bo $x \in D$ poljuben. Naredimo particijo $N(x) = (P(x, D) \setminus \{x\}) \cup Q(x, D)$, kjer je $Q(x, D)$ množica sosedov vozlišča x, ki niso privatni sosedi vozlišča x. Naj bo $P(x, D) \setminus \{x\} = \{p_1, p_2, ..., p_k\}; k \in \mathbb{N}$ in $k \geq 2$ (Ker je T γ-enolično drevo na vsaj 3 vozliščih, iz leme 5.1 sledi, da ima vsako vozlišče $x \in D$ vsaj 2 privatna soseda različna od vozlišča x) ter $Q(x, D) = \{q_1, q_2, ..., q_l\}; l \in \mathbb{N}_0$. Naj bo $\forall p_i; i \in \{1, 2, ..., k\}$ oziroma $\forall q_j; j \in \{1, 2, ..., l\}$, $T(p_i)$ oziroma

$T(q_j)$ komponenta drevesa $T-\{x\}$, ki vsebuje vozlišče p_i oziroma q_i. Definirajmo $D(p_i) = D \cap (T(p_i))$ in $D(q_i) = D \cap (T(q_i))$. Očitno je $\gamma(T) = |D| = 1+\sum_{i=1}^{k}|D(p_i)|+\sum_{j=1}^{l}|D(q_j)|$. Odstranimo sedaj vozlišče x iz drevesa T. Drevo tako razpade na $k+l$ komponent, ki smo jih označili s $T(p_1), T(p_2), ..., T(p_k), T(q_1), T(q_2), ..., T(q_l)$.

Na sliki 5.4 je primer γ-enoličnega drevesa T z γ-množico $D = \{x, y, z\}$. $P(x, D) \setminus \{x\} = \{p_1, p_2, p_3\}$ in $Q(x, D) = \{q_1\}$. Če iz drevesa odstranimo vozlišče x, bo graf $T-\{x\}$ sestavljen iz štirih komponent, in sicer $T(q_1), T(p_1), T(p_2)$ ter $T(p_3)$ kot prikazuje slika. $D(q_1) = \{y\}, D(p_1) = \{z\}$, $D(p_2) = \emptyset$ in $D(p_3) = \emptyset$.
$\gamma(T) = |D| = 1+\sum_{i=1}^{3}|D(p_i)|+\sum_{j=1}^{1}|D(q_j)| = 1+|D(p_1)|+|D(p_2)|+|D(p_3)|+|D(q_1)| = 1+1+0+0+1 = 3$ (prva enka pomeni, da upoštevamo vozlišče x, ki je v množici D).



Slika 5.4: γ-enolično drevo T z γ-množico $D = \{x, y, z\}$ in komponente grafa $T-\{x\}$
.

Torej, da bi izračunali $\gamma(T-\{x\})$, moramo najprej izračunati dominantna števila za vse zgoraj naštete komponente oziroma za vsa drevesa $T(p_i)$ in $T(q_j)$ in nato sešteti ta števila.

- Izračunajmo najprej $\gamma(T(p_i))$. Vemo, da noben sosed od p_i v drevesu $T(p_i)$ ne leži v $D(p_i)$, saj sicer p_i ne bi bil privatni sosed vozlišča x. Zlahka opazimo, da je $D(p_i)$ γ-množica drevesa $T(p_i)-\{p_i\}$ in da ima vsako vozlišče $y \in D(p_i)$ vsaj dva privatna soseda v drevesu $T(p_i)-\{p_i\}$, različna od vozlišča y. Zaradi slednjega in že dokazane implikacije (ii) $\Rightarrow$ (i) sledi, da je $D(p_i)$ enolična γ-množica drevesa $T(p_i)-\{p_i\}$.
Opomnimo, da $D(p_i)$ ni γ-množica drevesa $T(p_i)$, saj ne dominira vozlišča p_i. Če bi obstajal tak i, da je $\gamma(T(p_i)) \leq |D(p_i)|$, potem bi morala obstajati γ-množica drevesa $T(p_i)$, recimo množica $D'(p_i)$, za katero bi veljalo, da je njena moč manjša ali enaka $|D(p_i)|$. $D'(p_i)$ bi potemtakem morala dominirati tudi vozlišče p_i v grafu $T(p_i)$ iz česar sledi, da $D'(p_i) \neq D(p_i)$. Poglejmo unijo naslednjih množic: $\{x\} \cup D(p_1) \cup D(p_2) \cup ... \cup D(p_k) \cup D(q_1) \cup D(q_2) \cup ... \cup D(q_l)$. Unija je očitno enaka množici D. Če

bi množico $D(p_i)$ v uniji zamenjali z množico $D'(p_i)$, bi dobili dominantno množico drevesa T, različno od množice D, katere moč je manjša ali enaka moči množice D, kar pa pomeni, da smo v protislovju s tem, da je D enolična γ-množica drevesa T. Iz dobljenega torej sledi, da je $\gamma(T(p_i)) > |D(p_i)|, \forall i \in \{1, 2, ..., k\}$. Vemo pa, da $D(p_i) \cup \{p_i\}$ dominira $T(p_i)$, torej lahko zapišemo, da je $\gamma(T(p_i)) = |D(p_i)| + 1$.

- Izračunajmo še $\gamma(T(q_j))$. Ker q_j ni privatni sosed od vozlišča x, je $D(q_j)$ γ-množica drevesa $T(q_j)$ z lastnostjo, da ima vsak $y \in D(q_j)$ vsaj dva privatna soseda v $T(q_j)$. Iz slednjega in že dokazane implikacije (ii) $\Rightarrow$ (i) sledi, da je $D(q_j)$ enolična γ-množica drevesa $T(q_j)$, torej je $\gamma(T(q_j)) = |D(q_j)|$.

Izračunajmo sedaj $\gamma(T - \{x\})$:

$$\gamma(T - \{x\}) = \textstyle\sum_{i=1}^{k} \gamma(T(p_i)) + \sum_{j=1}^{l} \gamma(T(q_j)) =$$

$$= \textstyle\sum_{i=1}^{k}(|D(p_i)| + 1) + \sum_{j=1}^{l} |D(q_j)| =$$

$$= \textstyle\sum_{i=1}^{k} |D(p_i)| + k + \sum_{j=1}^{l} |D(q_j)| =$$

$$= \textstyle\sum_{i=1}^{k} |D(p_i)| + \sum_{j=1}^{l} |D(q_j)| + 1 - 1 + k =$$

$$= \gamma(T) + k - 1 \geq \gamma(T) + 2 - 1$$

$$= \gamma(T) + 1 > \gamma(T)$$

Predzadnja neenakost sledi iz dejstva, da je $k \geq 2$.

S tem smo dokazali, da če je T γ-enolično drevo reda vsaj 3 z γ-množico D, potem je $\forall x \in D, \gamma(T - \{x\}) > \gamma(T)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)
Naj ima drevo T γ-množico D in naj za vsako vozlišče x iz množice D velja, da ima vsaj 2 privatna soseda, različna od vozlišča x. Pokažimo, da potem za vsako vozlišče x iz množice D velja, da je $\gamma(T - \{x\}) > \gamma(T)$.
Zaradi že dokazanih implikacij (ii) $\Rightarrow$ (i) in (i) $\Rightarrow$ (iii) sledi, da velja tudi implikacija (ii) $\Rightarrow$ (iii) in dokaz je končan.

$\square$

5.3 γ-enolični bločni grafi

Leta 2001 je M. Fischermann ugotovila, da je rezultate, ki so bili dokazani na drevesih možno posplošiti na bločne grafe [1]. Rezultate povzete po [1] bomo predstavili v tem poglavju.

Izrek 5.7 *Naj bo G bločni graf brez izoliranih vozlišč in naj bo D podmnožica množice $V(G)$. Potem so si naslednje trditve ekvivalentne:*

(i) D je enolična γ-množica grafa G oziroma graf G je γ-enoličen.

(ii) D je γ-množica grafa G in za vsako vozlišče x iz množice D velja, da ima vsaj 2 privatna soseda, različna od vozlišča x, ki ne ležita v istem bloku grafa G.

(iii) D je dominantna množica grafa G in za vsako vozlišče x iz množice D velja, da ima vsaj 2 privatna soseda, različna od vozlišča x, ki ne ležita v istem bloku grafa G.

(iv) D je γ-množica grafa G in za vsako vozlišče x iz množice D velja, da je $\gamma(G-\{x\}) > \gamma(G)$.

Dokaz. Da dokažemo zgornji izrek, sprva pokažimo, da veljajo implikacije (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i), nato pa dokažimo še implikacijo (i) $\Rightarrow$ (iv). Implikacija (iv) $\Rightarrow$ (i) sledi neposredno iz leme 5.2.

Naj bo G bločni graf brez izoliranih vozlišč in naj bo D podmnožica množice $V(G)$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii)
Trditev (iii) sledi neposredno iz trditve (ii), torej nam preostane pokazati le, da iz trditve (i) sledi trditev (ii). Naj bo D γ-množica grafa G. Če ima graf G le eno vozlišče, je izomorfen plnemu grafu K_1, kar pomeni, da ni izpolnjen pogoj, da graf G nima izoliranih vozlišč. Če ima graf G dve vozlišči oziroma je izomorfen plnemu grafu K_2, potem pa graf G ne ustreza pogoju, da je graf G γ-enoličen. Torej graf G ima vsaj 3 vozlišča in po lemi 5.1 sledi, da za vsako vozlišče x iz množice D velja, da ima vsaj 2 privatna soseda, različna od vozlišča x. Recimo, da obstaja vozlišče $x \in D$, katerega vsi privatni sosedje, različni od vozlišča x ležijo v istem bloku B grafa G. Naj vozlišče v pripada množici $V(B) \setminus \{x\}$. Ker je blok B polni graf (zaradi definicije bločnega grafa) sledi, da vsi privatni sosedje vozlišča x, različni od vozlišča x, pripadajo množici $N_G[v]$, torej bi bila množica $(D \setminus \{x\}) \cup \{v\}$ dominantna množica grafa G, moči $\gamma(G)$, različna od množice D, kar pa je protislovje z γ-enoličnostjo grafa G. Iz tega sledi, da ima vsako vozlišče x iz množice D vsaj 2 privatna soseda, različna od vozlišča x, ki ne ležita v istem bloku grafa G.

(iii) $\Rightarrow$ (i)
Recimo, da obsataja graf G, ki zadošča pogoju (iii), torej je bločni graf na vsaj 3 vozliščih, brez izoliranih vozlišč, z dominantno množico D, kjer za vsako vozlišče x iz množice D velja, da ima vsaj 2 privatna soseda, različna od vozlišča x, ki ne ležita v istem bloku grafa G, vendar ni γ-enoličen. Naj bo G najmanjši tak graf (z najmanj vozlišči) za katerega to velja. Recimo, da D ni enolična γ-množica grafa G. Potem obstaja γ-množica $D' \neq D$ grafa G in vozlišče $y \in D \setminus D'$. Definirajmo množico $Q_0 = \{y\}$ in $Q_{i+1} = \bigcup_{x \in Q_i \cap D} N_G[x]$ za $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Očitno obstaja takšno naravno število s, da je $Q_{i-1} \neq Q_i$ za vsak $1 \leq i \leq s$ ter $Q_i = Q_s$ za vsak $i \geq s$. Zaradi krajšega zapisa, naj bo $Q_s = Q$. Naj bo $G_0 = G[Q]$ in naj $k \in \mathbb{N}_0$. Če je $Q = V(G)$, potem naj bo $k = 0$, če $Q \neq V(G)$, potem naj bodo $G_1, G_2, \ldots, G_k$ komponente grafa $G - Q$. Nadalje, naj bo $D_i = D \cap V(G_i)$ in $D'_i = D' \cap V(G_i)$ za $i = 0, 1, 2, \ldots, k$.

Množica D_0 je dominantna množica grafa G_0, saj graf G_0 vsebuje le vozlišča iz množice D in njihove sosede ter nobeno drugo vozlišče. Prav tako je za vsak $i = 1, 2, \ldots, k$, množica D_i dominantna množica grafa G_i, saj grafi $G_1, G_2, \ldots, G_k$ ne vsebujejo nobenega vozlišča, ki bi bilo v grafu G dominirano s stranin vozlišča, ki pripada množici Q, saj bi potemtakem takšno vozlišče iz množice Q moralo pripadati množici Q, ker bi bilo njegov sosed. Iz tega sledi, da množica D_i zares dominira vsa vozlišča v grafu G_i. Prav tako velja, da je $P(x, D_0) \subseteq V(G_0)$, saj vsi sosedi vozlišča $x \in D_0$ pripadajo množici Q, torej tudi privatni sosedi potemtakem pripadajo grafu G_0. Velja tudi, da je $P(x, D_i) \subseteq V(G_i)$ za vsak $i = 1, 2, \ldots, k$ saj, če bi obstajal privatni sosed vozlišča $x \in D_i$, recimo naj bo to vozlišče z, ki pripada množici Q, bi to pomenilo, da vozlišče z v množici Q nima soseda, ki bi pripadal množici D kar pa ni mogoče, saj takšnih vozlišč v množici Q ni. Graf $G_i; i = 1, 2, \ldots, k$ ne more biti reda 1, torej imeti le eno izolirano vozlišče. Recimo, da je u izolirano vozlušče grafa G_i. Potem vozlišče u ne more biti dominirano s strani nekega vozlišča iz množice Q, torej mora vozlišče u pripadati množici D_i oziroma množici D in imeti po predpostavki v grafu G vsaj 2 privatna soseda, torej bi morala ta dva privatna soseda biti v množici Q kar pa ni možno, saj smo zgoraj pokazali, da vsi privatni sosedje vozlišča u pripadajo grafu G_i. Prav tako je množica G_0 reda vsaj 3, saj vsebuje vozlišče y in njegova privatna soseda, različna od vozlišča y. Nadalje, za vsak $i = 0, 1, 2, \ldots, k$ je torej graf G_i bločni graf (zaradi trditve 3.6) brez izoliranih vozlišč z ustrezno dominantno množico D_i, ki izpolnjuje pogoj (iii).

Če je $k > 0$, potem je $|V(G_i)| < |V(G)|$, iz česar sledi, da je graf G_i γ-enoličen z enolično γ-množico D_i za vsak $i = 0, 1, 2, \ldots, k$, saj je graf G najmanjši tak graf, ki ustreza pogoju (iii) in ni γ-enoličen.

Naj bosta w_1 in w_2 privatna soseda vozlišča y, različna od vozlišča y, ki ne ležita v istem bloku grafa G_0. Po alineji 2 iz leme 3.5 sledi, da obstaja natanko en blok B_1, ki vsebuje povezavo $w_1 y$ in natanko en blok B_2, ki vsebuje povezavo $w_2 y$ (seveda $B_1 \neq B_2$, saj w_1 in

w_2 ne pripadata istemu bloku grafa G_0). Po alineji 3 iz leme 3.5, je vozlišče y presečno v grafu G_0.

Znotraj dokaza bomo zaradi preglednejšega zapisa posebej zapisali ter dokazali trditve 5.8, 5.9 in 5.10.

Trditev 5.8 *Bloka B_1 in B_2 sta končna bloka grafa G_0 , saj imata le eno presečno vozlišče, to je vozlišče y.*

Dokaz. Brez izgube za splošnost predpostavimo, da obstaja presečno vozlišče $p \neq y$ in $p \in B_1$ grafa G_0. Ker je graf G bločni graf, je blok B_1 seveda izomorfen polnemu grafu, torej bo vozlišče p povezano z vozliščem y in prav tako bosta vozlišči p in w_1 med seboj povezani kar pomeni, da $p \notin D$, saj je w_1 privatni sosed vozlišča y. Po alinejah 1 in 4 iz leme 3.5 sledi, da obstaja še en blok $B' \neq B_1$ in $B' \neq B_2$ grafa G_0, ki vsebuje vozlišče p in ne vsebuje vozlišča y. Naj bo w vozlišče, ki pripada množici $V(B') \setminus V(B_1)$. Vemo, da takšno vozlišče obstaja, saj je vozlišče p presečno, torej ima vsaj enega soseda v množici B'. Ker $w \in V(G_0)$, obstaja neko vozlišče w', ki vozlišče w v grafu G_0 dominira. Zaradi konstrukcije množice Q sledi, da je graf $G[D_0]$ povezan, torej obstaja pot P v grafu $G[D_0]$ od vozlišča y do vozlišča w', ki ne vsebuje vozlišča p, saj $p \notin D$ in posledično $p \notin D_0$. Če pot P podaljšamo tako, da ji dodamo vozlišče w oziroma povezavo $w'w$, dobimo pot od vozlišča y do vozlišča w v grafu $G_0 - \{p\}$. To pa je v protislovju z alinejo 5 iz leme 3.5, saj bi morala vsaka pot med vozliščema y in w, ki pripadata različnima blokoma grafa G_0 vsebovati takšno presečno vozlišče, različno od vozlišč y in w, da bi vozlišči y in w ležali v različnih komponentah grafa $G_0 - \{p\}$, kar pa očitno ne velja za pot na vozliščih y, p, w. Torej, dokazali smo, da blok B_1 ne more imeti več kot enega presečnega vozlišča. Analogno bi pokazali, da prav tako blok B_2 ne more imeti več kot enega presečnega vozlišča iz česar sledi, da sta bloka B_1 in B_2 končna bloka grafa G_0. □

Nadalje, naj bo $D'(w_i) = D' \cap N_G[w_i]$ za $i = 1, 2$. Vemo, da $D'(w_i) \neq \emptyset$, namreč, če bi $D'(w_i) = \emptyset$, potem množica D' ne bi dominirala vozlišča w_i. Ločimo sedaj 3 možnosti za vsako vozlišče w_i, kjer je $i = 1, 2$.

(a) $\exists v_i \in D'(w_i) \cap Q \ni: P(v_i, D') \subseteq Q$.

(b) $(\exists v_i \in D'(w_i) \cap Q) \wedge (\exists u \in P(v_i, D') \setminus Q)$.

(c) $D'(w_i) \cap Q = \emptyset$.

Recimo, da vozlišči w_1 in w_2 ustrezata možnosti (a). Ker sta po trditvi 5.8 B_1 in B_2 končna bloka grafa G_0 sledi, da je $v_i \in V(B_i) \setminus \{y\}$ in $P(v_i, D') \subseteq V(B_i) \subseteq N_G[y]$ za $i = 1, 2$. Torej,

$D'' = (D' \setminus \{v_1, v_2\} \cup \{y\})$ dominira graf G, vendar je $|D''| < |D'|$, kar je v protislovju s tem, da je množica D' $\gamma(G)$-množica grafa G.
Iz tega sledi, da vsaj eno izmed vozlišč w_1 in w_2 ustreza možnosti (b) ali možnosti (c). Ker $D'(w_i) \neq \emptyset$ sledi, da če vozlišče w_1 ali vozlišče w_2 ustreza možnosti (c), obstaja neko vozlišče grafa G, ki ne pripada množici Q. Torej, tako možnost (b) kot tudi možnost (c) nam povesta, da obstaja neko vozlišče, ki je v grafu G in ne pripada množici Q. Iz tega sledi, da $G_0 \neq G$, $k > 0$ in po indukcijski predpostavki sledi, da je D_i enolična γ-množica grafa G_i za vsak $i = 1, 2, ..., k$.

Trditev 5.9 *Za vsak* $1 < j < k$ *in za vsaki vozlišči* $a, b \in Q \cap N_G(V(G_j)) = N_G(V(G_j))$ *ali* $a, b \in N_G(Q) \cap V(G_j)$*, vozlišči* a *in* b *pripadata istemu bloku grafa* G*.*

Dokaz. Najprej obravnavajmo primer, kjer vozlišči $a, b \in N_G(V(G_j))$. Naj bo vozlišče a_j sosed vozlišča a v grafu G_j in naj bo b_j sosed vozlišča b v grafu G_j. Potem obstajata pot P_j v grafu G_j od vozlišča a_j do vozlišča b_j in pot P v grafu G_0 od vozlišča a do vozlišča b. Torej, za vsako vozlišče $z \in V(P) \setminus \{a, b\}$, obstaja pot $aa_j \cup P_j \cup b_jb$ od vozlišča a do vozlišča b v grafu $G - \{z\}$, zato vozlišči a in b pripadata isti komponenti grafa $G - \{z\}$, množica $\{z\}$ pa ni separator vozlišč a in b. Po alineji 5 iz leme 3.5 (z upoštevanjem zveze $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$) sledi, da vozlišči a in b pripadata istemu bloku grafa G. Analogno bi obravnavali primer, kjer vozlišči $a, b \in N_G(Q) \cap V(G_j)$. □

Trditev 5.10 *Če vozlišče* w_i *ustreza možnosti (c) za nek* $i = 1, 2$*, potem obstaja vozlišče* $v_i \in D'(w_i) \cap V(G_j)$ *za nek* $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ *in velja, da je* $|D'_j| > |D_j|$ *in* $N_G(D'_j) \setminus V(G_j) \subseteq N_G[y]$*.*

Dokaz. Za nek $i = 1, 2$, naj vozlišče w_i ustreza možnosti (c) kar pomeni, da je $D'(w_i) \subseteq V(G) \setminus Q$. Torej, obstaja vozlišče $v_i \in D'(w_i) \cap V(G_j)$ za nek $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Vozlišče v_i torej pripada množici D', ne pripada pa množici D, saj je v_i sosed od vozlišča w_i, ki je privatni sosed od vozlišča y (če bi $v_i \in D$, potem w_i ne bi bil privatni sosed vozlišča y).
Recimo, da obstaja vozlišče $w \in V(G_j) \setminus N_G[D'_j]$. Potem neko vozlišče $w' \in D'_0$ dominira vozlišče w. Torej, $w' \in Q \cap N_G(V(G_j))$ in $w_i \in (Q \cap N_G(v_i)) \subseteq (Q \cap N_G(G_j))$. Po trditvi 5.9, vozlišči w' in w_i pripadata istemu bloku grafa G. Ker so vsi bloki v bločnem grafu G izomorfni nekemu polnemu grafu sledi, da vozlišče w' dominira tudi vozlišče w_i in s tem $w' \in D'(w_i) \cap Q$, kar pa je protislovje s tem, da vozlišče w_i ustreza možnosti (c). Ker torej ne obstaja takšno vozlišče, ki bi pripadalo množici $V(G_j) \setminus N_G[D'_j]$ oziroma, ki v grafu G_j ni dominirano s strani množice D'_j sledi, da množica D'_j dominira graf G_j. Ker vozlišče $v_i \in D'_j \setminus D$, enolična γ-množica D_j grafa G_j ne more biti enaka množici D'_j, torej velja, da

je $|D'_j| > |D_j|$. Ker vozlišče $w_i \in Q \cap N_G(G_j)$ in ker vozlišča iz množice $N_G(D'_j) \setminus V(G_j)$ prav tako pripadajo množici $Q \cap N_G(V(G_j))$ sledi, da po trditvi 5.9 vozlišča iz množice $N_G(D'_j) \setminus V(G_j)$ in vozlišče w_i pripadajo istemu bloku grafa G, torej bloku, ki vsebuje vozlišče w_i oziroma množico $N_G[w_i]$. Po trditvi 5.8 sledi, da je blok grafa G_0 v katerem je vozlišče w_i končni, zato velja, da je $N_G[w_i] = V(B_i) \subseteq N_G[y]$. Pokazali smo, da je torej res $N_G(D'_j) \setminus V(G_j) \subseteq N_G[y]$. □

V nadaljevanju ločimo 3 primere.

- Primer 1: Vsaj eno izmed vozlišč w_1 ali w_2 ustreza možnosti (b). Brez izgube za splošnost, naj bo to vozlišče w_1 in naj obstajata vozlišče $v_1 \in D'(w_1) \cap Q$ ter vozlišče $u \in P(v_1, D') \setminus Q$ oziroma $u \in P(v_1, D') \cap V(G_j)$ za nek $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.
  Recimo, da obstaja vozlišče $w \in V(G) \setminus V(G_j)$, ki ni dominirano s strani $D' \setminus D'_j$. Potem vozlišče $w \in N_G[D'_j] \cap Q$. Vemo tudi, da $v_1 \in N_G(u) \cap Q$. Ker je $(N_G[D'_j] \cap Q) \subseteq (N_G(V(G_j)) \cap Q)$ in $(N_G(u) \cap Q) \subseteq (N_G(V(G_j) \cap Q)$, po trditvi 5.9 sledi, da vozlišči w in v_1 pripadata istemu bloku grafa G. To pomeni, da sta vozlišči w in v_1 v bločnem grafu G sosedni in ker vozlišče v_1 pripada množici $D' \setminus D'_j$ sledi, da smo v protislovju s tem, da vozlišče w ni dominirano s strani nobenega vozlišča iz množice $D' \setminus D'_j$. Torej, $D' \setminus D'_j$ dominira graf $G - V(G_j)$.
  $D \setminus D_j$ je dominantna množica grafa $G - V(G_j)$, saj vozlišča iz množice $N_G[V(G_j)] \setminus V(G_j)$ pripadajo množici Q, kjer pa so zaradi zgradbe množice Q vsa vozlišča iz množice Q sigurno že dominirana z vozlišči iz $D \cap Q$. Torej, dominantna množica $D \setminus D_j$ izpolnjuje pogoj (iii) v grafu $G - V(G_j)$. Namreč, če bi obstajalo neko vozlišče iz $D \setminus D_j$, ki ne bi imelo vsaj 2 privatna soseda v grafu $G - V(G_j)$, bi bilo to zato, ker je kak privatni sosed v grafu G_j. To pa ni možno, saj po definiciji množice Q, nobeno vozlišče iz $D \cap Q$ ni sosed nobenega vozlišča iz grafa G_j (oziroma vsi sosedi vozlišč iz $D \cap Q$ pripadajo množici Q). Po indukcijski predpostavki je torej $D \setminus D_j$ enolična γ-množica grafa $G - V(G_j)$ iz česar sledi, da je $|D' \setminus D'_j| > |D \setminus D_j|$ in posledično $|D'_j| < |D_j|$, saj je $|D| = |D'|$.
  Po trditvi 5.9, vsa vozlišča iz množice $N_G(Q) \cap V(G_j)$ pripadajo istemu bloku grafa G kar pomeni, da $D'_j \cup \{u\}$ dominira graf G_j. Ker je $|D'_j| < |D_j|$ sledi, da je $|D'_j \cup \{u\}| \leq |D_j|$ in ker je D_j enolična γ-množica grafa G_j sledi, da je $D'_j \cup \{u\} = D_j$. Vozlišče u torej pripada množici D_j oziroma množici D in ima po trditvi (iii) vsaj 2 privatna soseda, recimo, naj bosta to vozlišči u_1 in u_2, različni od vozlišča u, ki ne ležita v istem bloku grafa G_j in pripadata množici $V(G_j)$. Po trditvi 5.9 (in z upoštevanjem zveze $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$) sledi, da vsaj eno izmed vozlišč u_1, u_2 ne sme imeti nobenega soseda v množici Q. Brez izgube za splošnost, naj bo to vozlišče u_1. Potem $u_1 \notin N_G(Q)$ in množica $D'_j = D_j \setminus \{u\}$ potemtakem mora dominirati vozlišče u_1, kar

je v protislovju s tem, da je u edino vozlišče, ki dominira vozlišče u_1 (saj je vozlišče u_1 privatni sosed vozlišča u).
Pokazali smo, da niti eno izmed vozlišč w_1, w_2 ne more ustrezati možnosti (b).

- Primer 2: Naj vozlišči w_1 in w_2 ustrezata možnosti (c). Naj bo vozlišče $v_i \in D'(w_i) \subseteq (V(G) \setminus Q)$ za $i = 1, 2$. Ker vozlišči v_1 in v_2 ne pripadata istemu bloku grafa G, potem (z upoštevanjem zveze $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$) po trditvi 5.9, vozlišči v_1 in v_2 ne pripadata isti komponenti grafa $G - Q$. Brez izgube za splošnost, naj vozlišče v_1 pripada komponenti G_1 in vozlišče v_2 pripada komponenti G_2 grafa $G - Q$. Po trditvi 5.10 je $|D'_i| > |D_i|$ in $N_G(D'_i) \setminus V(G_i) \subseteq N_G[y]$ za $i = 1, 2$. Torej, $(D' \setminus (D'_1 \cup D'_2)) \cup \{y\}$ dominira graf $G - (V(G_1) \cup V(G_2))$ in $D'' = (D' \setminus (D'_1 \cup D'_2)) \cup (D_1 \cup D_2 \cup \{y\})$ dominira graf G. Ker je torej $|D'_1| > |D_1|$ in $|D'_2| > |D_2|$ sledi, da je $|D''| < |D'| = \gamma(G)$, kar je protislovje s tem, da je D' γ-množica grafa G, torej ne more obstajati manjša dominantna množica grafa G. Pokazali smo, da vozlišči w_1 in w_2 ne moreta hkrati ustrezati možnosti (c).

- Primer 3: Eno izmed vozlišč w_1 ali w_2 ustreza možnosti (a), drugo pa možnosti (c). Brez izgube za splošnost, naj vozlišče w_1 ustreza možnosti (c) in naj vozlišče $v_1 \in D'(w_1) \subseteq (V(G) \setminus Q)$ pripada komponenti G_1 grafa $G - Q$. Po trditvi 5.10 je $|D'_1| > |D_1|$ in $N_G(D'_1) \setminus V(G_1) \subseteq N_G[y]$. Naj vozlišče w_2 torej ustreza možnosti (a) in naj $v_2 \in D'(w_2) \cap Q$ ter naj bo $P(v_2, D') \subseteq Q$. Po trditvi 5.8, je B_2 končni blok grafa G_0. Torej, $P(v_2, D') \subseteq V(B_2) \subseteq N_G[y]$. Množica $(D' \setminus (D'_1 \cup \{v_2\})) \cup \{y\}$ dominira graf $G - V(G_1)$ in množica $D'' = (D' \setminus (D'_1 \cup \{v_2\})) \cup (D_1 \cup \{y\})$ dominira graf G. Ker je $|D'_1| > |D_1|$ sledi, da je $|D''| < |D'| = \gamma(G)$, kar je protislovje s tem, da je D' γ-množica grafa G. Pokazali smo, da tudi možnost, kjer eno izmed vozlišč w_1 ali w_2 ustreza možnosti (a), drugo pa možnosti (c) ne more obstajati.

S tem smo pokazali, da ne obstaja γ-množica D' grafa G, različna od množice D kar pomeni, da je D enolična γ-množica grafa G oziroma je graf G γ-enoličen in s tem smo končali dokaz implikacije (iii) $\Rightarrow$ (i).

(i) $\Rightarrow$ (iv)
Naj bo D enolična γ-množica grafa G in naj bo vozlišče $x \in D$ poljubno. Po že dokazani implikaciji (i) $\Rightarrow$ (ii) sledi, da ima vozlišče x dva privatna soseda, različna od vozlišča x, ki ne ležita v istem bloku grafa G kar pomeni, da vozlišče x pripada vsaj dvema različnima blokoma grafa G. Po alineji 3 iz leme 3.5 sledi, da je vozlišče x presečno v grafu G. Naj bo D' γ-množica grafa $G - \{x\}$ in naj bodo $G_1, G_2, \ldots, G_k; k \in \mathbb{N}$ komponente grafa $G - \{x\}$, $D_i = D \cap V(G_i)$ in $D'_i = D' \cap V(G_i)$ za vsak $i = 1, 2, \ldots, k$. Ker je $G - \{x\}$ disjunktna unija grafov $G_1, G_2, \ldots, G_k$, je $D' = D'_1 \cup D'_2 \cup \ldots \cup D'_k$ in D'_i je γ-množica grafa G_i za

vsak $i = 1, 2, \ldots, k$. Ker $D_i'' = (D \setminus D_i) \cup D_i'$ dominira graf G, sledi, da je za posamezen i iz množice $\{1, 2, \ldots, k\}$ bodisi $|D| < |D_i''|$ in posledično $|D_i| < |D_i'|$ bodisi $D_i'' = D$ in posledično $D_i' = D_i$. Po že dokazani implikaciji (i) $\Rightarrow$ (ii) ter zaradi alineje 5 iz leme 3.5, obstajata vozlišči x_1 in x_2, ki sta privatna soseda vozlišča x, različna od presečnega vozlišča x, ki ne pripadata istemu bloku grafa G in ležita v različnih komponentah grafa $G - \{x\}$. Brez izgube za splošnost, naj vozlišče $x_1 \in V(G_1)$ in $x_2 \in V(G_2)$. Ker vozlišči x_1 in x_2 dominira le vozlišče x (sicer ne bi bila privatna soseda vozlišča x) sledi, da množica D_1 ne dominira grafa G_1 in množica D_2 ne dominira grafa G_2. Ker je D_i' γ-množica grafa G_i za vsak $i = 1, 2, \ldots, k$, sledi, da množica D_1' dominira graf G_1 in D_2' dominira graf G_2. To pa pomeni, da $D_1 \neq D_1'$ in $D_2 \neq D_2'$ iz česar sledi, da je $|D_1| < |D_1'|$ in $|D_2| < |D_2'|$ oziroma lahko rečemo, da je $|D_1'| \geq |D_1| + 1$ in $|D_2'| \geq |D_2| + 1$. Torej, $\gamma(G - \{x\}) = |D'| = \sum_{i=1}^{k} |D_i'| \geq |D_1| + 1 + |D_2| + 1 + \sum_{i=3}^{k} |D_i| = 2 + \sum_{i=1}^{k} |D_i| = 2 + |D \setminus \{x\}| = 2 + |D| - 1 = |D| + 1 > |D| = \gamma(G)$. Dokazali smo, da je torej res $\gamma(G - \{x\}) > \gamma(G)$ za vsak $x \in D$.

□

Ker je vsako drevo bločni graf, vse karakterizacije dokazane za bločne grafe, veljajo tudi za drevesa.

Poglavje 6

Konstrukcije γ-enoličnih grafov

Poglavje je povzeto po [3]. V njem bomo spoznali nekaj operacij nad γ-enoličnimi grafi oziroma opisali kako lahko konstruiramo γ-enolične grafe.

Trditev 6.1 (Operacija 1) *Naj bosta G_1 in G_2 γ-enolična grafa reda vsaj 3 brez izoliranih vozlišč z γ-množicama D_1 in D_2. Izberimo vozlišči $u \in V(G_1) \setminus D_1$ in $v \in V(G_2) \setminus D_2$ ter konstruirajmo graf G tako, da grafoma G_1 in G_2 dodamo povezavo uv. Potem je graf G γ-enoličen z γ-množico $D_1 \cup D_2$.*

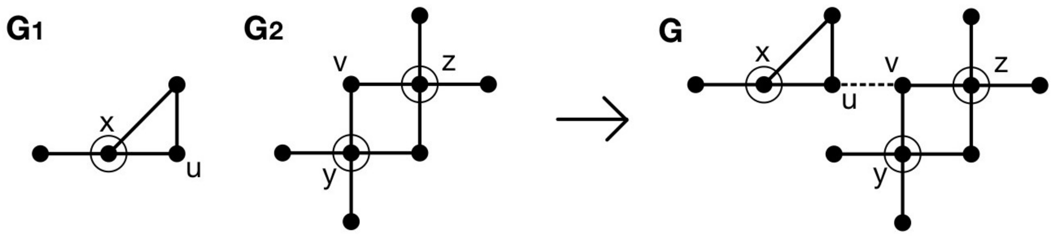
Dokaz. Očitno je, da $D_1 \cup D_2$ dominira graf G. Naj bo D γ-množica grafa G. Potem zanjo velja, da je $|D| \leq |D_1 \cup D_2| = |D_1| + |D_2|$. Iz tega sledi, da mora veljati vsaj ena izmed neenakosti $|D \cap V(G_1)| \leq |D_1|$ ali $|D \cap V(G_2)| \leq |D_2|$. Brez izgube za splošnost naj bo $|D \cap V(G_1)| \leq |D_1|$. Edino vozlišče v grafu G_1, ki ga lahko dominira vozlišče, ki ne pripada grafu G_1, je vozlišče u. Torej, $D \cap V(G_1)$ bodisi dominira graf G_1, bodisi vozlišče v pripada množici D.

- Če $D \cap V(G_1)$ dominira graf G_1, potem je $D \cap V(G_1) = D_1$, saj je D_1 enolična γ-množica grafa G_1. Ker iz začetnih predpostavk vemo, da vozlišče $u \notin D_1$, potem iz enakosti $D \cap V(G_1) = D_1$ sledi, da $u \notin D \cap V(G_1)$ oziroma $u \notin D$. To pomeni, da mora $D \cap V(G_2)$ dominirati graf G_2. Iz tega sledi, da je prav tako $D \cap V(G_2) = D_2$, saj je saj je D_2 enolična γ-množica grafa G_2.
- Če $D \cap V(G_1)$ ne dominira vozlišča u, to pomeni, da dominira graf $G_1 - \{u\}$, iz česar sledi, da je $\gamma(G_1 - \{u\}) \leq |D \cap V(G_1)|$. Ker je po lemi 5.5 $\gamma(G_1 - \{u\}) = \gamma(G_1), \forall u \in V(G_1) \setminus D_1$ (saj je G_1 γ-enoličen graf), sledi, da je po eni strani $|D \cap V(G_1)| \geq \gamma(G_1 - \{u\}) = \gamma(G_1) = |D_1|$, po drugi strani pa iz predpostavke sledi,

da je $|D \cap V(G_1)| \leq |D_1|$, kar pomeni, da je $|D \cap V(G_1)| = |D_1|$. Nadalje, ker je $|D| \leq |D_1| + |D_2|$ sledi, da mora biti $|D \cap V(G_2)| \leq |D_2|$, ampak $D \cap V(G_2)$ v tem primeru vsebuje vozlišče v, kar bi pomenilo, da smo našli dominantno množico grafa G_2, ki vsebuje vozlišče v, njena moč pa je največ $|D_2|$. Slednje nas pripelje do protislovja s tem, da je D_2, ki ne vsebuje vozlišča v, enolična γ-množica grafa G_2. Pokazali smo, da vozlišče v ne more pripadati množici D.

Ugotovili smo, da je edina možnost, da upoštevamo prvo alinejo, ki pove, da je $D \cap V(G_1) = D_1$ in $D \cap V(G_2) = D_2$ kar pomeni, da je $D = (D \cap V(G_1)) \cup (D \cap V(G_2)) = D_1 \cup D_2$ enolična γ-množica grafa G. □

Na sliki 6.1 je prikazan primer operacije 1. γ-enoličen graf G_1 ima γ-množico $D_1 = \{x\}$, γ-enoličen graf G_2 pa ima γ-množico $D_2 = \{y, z\}$. Če grafa G_1 in G_2 združimo tako, da povežemo vozlišči $u \in V(G_1)$ in $v \in V(G_2)$ kot prikazuje slika, dobimo γ-enoličen graf G z γ-množico $D_1 \cup D_2 = \{x, y, z\}$.



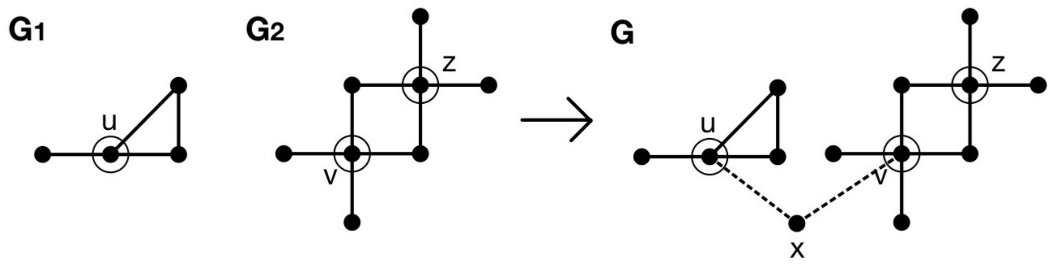
Slika 6.1: Primer operacije 1

Trditev 6.2 (Operacija 2) *Naj bosta G_1 in G_2 γ-enolična grafa reda vsaj 3 brez izoliranih vozlišč z γ-množicama D_1 in D_2. Naj bo vozlišče $u \in D_1$ in naj bo vozlišče $v \in D_2$. Konstruirajmo graf G tako, da grafoma G_1 in G_2 dodamo vozlišče x, ki ne pripada nobenemu izmed grafov G_1 ali G_2 ter dodamo povezavi ux in vx. Potem je graf G γ-enoličen z γ-množico $D_1 \cup D_2$.*

Dokaz. Očitno je, da $D_1 \cup D_2$ dominira graf G. Naj bo D γ-množica grafa G, torej bo $|D| \leq |D_1 \cup D_2| = |D_1| + |D_2|$.
Če je $|D| < |D_1| + |D_2|$, potem mora množica D vsebovati vozlišče x, ki potemtakem dominira vozlišči u in v. Zaradi Leme 5.4, ki pove, da je $\gamma(G_1 - \{u\}) \geq \gamma(G_1), \forall u \in D_1$ (saj je G_1 γ-enoličen graf), sledi, da je $|D \cap V(G_1)| \geq \gamma(G_1 - \{u\}) \geq |D_1|$ ($D \cap V(G_1)$ namreč dominira graf $G_1 - \{u\}$). Analogno izpeljemo, da je $|D \cap V(G_2)| \geq |D_2|$. Iz tega sledi, da je $|D| = |(D \cap V(G_1)) \cup \{x\} \cup (D \cap V(G_2))| \geq |D_1| + 1 + |D_2|$, kar je v protislovju s tem, da

je $|D| < |D_1| + |D_2|$. Torej, nobena γ-množica grafa G ne bo vsebovala vozlišča x. Iz tega sledi, da je $D \cap V(G_1) = D_1$ in $D \cap V(G_2) = D_2$, torej bo $D = D_1 \cup D_2$ enolična γ-množica grafa G. $\square$

Na sliki 6.2 je prikazan primer operacije 2. γ-enoličen graf G_1 ima γ-množico $D_1 = \{u\}$, γ-enoličen graf G_2 pa ima γ-množico $D_2 = \{v, z\}$. Če grafa G_1 in G_2 združimo tako, da dodamo vozlišče x in povezavi ux ter vx kot prikazuje slika, dobimo γ-enoličen graf G z γ-množico $D_1 \cup D_2 = \{u, v, z\}$.



Slika 6.2: Primer operacije 2

Trditev 6.3 (Operacija 3) *Naj bosta G_1 in G_2 γ-enolična grafa reda vsaj 3 brez izoliranih vozlišč z γ-množicama D_1 in D_2. Naj bo vozlišče $u \in D_1$ in naj bo vozlišče $v \in V(G_2)$ takšno vozlišče, ki ima vsaj dva soseda v množici D_2 (torej, vozlišče v ni privatni sosed nobenega vozlišča iz množice D_2). Konstruirajmo sedaj graf G tako, da povežemo grafa G_1 in G_2 s povezavo uv. Potem je graf G γ-enoličen z γ-množico $D_1 \cup D_2$.*

Dokaz. Očitno je, da $D_1 \cup D_2$ dominira graf G. Naj bo D γ-množica grafa G, torej bo $|D| \leq |D_1 \cup D_2| = |D_1| + |D_2|$. Ločimo 2 primera, ko vozlišče $v \in D_2$ ali vozlišče $v \notin D_2$.

- Naj vozlišče v ne pripada množici D_2.
  Pokažimo, da potem vozlišče v tudi ne pripada množici D. Naj vozlišče $v \notin D_2$ in recimo, da $v \in D$. Potem vozlišče v dominira vozlišče u in $D \cap V(G_1)$ dominira graf $G_1 - \{u\}$, iz česar sledi, da je $\gamma(G_1 - \{u\}) \leq |D \cap V(G_1)|$. Po lemi 5.4, ki pove, da je $\gamma(G_1 - \{u\}) \geq \gamma(G_1), \forall u \in D_1$ (saj je G_1 γ-enoličen graf), potem sledi, da je $|D \cap V(G_1)| \geq \gamma(G_1 - \{u\}) \geq \gamma(G_1) = |D_1|$. Ker $D \cap V(G_2)$, ki vsebuje vozlišče v ne more biti še ena γ množica grafa G_2 (saj bi bili v protislovju z γ-enoličnostjo grafa G_2) sledi, da je $|D \cap V(G_2)| > |D_2|$. Iz tega sledi, da je $|D| = |D \cap V(G_1)| + |D \cap V(G_2)| > |D_1| + |D_2|$, kar pomeni, da smo v protislovju z našo predpostavko, da je $|D| \leq |D_1| + |D_2|$.
  Ugotovimo, da vozlišče v ne pripada množici D, torej je graf G γ-enoličen z γ-množico $D = D_1 \cup D_2$.

- Naj vozlišče v pripada množici D_2.

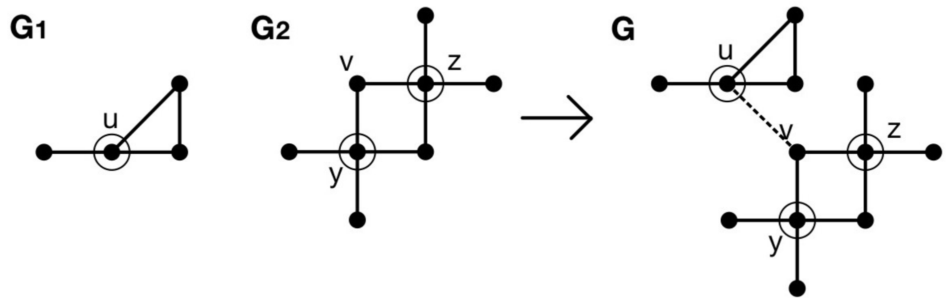
  Pokažimo, da potem vozlišče v pripada tudi množici D. Naj vozlišče $v \in D_2$ in recimo, da $v \notin D$. Po lemi 5.1 ima vozlišče v vsaj 2 privatna soseda, različna od vozlišča v v grafu G_2. Ker vozlišče $v \notin D$, mora biti vozlišče u v grafu G sigurno dominirano s strani nekega vozlišča iz množice $V(G_1)$ in zato je $D \cap V(G_1)$ dominantna množica grafa G_1. Iz tega sledi, da je $|D \cap V(G_1)| \geq \gamma(G_1) = |D_1|$. Ker je $|D| \leq |D_1| + |D_2|$ dobimo, da je $|D \cap V(G_2)| \leq |D_2| = \gamma(G_2)$ in $D \cap V(G_2)$ dominira $G_2 - \{v\}$. Recimo, da je $|D \cap V(G_2)| < \gamma(G_2)$. Če $(D \cap V(G_2)) \neq (D_2 \setminus \{v\})$, potem množica $(D \cap V(G_2)) \cup \{v\}$ dominira graf G_2 in velja, $|(D \cap V(G_2)) \cup \{v\}| \leq |D_2|$, kar je v protislovju s tem, da je D_2 γ-množica grafa G_2. Preostane nam, da je $(D \cap V(G_2)) = (D_2 \setminus \{v\})$. To pa ni možno, saj $D \cap V(G_2)$ dominira vsa vozlišča v grafu $G_2 - \{v\}$, $D_2 \setminus \{v\}$ pa ne dominira vsaj 2 privatnih sosedov od vozlišča v v grafu $G_2 - \{v\}$. Torej, $|D \cap V(G_2)| = \gamma(G_2)$. Ker je G_2 γ-enoličen graf sledi, da je $D \cap V(G_2) = D_2$ in vozlišče v potemtakem pripada množici D.

  Preostane nam pokazati še, da je $D \cap V(G_1) = D_1$. Vemo že, da je $|D| \leq |D_1| + |D_2|$ in $|D \cap V(G_2)| = |D_2|$ iz česar sledi, da je $|D \cap V(G_1)| \leq |D_1| = \gamma(G_1)$. Vemo tudi, da vozlišče v dominira vozlišče u v grafu G in da ima po lemi 5.1 vozlišče u vsaj 2 privatna soseda, različna od vozlišča u v grafu G_1. Recimo, da vozlišče $u \notin D$. Potem $D \cap V(G_1)$ dominira graf $G_1 - \{u\}$. Recimo, da je $|D \cap V(G_1)| < \gamma(G_1)$. Če $(D \cap V(G_1)) \neq (D_1 \setminus \{u\})$, potem množica $(D \cap V(G_1)) \cup \{u\}$ dominira graf G_1 in velja, $|(D \cap V(G_1)) \cup \{u\}| \leq |D_1|$, kar je v protislovju s tem, da je D_1 γ-množica grafa G_1. Primer, ko je $(D \cap V(G_1)) = (D_1 \setminus \{u\})$ tudi ni možen, saj $D \cap V(G_1)$ dominira vsa vozlišča v grafu $G_1 - \{u\}$, $D_1 \setminus \{u\}$ pa ne dominira vsaj 2 privatnih sosedov od vozlišča u v grafu $G_1 - \{u\}$. Torej, $|D \cap V(G_1)| = \gamma(G_1)$. Ker je G_1 γ-enoličen graf sledi, da je $D \cap V(G_1) = D_1$ in vozlišče u potemtakem pripada množici D.

  Pokazali smo, da je $D \cap V(G_1) = D_1$ in $D \cap V(G_2) = D_2$ iz česar sledi, da je $D = D_1 \cup D_2$.

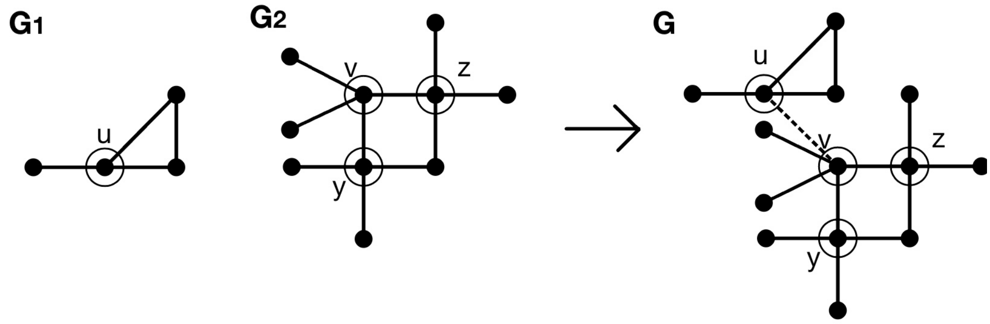
$\square$

Na sliki 6.3 je prikazan primer operacije 3. γ-enoličen graf G_1 ima γ-množico $D_1 = \{u\}$, γ-enoličen graf G_2 pa ima γ-množico $D_2 = \{y, z\}$. Vozlišče $v \in V(G_2)$ ima 2 soseda, ki pripadata množici D_2. Če grafa G_1 in G_2 združimo tako, da dodamo povezavo uv kot prikazuje slika, dobimo γ-enoličen graf G z γ-množico $D_1 \cup D_2 = \{u, y, z\}$.



Slika 6.3: Prvi primer operacije 3

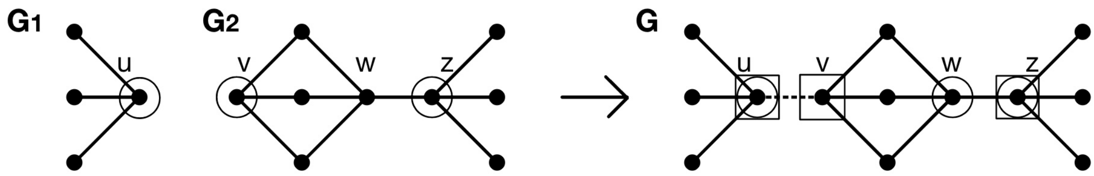
Na sliki 6.4 je prikazan še en primer operacije 3. γ-enoličen graf G_1 ima γ-množico $D_1 = \{u\}$, γ-enoličen graf G_2 pa ima γ-množico $D_2 = \{v, y, z\}$. Vozlišče $v \in D_2$ ima 2 soseda, ki prav tako pripadata množici D_2. Če grafa G_1 in G_2 združimo tako, da dodamo povezavo uv kot prikazuje slika, dobimo γ-enoličen graf G z γ-množico $D_1 \cup D_2 = \{u, v, y, z\}$.



Slika 6.4: Drugi primer operacije 3

Z naslednjim primerom pokažimo, da če združimo γ-enolična grafa G_1 in G_2, ki imata enolični γ množici D_1 in D_2, s povezavo uv; $u \in D_1$ in $v \in D_2$, ni nujno, da bo dobljeni graf G γ-enoličen.

PRIMER:
Na sliki 6.5 sta γ-enolična grafa G_1 in G_2. Graf G_1 ima γ-množico $D_1 = \{u\}$, graf G_2 pa ima γ-množico $D_2 = \{v, z\}$. Če grafa G_1 in G_2 združimo tako, da dodamo povezavo uv kot prikazuje slika, dobimo graf G, ki ni γ-enoličen, saj ima 2 γ-množici, in sicer $\{u, v, z\}$ in $\{u, w, z\}$.



Slika 6.5: Primer združitve dveh γ-enoličnih grafov v graf, ki ni γ-enoličen

Z zgornjim primerom smo pokazali, da s takšno konstrukcijo torej v splošnem ne dobimo grafa, ki ima enolično γ-množico. Lahko pa nekaj več povemo o takšni konstrukciji, če sta grafa G_1 in G_2 drevesi. O tem govori sledeča trditev. Še prej opomnimo, če dve drevesi združimo z eno povezavo, dobimo ponovno drevo, saj s tem, ko smo dodali eno povezavo med obe drevesi, ne ustvarimo cikla, le povežemo dve drevesi med seboj kar pomeni, da bo dobljen graf povezan graf brez ciklov, torej drevo.

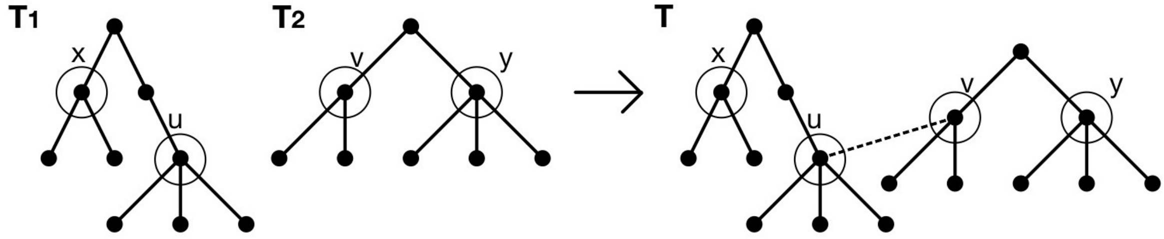
Trditev 6.4 (Operacija 4) *Naj bosta T_1 in T_2 γ-enolični netrivialni drevesi z γ-množicama D_1 in D_2. Konstruirajmo novo drevo T tako, da drevesi T_1 in T_2 povežemo s povezavo uv, kjer $u \in D_1$ in $v \in D_2$. Potem je drevo T γ-enolično z γ-množico $D_1 \cup D_2$.*

Dokaz. Očitno je, da množica $D_1 \cup D_2$ dominira drevo T. Naj bo D γ-množica drevesa T, torej bo $|D| \leq |D_1 \cup D_2| = |D_1| + |D_2|$.

- Če množica D ne vsebuje niti vozlišča u niti vozlišča v, mora biti $D \cap V(T_1)$ γ-množica drevesa T_1 in $D \cap V(T_2)$ γ-množica drevesa T_2. Ker sta T_1 in T_2 γ-enolični drevesi, je $D \cap V(T_1) = D_1$ in $D \cap V(T_2) = D_2$, kar nas pripelje do protislovja s tem, da vozlišči u in v v tem primeru pripadata množici D.
- Če množica D vsebuje tako vozlišče u kot vozlišče v je očitno, da je $D = D_1 \cup D_2$.
- Brez izgube za splošnost predpostavimo, da $u \in D$ in $v \notin D$. Potem mora $D \cap V(T_2)$ dominirati $T_2 - \{v\}$, kar pomeni, da je $\gamma(T_2 - \{v\}) \leq |D \cap V(T_2)|$. Po izreku 5.6, nam implikacija (i) $\Rightarrow$ (iii) pove, da je $\gamma(T_2 - \{v\}) > \gamma(T_2), \forall v \in D_2$ (saj je T_2 γ-enolično drevo), torej je $|D \cap V(T_2)| \geq \gamma(T_2 - \{v\}) > \gamma(T_2) = |D_2|$. Med drugim mora biti $D \cap V(T_1)$ γ-množica drevesa T_1, kar pomeni, da je $D \cap V(T_1) = D_1$, saj je T_1 γ-enolično drevo. Iz tega sledi, da je $|D| = |D \cap V(T_1)| + |D \cap V(T_2)| > |D_1| + |D_2|$, kar je v protislovju s tem, da je $|D| \leq |D_1| + |D_2|$.

Pokazali smo torej, da je $D = D_1 \cup D_2$ edina γ-množica drevesa T. $\square$

Na sliki 6.6 je prikazan primer operacije 4. γ-enolično drevo T_1 ima γ-množico $D_1 = \{u, x\}$, γ-enolično drevo T_2 pa ima γ-množico $D_2 = \{v, y\}$. Če drevesi T_1 in T_2 združimo tako, da dodamo povezavo uv kot prikazuje slika, dobimo γ-enolično drevo T z γ-množico $D_1 \cup D_2 = \{u, v, x, y\}$.



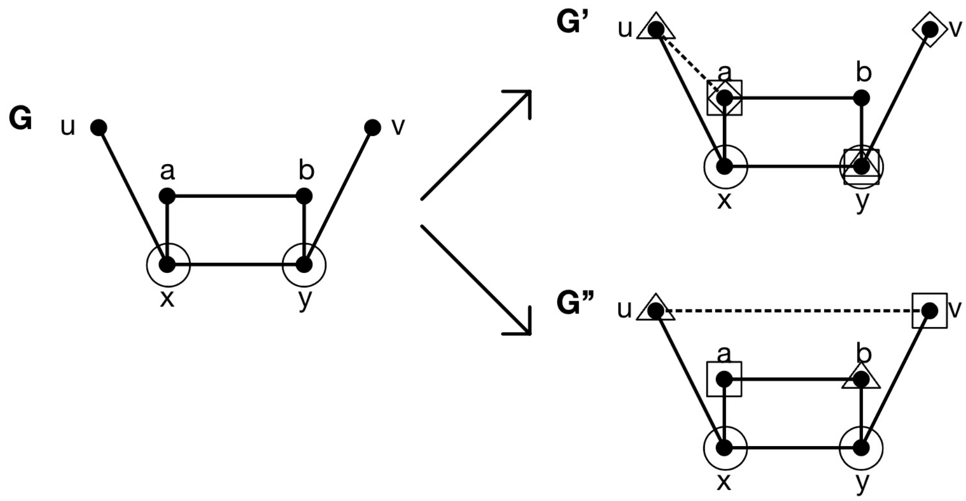
Slika 6.6: Primer operacije 4

Pri vseh štirih zgoraj naštetih operacijah, smo združili dva γ-enolična grafa G_1 in G_2 ter konstruirali nov graf. Če bi začeli le z enim grafom G, ki ima enolično γ-množico ter mu z zgornjimi operacijami dodali novo povezavo ali vozlišče, bi lahko na novo nastali graf v splošnem izgubil lastnost enolične γ-množice. Poglejmo si nekaj takšnih primerov.

Prvi trije primeri bodo pokazali, da trditve 6.1 oziroma operacije 1 v splošnem ne moremo uporabiti le nad enim grafom.

PRIMER 1:
Naj bo G γ-enoličen graf z γ-množico D. Naj bosta vozlišči $u, v \in V(G)$ in $uv \notin E(G)$ privatna soseda enega ali dveh različnih vozlišč iz množice D. Če vozlišči u in v med sabo povežemo, dobimo graf, ki ni nujno γ-enoličen.

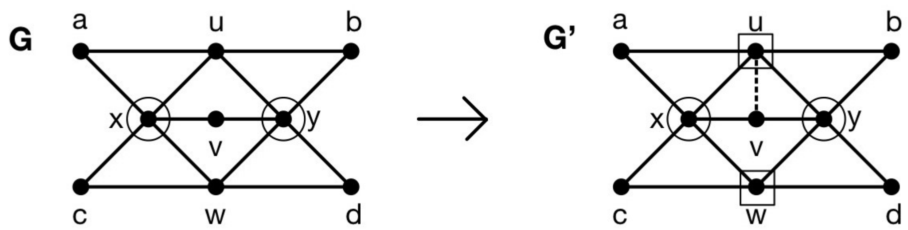
Na sliki 6.7 so prikazani γ-enoličen graf G z γ-množico $D = \{x, y\}$ ter grafa G' in G''.
Če grafu G dodamo povezavo ua, kjer sta vozlišči u in a privatna soseda vozlišča x iz množice D, dobimo graf G'. Dobljeni graf G' ima 4 γ-množice, in sicer množico D ter množice $D'_1 = \{a, v\}$, $D'_2 = \{a, y\}$ in $D'_3 = \{u, y\}$.
Če grafu G dodamo povezavo uv, kjer sta vozlišči u in v privatna soseda različnih dveh vozlišč iz množice D (vozlišče u je privatni sosed vozlišča x, vozlišče v je privatni sosed vozlišča y) dobimo graf G''. Dobljeni graf G'' ima 3 γ-množice, in sicer množico D ter množici $D''_1 = \{a, v\}$ in $D''_2 = \{b, u\}$.



Slika 6.7: Primer 1

PRIMER 2:
Naj bo G γ-enoličen graf z γ-množico D. Naj bosta vozlišči $u, v \in V(G)$ in $uv \notin E(G)$ takšni, da niti vozlišče u, niti vozlišče v ni privatni sosed nobenega vozlišča iz množice D. Če vozlišči u in v med sabo povežemo, dobimo graf, ki ni nujno γ-enoličen.

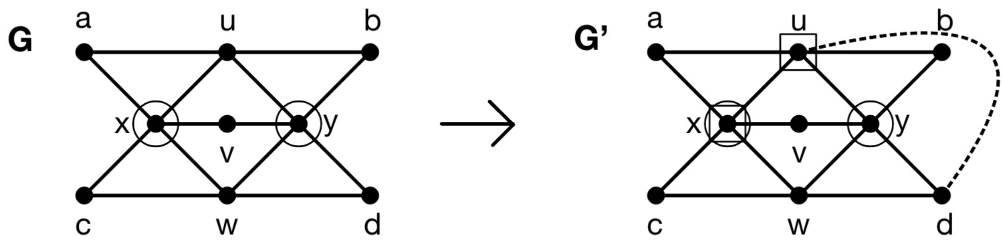
Na sliki 6.8 sta prikazana γ-enoličen graf G z γ-množico $D = \{x, y\}$ in graf G'.
Če grafu G dodamo povezavo uv, pri čemer niti vozlišče u niti vozlišče v ni privatni sosed nobenega vozlišča iz množice D, dobimo graf G' z dvema γ-množicama, in sicer množico D in množico $D' = \{u, w\}$.



Slika 6.8: Primer 2

PRIMER 3:
Naj bo G γ-enoličen graf z γ-množico D. Naj bosta vozlišči $u, v \in V(G)$ in $uv \notin E(G)$ takšni, da eno izmed vozlišč, recimo vozlišče u ni privatni sosed nobenega vozlišča iz množice D, vozlišče v pa je privatni sosed enega izmed vozlišč v množici D. Če vozlišči u in v med sabo povežemo, dobimo graf, ki ni nujno γ-enoličen.

Na sliki 6.9 sta prikazana γ-enoličen graf G z γ-množico $D = \{x, y\}$ in graf G'.
Če grafu G dodamo povezavo ud, kjer vozlišče u ni privatni sosed nobenega vozlišča iz množice D, vozlišče d pa je privatni sosed vozlišča y, dobimo graf G' z dvema γ-množicama, in sicer množico D in množico $D' = \{u, x\}$.

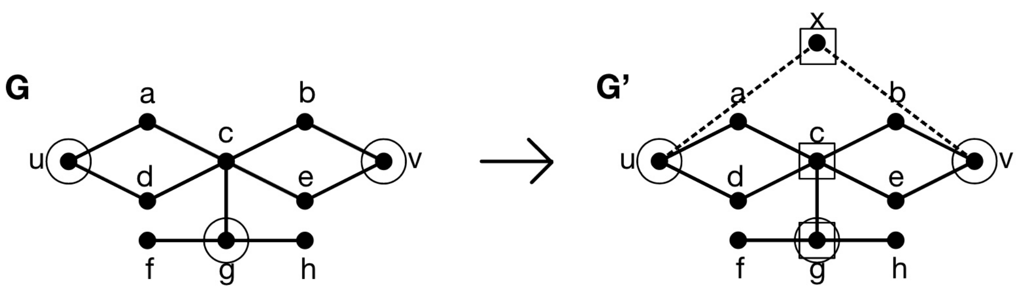


Slika 6.9: Primer 3

Naslednji primer bo pokazal, da trditve 6.2 oziroma operacije 2 v splošnem ne moremo uporabiti le nad enim grafom.

PRIMER 4:
Naj bo G γ-enoličen graf z γ-množico D. Naj vozlišči $u, v \in V(G)$ pripadata množici D. Če grafu G dodamo vozlišče x, ki ne pripada grafu G ter mu dodamo še povezavi ux in vx, dobimo graf, ki ni nujno γ-enoličen.

Na sliki 6.10 sta prikazana γ-enoličen graf G z γ-množico $D = \{u, v, g\}$ in graf G'.
Če grafu G dodamo vozlišče x, ki ne pripada grafu G ter mu dodamo še povezavi ux in vx, dobimo graf G' z dvema γ-množicama, in sicer množico D in množico $D' = \{x, c, g\}$.



Slika 6.10: Primer 4

Kot smo pokazali na zgornjih primerih, če imamo le en γ-enoličen graf, ne moremo kar tako dodati povezav oziroma vozlišč, saj lahko izgubimo lastnost enolične γ-množice. Lahko pa trdimo sledeče.

Lema 6.5 *Naj bo G γ-enoličen graf reda vsaj 3 brez izoliranih vozlišč z γ-množico D. Naj bosta vozlišči $u, v \in V(G)$ za kateri velja, da $uv \notin E(G)$. Konstruirajmo nov graf G^+ tako, da grafu G dodamo povezavo uv. Potem je $\gamma(G^+) = \gamma(G)$ in katerakoli γ-množica $D' \neq D$ grafa G^+, mora vsebovati natanko eno izmed vozlišč u oziroma v.*

Dokaz. Naj bo D' γ-množica grafa G^+. Če D' vsebuje obe vozlišči u in v ali ne vsebuje niti vozlišča u, niti vozlišča v, potem je povezava uv nepomembna in iz tega sledi, da je $D' = D$. Torej, če $D' \neq D$, mora D' vsebovati natanko eno izmed vozlišč u oziroma v. Brez izgube za splošnost predpostavimo, da $u \in D'$. Ker je graf G vpeti podgraf grafa G^+ iz trditve 4.3 sledi, da bo $\gamma(G^+) \leq \gamma(G)$. Recimo, da je $\gamma(G^+) < \gamma(G)$. Ker je D enolična γ-množica grafa G sledi, da D' sigurno ni γ-množica grafa G. To pomeni, da množica D' ne dominira vozlišča v v grafu G oziroma dominira graf $G - \{v\}$. Iz tega sledi, da je $\gamma(G - \{v\}) \leq |D'| = \gamma(G^+) < \gamma(G)$, kar je protislovje, saj za γ-enoličen graf G iz lem 5.4 in 5.5 sledi, da je $\gamma(G - \{v\}) \geq \gamma(G)$. Pokazali smo torej, da je $\gamma(G^+) = \gamma(G)$. $\square$

Naslednja lema nam pove, da lahko odstranimo določene povezave iz γ-enoličnega grafa in ohranimo γ-enoličnost grafa.

Lema 6.6 *Naj bo G γ-enoličen graf z γ-množico D. Naj bo uv takšna povezava v grafu G, ki ne povezuje vozlišča iz množice D in njegovega privatnega soseda. Naj bo graf G^- pridobljen iz grafa G tako, da grafu G odstranimo povezavo uv. Potem je D enolična γ množica grafa G^-.*

Dokaz. Naj bo D' γ-množica grafa G^-. Torej množica D' v grafu G^- dominira tako vozlišče u kot tudi vozlišče v (lahko obe vozlišči u in v pripadata množici D', lahko eno izmed vozlišč u ali v pripada množici D', lahko pa nobeno). Če dodamo povezavo uv je očitno, da množica D' še vedno dominira vozlišči u in v, torej, posledično množica D' dominira tudi graf G. Iz tega sledi, da bo katerakoli γ-množica grafa G^-, dominirala graf G, torej bo $\gamma(G) \leq \gamma(G^-)$ (to sledi tudi iz trditve 4.3). Vemo še, da je množica D dominantna množica grafa G^-, saj:

- Če vozlišči $u, v \notin D$, bosta po izbrisu povezave uv še vedno dominirani v grafu G^-.
- Če vozlišči $u, v \in D$, bosta očitno po izbrisu povezave uv še vedno dominirali sami sebe v grafu G^-.
- Če brez izgube za splošnost vozlišče $u \in D$ in vozlišče $v \notin D$, potem iz predpostavke sledi, da v ni privatni sosed od vozlišča u, zato bo po izbrisu povezave uv še vedno obstajalo vozlišče iz množice D, ki dominira vozlišče v v grafu G^-, saj ima v vsaj 2 soseda iz množice D v grafu G.

Torej je D res dominantna množica grafa G^- kar pomeni, da je $\gamma(G^-) \leq |D| = \gamma(G)$. Ker velja tudi druga neenakost ($\gamma(G) \leq \gamma(G^-)$) sledi, da je $\gamma(G^-) = \gamma(G)$. Če bi obstajala $D^- \neq D$, še ena γ-množica grafa G^-, bi to pomenilo, da je D^- po zgornjem razmisleku tudi γ-množica grafa G, kar je v protislovju z γ-enoličnostjo grafa G, torej smo pokazali, da je D enolična γ-množica grafa G^-. □

Sledeči izrek se nanaša na gozd in vključuje uporabo vseh štirih zgoraj omenjenih operacij.

Izrek 6.7 *Naj bo T γ-enoličen gozd brez izoliranih vozlišč z γ-množico D. Če je $\gamma(T) = m$; $m \in \mathbb{N}$, lahko z uporabo operacij $1, 2, 3$ in 4 zgradimo gozd T iz m med seboj disjunktnih zvezd, pri čemer ima vsaka zvezda vsaj dva lista.*

Dokaz. Očitno je, da če je gozd γ-enoličen, mora vsaka komponenta tega gozda (komponente so drevesa) imeti enolično γ-množico. Če je komponenta γ-enoličnega gozda γ-enolična zvezda to pomeni, da mora imeti zvezda vsaj dva lista.
Vemo tudi, da če je $\gamma(T) = m$, ima lahko gozd T največ m komponent.
Dokažimo izrek z uporabo indukcije po $\gamma(T)$.
Baza indukcije: Če je $\gamma(T) = 1$ vemo, da bo T zvezda z vsaj dvema listoma, saj morata biti izpolnjena pogoja, da gozd T nima izoliranih vozlišč, ima pa enolično γ-množico.
Indukcijska predpostavka: Predpostavimo, da izrek velja za γ-enoličen gozd T brez izoliranih vozlišč, kadarkoli je $\gamma(T) = n$; $n \in \mathbb{N}$ in $n < m$, torej, da lahko z uporabo operacij $1, 2, 3$ in 4 zgradimo gozd T iz n med seboj disjunktnih zvezd, pri čemer ima vsaka zvezda vsaj dva lista.
Naj bo sedaj T gozd z enolično γ-množico D in naj velja, da je $\gamma(T) = m$. Dokažimo, da lahko z uporabo operacij $1, 2, 3$ in 4 zgradimo gozd T iz m med seboj disjunktnih zvezd, pri čemer ima vsaka zvezda vsaj dva lista.

- Predpostavimo, da v gozdu T obstaja povezava uv, kjer $u, v \in D$. To pomeni, da vozlišči u in v pripadata isti komponenti gozda T oziroma istemu drevesu. Če odstranimo povezavo uv, po posledici 2.3 in lemi 6.6 sledi, da graf T razpade na dva γ-enolična gozda, pri čemer sta obe γ-enolični množici moči manj kot m. Torej, po indukcijski predpostavki sledi, da lahko en gozd zgradimo iz k disjunktnih zvezd, ki imajo vsaka vsaj dva lista, pri čemer $k \in \mathbb{N}$ in $k < m$, drug gozd pa zgradimo iz $m - k$ disjunktnih zvezd, ki imajo vsaka vsaj dva lista. Iz tega sledi, da smo iz $k + (m - k) = m$ disjunktnih zvezd, ki imajo vsaka vsaj dva lista zgradili oba gozda. Če nato uporabimo trditev 6.4 oziroma operacijo 4 in povežemo vozlišči u in v, dobimo gozd T, ki smo ga torej zgradili iz m disjunktnih zvezd, ki imajo vsaka vsaj dva lista.

- Predpostavimo, da v gozdu T obstaja povezava uv kjer $u, v \notin D$. To pomeni, da vozlišči u in v pripadata isti komponenti gozda T oziroma istemu drevesu. Če odstranimo povezavo uv, po posledici 2.3 in lemi 6.6 sledi, da gozd T razpade na dva γ-enolična gozda , pri čemer sta obe γ-enolični množici moči manj kot m. Z enakim razmislekom kot prej, dobimo, da lahko oba gozda zgradimo z operacijami $1, 2, 3$ in 4 iz disjunktnih zvezd, ki imajo vsaka vsaj 2 lista. Na koncu namesto operacije 4 uporabimo operacijo 1 oziroma trditev 6.1 tako, da povežemo vozlišči u in v ter dobimo gozd T, ki smo ga zgradili iz m disjunktnih zvezd, ki imajo vsaka vsaj dva lista.

- Če so v gozdu T vse povezave takšne, da eno krajišče povezave pripada množici D, drugo pa ne, ločimo 3 različne primere. Brez izgube za splošnost naj pri neki povezavi $uv \in E(T)$ vozlišče $u \in D$ in vozlišče $v \notin D$, torej vozlišči u in v pripadata isti komponenti gozda T oziroma istemu drevesu. Vemo še, da morajo vsi sosedi vozlišča v pripadati množici D (sicer bi našli povezavo, ki bi povezovala 2 vozlišči, ki ne pripadata množici D).

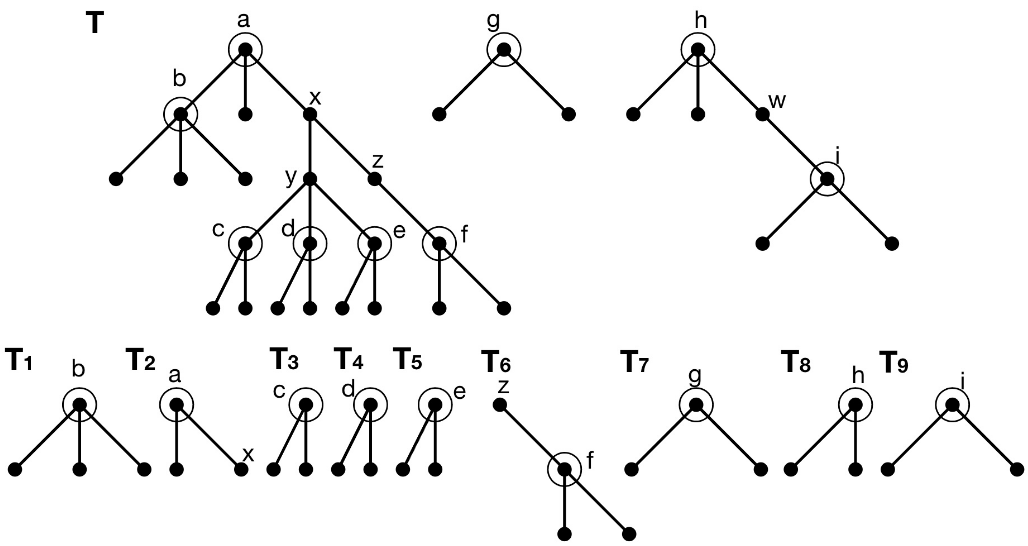
  - Naj ima vozlišče v vsaj tri sosede, ki pripadajo množici D (torej vozlišče v ni privatni sosed vozlišča u). Potem po brisanju povezave uv, po posledici 2.3 in lemi 6.6 sledi, da gozd T razpade na dva γ-enolična gozda, pri čemer sta obe γ-enolični množici moči manj kot m, vozlišče v pa ohrani še vedno vsaj 2 soseda v množici D. Ponovno sledi analogen razmislek kot prej, le da na koncu uporabimo trditev 6.3 oziroma operacijo 3 tako, da povežemo vozlišči u in v ter dobimo gozd T, ki smo ga zgradili iz m disjunktnih zvezd, ki imajo vsaka vsaj dva lista.
  - Naj ima vozlišče v natanko dva soseda, ki pripadata množici D, poleg vozlišča u naj bo to še vozlišče $z \in D$. Če odstranimo vozlišče v iz gozda T, odstranimo tudi vse povezave, ki gredo iz vozlišča v, torej odstranimo natanko dve povezavi, in sicer povezavi uv in vz. Ker je po trditvi 2.2 vsaka povezava v drevesu most, si lahko predstavljamo, da smo namesto odstranitve vozlišča v in s tem povezav uv in vz, odstranili le eno povezavo, ki povezuje vozlišči u in z. To pomeni, da smo problem prevedli na ekvivalenten v smislu, da namesto vozlišča v v gozdu T odstranjujemo povezavo uz. Če torej iz gozda T odstranimo povezavo uz, kjer obe krajišči pripadata množici D, potem po posledici 2.3 in lemi 6.6 sledi, da graf T razpade na dva γ-enolična gozda, pri čemer sta obe γ-enolični množici moči manj kot m. Ponovno sledi razmislek od prej, na koncu pa

    uporabimo trditev 6.2 oziroma operacijo 2 tako, da dodamo vozlišče v in dobimo gozd T, ki smo ga zgradili iz m disjunktnih zvezd, ki imajo vsaka vsaj dva lista.
  - Naj ima vsako vozlišče v natanko enega soseda v množici D. Potem je gozd T unija disjunktnih zvezd, ki imajo vsaka vsaj dva lista. Če gozd T ne bi bil unija

> disjunktnih zvezd, potem vsaj ena komponenta gozda ne bi smela biti zvezda, to pa ni možno zaradi pogojev, da gozd T nima izoliranih vozlišč, da ima vsaka povezava natanko eno krajišče v množici D ter da ima vsako vozlišče, ki ni v množici D natanko enega soseda v množici D.

Glede na vrsto povezav v nekem γ-enoličnem gozdu T, kjer je $\gamma(T) = m$ in uporabo operacij $1, 2, 3$ in 4, smo pokazali, da lahko gozd T zgradimo iz m med seboj disjunktnih zvezd, pri čemer ima vsaka zvezda vsaj dva lista. □

Na sliki 6.11 je prikazan gozd T z enolično γ-množico $D = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ moči $\gamma(T) = 9$. Gozd T lahko zgradimo iz devetih med seboj disjunktnih zvezd $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8$ in T_9, ki imajo vsaka vsaj dva lista. Zvezdi $T_1, T_6 \cong K_{1,3}$, zvezde $T_2, T_3, T_4, T_5, T_7, T_8 \cong K_{1,2}$ in zvezda $T_9 \cong K_{1,4}$. Gozd T dobimo tako, da med zvezdama T_3 in T_4 uporabimo operacijo 2 oziroma trditev 6.2 in dodamo vozlišče y ter povezavi yc in yd in tako dobimo drevo G_1. Prav tako med zvezdama T_8 in T_9 uporabimo operacijo 2 in dodamo vozlišče w ter povezavi wh in wi in dobimo drevo G_2. Nato med grafoma G_1 in T_5 s pomočjo operacije 3 oziroma trditve 6.3 povežemo vozlišči e in y in dobimo drevo G_3. Nadalje, med zvezdama T_2 in T_6 s pomočjo operacije 1 oziroma s trditvijo 6.1 povežemo vozlišči x in z ter dobimo drevo G_4. Podobno s pomočjo operacije 1 med grafoma G_1 in G_4 povežemo vozlišči x in y ter dobimo graf G_5. Na koncu med grafoma T_1 in G_5 uporabimo operacijo 4 oziroma trditev 6.4 in povežemo vozlišči a in b ter dobimo graf G_6. Tako smo zgradili gozd T, sestavljen iz 3 komponent oziroma dreves G_6, T_7 in G_2.



Slika 6.11: γ-enoličen gozd T zgrajen s pomočjo disjunktnih zvezd $T_1, T_2, \ldots, T_9$ in operacij $1, 2, 3, 4$

Literatura

[1] M. Fischermann, Block graphs with unique minimum dominating sets, Discrete Mathematics, 240 (2001) 247–251.

[2] M. Fischermann, D. Rautenbach, L. Volkmann, Maximum graphs with a unique minimum dominating set, Discrete mathematics, 260 (2003) 197–203.

[3] G. Gunther, B. Hartnell, L.R. Markus, D. Rall, Graphs with unique minimum dominating sets, Congressus Numerantium, (1994) 55–63.

[4] D. B. West, *Introduction to graph theory* (Vol. 2), Upper Saddle River: Prentice hall, 2001.

Seznam uporabljenih simbolov

γ	mala grška črka gama
δ	mala grška črka delta
Δ	velika grška črka delta
$\mathbb{N}$	naravna števila
$\cup$	unija
$\cap$	presek
$\subseteq$	podmnožica ali podgraf
$=$	je enako
$\neq$	ni enako / različno
$\forall$	za vsak / za vse
$\exists$	obstaja
$\in$	je element / pripada
$\notin$	ni element / ne pripada
$\ni:$	tako da
$-$	brez / minus
$\setminus$	brez / minus (uporabimo med dvema množicama)
$\neg$	negacija / ni res
$\|D\|$	moč / velikost / število elementov množice D
$\Rightarrow$	sledi / implicira iz leve smeri v desno
$\Leftarrow$	sledi / implicira iz desne smeri v levo
$\Leftrightarrow$	natanko tedaj ko / ekvivalentno
$\rightarrow$	slika v
$\mapsto$	preslika v
$\cong$	izomorfno
$\emptyset$	prazna množica
;	pri čemer
$\wedge$	in
$>$	strogo večje
$\geq$	večje ali enako
$<$	strogo manjše
$\leq$	manjše ali enako