Universidad Zaragoza

1542

Trabajo Fin de Grado

Análisis estático versus dinámico en el duopolio de Cournot: Un caso particular

Static versus dynamic analysis in Cournot duopoly: A particular case

Autor

Gonzalo Bruno Marcomini

Directores

Joaquín Andaluz Funcia

Gloria Jarne Jarne

Facultad de Economía y Empresa

2023

Resumen

En este trabajo se trata de demostrar que el cumplimiento de la condición de Shwarz es condición necesaria y suficiente, para que los valores propios de la matriz Jacobiana y las condiciones de Shur se cumplan en un caso concreto de un modelo de Cournot, donde los costes son lineales. La conclusión de este trabajo ha sido favorable, ya que hemos podido comprobar mediante un análisis estático del modelo y un análisis dinámico enfocado en las expectativas Naïve o ingenuas y las expectativas adaptativas que ciertamente al demostrar el cumplimiento de la condición de Schwarz el resto de las comprobaciones en el estado dinámico también se han cumplido. Además, hemos analizado los efectos que estas comprobaciones de estabilidad en el punto de equilibrio de Cournot-Nash conllevan.

Abstract

In summary, in this paper we have tried to demonstrate that the fulfilment of the Shwarz condition is a necessary and sufficient condition for the eigenvalues of the Jacobian matrix and the Shur conditions to be satisfied in a specific case of a Cournot model, where costs are linear. The conclusion of this work has been favourable, since we have been able to verify by means of a static analysis of the model and a dynamic analysis focused on Naïve or ingenuous expectations and adaptive expectations that certainly by demonstrating the fulfilment of Schwarz's condition the rest of the checks in the dynamic state have also been fulfilled. In addition, we have analysed the effects of these stability checks on the Cournot-Nash equilibrium point.

Índice

1. Introducción

1.1. Objetivos del trabajo

En este trabajo nos centraremos en corroborar los resultados obtenidos en el artículo "On the dynamic stability of the cournot duopoly solution under bounded rationality" escrito por Joaquín Andaluz, Jorge Casinos y Gloria Jarne publicado en 2021. En el que se analiza la estabilidad del equilibrio de Cournot-Nash en el contexto de un duopolio de manera genérica y se llega a la siguiente conclusión: "la condición que garantiza la estabilidad del equilibrio de Nash bajo el proceso de ajuste implícito en el modelo original de Cournot es un requisito clave en la estabilidad dinámica del equilibrio de Cournot-Nash independientemente del esquema de expectativas de las empresas. Además, esta condición es más decisiva cuanto mayor sea el grado de racionalidad de las empresas." Lo que se busca en este trabajo es demostrar que, si se cumple la condición de Schwarz, también se cumplirá que los valores propios en absoluto sean menores que 1 y las condiciones de Shur tanto en un modelo de Cournot estático con costes lineales, como en un modelo de Cournot dinámico con costes lineales. Para ello usaremos un modelo de Cournot con costes lineales e iremos viendo paso a paso las causas de ello.

1.2. Estructura del trabajo

La estructura de este trabajo consistirá en cuatro partes distribuidas de la siguiente manera; en la primer parte realizaremos una presentación del modelo de Cournot que lo utilizaremos como base para continuar en la segunda parte con el análisis estático de un modelo de Cournot con costes lineales, posteriormente, nos introduciremos en el groso del trabajo realizando un análisis dinámico del modelo donde mostraremos distintos esquemas de explicativas para abordar la estabilidad de los puntos de equilibrio obtenidos y finalmente en la cuarta parte, nos encontraremos con las conclusiones del trabajo.

2. Modelo de Cournot

El modelo que utilizaremos para la realización de este trabajo será el modelo desarrollado por el economista francés Antoine Augustin Cournot en 1838, denominado como el modelo de Cournot. El objetivo del modelo es analizar y comprender cómo las empresas interactúan en un mercado oligopólico cuando toman decisiones sobre la cantidad de producción que ofrecerán al mercado.

En este, el precio del mercado lo tomamos como un valor endógeno que se decide según las cantidades producidas de los bienes, ya que las empresas toman decisiones estratégicas sobre cuánta cantidad de un producto específico producirán considerando las acciones de sus competidores al tomar sus decisiones, cada empresa asume que las decisiones de producción de las demás empresas se mantienen constantes mientras toma su propia decisión, a medida que las empresas ajustan sus niveles de producción en función de las expectativas de sus competidores, se llega a un punto de equilibrio en el que ninguna empresa puede aumentar sus ganancias cambiando su producción unilateralmente.

En el Modelo consideramos que dos empresas producen un bien idéntico (utilizamos solamente dos empresas para simplificar la representación de un oligopolio). El producto es homogéneo y las empresas definen sus cantidades maximizando su beneficio en base a las cantidades producidas por su empresa y la de su rival, por tanto, se genera una competencia en cantidades. Además, suponemos una toma de decisiones simultánea y que las estrategias son continuas.

Comenzaremos definiendo las variables del modelo:

- $\pi_1(q_1, q_2)$ = Beneficio de la empresa 1
- $\pi_2(q_1, q_2)$ = Beneficio de la empresa 2
- q1= Cantidad producida por la empresa 1.
- q2= Cantidad producida por la empresa 2.
- $c_1(q_1)$ = Función de costes de la empresa 1.
- $c_2(q_2)$ = Función de costes de la empresa 2.
- P= Precio del mercado

Asumimos una función inversa de la demanda decreciente y cóncava se define como:

$$P = \text{P(Q)= P(q1+q2) y } \begin{cases} P'(Q) < 0 \\ P''(Q) \leq 0 \end{cases}$$

También, asumimos que las funciones de costes representadas por $c_1(q_1)$ y $c_2(q_2)$, son crecientes y convexas tal que $\begin{cases} C_i\,'(q_i) > 0 \\ C_i\,''(q_i) \geq 0 \end{cases}$ con. Las funciones de beneficios se verán como:

$$\begin{cases} \pi_1(q_1, q_2) = P(q_1 + q_2) \cdot q_1 - c_1(q_1) \\ \pi_2(q_1, q_2) = P(q_1 + q_2) \cdot q_2 - c_2(q_2) \end{cases}$$

Posteriormente, procedemos a hallar el Equilibrio de Nash (situación en la que ningún jugador tiene incentivos para cambiar su estrategia unilateralmente, dado el conocimiento de las estrategias elegidas por los demás jugadores. Cada jugador maximizará su utilidad dadas las elecciones de los demás).

Este se puede obtener calculando la función de mejor respuesta, para la empresa 1, esta función determinará la cantidad de producción que maximiza sus beneficios, a partir de la cantidad de producción elegida por su rival (la empresa 2) y lo mismo se hará para la empresa 2, es decir, se calcula la producción máxima de la empresa 2, a partir de la producción de su rival (la empresa 1). Matemáticamente, obtendremos el punto máximo de producción por medio del cálculo la condición de primer orden o condición necesaria, tal que:

$$C.P.O \begin{cases} \dfrac{d\pi_1}{dq_1} = 0 \rightarrow q_1 = R_1(q_2) \\ \dfrac{d\pi_2}{dq_2} = 0 \rightarrow q_2 = R_2(q_1) \end{cases}$$

Posteriormente hallaríamos la cantidad óptima en la intersección de ambas funciones, que nos daré el punto de equilibrio de Cournot- Nash E*= (q1, q2*).

Posteriormente, verificaremos que es un máximo por medio de las condiciones de segundo orden o condición suficiente que se obtendrá en este caso al demostrar que la segunda derivada de los beneficios es negativa, ya que conlleva la concavidad de la función:

$$C.S.O\begin{cases}\dfrac{d^2\pi_1}{dq_1^{\,2}}<0\\[2ex]\dfrac{d^2\pi_2}{dq_2^{\,2}}<0\end{cases}$$

El siguiente paso será observar qué sucede si inicialmente no estamos en el equilibrio de Nash, la intención es demostrar que hay una convergencia en el punto de. Lo que conlleva que independientemente de cuales sean nuestras asignaciones iniciales, mediante un proceso de ajuste acabaremos llegando al punto de equilibrio Cournot-Nash. Esto ve en el gráfico (página 13) con un proceso llamado tanteo donde se ve como reasignarían la cantidad de la empresa 1 respecto a la empresa 2 y viceversa, llegando finalmente al equilibrio. Para ello, añadiremos la suposición de que el beneficio marginal de cada empresa es una función decreciente para la de su empresa rival:

$$\frac{d^2\pi_1}{dq_1dq_2}<0\ ;\ \frac{d^2\pi_2}{dq_1dq_2}<0$$

Finalmente, diremos que hay una convergencia a través del proceso de tanteo implícito en el modelo, (ya que al estar en un análisis estático no podemos hablar de una convergencia al uso) en el punto de equilibrio si se cumple que:

$$\left|R_1\,'(q*_2)\cdot R_2\,'(q*_1)\right|<1\Leftrightarrow\left|\frac{d^2\pi*_1}{dq_1^{\,2}}\cdot\frac{d^2\pi*_2}{dq_2^{\,2}}\right|>\left|\frac{d^2\pi*_1}{dq_1dq_2}\cdot\frac{d^2\pi*_2}{dq_2q_1}\right|$$

$$\text{Condición de Schwartz}$$

La primera ecuación es condición necesaria y suficiente para determinar que efectivamente se produce el proceso convergente mencionado hacia el equilibrio. La segunda expresión, que es la igualdad de la primera, se le conoce como la condición de Schwarz y se obtiene a partir de la expresión:

$$R_1'(q_2) = -\frac{\dfrac{d^2\pi_1}{dq_1 dq_2}}{\dfrac{d^2\pi_1}{dq_1^{\,2}}} \qquad R_2'(q_1) = -\frac{\dfrac{d^2\pi_2}{dq_1 dq_2}}{\dfrac{d^2\pi_2}{dq_2^{\,2}}}$$

Ahora procederemos a mostrar un modelo de Cournot con costes lineales.

3. Análisis estático de un modelo de Cournot con costes lineales

Cuando realizamos un análisis estático de un modelo, nos referimos a un enfoque de una situación en un momento específico sin considerar el cambio o la evolución a lo largo del tiempo, es decir, no se consideran variables que cambian con el tiempo.

Estos nos ayudan a simplificar sistemas temporales y nos permite analizar los comportamientos (en este caso de un duopolio) más específicamente, aunque como consecuencia estamos limitando la funcionalidad del modelo a un momento determinado. Por ello, ahora presentaré el modelo en estado estático y posteriormente lo dinamizaré con el objetivo de generalizar el modelo.

En nuestro caso, mantendremos las suposiciones comentadas anteriormente en el Modelo de Cournot y procedemos a especificar las siguientes funciones, comenzando por la función inversa de la demanda:

$$P = \mathrm{P(Q)} = \mathrm{P(q1+q2)} = a - bQ \ \ con\ Q = q1 + q2 \quad con \quad a, b > 0$$

Procedemos a definir las variables introducidas en la función inversa de demanda:

- b= Pendiente de la función inversa de demanda.
- a= Constante.

Definimos la función de costes como:

$$\begin{cases} c_1(q_1) = c_1 \cdot q_1 \\ c_2(q_2) = c_2 \cdot q_2 \end{cases} \text{con} \quad \begin{matrix} a > c_1 > 0 \\ a > c_2 > 0 \end{matrix}$$

Finalmente, definimos las funciones de beneficio que serán:

$$\begin{cases} \pi_1(q_1, q_2) = (a - b\cdot(q_1 + q_2)\cdot q_1 - c_1\cdot q_1 \\ \pi_2(q_1, q_2) = (a - b\cdot(q_1 + q_2)\cdot q_2 - c_2\cdot q_2 \end{cases}$$

Para encontrar el equilibrio de Cournot de este modelo, debemos encontrar la mejor respuesta que puede dar cada empresa frente a la decisión del otro, es decir, dada la q2 elegida por la empresa 2, la empresa 1 ha de elegir su cantidad de producción (q1) que maximice sus beneficios, en el caso de la empresa 2 será igual, pero a la inversa. Por tanto, plantearemos un problema de maximización de los beneficios de las empresas con las restricciones impuestas, tal que:

$$\begin{cases} Max._{q_1} \ \pi_1(q_1, q_2) = (a - b\cdot(q_1 + q_2)\cdot q_1 - c_1\cdot q_1 \\ Max._{q_2} \ \pi_2(q_1, q_2) = (a - b\cdot(q_1 + q_2)\cdot q_2 - c_2\cdot q_2 \end{cases}$$

Comenzamos con el cálculo de las condiciones de primer orden derivando cada beneficio por su respectiva cantidad e igualándolo a cero:

$$\begin{cases} \dfrac{d\pi_1}{dq_1} = 0 \rightarrow a - 2b\cdot q_1 - bq_2 - c_1 = 0 \rightarrow q_1 = \dfrac{a - c_1 - bq_2}{2b} \Rightarrow R_1(q_2) \\ \dfrac{d\pi_2}{dq_2} = 0 \rightarrow a - 2b\cdot q_2 - bq_1 - c_2 = 0 \rightarrow q_2 = \dfrac{a - c_2 - bq_1}{2b} \Rightarrow R_2(q_2) \end{cases}$$

En consecuencia, se obtendrá el equilibrio, es decir, el máximo beneficio por medio de las funciones de mejor respuesta que hemos obtenido. Buscamos la intersección de estas para obtener los máximos por el método sustitución:

q1 en q2:

$$q_1 = \frac{a - c_1 - b\cdot(\frac{a - c_2 - bq_1}{2b})}{2b} \Rightarrow q^*{}_1 = \frac{a - 2c_1 + c_2}{3b}$$

q2 en q1:

$$q_2 = \frac{a - c_2 - b\cdot(\frac{a - c_1 - bq_2}{2b})}{2b} \Rightarrow q^*_2 = \frac{a - 2c_2 + c_1}{3b}$$

Ahora procedemos a verificar que es un máximo por medio de las condiciones de segundo orden, es decir, demostrando que la segunda derivada de las funciones es negativa:

$$\frac{d^2\pi_1}{dq_1^2} = -2b < 0$$

$$\frac{d^2\pi_2}{dq_2^2} = -2b < 0$$

Además, observamos que el beneficio marginal de una de las empresas es decreciente con respecto a la otra, es decir:

$$\frac{d^2\pi(q_1, q_2)}{dq_1 dq_2} = -b < 0 \text{ Será igual para ambos beneficios}$$

Ahora procedemos a analizar el ajuste que se realiza en el modelo en el punto de equilibrio Cournot-Nash, cuando en la situación inicial no nos encontramos en este punto. Por medio del proceso de tanteo mencionado previamente, las empresas convergerían en el equilibrio E*= (q^*_1, q^*_2). Este será así si:

$$\left|R_1'(q*_2)\cdot R_2'(q*_1)\right| < 1 \Leftrightarrow \underbrace{\left|\frac{d^2\pi*_1}{dq_1^2}\cdot\frac{d^2\pi*_2}{dq_2^2}\right| > \left|\frac{d^2\pi*_1}{dq_1 dq_2}\cdot\frac{d^2\pi*_2}{dq_2 q_1}\right|}_{\text{Condición de Schwarz}}$$

En nuestro caso, comenzaremos a demostrar que se cumple la primera ecuación:

$$\left|-\frac{1}{2}\cdot-\frac{1}{2}\right| < 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{4}\right| < 1$$

Observamos, en el caso de la condición de Schwarz:

$$\left|-2b\cdot-2b\right| > \left|-b\cdot-b\right| \Rightarrow \left|4b^2\right| > \left|b^2\right|$$

Se cumplen ambas condiciones, bastaría con demostrar una de ellas.

Por tanto, tenemos un punto convergente en el proceso de tanteo, donde, independiente de cual sea la situación inicial de las empresas, acabarán convergiendo en el equilibrio Cournot-Nash, ya que se cumple la condición de Schwarz. Por otra parte, ahora obtendremos el precio óptimo del mercado y la cantidad total óptima:

$$Q^* = q_1^* + q_2^* = q^*_1 = \frac{a-2c_1+c_2}{3b} + \frac{a-2c_2+c_1}{3b} \Rightarrow Q^* = \frac{2a-c_1-c_2}{3b}$$

$$P^* = a - bQ^* \Rightarrow P^* = a - b\cdot\left(\frac{2a-c_1-c_2}{3b}\right) \Rightarrow P^* = \frac{1}{3}(-2a+c_1+c_2)$$

También, podemos calcular los respectivos beneficios en el punto óptimo que serán:

$$\begin{cases} \pi_1^*(q_1^*, q_2^*) = (a - b\cdot(q_1^* + q_2^*)\cdot q_1^* - c_1\cdot q_1^* \\ \pi_2^*(q_1^*, q_2^*) = (a - b\cdot(q_1^* + q_2^*)\cdot q_2^* - c_2\cdot q_2^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1^*(q_1^*, q_2^*) = q_1^*\cdot(a - bq_1^* - q_2^* - c_1) \\ \pi_2^*(q_1^*, q_2^*) = q_2^*\cdot(a - bq_2^* - q_1^* - c_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_1^*(q_1^*, q_2^*) = \frac{a-2c_1+c_2}{3b}\cdot\left(a - b\frac{a-2c_1+c_2}{3b} - \frac{a-2c_2+c_1}{3b} - c_1\right) \\ \pi_2^*(q_1^*, q_2^*) = \frac{a-2c_2+c_1}{3b}\cdot\left(a - b\frac{a-2c_2+c_1}{3b} - \frac{a-2c_1+c_2}{3b} - c_2\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_1^*(q_1^*, q_2^*) = \frac{a-2c_1+c_2}{3b}\cdot\left(\frac{a-2c_1+c_2}{3b}\right) \\ \pi_2^*(q_1^*, q_2^*) = \frac{a-2c_2+c_1}{3b}\cdot\left(\frac{a-2c_2+c_1}{3b}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1^*(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{(a-2c_1+c_2)^2}{3b}\right) \\ \pi_2^*(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{(a-2c_2+c_1)^2}{3b}\right) \end{cases}$$

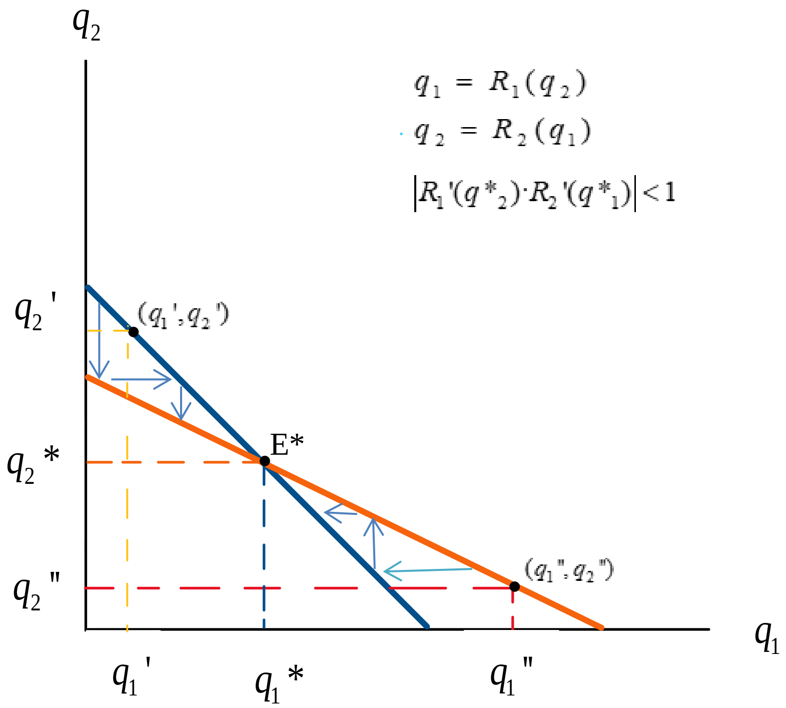
En cuanto a los efectos en los costes marginales encontramos:

$$\begin{cases} \frac{dq_1^*}{dc_1} = -\frac{2}{3b} < 0; \frac{dq_2^*}{dc_2} = -\frac{2}{3b} < 0 \\ \frac{dq_1^*}{dc_2} = \frac{1}{3b} > 0; \frac{dq_2^*}{dc_1} = \frac{1}{3b} > 0 \\ \frac{dQ^*}{dc_1} = -\frac{1}{3b} < 0; \frac{dQ^*}{dc_2} = -\frac{1}{3b} < 0 \\ \frac{dP^*}{dc_1} = \frac{1}{3} > 0; \frac{dP^*}{dc_2} = \frac{1}{3} > 0 \end{cases}$$

Como podemos observar los efectos son los mismos para ambas empresas, por tanto, hablaremos de la empresa 1, ya que es lo mismo para ambos casos. En el equilibrio un aumento en los costes de la empresa 1 provocaría una disminución en su cantidad de producción, lo cual a su misma vez provocará un aumento en la producción de cantidad de la empresa 2 si se mantienen sus costes constantes, ya que cubriría parte de la reducción de cantidad de la empresa 1 pero sin llegar a igualarla (también sucedería a la inversa).

Por otra parte, un aumento en costes de alguna de las dos o de ambas empresas generará una reducción de la cantidad global, ya que como hemos dicho antes un aumento en los costes generará una reducción en la cantidad de producción y por tanto en la cantidad global.

Finalmente, un aumento en costes de alguna de las dos o de ambas empresas generará un aumento del precio del bien, debido a que la producción del bien será menor.



En este gráfico observamos lo que sucede en el mercado cuando las asignaciones iniciales no están en el equilibrio. En el caso de (q_1', q_2') nos encontramos en una situación donde la empresa 1 está produciendo una menor cantidad de la que podría para aumentar sus ingresos y que la empresa 2 está produciendo en exceso para suplir la deficiencia de su rival, por tanto, por un proceso de tanteo vemos que convergería en el equilibrio. En el caso de (q_1'', q_2'') vemos exactamente el caso contrario y que también por el proceso mostrado en azul convergería al equilibrio de Cournot-Nash.

4. Análisis dinámico de un modelo de Cournot con costes lineales

A diferencia de la visión estática que limita su análisis a un momento específico en el tiempo, en el análisis dinámico se considera el flujo continuo del tiempo como un elemento esencial para comprender el funcionamiento de los mercados (en nuestro caso de un duopolio). Los modelos económicos dinámicos permiten explorar cómo las variables económicas varían a lo largo del tiempo, lo cual es esencial para evaluar, predecir y comprender los eventos y shocks que pueden sufrir los mercados.

Para entrometernos más a fondo en el análisis dinámico del modelo, primero debemos introducir las expectativas con racionalidad limitada. Esta idea fue desarrollada entre otros por el nobel en economía Herbert A. Simon, quien planteó que nos encontramos con que los agentes económicos no poseen información completa y que estos, no siempre actúan racionalmente, ya que los individuos no pueden calcular y analizar toda la información disponible para tomar decisiones. Por ello, asumimos que pueden tomar decisiones basadas en simplificaciones o limitaciones cognitivas y desechamos la idea de racionalidad perfecta.

En nuestro modelo utilizaremos las expectativas Naïve o ingenuas y las expectativas adaptativas para poder comprender el comportamiento que tendrías las empresas en el modelo.

Para analizar la estabilidad, primero mostraremos como se realiza un análisis de la estabilidad en un sistema dinámico discreto bidimensional, tal que:

$$T \left\{ \begin{array}{l} x_{t+1} = f(x_t, y_t) \\ y_{t+1} = g(x_t, y_t) \end{array} \right\}$$

Los puntos estacionarios o equilibrios se calculan incorporando la condición de punto fijo tal que: $\left. \begin{array}{l} x_{t+1} = x_t = x \\ y_{t+1} = y_t = y \end{array} \right\}$. Una vez obtenido el punto de equilibrio E*= (x*, y*), la condición que garantiza la estabilidad dinámica es que los valores propios de la matriz $JT(E^*)$ sean en modulo menor que uno. Esta condición también se puede expresar en términos de la traza y el determinante de $JT(E^*)$ por medio de las condiciones de Schur, que dicen:

$\left. \begin{array}{l} (i) 1 - Tr + Det > 0 \\ (ii) 1 + Tr + Det > 0 \\ (iii) 1 - Det > 0 \end{array} \right\}$ Siendo T= Traza $JT(E^*)$ y Det= Determinante de $JT(E^*)$.

4.1. Expectativas Naïve o ingenuas

Ahora procederemos a representar las expectativas ingenuas o Naïve (Marshall, 1920), en estas los agentes utilizan la información disponible del periodo pasado inmediato para predecir el período siguiente. Suponemos que los eventos pasados seguirán una tendencia lineal, sin contar con factores externos o complejidades que podrían afectar a la toma de decisiones de las empresas. Es decir, son útiles para situaciones más simples. Suponemos que las empresas siguen un esquema de expectativas Naïve de la siguiente manera:

$$T\begin{cases} q_{1,t+1} = R_1(q_{2,t}) \\ q_{2,t+1} = R_2(q_{1,t}) \end{cases} \Leftrightarrow T\begin{cases} q_{1,t+1} = \dfrac{a-c_1-bq_{2,t}}{2b} \\ q_{2,t+1} = \dfrac{a-c_2-bq_{1,t}}{2b} \end{cases}$$

con t = 1,2,3, …

Así quedaría ilustrado en nuestro modelo. Ahora, para buscar el punto de equilibrio buscaremos aquel punto en el que las cantidades producidas por ambas empresas sean constantes, lo que conlleva que $q_{i,t+1} = q_{i,t} = q_i$ con i = 1, 2. Lo cual, nos queda como:

$$T\begin{cases} q_1 = \dfrac{a-c_1-bq_2}{2b} \\ q_2 = \dfrac{a-c_2-bq_1}{2b} \end{cases}$$

Volvemos a obtener las cantidades en el equilibrio Cournot-Nash buscando en la intersección de ambas funciones y obtenemos las siguientes cantidades:

$$T\begin{cases} q_1 = \dfrac{a-c_1-b\cdot(\dfrac{a-c_2-bq_1}{2b})}{2b} \Rightarrow q^*_1 = \dfrac{a-2c_1+c_2}{3b} \\ q_2 = \dfrac{a-c_2-b\cdot(\dfrac{a-c_1-bq_2}{2b})}{2b} \Rightarrow q^*_2 = \dfrac{a-2c_2+c_1}{3b} \end{cases}$$

Como podemos observar nos da el mismo equilibrio de Nash-Cournot que, en el análisis estático, por tanto, también obtendremos la misma Q* y el mismo P*:

$$Q^* = \frac{2a - c_1 - c_2}{3b} \quad P^* = \frac{1}{3}(-2a + c_1 + c_2)$$

Como bien muestra el artículo Recta de J. Andaluz, J. Casinos y G. Jarne, sabemos que la condición de Schwarz es condición necesaria y suficiente para afirmar la estabilidad local del equilibrio:

$$\left|R_1'(q^*_2)\cdot R_2'(q^*_1)\right| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{d^2\pi^*_1}{dq_1^2}\cdot\frac{d^2\pi^*_2}{dq_2^2}\right| > \left|\frac{d^2\pi^*_1}{dq_1 dq_2}\cdot\frac{d^2\pi^*_2}{dq_2 q_1}\right|$$

Condición de Schwarz

$$\left|-\frac{1}{2}\cdot-\frac{1}{2}\right| < 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{4}\right| < 1 \Leftrightarrow \left|-2b\cdot-2b\right| > \left|-b\cdot-b\right| \Rightarrow \left|4b^2\right| > \left|b^2\right|$$

Se cumple, como en el análisis estático. Ahora, una vez garantizado que se cumple la condición de Schwarz, pasaremos a comprobar si se cumple también por medio del método de los valores propios, verificando si en este punto de equilibrio serán menores que uno en términos absolutos, para demostrarlo realizaremos la matriz Jacobiana y obtendremos los valores propios en el equilibrio:

$$JT(q_1^*, q_2^*) = \begin{pmatrix} 0 & R_1'(q_2^*) \\ R_2'(q_1^*) & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow JT(q_1^*, q_2^*) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|JT(q_1^*, q_2^*) - \lambda I_2\right| \Rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\sqrt{R_1'(q_2^*)\cdot R_2'(q_1^*)} \Rightarrow \lambda_1 = -\sqrt{-\frac{1}{2}\cdot-\frac{1}{2}} \Rightarrow \lambda_1 = \left|-\frac{1}{2}\right| < 1 \\ \lambda_2 = \sqrt{R_1'(q_2^*)\cdot R_2'(q_1^*)} \Rightarrow \lambda_2 = \sqrt{-\frac{1}{2}\cdot-\frac{1}{2}} \Rightarrow \lambda_2 = \left|\frac{1}{2}\right| < 1 \end{cases}$$

Además, también comprobaremos que se cumplen las condiciones de Shur, para que un punto sea estable se deben cumplir las tres siguientes condiciones al mismo tiempo:

Obtenemos que: $Tr = 0; Det = -\frac{1}{4}$

$$\left.\begin{array}{l}(i)1-Tr+Det>0\\(ii)1+Tr+Det>0\\(iii)1-Det>0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}(i)1-0-\dfrac{1}{4}>0\\(ii)1+0-\dfrac{1}{4}>0\\(iii)1+\dfrac{1}{4}>0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}(i)\dfrac{3}{4}>0\\(ii)\dfrac{3}{4}>0\\(iii)\dfrac{5}{4}>0\end{array}\right\}$$

Por tanto, la condición de Shur también se cumple en el equilibrio, es decir, es asintóticamente estable.

En conclusión, hemos obtenido el mismo resultado con ambos métodos, así que podemos afirmar que es un punto de equilibrio asintóticamente estable. Lo cual, nos indica que independientemente de cómo se hallen las asignaciones iniciales de las empresas o de si sufren una perturbación en las asignaciones que haga desviarse del equilibrio a las empresas, en el largo plazo se verán corregidas volviendo al punto de equilibrio $E^*=(q_1^*,q_2^*)$.

Cabe resaltar, que, al realizar el cálculo de los valores propios, desvelamos una nueva información; al obtener un valor negativo ($-1<\lambda_1=-\frac{1}{2}<0$) y un valor positivo ($0<\lambda_2=\frac{1}{2}<1$).

Con ello, podemos discernir que las trayectorias serán tanto monótonas como fluctuantes dependiendo de las condiciones iniciales.

4.2. Expectativas adaptativas

La teoría de las expectativas adaptativas nace de la mano de Cagan (1956), Friedman (1957) y Nerlove (1958). Esta teoría, propone que los valores esperados de una variable dependen de lo sucedido en el período anterior y de un término de ajuste, que consiste en el error de predicción en la variable. Lo cual puede llevar a que las expectativas cambien lentamente en respuesta a cambios en la economía, Esto se puede plantear como:

$$q_{i,t+1}-q_{it}=\beta_i(R_i(q_{j,t})-q_{i,t})\Leftrightarrow q_{i,t+1}=(1-\beta_i)q_{it}+\beta_iR_i(q_{j,t})\ \text{con}\ 0<\beta_i\leq 1; i=1,\ldots,n$$

Algunas de las críticas a la teoría son que al basarse únicamente en el pasado puede mostrar predicciones muy distintas a la realidad, ya que los valores esperados no dependen solo de la información de la misma variable, sino que influyen también otros factores que la determinan y tampoco dependen únicamente de la información del pasado (Argandoña, Gámez y

Mochón; 1999). Ahora, procederemos a aplicar las expectativas adaptativas en nuestro modelo, a partir del planteamiento previo obtenemos:

$$T\begin{cases} q_{1,t+1} = (1-\beta_1)q_{1,t} + \beta_1 R_1(q_{2,t}) \\ q_{2,t+1} = (1-\beta_2)q_{2,t} + \beta_2 R_2(q_{1,t}) \end{cases}$$

El parámetro βi mide la resistencia que tienen las empresas al cambio en el nivel de producción en el período anterior a través del efecto de la función de reacción. Ahora, para buscar el punto de equilibrio buscaremos aquel punto en el que las cantidades producidas por ambas empresas sean constantes, lo que conlleva que $q_{i,t+1} = q_{i,t} = q_i$ con i = 1, 2; dejándonos el sistema igual que el de las expectativas Naïve:

$$T\begin{cases} q_1 = (1-\beta_1)q_1 + \beta_1\cdot(\dfrac{a-c_1-bq_2}{2b}) \Rightarrow q_1 = \dfrac{a-c_1-bq_2}{2b} \\ q_2 = (1-\beta_2)q_2 + \beta_2\cdot(\dfrac{a-c_2-bq_1}{2b}) \Rightarrow q_2 = \dfrac{a-c_2-bq_1}{2b} \end{cases}$$

Por tanto, obtendremos el mismo punto de equilibrio Cournot-Nash:

$$T\begin{cases} q_1 = \dfrac{a-c_1-b\cdot(\dfrac{a-c_2-bq_1}{2b})}{2b} \Rightarrow q^*{}_1 = \dfrac{a-2c_1+c_2}{3b} \\ q_2 = \dfrac{a-c_2-b\cdot(\dfrac{a-c_1-bq_2}{2b})}{2b} \Rightarrow q^*{}_2 = \dfrac{a-2c_2+c_1}{3b} \end{cases}$$

Y el mismo precio y cantidad global:

$$Q^* = \frac{2a-c_1-c_2}{3b} \quad P^* = \frac{1}{3}(-2a+c_1+c_2)$$

Ahora procedemos nuevamente a verificar la estabilidad local del equilibrio en las expectativas Naïve tanto por los valores propios como por las condiciones de Shur. Recordamos que la condición de Shwarz calculada en el análisis estático será condición necesaria y suficiente para la estabilidad local en el equilibrio de Cournot-Nash con $0 < \beta_i \leq 1; i = 1,...,n$. Comenzaremos por el cálculo de los valores propios, comenzamos obteniendo la matriz Jacobiana:

$$JT(q_1^*, q_2^*) = \begin{pmatrix} 1-\beta_1 & \beta_1 R_1'(q_2^*) \\ \beta_2 R_2'(q_1^*) & 1-\beta_2 \end{pmatrix} \Rightarrow JT(q_1^*, q_2^*) = \begin{pmatrix} 1-\beta_1 & \beta_1 \cdot (-\frac{1}{2}) \\ \beta_2 \cdot (-\frac{1}{2}) & 1-\beta_2 \end{pmatrix}$$

$$\left| JT(q_1^*, q_2^*) - \lambda I_2 \right| \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-\beta_1-\lambda & \beta_1 \cdot (-\frac{1}{2}) \\ \beta_2 \cdot (-\frac{1}{2}) & 1-\beta_2-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$[(1-\beta_1-\lambda)\cdot(1-\beta_2-\lambda)] - \left[\frac{1}{4}\cdot\beta_1\beta_2\right] = 0 \Rightarrow$$

$$1-\beta_2-\lambda-\beta_1+\beta_1\beta_2+\beta_1\lambda-\lambda+\beta_2\lambda+\lambda^2-\frac{1}{4}\beta_1\beta_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2+\lambda(-2+\beta_1+\beta_2)+(1-\beta_1-\beta_2+\frac{3}{4}\beta_1\beta_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{-2+\beta_1+\beta_2 \pm \sqrt{(-2+\beta_1+\beta_2)^2 - 4\cdot(1)\cdot(1-\beta_1-\beta_2+\frac{3}{4}\beta_1\beta_2)}}{2\cdot 1}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \left| \dfrac{-2+\beta_1+\beta_2+\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2-\beta_1\beta_2}}{2} \right| < 1 \\ \lambda_2 = \left| \dfrac{-2+\beta_1+\beta_2-\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2-\beta_1\beta_2}}{2} \right| < 1 \end{cases}$$

Como $0 < \beta_i \leq 1; i = 1,2$ ambos valores propios serán en valor absoluto menor que 1, ya que en λ_1 debido a como está definido β_i y ser positivo, el numerador siempre será menor que dos, generando que en valor absoluto sea menor que la unidad. En el caso de λ_2, como el resultado de la raíz cuadrada será menor que la suma de las β_i también encontraremos que el numerador es menor a dos y por tanto en conjunto menor que la unidad. Lo cual nos indica que tenemos un punto de equilibrio local asintóticamente estable. A continuación, realizaremos la comprobación por las condiciones de Shur, para ello obtenemos que:

$$\begin{cases} Tr(JT(q_1*, q_2*)) = 2-(\beta_1+\beta_2) \\ Det(JT(q_1*, q_2*)) = \left[1-\beta_1-\beta_2+\beta_1\beta_2\right] - \left[\frac{1}{4}\beta_1\beta_2\right] \Rightarrow 1-\beta_1-\beta_2+\frac{3}{4}\beta_1\beta_2 \end{cases}$$

Ahora aplicamos las condiciones de Shur:

$$\left.\begin{matrix} (i) 1 - Tr + Det > 0 \\ (ii) 1 + Tr + Det > 0 \\ (iii) 1 - Det > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} (i) 1 - \left[2-(\beta_1+\beta_2)\right] + \left[1-\beta_1-\beta_2+\frac{3}{4}\beta_1\beta_2\right] > 0 \\ (ii) 1 + \left[2-(\beta_1+\beta_2)\right] + \left[1-\beta_1-\beta_2+\frac{3}{4}\beta_1\beta_2\right] > 0 \\ (iii) 1 - \left[1-\beta_1-\beta_2+\frac{3}{4}\beta_1\beta_2\right] > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} (i) \frac{3}{4}\beta_1\beta_2 > 0 \\ (ii) 4 - 2(\beta_1+\beta_2) + \frac{3}{4}\beta_1\beta_2 > 0 \\ (iii) \beta_1+\beta_2-\frac{3}{4}\beta_1\beta_2 > 0 \end{matrix}\right\} \text{ con } 0 < \beta_i \leq 1; i = 1, \ldots, n$$

Por tanto, la Condición de Shwarz será condición necesaria y suficiente de la estabilidad local en el equilibrio. Entonces, queda demostrado también por las condiciones de Shur que es un punto de equilibrio Cournot-Nash asintóticamente estable. Hemos obtenido el mismo resultado tanto con las expectativas Naïve o ingenua, como con las expectativas adaptativas. Todo parece indicar que al dinamizar el modelo el equilibrio es asintóticamente estable en el tiempo, por ende, toda perturbación que puedan sufrir las asignaciones del mercado a largo plazo se verán corregidas, llegando siempre al equilibrio $E* = (q_1*, q_2*) = (q_{1,t}*, q_{2,t}*) = (q_{1,t+1}*, q_{2,t+1}*)$.

5. Conclusiones

Finalmente, hablaremos de las conclusiones obtenidas en este trabajo de fin de grado. Nuestro objetivo inicial era demostrar que el hecho de que se cumpla la condición de Schwarz conlleva a que también se cumpla que los valores propios en absoluto son menores que la unidad y a su misma vez que también se cumplen las condiciones de Shur. Tras realizar un análisis estático de un modelo de Cournot con costes lineales, hemos podido demostrar que se cumple la condición de Schwarz, que es condición necesaria y suficiente para que haya una convergencia mediante el proceso de tanteo. Una vez demostrado esto, nos hemos adentrado en el análisis dinámico del modelo, para poder comprobar la proposición inicial, comenzando por el análisis de las expectativas Naïve o ingenuas, donde hemos obtenido el mismo punto de equilibrio que en el estado estático y posteriormente, hemos corroborado que como bien indica el articulo publicado por la Revista Electrónica de publicaciones y trabajos (Andaluz, Joaquín; Casinos, Jorge; Jarne, Gloria. (2021)), que se corrobora que gracias al cumplimiento de la condición de Schwarz los valores propios de la matriz Jacobiana serán en absoluto menores que uno y también se cumplirán las condiciones de Shur. Lo mismo ha sucedido cuando lo hemos comprobado en las expectativas adaptativas del modelo, al cumplirse las condiciones de Schwarz, también lo han hecho el resto de comprobaciones.

Por otro lado, hemos obtenido una información adicional al obtener los valores propios del modelo, observamos que son negativas ($\lambda 1<0$) y positivas ($\lambda 1>0$) lo cual nos revela que las trayectorias de las funciones serán fluctuantes o monótonas, pero siempre convergentes en el punto de equilibrio.

También, hemos visto las consecuencias que conlleva la estacionalidad en el modelo, a nivel estático, hemos visto que independientemente de cuales sean las condiciones iniciales del mercado, por un proceso de tanteo se convergerá en el equilibrio. A nivel dinámico, hemos observado que independientemente de cuales sean las asignaciones iniciales o si el mercado sufre una perturbación de estas en algún momento, en el largo plazo se verán corregidos y se volverá al punto de equilibrio Cournot-Nash.

Paralelamente, hemos analizado los efectos que surgen entre las variables del modelo en el punto de equilibrio cuando observamos un aumento en los costos. En cuanto a la cantidad total producida, notamos que se generaría una reducción, ya que al menos una de las dos empresas estaría produciendo por debajo de su nivel óptimo. En lo que respecta al precio de mercado, se observaría un incremento. Por otra parte, hemos observado que el efecto de los costos de una empresa en la otra es positivo, es decir, cuando una empresa experimenta un aumento en sus costos, la otra se ve incentivada a aumentar su producción para compensar la menor producción de su competidora.

En conclusión, podemos decir que la resolución del objetivo planteado al inicio del trabajo de fin de grado ha sido positiva, ya que hemos sido capaces de demostrarlo en un caso con costes marginales lineales.

6. Bibliografía

- Andaluz, Joaquín; Casinos, Jorge; Jarne, Gloria. (2021). *On the dynamic stability of the cournot duopoly solution under bounded rationality*. Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA. Volumen 22. Páginas 51 a 62. Zaragoza.
- Casinos, Jorge (2017). *Un modelo teórico para el estudio dinámico del duopolio.* Repositorio de la Universidad de Zaragoza- Zaguan. Zaragoza.
- Simon, Herbert (1957). *Models of Man: Social and Rational*. Ed. Willey, New York.
- Cagan, P. (1956). *The Monetary Dynamics of Hyperinflation*. The University of Chicago Press, Chicago
- Friedman, Milton (1957). *A Theory of the Consumption Function*. Princeton University Press, Princeton.
- Marshall, Alfred (1920). *Principles of Economics*, 8th edition. London: Macmillan; reprinted by Prometheus Books.
- Marc Nerlove (1958). *Estimate of Supply Elasticity: A reply*. Journal of Farm Economics, 40, 723-727. Oxford University Press. Oxford.
- Augustin Cournot (1838). *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*.
- Argandaña, Antonio ; Gámez Amián, Consuelo ; Mochón Morcillo, Francisco. (1999) *Macroeconomía Avanzada.* McGraw-Hill España. Madrid.