

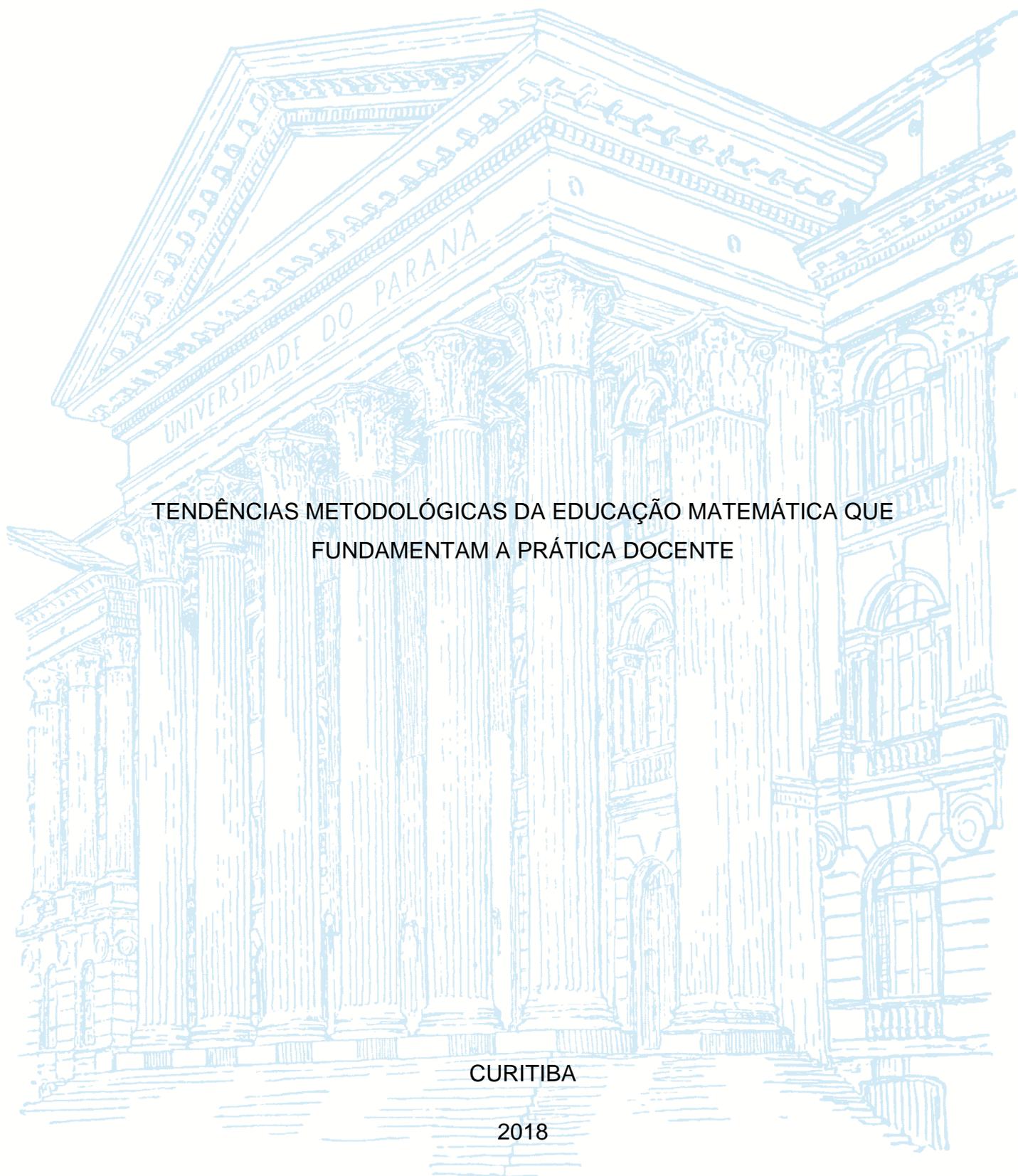
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - UFPR

DAIANE CHITKO DE SOUZA

TENDÊNCIAS METODOLÓGICAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA QUE
FUNDAMENTAM A PRÁTICA DOCENTE

CURITIBA

2018



DAIANE CHITKO DE SOUZA

**TENDÊNCIAS METODOLÓGICAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA QUE
FUNDAMENTAM A PRÁTICA DOCENTE**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Paraná como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Elisangela de Campos

CURITIBA

2018

A todos os professores que, além de ensinar, transmitem sonhos e luz.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela sua inesgotável bondade, a qual me permitiu alcançar esta etapa tão importante da minha vida.

A esta universidade por toda a aprendizagem que tive durante esses anos estudando neste ambiente inspirador.

Aos professores, agradeço a orientação, motivação, inspiração, empenho e a confiança, que ajudaram a tornar possível este sonho tão especial.

A minha família, minha gatinha e meus amigos que nunca desistiram de mim e sempre me ofereceram amor e auxílio nos momentos que mais precisei minha eterna gratidão.

A todas as pessoas que de alguma forma fizeram parte do meu percurso eu agradeço com todo meu coração.

"Quanto à poética sou bem resolvida. De
hermética basta a vida." (G.L.)

RESUMO

Este trabalho aborda o ensino da Matemática através do estudo de duas Metodologias de Ensino: a Modelagem Matemática e a Resolução de Problemas. O objetivo geral do estudo foi investigar e analisar, sobre o ponto de vista de três estudiosos de cada abordagem, o que eles compreendem sobre essas abordagens, apontando semelhanças e diferenças entre seus pontos de vista. A metodologia de pesquisa adotada foi uma pesquisa bibliográfica, tendo como objetivo específico a análise de livros e teses dos autores sobre as abordagens de ensino utilizadas nas salas de aulas, com o intuito de servir de material didático para auxiliar professores a incorporar essas metodologias nas aulas de matemática. Este material é voltado para graduandos, professores de matemática e interessados sobre os temas.

Palavras-chave: Educação Matemática. Modelagem Matemática. Resolução de Problemas.

ABSTRACT

This work approaches the teaching of Mathematics through the study of two Teaching Methodologies: Mathematical Modeling and Problem Solving. The overall objective of the study was to investigate, from the point of view of three specialists from each approach, and to analyze what they understood about these approaches, pointing out similarities and differences between their point of views. The research methodology adopted included a bibliographical research, with the specific objective of analyzing the authors' books and theses on the teaching approaches used in classrooms, with the purpose of serving as teaching material to help teachers to incorporate these methodologies in the math classrooms. This material can be used by undergraduates, math teachers and interested people on the subjects.

Key-words: Mathematics Education. Mathematical Modeling. Problem Solving.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	METODOLOGIA DA PESQUISA	11
2.1	PESQUISA BIBLIOGRÁFICA.....	11
2.1.1	XII Encontro Nacional De Educação Matemática (XII ENEM).....	12
2.1.2	XIV Encontro Paranaense De Educação Matemática (XIV EPREM).....	13
2.1.3	Seleção dos autores.....	14
2.1.4	Trabalhos dos autores selecionados para a pesquisa.....	16
3	MODELAGEM MATEMÁTICA	17
3.1	ANÁLISE: JONEI CERQUEIRA BARBOSA.....	17
3.1.1	O que é Modelagem Matemática para Jonei Cerqueira Barbosa?.....	17
3.1.2	Papel do professor na Modelagem Matemática.....	18
3.1.3	Etapas da Modelagem Matemática.....	18
3.2	ANÁLISE RODNEY: CARLOS BASSANEZI.....	21
3.2.1	O que é Modelagem Matemática para Rodney Carlos Bassanezi?.....	21
3.2.2	Papel do professor na Modelagem Matemática.....	22
3.2.3	Etapas da Modelagem Matemática.....	23
3.3	ANÁLISE: DIONÍSIO BURAK.....	25
3.3.1	O que é modelagem matemática para Dionísio Burak?.....	25
3.3.2	Papel do professor na Modelagem Matemática.....	26
3.3.3	Etapas da Modelagem Matemática.....	27
3.4	ANÁLISE DAS SEMELHANÇAS E DIFERENÇAS ENTRE OS AUTORES	30
3.4.1	Semelhanças.....	30
3.4.2	Diferenças.....	31
4	RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	34
4.1	ANÁLISE: GEORGE POLYA.....	34
4.1.1	O que é um problema para George Polya?.....	34
4.1.2	Papel do professor na Resolução de Problemas.....	36
4.1.3	Como se deve resolver um problema segundo Geoge Polya?.....	38
4.2	ANÁLISE: LOURDES DE LA ROSA ONUCHIC.....	41

4.2.1	O que é um problema para Lourdes de la Rosa Onuchic?.....	41
4.2.2	Papel do professor na Resolução de Problemas.....	43
4.2.3	Como se deve resolver um problema segundo Lourdes de la Rosa Onuchic?.....	44
4.3	ANÁLISE: LUIZ ROBERTO DANTE.....	47
4.3.1	O que é um problema para Luiz Roberto Dante?.....	47
4.3.2	Papel do professor na Resolução de Problemas.....	49
4.3.3	Como se deve resolver um problema segundo Luiz Roberto Dante?.....	50
4.4	ANÁLISE DAS SEMELHANÇAS E DIFERENÇAS ENTRE OS AUTORES..	52
4.4.1	Semelhanças.....	52
4.4.2	Diferenças.....	53
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	54
	REFERENCIAS.....	56

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho nasceu de alguns questionamentos durante a minha formação acadêmica, na qual tive a oportunidade de observar e sentir as dificuldades, tanto de colegas do curso quanto as minhas, para decidir qual Metodologia de Ensino seria mais apropriada dependendo da turma, da forma de trabalhar e do conteúdo a ser trabalhado.

Atentando para Metodologias nas quais os alunos tivessem um papel mais ativo no processo de ensino-aprendizagem, sempre surgiam dúvidas se isso ou aquilo estava correto e/ou era contemplado pela Metodologia de Ensino escolhida. Em reuniões do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid) que discutíamos sobre os planos de aula, houve muitas vezes discordância sobre as Metodologias, como por exemplo: "isso não é um problema", "acho que isso não é investigação", "para esse autor Modelagem é assim, mas para outro é diferente" entre outras. Destas experiências surgiu o anseio de pesquisar sobre as Metodologias identificando dentro delas as diferenças e semelhanças que os estudiosos dos temas apresentam nos seus estudos.

Neste trabalho, abordei duas Metodologias de Ensino, a Modelagem Matemática e a Resolução de Problemas, a luz de três autores que estudam os temas, com objetivo de relatar suas concepções a cerca das Metodologias, buscando semelhanças e diferenças nas ideias dos mesmos, a fim de proporcionar um material que auxilie o professor na adoção destas Metodologias ou que o motive a procurar mais sobre esses e outros temas.

A escolha de pesquisar as Metodologias de Ensino se deu pela crença de que elas se apresentam como uma das ferramentas de ressignificação da matemática escolar. Não acredito que as Metodologias apresentadas aqui e as outras existentes sejam as únicas formas de ensinar os conteúdos matemáticos, muito menos que as estudadas neste trabalho são apresentadas em sua totalidade.

A docência remete a desafios, sejam eles dentro ou fora da sala de aula, o processo de ensino-aprendizagem é complexo e não existe apenas uma forma

correta de trabalhar, sendo que nas salas de aulas, os alunos e os professores são diferentes em cada ano e em cada turma. Acredito também que é papel do professor encontrar meios que tornem o trabalho docente mais favorável para ambos os lados, dos alunos e do professor.

Os dois temas escolhidos remetem a situações do cotidiano e dos alunos terem um papel mais ativo nas aulas. Espero que este estudo possa despertar interesse e contribuir para o aprofundamento de futuras pesquisas a respeito dos assuntos abordados.

O primeiro capítulo será dedicado à Metodologia de Pesquisa e no segundo será explicado como foi feita a seleção dos autores e dos temas. O terceiro capítulo foi dedicado à Modelagem Matemática, no qual a Modelagem é explicada pelo ponto de vista dos autores selecionados e à análise das semelhanças e diferenças entre eles. Por fim, o quarto capítulo será idêntico ao terceiro, mas para a Resolução de Problemas.

2 METODOLOGIA DA PESQUISA

O presente estudo caracteriza-se como uma pesquisa bibliográfica, de natureza qualitativa e pela perspectiva exploratória.

Para Fonseca (2002, p. 31),

A pesquisa bibliográfica é feita a partir do levantamento de referências teóricas já analisadas, e publicadas por meios escritos e eletrônicos, como livros, artigos científicos, páginas de web sites. Qualquer trabalho científico inicia-se com uma pesquisa bibliográfica, que permite ao pesquisador conhecer o que já se estudou sobre o assunto.

Segundo Gerhardt e Silveira (2009, p. 32),

Os pesquisadores que utilizam os métodos qualitativos buscam explicar o porquê das coisas, exprimindo o que convém ser feito, mas não quantificam os valores e as trocas simbólicas nem se submetem à prova de fatos, pois os dados analisados são não-métricos (suscitados e de interação) e se valem de diferentes abordagens.

A modalidade de pesquisa exploratória é caracterizada por Fiorentini e Lorenzato (2009) como um estudo com o intuito obter maiores informações sobre a problemática. Com esta metodologia, o objetivo da pesquisa é responder as seguintes perguntas para os autores selecionados de Modelagem Matemática:

- (i) O que é a Modelagem Matemática para o autor?
- (ii) Qual o papel do professor na Modelagem Matemática?
- (iii) Quais são as etapas no processo de Modelagem Matemática?

E, para os autores de Resolução de Problemas:

- (i) O que é um problema para o autor?
- (ii) Qual o papel do professor na Resolução de Problemas?
- (iii) Como resolver problemas para o autor?

2.1 PESQUISA BIBLIOGRÁFICA

Para servir de base para a pesquisa referente às Metodologias de Ensino foram usadas como referências às tendências metodológicas que estão presentes nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná - DCE/PR de Matemática:

Os conteúdos propostos devem ser abordados por meio de tendências metodológicas da Educação Matemática que fundamentam a prática docente, das quais destacamos:

- resolução de problemas;
- modelagem matemática;
- mídias tecnológicas;
- etnomatemática;
- história da Matemática;
- investigações matemáticas.

(DCE PARANÁ, 2008, p. 63).

Por questões de delimitações de estudo e interesse pessoal foram selecionadas as Metodologias: Investigações Matemáticas, Modelagem Matemática, Mídias Tecnológicas e Resolução de Problemas.

Após esta seleção de temas foi feita uma pesquisa no site da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) e da Sociedade Brasileira de Educação Matemática do Paraná (SBEM-PR), e uma busca nos resumos dos últimos eventos nacionais e regionais.

Para delimitação da pesquisa foram escolhidos para análise os eventos: XII Encontro Nacional de Educação Matemática (XII ENEM) que ocorreu em julho de 2016 e o XIV Encontro Paranaense de Educação Matemática (XIV EPREM) que ocorreu em setembro de 2017. Ambos eventos foram escolhidos por serem os mais atuais e mais importantes da área e por apontarem um âmbito de contraste nacional e regional já que a base de pesquisa surgiu das recomendações do DCE/PR de Matemática.

A opção pela busca de referências autorais nos Encontros de Educação Matemática foi porque estes eventos são mais representativos em termos do que os professores estão realizando nas salas de aula e nas pesquisas. Outro motivo é o insucesso na busca e classificação dos autores pelas páginas do Site Google Acadêmico e pelo site da Base de Dados do Portal de Periódicos CAPES que eram as propostas iniciais.

2.1.1 XII Encontro Nacional De Educação Matemática (XII ENEM)

A pesquisa neste evento consistiu em baixar todos os trabalhos da aba "relato de experiência" na página oficial do evento e posteriormente dentro cada trabalho procurar as palavras-chaves: "Modelagem Matemática", "Investigação

Matemática", "Tecnologias" e "Resolução de Problemas". No total foram analisados 463 trabalhos e classificados em quatro categorias: Investigação Matemática, Modelagem Matemática, Resolução de Problemas e Tecnologias. O QUADRO 1 a seguir mostra a relação de trabalhos por categoria.

QUADRO 1: ORGANIZAÇÃO DE TRABALHOS DO XII ENEM POR CATEGORIAS.

CATEGORIAS:	TRABALHOS SELECIONADOS:
Investigação Matemática	11
Modelagem Matemática	22
Resolução de Problemas	27
Tecnologias	11

FONTE: A autora (2018)

Dentre os 71 trabalhos selecionados, podemos observar um número maior de trabalhos nas categorias Modelagem Matemática e Resolução de Problemas.

2.1.2 XIV Encontro Paranaense De Educação Matemática (XIV EPREM)

A pesquisa neste evento também consistiu em baixar todos os trabalhos da aba "Trabalhos" na página oficial do evento e posteriormente dentre cada trabalho procurar as mesmas palavras-chaves que o evento anterior: "Modelagem Matemática", "Investigação Matemática", "Tecnologias" e "Resolução de Problemas". No total foram analisados 218 trabalhos e classificados nas mesmas quatro categorias: Investigação Matemática, Modelagem Matemática, Resolução de Problemas e Tecnologias. O QUADRO 2 a seguir mostra a relação de trabalhos por categoria:

QUADRO 2: ORGANIZAÇÃO DE TRABALHOS DO XIV EPREM POR CATEGORIAS.

CATEGORIAS:	TRABALHOS SELECIONADOS:
Investigação Matemática	3
Modelagem Matemática	25
Resolução de Problemas	14
Tecnologias	2

FONTE: A autora (2018)

Dentre os 44 trabalhos selecionados deste evento nas quatro categorias, podemos destacar novamente um número significativamente maior dos trabalhos nas categorias de Modelagem Matemática e Resolução de problemas.

2.1.3 Seleção dos autores

No Total foram analisados e classificados 681 trabalhos dos dois eventos resultando em 14 trabalhos de Investigação Matemática, 47 de Modelagem Matemática, 41 Resolução de Problemas e 13 de Tecnologias.

Após os trabalhos serem organizados em categorias, foi feita uma classificação dos autores que foram mais citados nas referências dos trabalhos, para isso foi criada uma planilha com todos os autores de cada trabalho dos dois eventos e anotado o número de citações de cada autor/autores.

Para este trabalho foram selecionados os três autores, únicos, mais citados de cada tema. Essa classificação se deu em ordem decrescente de citação dos dois eventos. Os QUADROS 3, 4, 5 e 6 a seguir apresentam as relações dos autores por temas:

QUADRO 3: CLASSIFICAÇÃO DOS AUTORES MAIS CITADOS NA CATEGORIA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA	
AUTORES:	NÚMERO DE CITAÇÕES:
João Pedro da Ponte	2
Sérgio Lorenzato	2
Carlos A. Braumann	2

FONTE: A autora (2018)

Com um número pequeno de trabalhos nessa categoria o número de citações dos autores não foi significativo no sentido de mostrar quais autores estavam sendo mais usados, ficando muitos autores empatados.

QUADRO 4: RANKING DE AUTORES MAIS CITADOS NA CATEGORIA MODELAGEM MATEMÁTICA

MODELAGEM MATEMÁTICA	
AUTORES:	NÚMERO DE CITAÇÕES:

Jonei Cerqueira Barbosa	51
Rodney Carlos Bassanezi	23
Dionisio Burak	20

FONTE: A autora (2018)

A Modelagem Matemática teve um número alto de citações por autor nos trabalhos analisados.

QUADRO 5: RANKING DE AUTORES MAIS CITADOS NA CATEGORIA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	
AUTORES:	NÚMERO DE CITAÇÕES:
George Pólya	22
Lourdes de La Rosa Onuchic	10
Luiz Roberto Dante	9

FONTE: A autora (2018)

A Resolução de Problemas, da mesma maneira que na Modelagem Matemática, obteve um número de citações contrastante entre os autores apresentados nos resumos.

QUADRO 6: RANKING DE AUTORES MAIS CITADOS NA CATEGORIA TECNOLOGIAS

TECNOLOGIAS	
AUTORES:	NÚMERO DE CITAÇÕES:
José Manuel Morán Costas	6
Vani Moreira Kenski	5
Ubiratan D'Ambrosio	4

FONTE: A autora (2018)

De modo análogo a Investigações Matemática a categoria de Tecnologias não obteve muitas citações dos autores, ficando os mais citados com pouca diferença no número de citações dos demais.

2.1.4 Trabalhos dos autores selecionados para a pesquisa

Nesta etapa foi estabelecido que o estudo seria desenvolvido apenas com as Metodologias de Ensino: Modelagem Matemática e Resolução de Problemas. Essa escolha ocorreu por existir um número significativamente maior de citações dos autores dessas categorias nos trabalhos analisados dos dois eventos.

Para a seleção dos materiais que seriam usados para a análise bibliográfica foram levados em conta os trabalhos que os autores escreveram sem parcerias de outros autores, logo, a seleção se afunilou para os livros ou para as teses de doutorado dos autores de cada tema. Apenas para a autora Lourdes de La Rosa Onuchic foi usado trabalho com parceria de outra autora por não encontrar outras opções sem parceria. Os trabalhos analisados de cada autor são apresentados no QUADRO 7 a seguir:

QUADRO 7 - TRABALHOS DOS AUTORES SELECIONADOS PARA A PESQUISA

TIPO	TÍTULO	AUTOR	ANO
Tese de doutorado	Modelagem Matemática: Concepções e experiências de futuros professores.	Jonei Cerqueira Barbosa	2001
Livro	Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia	Rodney Carlos Bassanezi	2002
Tese de doutorado	Modelagem Matemática: Ações e interações no processo de ensino-aprendizagem.	Dionisio Burak	1992
Livro	A Arte de Resolver Problemas	George Pólya	1995
Artigo e Capítulo de livro.	Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. / Pesquisa em Resolução de Problemas: Caminhos, avanços e novas perspectivas	Lourdes de La Rosa Onuchic	1999 e 2011
Livro	Formulação e resolução de problemas de matemática	Luiz Roberto Dante	2010

FONTE: A autora (2018)

3 MODELAGEM MATEMÁTICA

Aprender modelagem é como aprender a nadar ou dirigir um carro; não é suficiente ler um livro que ensine como fazer. (EDWARDS e HAMSON, 1990 apud BABOSA, 2001, p.16).

Neste capítulo será apresentado o estudo da pesquisa bibliográfica dos autores Jonei Cerqueira Barbosa, Rodney Carlos Bassanezi e Dionísio Burak e posteriormente será feita a análise das semelhanças e diferenças no ponto de vista dos três autores.

3.1 ANÁLISE: JONEI CERQUEIRA BARBOSA

Jonei Cerqueira Barbosa possui Licenciatura em Matemática pela Universidade Católica do Salvador (1997), Doutorado em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (2001) e pós-doutoramentos na London South Bank University (2008) e na University of London (2013-2014). Desde 2010, é professor associado, em regime de dedicação exclusiva, do Departamento II da Faculdade de Educação da Universidade Federal da Bahia. Atua como professor permanente no Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências da UFBA/UEFS e no Programa de Pós-Graduação em Educação da UFBA, orienta projetos de iniciação científica, mestrado, doutorado e pós-doutorado. Foi membro do Executive Committee of the International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications (2009-2013). Atuou como coordenador do GT de Modelagem Matemática (2006-2009) Possui experiência na área de Educação Matemática, tendo desenvolvido projetos de pesquisa na área de modelagem matemática, materiais curriculares para professores e formação de professores de matemática, cujos resultados estão socializados em mais de cem trabalhos completos publicados na forma de artigos de periódicos, capítulos de livros e artigos em anais. (Fonte: Currículo Lattes).

3.1.1 O que é Modelagem Matemática para Jonei Cerqueira Barbosa?

O objetivo da Modelagem é resolver o problema da maneira mais simples e adequada possível, sendo que a Modelagem está associada à problematização e à investigação. Problematizando as situações reais e criando perguntas sobre ela, é possível, através da investigação, organizar, selecionar e manipular as informações, refletindo sobre elas no âmbito da matemática. (BARBOSA, 2001).

A Modelagem é trabalhada com problemas reais em vez de exercícios fictícios, e mesmo que os problemas não se originem no campo da matemática os alunos resolverão as questões através dela, como comenta o autor:

As situações a serem indagadas e/ou investigadas pelos alunos não foram formuladas apenas com o propósito de ensinar matemática. Os atributos que qualificam a situação e seus dados não foram criados (no sentido estrito da palavra), mas são partes de circunstâncias que a sustentam. (BARBOSA, 2001, p. 33)

Porém, é possível reconhecer um entendimento geral de que Modelagem aborda, por meio da matemática, situações com referência na realidade. (BARBOSA, 2001, p. 27).

Não se deve pensar na relação da Modelagem Matemática apenas para resolver problemas de outra área, por esse motivo, Barbosa (2001), aborda a Modelagem não pela perspectiva da Matemática Aplicada, mas sim da Educação Matemática.

3.1.2 Papel do professor na Modelagem Matemática

O professor deve trabalhar junto com os alunos a fim de questionar a realidade e conhecer melhor e/ou novos contextos sociais e culturais através de atividades de Modelagem com a intenção de conciliar os interesses dos alunos. (BARBOSA, 2001).

Para o autor, o professor deve ter disposição e interesse para trabalhar com Modelagem na sala de aula, assim feito, os outros requisitos vão sendo conquistados ao se familiarizar com a Modelagem Matemática:

Não há "receitas" de como atuar no ambiente de aprendizagem da Modelagem, nem desejo prescrever comportamentos docentes. Mas

julgo imperioso discutir, do ponto de vista geral, algumas implicações decorrentes da forma como entendo Modelagem para o papel do professor.

Num ambiente de Modelagem sob a ótica sócio-crítica, entendo que o papel desempenhado pelo professor envolve, pelo menos:

- o conhecimento de matemática e Modelagem Matemática;
- a disposição para o diálogo com os alunos;
- a direção das atividades dos alunos.

Antes de qualquer coisa, é necessário que o professor tenha interesse por atividades de Modelagem, que, ele mesmo, deve sentir-se instigado por investigações matemáticas desse tipo. A condução das atividades curriculares exige que o professor esteja ou queira ser "socializado" no campo da Modelagem. (BARBOSA, 2001, p.49).

Podemos concluir que o interesse pela Modelagem Matemática deve começar pela motivação do professor, essa motivação será necessária para procurar mais conhecimento sobre essa metodologia, tanto quanto para trabalhar com os alunos e para o desenvolvimento da mesma.

3.1.3 Etapas da Modelagem Matemática

O autor não explicita as fases que apresenta à Modelagem. Porém, podemos concluir que sempre começará por um problema (dado pelo professor ou proposto pelos alunos), posteriormente terá uma coleta de dados, (podendo ser apenas compreender o problema e extrair os dados dele mesmo ou ir buscar novas informações) e a resolução do problema.

O autor distingue a maneira de abordar a Modelagem Matemática na sala de aula, decorrente do seus estudos sobre o tema, em três casos:

- Caso 1

O problema é apresentado pelo professor, com todos os seus dados, sejam eles qualitativos ou quantitativos, cabendo aos alunos a investigação. Neste caso, os alunos não precisam sair da sala de aula para coletar novos dados. Os problemas cuja necessidade de resolução é expressa de uma maneira mais objetiva. A atividade não é muito extensa.

- Caso 2

Apenas o problema é dado aos alunos, estes devem investigar e coletar dados, fora da sala de aula, para compreender e chegar a uma solução do problema apresentado. Ao professor, cabe apenas a tarefa de formular o problema inicial. Nesse caso, os alunos serão mais responsabilizados pela condução das tarefas.

- Caso 3

A Modelagem se dá através da escolha de temas "não matemáticos" que podem ser escolhidos pelos alunos ou pelo professor ou por ambos. Neste caso, cabe ao aluno coletar os dados necessários para a formulação do problema, formular o problema e resolvê-lo. Essa forma é a mais tradicional de se trabalhar Modelagem Matemática, onde o destaque na atividade se dá pela estimulação dos alunos ao buscar, refletir e resolver o problema.

Na imagem a seguir (FIGURA 1), é feita uma comparação dos agentes principais nos três casos destacados pelo autor:

FIGURA 1 - TAREFAS DOS ALUNOS E DOS PROFESSORES

	CASO 1	CASO 2	CASO 3
Elaboração da situação-problema	professor	professor	professor/aluno
Simplificação	professor	professor/aluno	professor/aluno
Dados qualitativos e quantitativos	professor	professor/aluno	professor/aluno
Resolução	professor/aluno	professor/aluno	professor/aluno

FONTE: BARBOSA (2001, p.40)

O autor expõe que o papel do professor, nos três casos, é de trabalhar junto com os alunos na atividade de Modelagem:

O papel do professor é acompanhar os alunos em todas as fases, intervindo na condução das atividades, como direcionador do processo, não dos estudantes. Não se trata de fazer alguma coisa *para* os

estudantes, mas *com* os estudantes (FREIRE & SHOR, 1987 apud BABOSA, 2001, p.41).

O autor resalta que a importância da Modelagem está na reflexão sócio-crítica que os alunos terão ao trabalhar com os problemas no âmbito da matemática e não necessariamente chegar a um modelo:

À medida que não compreendo atividades de Modelagem contendo encaminhamentos e fins *a priori*, sustento que os alunos podem investigar matematicamente uma dada situação, sem necessariamente construir um modelo matemático. O importante – assim julgo - não é a construção do modelo em si, mas o processo de indagação e investigação, que pode, ou não, envolver a formulação de um modelo matemático propriamente dito. (BARBOSA, 2001, p. 36).

O autor completa explicando como o Modelo Matemático é visto dentro da Modelagem de uma maneira geral:

A representação ideal, em termos matemáticos, de certos aspectos da situação real, chama-se modelo matemático e o seu processo de construção, Modelagem Matemática (BASSANEZI, 1994A; CROSS & MOSCARDINI, 1985; EDWARDS & HAMSON, 1990 apud BABOSA, 2001, p.14).

Um modelo matemático não é formulado com um fim em si mesmo, mas para resolver um problema. Sendo assim, a partir do modelo matemático, elabora-se um problema que será, se possível, resolvido pelas teorias matemáticas conhecidas. A solução é trazida de volta para a situação real para ser interpretada. Se possível, pode-se "validar" com os dados empíricos. Procura-se verificar o significado e a acuidade da solução obtida na situação-problema. Se for julgada satisfatória aos propósitos do modelador, os resultados são comunicados; se não, retorna-se ao trabalho realizado, verificam-se os cálculos, as relações estabelecidas ou as simplificações realizadas no início do processo. (BARBOSA, 2001, p. 14)

3.2 ANÁLISE: RODNEY CARLOS BASSANEZI

Rodney Carlos Bassanezi possui graduação em Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (1965), mestrado em pela Universidade Estadual de Campinas (1971) e doutorado em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (1977). Trabalhou no IMECC- Unicamp de 1969 a 2001 quando passou a ser pesquisador voluntário nesta universidade, permanecendo até 2006. A partir de 2007 trabalha na Universidade Federal do ABC onde foi o primeiro coordenador do programa de pós-graduação do CMCC.

Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Análise, atuando principalmente nos seguintes temas: Teoria Fuzzy: Sistemas dinâmicos subjetivos; Biomatemática: epidemiologia, ecologia; Educação matemática: Modelagem. (Fonte: Currículo Lattes)

3.2.1 O que é Modelagem Matemática para Rodney Carlos Bassanezi?

Segundo Bassanezi (2002, p. 16), "*A modelagem matemática* consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real".

O pressuposto da modelagem está na multidisciplinaridade, pois na vida real os problemas não são separados em matérias. Constituindo então a modelagem como um processo dinâmico, utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos, no qual as soluções dos problemas devem ser interpretadas na linguagem usual, ajudando outras ciências a se desenvolverem e desenvolvendo, assim, a própria matemática.

Para Bassanezi (2002, p.17), "A modelagem matemática, em seus vários aspectos, é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la".

A Matemática Aplicada se encarrega de trabalhar com a modelagem matemática e de seus modelos. Vale salientar que a importância da matemática não deve ser reduzida apenas pela sua aplicabilidade no mundo real, mas sim pelo quanto ela é agradável e interessante.

Ao usar a modelagem matemática como uma estratégia de ensino e aprendizagem ela recebe o nome de Modelação Matemática (modelagem em Educação). Segundo Bassanezi (2002, p. 38), "Na modelação a validação de um modelo pode não ser uma etapa prioritária. Mais importante do que os modelos obtidos é o processo utilizado, a análise crítica e sua inserção no contexto sócio-cultural".

Atualmente, com o desenvolvimento de novas teorias matemáticas que são apresentadas como algo acabado e completo conduzindo os estudantes a um

ensino desvinculado da realidade e do processo histórico de construção da matemática, como Bassanezi (2002) resalta:

Assim que um teorema é ensinado, seguindo o seguinte esquema: "enunciado \rightarrow demonstração \rightarrow aplicação", quando de fato o que poderia ser feito é sua construção na ordem inversa (a mesma que deu origem ao teorema), isto é, sua motivação (externa ou não à matemática), a formulação de hipóteses, a validação das hipóteses e novos questionamentos, e finalmente seu enunciado. (p. 36).

Com isso, a Modelagem Matemática redescobre os princípios em que a matemática foi criada/descoberta, olhando primeiramente para o problema que é colocado, como será resolvido e posteriormente generalizado para poder ser utilizado em outras situações.

3.2.2 Papel do professor na Modelagem Matemática

O professor que opta por trabalhar com modelagem matemática está buscando uma maior responsabilidade dos alunos em relação a sua aprendizagem. Quanto mais modelagem o professor trabalhar mais experiente ficará na elaboração de questionamentos, pois só se aprende modelagem fazendo modelagem.

Naturalmente, ao privilegiar um ensino voltado para os interesses e necessidades da comunidade, precisamos considerar o aluno um participante ativo do desenvolvimento de cada conteúdo, fato que não tem ocorrido na prática tradicional.

Os processos pedagógicos voltados para aplicações podem levar os alunos a compreenderem melhor a matemática, seus argumentos, conceitos e resultados, incorporando uma aprendizagem mais significativa:

O que se pode observar na maioria das instituições de ensino, principalmente em relação ao ensino da matemática, é que a ênfase maior tem sido dada ao produto em detrimento do processo, o que implica na má qualidade do primeiro. (BASSANEZI, 2002, p. 177).

O professor trabalha, na maior parte do tempo, como um monitor dos grupos e quando constata deficiências ou questionamentos comuns à maioria dos

alunos, aborda o conteúdo necessário em forma de aulas expositivas. Bassanezi (2002, p.38) diz "Com a modelagem o processo de ensino-aprendizagem não mais se dá no sentido único do professor para o aluno, mas como resultado da interação do aluno como seu ambiente natural".

3.2.3 Etapas da Modelagem Matemática

- Etapa Inicial

A Modelagem começa pela escolha do tema de estudo, o qual ainda não se sabe o conteúdo matemático que será utilizado. É necessário escolher temas abrangentes para que se possam ter questionamentos sobre várias perspectivas. Segundo Bassanezi (2002) o tema deve ser escolhido pelos alunos, o professor pode orientar a escolha, mas não impor, para proporcionar motivação no processo de aprendizagem.

O tema pode ser subdividido em pequenos grupos de alunos, e cada grupo trabalhará com um problema específico do tema comum a cada grupo.

- Fase Intermediária

Posteriormente à definição do tema, é preciso buscar informações relacionadas ao assunto. A coleta de dados, tanto qualitativas quanto quantitativas, pode ser feita de várias formas como, por exemplo, entrevistas e pesquisas de campo, através de pesquisa bibliográfica e de experiências programadas pelos próprios alunos. (BASSANEZI, 2002).

A maioria dos problemas "diretos" que são levantados inicialmente no processo de modelagem dizem respeito à matemática mais básica e óbvia, os questionamentos mais elaborados e que exigem maior reflexão começam a surgir com a pesquisa de campo. Nessa etapa é fundamental que os alunos obtenham o máximo de informações possíveis a respeito do fenômeno a ser analisado.

Não importa se todas as informações qualitativas, e mesmo as quantitativas, serão utilizadas nos modelos matemáticos. Os alunos devem decidir sobre as questões que serão abordadas do ponto de vista da Modelagem Matemática e o professor deve servir apenas como guia no caminho escolhido por eles.

- Fase Final

A formulação de um Modelo Matemático é geralmente a parte mais difícil de todo o processo de Modelagem. Mais difícil por ser uma atividade essencialmente criativa e que depende de conhecimentos adquiridos previamente e das variáveis envolvidas no tema. O autor define o Modelo Matemático por:

Chamaremos simplesmente de Modelo Matemático um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado. (...). A importância do modelo matemático consiste em se ter uma linguagem concisa que expressa nossas ideias de maneira clara e sem ambiguidades, (...). (BASSANEZI, 2002, p. 20).

O resultado, solução, final do processo de Modelagem Matemática é dado em termos de uma expressão matemática, ou seja, um modelo. A Modelagem Matemática deve simplificar os problemas, se o modelo feito for muito complexo seu estudo fica inviável.

- Fase de Avaliação

No final, cada grupo expõe seus resultados à turma, é quando se faz a troca de experiências e críticas. O aluno é avaliado em cada etapa do processo de modelagem e no final é avaliado por cada elemento do grupo e por sua própria autoavaliação. (BASSANEZI, 2002).

3.3 ANÁLISE: DIONÍSIO BURAK

Dionísio Burak possui graduação em Matemática pela Universidade Estadual do Centro-Oeste (1973), mestrado em Ensino de Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (1987) e doutorado pela Universidade Estadual de Campinas (1992). Atualmente é rt-20 da Universidade Estadual de Ponta Grossa e professor titular da Universidade Estadual do Centro-Oeste. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: modelagem matemática, educação matemática, ensino e aprendizagem e ensino de

matemática. Pós-Doutorado (2010) - Universidade Federal do Pará. (Fonte: Currículo Lattes).

3.3.1 O que é modelagem matemática para Dionísio Burak?

A Modelagem Matemática procura insistentemente a interação entre a teoria e a prática, relacionando os conhecimentos aprendidos na sala de aula com algumas situações do cotidiano, como o autor destaca:

A Modelagem Matemática constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e tomar decisões. (BURAK, 1992, p. 620).

O Método de Modelagem iniciado de um tema ou problema de interesse de um grupo de pessoas envolve o contato com outras pessoas, outras opiniões, outros interesses e do interesse em relacionar a matemática com outras áreas do conhecimento.

Para Burak (1992), ao se trabalhar com Modelagem Matemática, a relevância está no ato de retratar a perspectiva dos participantes e como cada etapa ou como os questionamentos se dispuseram desde a escolha do tema até a validação do modelo.

Por não exigir uma rigidez na sequência de conteúdos, quando se trabalha com a Modelagem Matemática, conteúdos não previstos para determinados anos podem ser abordados para atender a busca pelas respostas dos problemas propostos, como o autor destaca:

No método da Modelagem Matemática, e compreensão e o significado de cada conteúdo, necessário à solução do problema proposto, adquire uma dimensão mais profunda, através da própria construção desse conhecimento. Esse método de trabalho torna o ensino de Matemática mais vivo, mais dinâmico e extremamente significativo para o aluno. Um outro aspecto importante na prática educativa fazendo uso do Método da Modelagem, é a oportunidade da integração da matemática com outras áreas como Geografia, Ciência, Português e História. (BURAK, 1992, p.93-94).

3.3.2 Papel do professor na Modelagem Matemática

Cabe ao professor que tem o papel de mediar o processo ensino-aprendizagem, promover a interação com e entre os alunos, das aplicações e construção de novos conceitos que são favorecidos através da assimilação e dos questionamentos acerca do tema e através do Método de Modelagem Matemática:

O papel do professor, no método da modelagem, assume características diferentes do papel do professor na forma tradicional de ensino. Nessa proposta, o professor tem o papel de mediador da relação ensino-aprendizagem isto é, orientador do trabalho, tirando as dúvidas, colocando novos pontos de vista com relações ao problema tratado e outros aspectos que permitam aos alunos pensarem sobre o assunto. (BURAK,1992, p. 292 -293).

O professor não tem a necessidade de saber tudo a respeito do tema trabalhado, pois muitas vezes as questões para resolver os problemas só podem ser respondidas por outra pessoa que é da área do tema de interesse. Portanto, a Modelagem serve para a construção de conhecimento do aluno e do professor e, também, para ressignificar os conhecimentos prévios de ambos.

3.3.3 Etapas da Modelagem Matemática

- Etapa 1: Escolha do tema

O processo de Modelagem tem início com a escolha de um tema, a partir de sugestões levantadas pelos próprios participantes/alunos. Os participantes formam grupos de acordo com o interesse por determinado tema. A escolha dos temas deve ser feita preferencialmente pelos alunos, pois os mesmos se sentirão mais responsáveis com as atividades por estarem trabalhando com algo que eles escolheram.

No início de um trabalho com Modelagem o professor pode ter a preferência de trabalhar com um único tema para turma toda, mesmo assim deve-se formar os grupos de alunos e cada um trabalhar com um problema decorrente do tema. A medida que o professor vai ganhando experiência e confiança em trabalhar com Modelagem é possível trabalhar com 4 ou 5 temas.

- Etapa 2: Fase exploratória

Após a definição dos temas e dos grupos, tem início a fase exploratória que tem a finalidade fazer os alunos adquirirem melhor conhecimento sobre o assunto e possibilitar a seleção de aspectos que serão mais sistematicamente investigados pelo grupo. Esta fase consiste em um contato mais estreito entre os membros de cada grupo com o tema escolhido. A fase exploratória pode consistir de visitas, coletas de informações, esclarecimentos e um maior aprofundamento sobre o tema eleito.

Esta fase é importante, pois propicia o levantamento dos elementos necessários para delineamento do problema, ou do interesse, para possibilitar uma investigação mais sistemática e concisa com a natureza do tema.

- Etapa 3: Formulação do problema ou especificação do interesse

Após a fase exploratória, os grupos começam a discutir os dados obtidos e os aspectos que mais chamaram a atenção do grupo para a formulação do problema, dos problemas ou definição dos interesses:

Frequentemente e simultaneamente a etapa de identificação do problema, tem início o processo de separar aspectos essenciais, com o objetivo de simplificar o problema que, em geral, é complexo, por envolver muitos aspectos, alguns relevantes, outros, porém, insignificantes. (BURAK, 1992, p.65).

Um problema deve, inicialmente, ser formulado em linguagem corrente ou natural. Para a formulação do problema exige-se certa objetividade da situação a ser trabalhada que deve ser adquirida, grande parte, na fase exploratória e pela leitura de material específico da área de interesse do tema/problema, pois o problema deve ser claro a todos os participantes do grupo.

- Etapa 4: Construção do Modelo (Equacionamento do Problema)

Uma formulação clara e concisa do problema permite a eliminação de aspectos não relevantes ao problema ou interesse em questão, ou seja, nem todas as informações coletadas na etapa 2 (fase exploratória) podem ser usadas

pelos participantes. Ao traduzir o problema em linguagem matemática e as relações estabelecidas entre as variáveis do problema estabelecem o modelo:

O modelo deve explicar, de forma satisfatória, um fenômeno estudado. O grau de exigência do aspecto em estudo indicará a necessidade de maior ou menor refinamento no modelo estabelecido. (BURAK, 1992, p. 185).

A construção do modelo é uma fase muito importante do processo, pois pode envolver criatividade, habilidade, aplicação ou construção de novos conceitos matemáticos e análise das variáveis envolvidas. Também o grupo deve ser criterioso ao selecionar as variáveis, pois se constitui uma tarefa importante na fase de construção do modelo. Outro fator fundamental é a forma de relacionar essas variáveis, como o autor explica:

Na construção do modelo, o potencial matemático, a linguagem, a forma de estabelecer a relação, ou as relações entre as variáveis, assumem caráter fundamental para entender as expectativas da finalidade proposta. (BURAK, 1992, p.196).

Situações extremamente ricas são proporcionadas durante a construção de modelos. Por consequência, cada indivíduo ou grupo envolvido viverá a experiência de refletir, conjecturar, experimentar e refutar suas ideias. Esses modelos não necessariamente apenas equações, podem ser maquetes, plantas baixas e gráficos como BURAK (1992) explica:

Um modelo matemático é construído geralmente sob a forma de uma equação, inequação, sistema de equações ou inequações. Contudo, em alguns casos, o modelo pode ser simplesmente um gráfico, a planta baixa de uma casa ou um mapa. (BURAK, 1992, p.111)

- Etapa 5: Validação do Modelo

A validação consiste em checar se o modelo está de acordo com a situação inicial e verificar se ele apresenta características gerais da situação inicial. (BURAK,1992). Validado para um fim determinado, o modelo pode ser estendido a uma série de situações análogas.

- Etapa 6: Reformulação do Modelo

Esta etapa consiste de um ajuste caso o modelo criado na etapa 4 (Construção do Modelo) não se adeque, ou seja, não resolva o problema inicial. Quando na etapa 5 (Validação do Modelo), se constatar que o modelo é ineficaz para representar características gerais da situação inicial tem-se a necessidade de reformular o modelo inicialmente construído. Essa reorganização dará origem a um novo modelo, que deverá passar pela etapa de validação novamente.

- Etapa 7: Interpretação dos resultados

O resultado obtido pela resolução do modelo não deve ser aceito de imediato, por sua vez, ele deve necessitar da interpretação do resultado, pois, muitas vezes o resultado satisfaz a sentença matemática, mas não satisfaz o problema:

A análise e a interpretação dos resultados obtidos se reveste de grande importância no processo de Modelagem, uma vez que a não observância dessa etapa pode conduzir a decisões errôneas, em consequência, as ações podem ser ineficazes. (BURAK, 1992, p. 189).

3.4 ANÁLISE DAS SEMELHANÇAS E DIFERENÇAS ENTRE OS AUTORES

3.4.1 Semelhanças

- Trabalhar problemas de outra área

Os três autores concordam na definição de Modelagem, que consiste em trazer situações reais do cotidiano, para se trabalhar com a matemática, que, para tal, requer buscar conhecimento em outras áreas além da matemática.

- Trabalhar em grupos

Os autores reafirmam a importância de se trabalhar em grupos, pois isso proporciona discussões e reflexões acerca dos temas para se chegar a uma solução mais adequada ao problema.

- Professor mediador, monitor ou em conjunto com os alunos do ensino-aprendizagem.

O papel do professor nas atividades de Modelagem Matemática para os autores é diferente do tradicional, onde o professor explica o conteúdo e os alunos reproduzem. O professor tem um papel mais reservado a "guiar" os alunos a chegar na resposta do tema, ou seja, monitorar e mediar os trabalhos dos alunos em conjunto com eles.

- Formular problemas para resolver matematicamente

Todos os autores concordam que para a Modelagem os problemas acerca dos temas são fundamentais. São os problemas que vão mostrar o rumo que os trabalhos vão seguir, esses problemas devem ser respondidos através da matemática.

- Papel ativo dos alunos

Para os autores a modelagem proporciona aos alunos um papel mais ativo, onde a matemática é aprendida de uma forma mais interativa com o cotidiano fazendo o aluno observar, refletir e questionar o seu redor.

3.4.2 Diferenças

- Matemática Aplicada x Educação Matemática (Modelagem x Modelação)

Os autores, BARBOSA (2001) e BASSANEZI (2002), discorrem em seus trabalhos em qual campo da matemática a Modelagem está inserida. Para BASSANEZI (2002) a Modelagem Matemática se dá no campo da Matemática Aplicada e quando é trabalhada no campo da Educação Matemática recebe o nome de Modelação Matemática.

Para BARBOSA (2001) a Modelagem deve ser tratada no âmbito da Educação Matemática por ser voltada para alunos e professores, tal qual é dado um aspecto pedagógico e não deve receber nenhuma nomenclatura diferente de

Modelagem, pois o nome Modelação não substituiu e o termo Modelagem é bem aceito entre a comunidade desta prática. Por outro lado, BURAK (1992), classifica a Modelagem Matemática como pertencente ao campo da Matemática Aplicada, mas não entra em detalhes desse tópico.

- Modelo x Não Modelo

BASSANEZI (2002) o Modelo é a chave do processo de Modelagem, ou seja, o objetivo é chegar a um Modelo Matemático que não tenha sido criado ainda. Para BURAK (1992), também é necessário se chegar à um Modelo Matemático, seja ele uma planta baixa, um gráfico, uma maquete ou à uma equação matemática. Em contrapartida, BARBOSA (2001) salienta que os alunos não precisam construir um Modelo Matemático, mas sim usar modelos já prontos desde que estes sirvam de reflexão e atendam a resolução do problema.

- Uma forma de trabalho x Três formas de Trabalho

Tanto BURAK (1992) quanto BASSANEZI (2002) entendem as etapas de Modelagem de maneira semelhante, pois ambos começam com os alunos escolhendo o tema, posteriormente é feita a pesquisa e para finalizar, o Modelo. Ambos apresentam apenas uma forma de trabalhar com a Modelagem. BARBOSA (2001) entende que a Modelagem pode ser trabalhada de três formas, fazendo a separação em três casos, no qual o terceiro caso se assemelha com a maneira que os outros autores entendem as etapas de Modelagem.

- Escolha do tema

Para BURAK (1992) e BASSANEZI (2002) os alunos devem escolher o tema ou os temas a serem trabalhados para que se sintam responsáveis e motivados no processo de Modelagem, já para BARBOSA (2001) os temas podem ser escolhidos pelo professor, pelos alunos ou por ambos.

- Ênfase nas reflexões x Ênfase no Modelo x Ênfase no processo

Para BARBOSA (2001) a ênfase em se trabalhar com Modelagem está na reflexão dos alunos sobre a matemática usada e sobre as situações do cotidiano que cercam o problema durante o processo de Modelagem. Para BASSANEZI (2002) a ênfase está na construção de um Modelo Matemático e para BURAK (1992) a ênfase está no processo de Modelagem, ou seja, todas as etapas tem a mesma porcentagem de importância, pois cada uma delas é relevante tanto para aprender matemática quanto para a resolução do problema.

4 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Cada problema que resolvi tornou-se uma regra que, depois, serviu para resolver outros problemas. (René Descartes)

Neste capítulo será apresentado o estudo da pesquisa bibliográfica dos autores George Polya, Lourdes de La Rosa Onuchic e Luiz Roberto Dante e posteriormente será feita a análise das semelhanças e diferenças no ponto de vista dos três autores.

4.1 ANÁLISE: GEORGE POLYA

Foi professor de matemática de 1914 a 1940 na ETH Zürich na Suíça e de 1940 a 1953 na Universidade de Stanford. Ele permaneceu professor emérito de Stanford para o resto de sua vida e carreira. Ele trabalhou em uma variedade de tópicos matemáticos, incluindo séries, teoria dos números, análise matemática, geometria, álgebra, combinatória e probabilidade. Mais tarde em sua carreira, ele passou um esforço considerável para identificar métodos sistemáticos de resolução de problemas para novas descobertas e invenções em matemática para estudantes, professores e pesquisadores. (Fonte: Wikipédia)

4.1.1 O que é um problema para George Polya?

O autor não define o que é um problema. O autor se foca em trabalhar na forma de resolver os problemas e com isso nos dá indícios do que é um problema.

A definição de um problema está na pessoa que vai resolvê-lo. Se este chamar sua atenção, despertar sua curiosidade e criatividade então a motivação para resolvê-lo estará presente. (POLYA, 1995)

O autor classifica os problemas matemáticos em dois tipos: problemas de determinação e problemas de demonstração. Estes vão ser determinados pelos seus objetivos ao resolver o problema.

Os problemas de determinação se interessam pela incógnita como POLYA (1995, p. 128) apresenta, "O objetivo de um "problema de determinação" é encontrar um certo objeto, a incógnita do problema". Essa incógnita depende do contexto do problema como o autor nos explica:

Os "problemas de determinação" podem ser teóricos ou práticos, abstratos ou concretos, problemas sérios ou simples enigmas. Podemos procurar determinar incógnitas de todos os tipos; podemos tentar encontrar, calcular, obter, produzir traçar, construir todos os tipos imagináveis de objetos. No problema da novela policial, a incógnita é um assassino. No problema do xadrez a incógnita é a jogada do enxadrista. Em certos problemas de Álgebra elementar, a incógnita é um número. Num problema de traçado geométrico, a incógnita é uma figura. (POLYA, 1995, p. 124)

Os problemas de demonstração se preocupam em demonstrar se a afirmação é verdadeira ou não. Segundo POLYA (1995, p. 128) "O objetivo de um "problema de demonstração" é mostrar conclusivamente que certa afirmativa, claramente enunciada, é verdadeira ou, então, que é falsa". O autor nos exemplifica alguns problemas de demonstração:

Uma testemunha afirma que o acusado passou em casa toda uma certa noite. O juiz tem de verificar se essa afirmativa é verdadeira ou não e, além disso, tem de apresentar razões tão boas quanto possíveis para a sua conclusão. Assim, o juiz tem um "problema de demonstração". Outro problema deste tipo seria "demonstrar o teorema de Pitágoras". (POLYA, 1995, p. 125).

O autor também faz a distinção entre os problemas literais e os numéricos, no qual o primeiro se sobrepõe ao segundo por sua maior gama de possibilidades:

Os alunos devem, porém, aprender bem cedo que os problemas "literais" apresentam uma grande vantagem sobre os problemas puramente "numéricos": se o problema for literal ele se prestará a diversas verificações, as quais não podem ser aplicadas a um problema numérico. (POLYA, 1995, p. 11)

Incontestavelmente existem os problemas bons e os não tão bons. Para se ter um problema bom é necessário que este seja motivador: Segundo Polya (1995) os problemas bons não são encontrados facilmente, mas quando se

encontra e se resolve um problema bom é deveras importante continuar buscando por problemas bons.

4.1.2 Papel do professor na Resolução de Problemas

O papel do professor na Resolução de Problemas é demasiadamente importante. Será o professor que motivará o aluno a resolver os problemas propostos e desenvolver suas habilidades para, cada vez mais, resolver de forma autônoma os mesmos.

Polya (1995) resalta a importância do professor ocupar o tempo das suas aulas com problemas e não apenas exercícios de fixação, pois se o aluno desenvolve as competências necessárias para resolver um problema, ao invés da aversão, manifestará o prazer de raciocinar.

A motivação para resolver problemas não surge ao aluno por pura inspiração, mas sim pelo papel que o professor desempenha ao apresentar o desafio de resolver o problema, como o autor expõe:

O professor que deseja desenvolver nos estudantes a capacidade de resolver problemas deve inculcar em suas mentes algum interesse por problemas e proporcionar-lhes muitas oportunidades de imitar e de praticar. [...]. Além disso, quando o professor resolve um problema em aula, deve dramatizar um pouco as suas ideias e fazer a si próprio as mesmas indagações que utiliza para ajudar os alunos. (POLYA, 1995, p. 3).

Motivar os alunos a resolverem problemas é algo fundamental, mas não suficiente. É necessário que o professor auxilie os alunos com indagações até que este auxílio não seja mais necessário. O autor então nos diz que esses são os objetivos do professor que propõe a Resolução de Problemas aos alunos:

Há dois objetivos que o professor pode ter em vista ao dirigir a seus alunos uma indagação ou uma sugestão de lista: Primeiro, auxiliá-lo a resolver o problema que lhe é apresentado; segundo, desenvolver no estudante a capacidade de resolver futuros problemas por si próprio. (POLYA, 1995, p. 2).

Além de despertar o interesse dos alunos em resolver problemas o professor deve dispor tempo aos alunos para que se dediquem e reflitam sobre o problema, a fim de chegar a uma solução para o mesmo. (POLYA, 1995)

Resaltando, mais uma vez, que o papel do professor requer equilíbrio. A sutileza em auxiliar o aluno não pode pecar pela falta e nem pelo excesso de ajuda:

O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. (POLYA, 1995, P. 1)

O professor precisa saber como questionar o aluno, não dar uma resposta, mas fazer com que o aluno reflita sobre o questionamento e avance na resolução do problema. Se esses questionamentos não existirem ou não forem suficientes para o estudante, o desinteresse pela resolução desperta no aluno:

O professor deve, evidentemente, tentar encontrar algumas questões adequadas ou sugestão que possam auxiliar os alunos, quando estes não conseguirem ir adiante, porque aí há risco de que o estudante se canse e abandone o problema ou perca o interesse e cometa erros tolos como resultado da indiferença. (POLYA, 1995, p. 161).

Para alcançar este equilíbrio o professor terá que se colocar no lugar do estudante, a fim de que este consiga avançar e tirar suas próprias conclusões como aponta POLYA (1995, p.1) "O professor deve colocar-se no lugar do aluno, perceber o ponto de vista deste, procurar compreender o que se passa em sua cabeça e fazer uma pergunta ou indicar um passo que poderia ter ocorrido ao próprio estudante".

Trabalhar com Resolução de Problemas é uma tarefa difícil e demasiadamente exigente do profissional como coloca POLYA (1995, p.1) "Um dos mais importantes deveres do professor é o de auxiliar os seus alunos, o que não é fácil, pois exige tempo, prática, dedicação e princípios firmes".

Para o professor conseguir atingir seus objetivos com a Resolução de Problemas deve começar com precaução, introduzir algumas tentativas e descobertas gradualmente a fim de identificar o panorama geral de como os alunos recebem e como desenvolver nas aulas essa abordagem metodológica. (POLYA, 1995).

4.1.3 Como se deve resolver um problema segundo Geoge Polya?

Para o autor quatro etapas são necessárias para resolver um problema que são: entender, criar um plano, executar o plano e verificar a solução:

Primeiro, temos de compreender o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a idéia da resolução, para estabelecermos um plano. Terceiro, executamos o nosso plano. Quarto, fazemos um retrospecto da resolução completa, revendo-a e discutindo-a. (POLYA, 1995, p. 3-4).

Não existe um segredo de como resolver problemas, mas quanto mais trabalhamos com Resolução de Problemas mais aprendemos a resolver os problemas. Segundo Polya (1995, p.3) "Ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os".

A seguir será apresentada cada uma das etapas que o autor julga necessário para a resolução de problemas matemáticos.

Primeiro: Compreensão do problema.

Para resolver um problema é preciso entender o que o problema propõe, se esta compreensão não acontecer as próximas etapas ficarão comprometidas. Ao ler o problema o aluno tem que conseguir identificar quais os dados que precisa para resolver e sentir-se motivado a buscar a solução do problema:

O aluno precisa compreender o problema, mas não só isto: deve também desejar resolvê-lo. Se lhe faltar compreensão e interesse, isto nem sempre será culpa sua. O problema deve ser bem escolhido, nem muito difícil nem muito fácil, natural e interessante, e um certo tempo deve ser dedicado à sua apresentação natural e interessante. (POLYA, 1995, p. 4).

Não entender o problema e querer resolvê-lo mesmo assim é um hábito comum de muitos alunos. Como é natural, o professor não pode esperar que todos os alunos procedam igualmente a este respeito. Pelo contrário, muitos estudantes têm o tolo e mau hábito de começar a mexer nos detalhes antes de terem compreendido o problema como um todo. (POLYA, 1995, p. 41). Além de atrapalhar nas próximas etapas pode levar o aluno a se desmotivar por não conseguir encontrar a solução correta.

Segundo: Estabelecimento de um plano

Posteriormente a leitura e entendimento do problema o aluno deve traçar um plano de resolução. É necessário encontrar a conexão entre os dados do problema e o que se quer resolver (incógnita):

Temos um plano quando conhecemos, pelo menos de um modo geral, quais contas, os cálculos ou os desenhos que precisamos executar para obter a incógnita. Um caminho que vai desde a compreensão do problema até o estabelecimento de um plano, pode ser longo e tortuoso. Realmente, o principal feito na resolução de um problema é a concepção da idéia de um plano. (POLYA, 1995, p. 5).

Obter um plano de como resolver um problema não é, na maioria das vezes, uma tarefa fácil. Um bom plano necessita de uma boa base para "nascer". Para se construir uma boa base para o plano devemos ter conhecimentos prévios que nos ajudem a discernir sobre o melhor caminho a seguir, como o autor ressalta:

Sabemos, naturalmente, que é difícil ter uma boa ideia se pouco conhecemos do assunto e que é impossível tê-la se dele nada soubermos. As boas ideias são baseadas na experiência passada e em conhecimentos previamente adquiridos. (POLYA, 1995, p. 6).

O plano de resolução do problema proposto pode se ancorar em problemas auxiliares que ajudem a encontrar conexões entre os caminhos a seguir. Para POLYA, (1995, p. 6) este é recurso indispensável, "Os materiais indispensáveis à resolução de um problema matemático são certos itens relevantes do conhecimento matemático já adquirido, tais como problemas anteriormente resolvidos e teoremas anteriormente demonstrados".

Mesmo conseguindo encontrar um problema correlato ao que se está resolvendo, mas se este não nos oferece uma forma de entender o caminho que se deve seguir devemos tentar resolver o problema correlato e analisar a sua solução:

Se não conhecermos nenhum problema semelhante a este e que já tenha sido antes resolvido, podemos encontrar sérias dificuldades na nossa tarefa. Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver um problema correlato. (POLYA, 1995, p. 78).

Terceiro: Execução do Plano

Ter um plano não garante que ele funcionará, mas se a etapa anterior for feita cuidadosamente esta etapa não terá muita dificuldade como o autor explica:

Conceber um plano, a ideia da resolução, não é fácil. Para conseguir isto é preciso, além de conhecimentos anteriores, de bons hábitos mentais e de concentração no objetivo, mais uma coisa: boa sorte. Executar o plano é muito mais fácil; paciência é o de que mais se precisa. (POLYA, 1995, P. 8).

Nessa etapa também é necessária uma notação adequada que será importante tanto para não cometer erros, quanto para entender o problema e para a identificação se está percorrendo o caminho correto, sendo esta uma importante ferramenta da resolução. O autor ressalta a indispensabilidade da verificação pacientemente durante cada passo da resolução do problema, até não restar dúvidas ou erros. (POLYA, 1995).

Quarto: Retrospecto

Quando o aluno chega a esta etapa ele já cumpriu o seu plano, encontrou a solução do mesmo e verificou todos os passos anteriores. O autor nos diz que esta etapa, o retrospecto, aprimora os conhecimentos e a capacidade do aluno em resolver problemas:

Se fizerem um retrospecto da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, eles poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas. (POLYA, 1995, p. 10).

O autor explica porque esta etapa é necessária para compreender o problema em si:

Ao fim do nosso trabalho, quando chegamos à resolução, a nossa concepção do problema encontra-se mais completa e mais adequada do que estava no começo, se desejamos passar da concepção inicial para uma mais adequada, melhor adaptada, devemos tentar diversos lados e encarar o problema sob diferentes pontos de vista. (POLYA, 1995, p. 158)

Logo, ao seguir as etapas descritas anteriormente, é possível analisar o problema proposto e ter uma visão da construção do problema e sua solução, que não necessariamente é única, proporcionando uma visão mais ampla de todas as situações relacionadas ao problema e sua resolução.

4.2 ANÁLISE: LOURDES DE LA ROSA ONUCHIC

Lourdes de La Rosa Onuchic possui graduação em Bacharelado e Licenciatura em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP/SP (1954), mestrado em Matemática pela Escola de Engenharia de São Carlos-USP (1971) e doutorado em Matemática pelo Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos-USP (1978). Atualmente é professora voluntária da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: resolução de problemas, educação matemática, metodologia de ensino, formação de professores e ensino-aprendizagem-avaliação de matemática. (Fonte: Currículo Lattes).

4.2.1 O que é um problema para Lourdes de La Rosa Onuchic?

Conforme diz Onuchic (1999, p. 215),

Estabelecemos que problema é tudo aquilo que não se sabe fazer mas que se está interessado em resolver, que o problema passa a ser um ponto de partida e que, através da resolução do problema, os professores devem fazer conexão entre os diferentes ramos da matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos.

Resolver problemas requer empenho dos alunos e do professor, os alunos por saírem da zona de conforto das abordagens passivas e o professor por buscar problemas motivadores, trabalhando a reflexão nos alunos. A tendência é caracterizar a Resolução de Problemas olhando os alunos como sujeitos ativos durante as atividades, com problemas bem elaborados e sua resolução compreendendo em várias fases de abstração. (ONUCHIC, 1999)

A autora explica como a Resolução de Problemas abrange os alunos em diferentes habilidades essenciais para o ensino e compreensão da matemática:

Em nossa visão a compreensão de matemática, por parte dos alunos envolve a ideia de que entender é essencialmente relacionar. Esta posição baseia-se na observação de que a compreensão aumenta quando: o aluno é capaz de relacionar uma determinada ideia

matemática a um grande número ou a uma variedade de contextos; o aluno consegue relacionar um dado problema a um grande número de ideias matemáticas implícitas nele; o aluno consegue construir relações entre as várias ideias matemáticas contidas num problema. As indicações de que um estudante entende, interpreta mal ou não entende ideias matemáticas específicas surgem, com frequência, quando ele resolve um problema. (OUNUCHIC, 1999, p.208).

A classificação de problemas não ganha destaque no trabalho, pois o que diferencia os problemas são suas maneiras de resolvê-los, mas essencialmente todos são problemas.

É verdade que, entre os diversos autores e trabalhos já publicados, podem ser encontrados muitos conceitos de problema adjetivados, refletindo qualidades específicas que deles se espera: problemas de fixação, exercícios, problemas abertos, problemas fechados, problemas padrão, problemas rotineiros e não rotineiros, quebra-cabeças, desafios, entre outros. Na realidade, são todos problemas, e os adjetivos expressam diferentes tipos de problema que admitem, para sua resolução, diferentes estratégias. (OUNUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 81)

4.2.2 Papel do professor na Resolução de Problemas

O papel do professor na Resolução de Problemas é para OUNUCHIC (1999),

Dentro desse trabalho, o papel do professor muda de comunicador de conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador e incentivador da aprendizagem. O professor lança questões desafiadoras e ajuda os alunos a se apoiarem, uns nos outros, para atravessar as dificuldades. O professor faz a intermediação, leva os alunos a pensar, espera que eles pensem, dá tempo para isso, acompanha suas explorações e resolve, quando necessário, problemas secundários. (p.216).

O professor que utiliza essa abordagem de ensino vai além de ensinar matemática para os alunos, ensina também a sua aplicabilidade em outras situações matemáticas ou não:

Ao ensinar resolver problemas, o professor se concentra na maneira como a matemática é ensinada e o que dela pode ser aplicada na solução de problemas rotineiros e não rotineiros. Embora a aquisição de conhecimentos matemáticos seja importante, a proposta essencial para aprender matemática é ser capaz de usá-la. Em consequência disso, dá-se aos alunos muitos exemplos de conceitos e de estruturas matemáticas sobre aquilo que estão estudando e muitas oportunidades

de aplicar essa matemática ao resolver problemas. (OUNUCHIC,1999, p.206 -207).

Quanto mais o aluno trabalha com Resolução de Problemas mais desenvolve sua autonomia nas atividades,

Quando os professores ensinam matemática através da resolução de problemas, eles estão dando a seus alunos um meio poderoso e muito importante de desenvolver sua própria compreensão. À medida que a compreensão dos alunos se torna mais profunda e mais rica, sua habilidade em usar matemática para resolver problemas aumenta consideravelmente. (OUNUCHIC,1999, p.208).

4.2.3 Como se deve resolver um problema segundo Lourdes de La Rosa Onuchic?

Em muitos conceitos a prática e o entendimento das situações envolvidas requerem práticas para se aprender e entender o que está sendo ensinado, com a Resolução de Problemas não é diferente. Segundo Onuchic (1999, p. 210-211), "Na abordagem de Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino, o aluno tanto aprende matemática resolvendo problemas como aprende matemática para resolver problemas".

- Preparação do problema:

A preparação do problema é o passo norteador da Resolução de problemas:

Selecionar um problema, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não tenha, ainda, sido trabalhado em sala de aula. (OUNUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 83).

- Leitura individual

Deve se entregar o problema, uma cópia, para cada aluno, para que este faça a leitura individual do problema.

- Formar grupos - Leitura da atividade em grupo

A autora nos explica sobre a importância de trabalhar em grupos,

É preciso que os estudantes experimentem este processo cooperativo e que se lhes dê a oportunidade de aprender uns com os outros. Sentimos que muito da aprendizagem em sala de aula será feita no contexto de pequenos grupos. (ONUChIC, p.216).

Formados os grupos os alunos devem fazer a leitura do problema novamente, mas agora em conjunto, a fim de compreender claramente o texto do problema, ficando alguma dúvida sobre palavras desconhecidas o professor deve intervir e se necessário os alunos podem utilizar um dicionário.

- Resolução do problema

Entendido o problema, discutido as dúvidas dos enunciados, os alunos, cada um no seu grupo, começará a resolver o problema proposto e construir novos conceitos:

A partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como co-construtores da *matemática nova* que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula. (ONUChIC; ALLEVATO, 2011, p. 83-84).

- Observar e incentivar

Esta etapa faz referência ao papel do professor durante a resolução do problema pelos alunos.

Nessa etapa, o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor como mediador leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles. O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias, já conhecidas, necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e ajuda-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias; a fim de possibilitar a continuação do trabalho. (ONUChIC; ALLEVATO, 2011, p. 84).

- Resultado na lousa

Com o trabalho dos alunos terminados, o professor, ou um representante de cada grupo, anotaria na lousa os resultados obtidos pelos diferentes grupos. Anota também os resultados certos, errados e aqueles feitos por caminhos diferentes.

- Plenária

Discute com toda turma os resultados obtidos e cada aluno, cada grupo/aluno, tem a oportunidade de expor suas ideias e seus pontos de vista, defendendo seus caminhos para chegar na resposta apresentada ao problema. A autora destaca que essa é uma importante ferramenta de aprendizagem para os alunos. (ONUCHIC, 1999).

- Análise dos resultados

Aponta as dificuldades e divergências encontradas pelos alunos e trabalha com esses pontos até resolvê-los.

- Consenso

Posteriormente a análise feita, com a devida retirada das dúvidas, busca-se um consenso sobre o resultado pretendido.

- Formalização

De acordo com ONUCHIC (1999),

Num trabalho conjunto de professor e alunos, com o professor dirigindo o trabalho é feita uma síntese do que se objetivava aprender a partir do problema dado. São colocadas as devidas definições, identificadas as propriedades e feitas as demonstrações. É importante destacar, nesse momento, o que de matemática nova se construiu, usando as novas terminologias próprias ao assunto. (p.217).

4.3 ANÁLISE: LUIZ ROBERTO DANTE

Luiz Roberto Dante é livre-docente em Educação Matemática pela Unesp - Rio Claro, SP; doutor em Psicologia da Educação: Ensino da Matemática, pela PUC-SP. Atualmente ministra cursos e palestras sobre aprendizagem e ensino da

Matemática para professores do Ensino Fundamental e Médio e escreve livros didáticos e paradidáticos de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio. (Fonte: Projeto Voaz)

4.3.1 O que é um problema para Luiz Roberto Dante?

Segundo Dante (2009) todos nós sabemos o que é um problema. O problema pode surgir quando queremos obter uma resposta ou solução e temos que pensar em como vamos resolvê-lo. Convém também destacar que problemas não são estáticos, eles dependem de quem está trabalhando com o problema, como Dante (2009, p. 11) explica: "O que é um problema para alguns pode não ser para outros, ou o que é um problema num determinado contexto pode não ser em outro".

A definição de problema para o autor é: "problema é uma situação que um indivíduo ou grupo que ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução". (LESTER, 1982 apud DANTE, 2009, p.12).

Embora existam muitos problemas, nem todos são bons problemas. Para Dante (2009), um bom problema deve ser motivador para o aluno, ou seja, propor um desafio e aguçar a vontade do mesmo em resolvê-lo; devem conter dados reais para os alunos, seja nas informações ou nos valores numéricos; problemas que despertem interesse dos alunos, ou seja, problemas adequados as suas realidades e ao seu cotidiano; problemas que não se fixem nas aplicações diretas e nem que exijam cálculos demasiadamente longos e complicados, os problemas devem propiciar ao aluno reflexão e o florescimento da criatividade.

Classificação dos problemas:

O autor classifica os problemas em quatro categorias.

Problemas-padrão: se assemelham a exercícios de fixação por serem de enunciados simples e diretos. Eles são classificados em problemas-padrão simples e problemas-padrão compostos. O primeiro é resolvido com apenas uma operação e o segundo com pelo menos duas operações matemáticas. O autor explica como identificar e resolver esse tipo de problema:

Sua resolução envolve a aplicação direta de um ou mais algoritmos anteriormente aprendidos e não exige nenhuma estratégia. A solução do problema já está contida no próprio enunciado, e a tarefa básica é transformar a linguagem usual em linguagem matemática, identificando as operações ou algoritmos necessários para resolvê-los. (DANTE, 2009, p.25).

Problemas-processo ou heurísticos: São problemas no qual não se tem uma solução imediata, requerem mais reflexão e atenção por parte do aluno. Sobre estes problemas o autor comenta:

São problemas cuja solução geral envolve operações que não estão contidas explicitamente no enunciado. Em geral, não podem ser traduzidas diretamente para a linguagem matemática, nem resolvidos pela aplicação automática de algoritmos, pois exigem do aluno um tempo para pensar e arquitetar um plano de ação, uma estratégia que poderá levá-lo à solução. Por isso, tornam-se mais interessantes do que os problemas-padrão. (DANTE, 2009, p.25).

Problemas de aplicação: São aqueles problemas com conexões de situações cotidianas entre a matemática. Também recebem o nome de situações problemas contextualizadas. O autor explica como são os problemas de aplicação:

Por meio de conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos procura-se matematizar uma situação real, organizando os dados em tabelas, traçando gráficos, fazendo operações etc. Em geral, são problemas que exigem pesquisa e levantamento de dados. Podem ser apresentados em forma de projetos a serem desenvolvidos usando conhecimentos e princípios de outras áreas que não a matemática, desde que a resposta se relacione a algo que desperte interesse. (DANTE, 2009, p.28).

Problemas de quebra cabeça: São problemas com desafios. Eles geralmente despertam mais curiosidade dos alunos. Para Dante, problemas de quebra-cabeça:

São problemas que envolvem e desafiam os alunos. Geralmente constituem a chamada matemática recreativa, e sua solução depende, quase sempre, de um golpe de sorte ou da facilidade em perceber algum truque, alguma regularidade, que é a chave da solução. (DANTE, 2009, p.28).

4.3.2 Papel do professor na Resolução de Problemas

Na Resolução de Problemas o papel do professor é manter os alunos pensando e gerando ideias produtivas (DANTE, 2009). O professor deve mostrar

aos alunos que resolver problemas requer o uso de estratégias que podem variar de problema para problema, e que não existe uma fórmula única, logo o aluno deve pensar sobre qual estratégia das disponíveis ajudam resolver o problema proposto.

Trabalhar com Resolução de Problemas pode ser desafiador para o professor, uma vez que difere das práticas comuns usadas na sala de aula como Dante coloca:

Ensinar a resolver problemas é uma tarefa mais difícil do que ensinar conceitos, habilidades e algoritmos matemáticos. Não é um mecanismo direto de ensino, mas uma variedade de processos de pensamento que precisam ser cuidadosamente desenvolvidos pelo aluno com o apoio e incentivo do professor. (DANTE, 2009, p.36).

Ao apresentar um problema motivador, que faça uso de fatos reais e precise de aspirações para chegar a uma resposta, o professor deve dar um tempo para os alunos lerem e entenderem o problema. Tempo que também deve ser oferecido aos alunos para trabalharem no problema explorando e descobrindo as possibilidades de solução.

Os alunos devem ficar entusiasmados, sejam pelas questões colocadas pelo professor ou pelas reflexões decorrentes de se trabalhar com o problema, como o autor expõe:

Os alunos devem ser encorajados a fazer perguntas ao professor e entre eles mesmos, quando estão trabalhando em pequenos grupos. Assim, eles vão esclarecendo os pontos fundamentais e destacando as informações importantes do problema, ou seja, vão compreendendo melhor o que o problema pede e que dados e condições possuem para resolvê-lo. (DANTE, 2009, p.37).

Mas o autor também resalta a importância do professor não dar as respostas do problema aos alunos: "O professor não deve dar respostas diretas a essas perguntas, pois, do contrário, o problema já estará resolvido e a criança não pensará mais nela, passando a executar as contas rápidas e automaticamente". (DANTE, 2009, p.57)

4.3.3 Como se deve resolver um problema segundo Luiz Roberto Dante?

Dante (2009) expõe que:

O processo de resolução de um problema é algo mais complexo e rico, que não se limita a seguir instruções passo a passo que levarão à

solução, como se fosse um algoritmo. Entretanto, de modo geral elas ajudam o solucionador a se orientar durante o processo. (p.29).

O autor descreve as mesmas etapas para resolver problemas que o George Polya (1995) em seu trabalho.

Primeira etapa: compreender o problema.

Para entender um problema é preciso compreender o que se pede, qual pergunta que se procura resolver, quais dados o problema nos dá, se o problema nos dá uma ideia de resposta e se é possível reescrever o problema usando figuras, equações, diagramas, entre outros.

Segunda etapa: Elaborar um plano

A elaboração de um plano requer uma estratégia de como será resolvido o plano. Algumas ideias do plano podem surgir de problemas resolvidos anteriormente, ao tentar separar o problema por partes e se tem mais de uma forma de chegar a solução. O autor explica essa etapa da seguinte forma:

Nesta etapa, elaboramos um plano de ação para resolver o problema, fazendo a conexão entre os dados do problema e o que ele pede. Muitas vezes, chegamos a uma sentença matemática, isto é, a uma linguagem matemática que parte da linguagem usual. (DANTE, 2009, p.30).

Terceira etapa: executar o plano

Para Dante (2009) nesta etapa é necessária a execução do plano anteriormente elaborado, sempre verificando os passos dados. Fazer os cálculos e as estratégias criadas corretamente irão corroborar para a chegada em uma, e/ou mais, resposta do problema.

O plano elaborado na etapa anterior pode não funcionar para resolver o problema, pois nem todos os planos estão imunes de falhas. Porém, quando isso acontecer, faz-se necessária a discussão de outros planos. Vale salientar que não se deve fazer da Resolução de Problemas apenas uma redução ao caminho correto para solução, pois é sabido que a aprendizagem também se dá por meio dos erros.

Quarta etapa: Retrospecto ou verificação.

Nesta etapa os alunos devem entender e conseguir explicar o porquê a resposta encontrada estar correta, pois ao justificar como ocorreu a solução o aluno demonstra se realmente entendeu o que fez.

Dante explica essa etapa e sua importância na resolução do problema:

Nesta etapa, analisamos a solução obtida e fazemos a verificação do resultado. O retrospecto, repassando todo o problema, faz com que o aluno reveja como pensou inicialmente, como encaminhou uma estratégia de solução, como efetuou os cálculos, enfim, todo o caminho trilhado para obter a solução. Esse processo cuidadoso é um excelente exercício de aprendizagem e serve também para detectar e corrigir possíveis enganos. (DANTE, 2009, p. 34).

4.4 ANÁLISE DAS SEMELHANÇAS E DIFERENÇAS ENTRE OS AUTORES

4.4.1 Semelhanças

- Definição de Problema

A definição de problema pelos autores é semelhante. O problema é algo que desperta curiosidade no indivíduo, que o mesmo se motivará a resolver.

A definição de um problema está na pessoa que vai resolver o problema proposto. Se este chamar sua atenção, despertar sua curiosidade e criatividade então a motivação para resolvê-lo estará presente POLYA (1995).

Para Onuchic (1999, p. 215) "problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver" e segundo Dante (2009, p. 12) "problema é uma situação que um indivíduo ou grupo precisa resolver".

- Papel do professor

Os três autores destacam a importância de o professor motivar os alunos a resolver o problema proposto, seja fazendo indagações que ajudem na reflexão, mas nunca dando respostas e sim ajudando os alunos a construir suas próprias reflexões sobre os passos da resolução. À medida que os alunos vão trabalhando com resolução de problemas, a autonomia dos mesmos vai avançando e o professor irá participar menos.

4.4.2 Diferenças

- Classificação dos problemas

Polya (1995) classifica os problemas como: problemas de determinação e problemas de demonstração, também distingue os problemas literais e numéricos, sendo que os literais têm um campo mais vasto de resoluções que os numéricos e problemas bons e ruins nos quais os bons são os que motivam o leitor a resolvê-lo.

Já para Onuchic e Allevato (2011) não inferem destaque à classificação de problemas, alegando que todos são problemas e que diferem apenas no modo de resolução. Também Onuchic (1999) não classifica problemas bons ou ruins.

Dante (2009) classifica os problemas em quatro categorias: problemas-padrão, problemas-processo ou heurísticos, problemas de aplicação e problemas de quebra cabeça. O autor também diferencia problemas bons e ruins, onde a definição de problema bom é a mesma que para Polya (1995).

- Resolver um problema

Para Polya (1995) e Dante (2009) quatro etapas são necessárias para resolver um problema: Compreender o problema, criar um plano, executar o plano e verificar a solução. Estes autores listam as etapas como um passo a passo para resolver um problema, mesmo não limitando a Resolução de Problemas à uma "receita de como fazer". Os problemas são apresentados na maioria das vezes como uma forma individual de trabalho.

Para Onuchic (1999; 2011) as etapas para resolver um problema são: preparação do problema, leitura individual, formação de grupos - leitura da atividade em grupo, resolução do problema, observação e incentivo, resultado na lousa, plenária, análise dos resultados, consenso e formalização. A autora apresenta a Resolução de Problemas como uma forma coletiva de trabalho e esta sofreu mudanças ao longo dos anos (desde 1999 à 2011) conforme decorrências de estudos realizados em cima desta abordagem de ensino na sala de aula.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A realização desse estudo foi importante porque permitiu aprofundamento nas metodologias estudadas, conhecer os trabalhos dos autores pesquisados e estabelecer uma comparação entre eles.

Determinados a colaborar com as reflexões das Metodologias de Ensino na Educação Matemática, foi apresentado nesse estudo, um breve resumo das concepções dos autores sobre esses temas. Com isso, foram analisados 681 trabalhos de dois eventos importantes de Educação Matemática com o objetivo de encontrar os três autores mais citados.

Com os autores escolhidos, a busca pelos trabalhos analisados se afinou a livros e a teses de doutorado dos mesmos por se tratarem de trabalhos com autoria sem parceria e que apresentaram as principais e mais concisas ideias acerca dos temas. Não foram encontradas obras do tema de Resolução de Problemas da autora Lourdes de La Rosa Onuchic sem parceria com outros autores, a análise desta autora se deu por meio de um capítulo de livro em que a autora escreveu sem parceria e de um artigo em parceria com outra autora.

Além dos trabalhos apresentados aqui, outros trabalhos dos autores foram estudados, mas nenhuma mudança significativa ocorreu, observando que as definições e princípios iniciais permaneceram ao decorrer dos anos.

Os autores do tema Modelagem Matemática se ocupam cada um de uma fase de ensino diferente. Mesmo cada autor tendo sua visão voltada a etapas de ensino/ formação diferentes, eles têm um objetivo comum que é, a partir de um tema, construir uma solução usando a matemática.

O trabalho analisado de Rodney Carlos Bassanezi é voltado para o Ensino Superior, no qual pode se notar um incessante objetivo na formulação de um Modelo Matemático para o tema estudado. Já na análise feita sobre o trabalho de Dionísio Burak o enfoque é dado ao caminho que se usou para chegar à resolução, os conteúdos usados, os questionamentos feitos e ideias que durante a Modelagem surgiram, focando seus estudos no ensino básico. Jonei Cerqueira Barbosa se preocupa com a Modelagem Matemática na formação de professores. Mais especificamente, seu enfoque é voltado para as reflexões dos alunos acerca das relações de temas do cotidiano com conteúdos matemáticos, e vice-versa.

Na Resolução de Problemas os autores são concordantes na definição de problema e na motivação que eles devem despertar em quem vai resolver. Podemos destacar que, como na Modelagem Matemática, os autores se preocupam cada um com uma parte do processo de se trabalhar com Resolução de Problemas.

Para George Polya seu destaque certamente está na resolução dos problemas, quais questionamentos devem ser feitos em cada etapa. Para Luiz Roberto Dante o enfoque está nos problemas, como classificá-los, formulá-los e escolhê-los. Para Lourdes de La Rosa Onuchic, que se preocupa mais com a Resolução de Problemas na sala de aula, o enfoque está no processo como um todo desde a formulação dos problemas, como os alunos resolvem e como o professor media esse contexto.

Com esse estudo podemos destacar que a Modelagem Matemática e a Resolução de Problemas têm grandes diferenças tanto metódica, quanto de organização e aplicação. Ao trabalhar com Modelagem Matemática o professor iniciante com essa abordagem não tem ideia de quais rumos as atividades irão seguir e se a matemática que os alunos sabem será suficiente para resolver. Já na Resolução de Problemas o professor apresenta o problema com um objetivo a se alcançar, seja este ensinar um novo conteúdo ou consolidar um conteúdo matemático já construído com os alunos, mas que eles irão perceber o que será necessário, ao longo do caminho de resolução e não de imediato.

As duas abordagens são de grande valia para os professores que têm como objetivo incentivar nos alunos um papel autônomo, reflexivo e questionador das situações que o cercam, seja na matemática escolar ou fora dela.

REFERENCIAS

BARBOSA, J. C., **Modelagem Matemática: Concepções e Experiências de Futuros Professores**. 253 f. Tese de Doutorado (Instituto de Geociência e Ciências Exatas) - UNESP Campus de Rio Claro, Rio Claro, 2001.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2002, 389p.

BURAK, D. **Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem**. 460 f. Campinas-SP, 1992. Tese (Doutorado em Educação)-Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP.

DANTE, Luiz Roberto. **Formulação e resolução de problemas de matemática - Teoria e prática**. 1ª. ed. São Paulo: Ática, 2009. 192 p.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em Educação Matemática: Percursos Teóricos e Metodológicos**. 3ª. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2009. 228 p.

FONSECA, J. J. S. **Metodologia da pesquisa científica**. Fortaleza: UEC, 2002. Apostila. GIL, A. C. Métodos e técnicas de pesquisa social. 5. ed. São Paulo: Atlas, 1999.

GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo (Org.), coordenado pela Universidade Aberta do Brasil – UAB/UFRGS e pelo Curso de Graduação Tecnológica – Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS. **Métodos de pesquisa**. 1ª. ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. 120 p. Disponível em: <<http://www.ufrgs.br/cursopgdr/download/sSerie/derad005.pdf>>. Acesso em: 02 abr. 2018.

ONUICHIC, L. De La R. **Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas**. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: CONCEPÇÕES E PERSPECTIVAS. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-218.

ONUICHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **Pesquisa em Resolução de Problemas: Caminhos, avanços e novas perspectivas**. Bolema, Rio Claro (SP), v.25, n.41, p.73-89, dez. 2011.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica**. Curitiba: Seed/DEB-PR, 2008.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. (1995) Trad. e adapt.: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.