

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

GABRIEL FANINI SILVA

ÁLGEBRAS DE DIVISÃO E APLICAÇÕES

CURITIBA  
2019

GABRIEL FANINI SILVA

## ÁLGEBRAS DE DIVISÃO E APLICAÇÕES

Monografia apresentada à disciplina “Trabalho de Conclusão de Curso II” como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Matemática pela Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Carlos Eduardo Durán Fernández

CURITIBA  
2019

## AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, professor Carlos Durán, que me apoiou à estudar os octônios e quatérnios, assunto pelo qual eu já me interessava desde o início do meu curso. Agradeço também ao professor Marcelo Muniz que além de ter me apresentado ao professor Durán, também me apoiou psicologicamente à continuar o curso.

Aos meus pais Otilio dos Santos e Alice Bonaldi e ao meu irmão Eldrin Fanini que sempre cuidaram de mim e me apoiaram em momentos conturbados. Além também do apoio financeiro, já que venho de outra cidade e era muito difícil estudar à mais de 80 quilómetros da universidade.

*“If you don’t believe it or don’t get it, I don’t have the time to try to convince you, sorry.. ”*  
Satoshi Nakamoto

# Sumário

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>  | <b>6</b>  |
| <b>2</b> | <b>História dos números complexos, quatérnios e octônios</b> | <b>7</b>  |
| 2.1      | Números Complexos . . . . .                                  | 7         |
| 2.2      | Quatérnios . . . . .   | 8         |
| 2.3      | Octônios . . . . .   | 10        |
| <b>3</b> | <b>Aplicações dos Complexos</b>                              | <b>12</b> |
| 3.1      | De Moivre . . . . .  | 12        |
| 3.2      | Inversões . . . . .  | 12        |
| 3.2.1    | Definição nos Reais . . . . .                                | 12        |
| 3.3      | Utilização dos Complexos . . . . .                           | 13        |
| 3.3.1    | Esfera de Riemann . . . . .                                  | 14        |
| 3.4      | Geometria Inversiva . . . . .                                | 16        |
| 3.4.1    | Transformação de Möbius . . . . .                            | 17        |
| 3.4.2    | Matriz Associada . . . . .                                   | 17        |
| 3.4.3    | Grupo Inversível . . . . .                                   | 18        |
| <b>4</b> | <b>Quatérnios e Rotações</b>                                 | <b>20</b> |
| 4.1      | Definições Iniciais . . . . .                                | 20        |
| 4.2      | Rotações . . . . .   | 21        |
| 4.3      | Ângulos de Euler, aeronaves e quatérnios . . . . .           | 24        |
| 4.3.1    | Resumo . . . . .   | 24        |
| 4.4      | Ângulos de Euler . . . . .                                   | 25        |
| 4.4.1    | Velocidade angular . . . . .                                 | 26        |
| 4.4.2    | Transformação para quatérnios . . . . .                      | 26        |
| 4.4.3    | Matriz Cayley . . . . .                                      | 27        |
| 4.5      | Ângulos de aeronaves . . . . .                               | 27        |
| 4.5.1    | Velocidade angular . . . . .                                 | 28        |
| 4.5.2    | Transformação para quatérnios . . . . .                      | 28        |
| 4.5.3    | Matriz Cayley . . . . .                                      | 29        |
| <b>5</b> | <b>Aplicações dos Octônios</b>                               | <b>30</b> |
| 5.1      | Definições básicas . . . . .                                 | 30        |
| 5.1.1    | Plano de Fano . . . . .                                      | 30        |
| 5.1.2    | Álgebras de divisão . . . . .                                | 31        |

|       |                                     |    |
|-------|-------------------------------------|----|
| 5.2   | Construção Cayley-Dickson . . . . . | 32 |
| 5.2.1 | Álgebras normadas . . . . .         | 33 |
| 5.2.2 | Proposições . . . . .               | 33 |

# Capítulo 1

## Introdução

Começaremos escrevendo os conceitos básicos de álgebras de divisão, seguindo o artigo *The Octonions* de *John C. Baez* [2], que serão importantes posteriormente para entendermos as relações entre as principais álgebras de divisão:  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$ ,  $\mathbb{O}$ . Deixamos claro desde já que será comum nos depararmos com álgebras não associativas.

Consideremos um espaço vetorial como sendo um módulo de dimensão finita sobre o corpo dos números reais. Então uma álgebra  $\mathbf{A}$  é um espaço vetorial munido com operação chamada de "multiplicação"  $m : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$  e "unidade"  $1 \in \mathbf{A}$ , onde  $1a = m(1, a) = m(a, 1) = a1 = a$ . Tal álgebra não necessariamente é associativa.

Definimos como álgebra de divisão  $\mathbf{A}$  (a mais importante em nossos estudos), se dados  $a, b \in \mathbf{A}$  com  $ab = 0$ , então  $a = 0$  ou  $b = 0$ . Analogamente dizemos que uma álgebra  $A$  é de divisão se tanto as operações à esquerda e à direita por qualquer elemento não nulo de  $A$  são invertíveis.

Tomemos uma norma  $\|\cdot\| : \mathbf{A} \rightarrow \mathbb{R}$ . Caso  $\|ab\| = \|a\|\|b\|$ , para  $a, b \in \mathbf{A}$ , dizemos então que  $\mathbf{A}$  é uma álgebra normada de divisão, onde por consequência, se  $\|a\| = \|1a\| = \|1\|\|a\| = \|a\|\|1\| = \|a1\| = \|a\|$ , então  $\|1\| = 1$ .

Caso exista um elemento  $a^{-1} \in \mathbf{A}$ , de forma que  $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$  para qualquer  $a \in \mathbf{A}$ , dizemos então que a álgebra  $\mathbf{A}$  tem inverso multiplicativo. Mais adiante, veremos que é possível construir álgebras que tem inverso multiplicativo, mas que não são álgebras de divisão. Porém quando pensamos no oposto, ou seja, uma álgebra de divisão sem inverso multiplicativo, a resposta não é trivial. Um exemplo de álgebra  $\mathbf{A}$  deste tipo é o conjunto dos quatérnios, porém com a deformação  $i^2 = -1 + \epsilon j$ , para algum número real  $\epsilon$ , onde  $i$  e  $j$  são unidades imaginárias. Para visualizarmos este fato, observemos que  $\mathbf{A}$  é uma álgebra de divisão pois dados  $x, y \in \mathbb{H}$ , onde  $xy = 0$ , temos que  $x = 0$  ou  $y = 0$  (fácil verificar). Porém, o próprio  $i$  tem inversos multiplicativos à direita  $\left(\frac{i}{-1-\epsilon j}\right)$  e à esquerda  $\left(\frac{i}{-1+\epsilon j}\right)$ , mas ambos são diferentes entre si.

Além das proposições entre estas álgebras de divisão, que veremos no capítulo que trata da construção de Cayley-Dickson, vemos uma relação única entre elas. Alguns resultados extraídos de artigos de Hurwitz [10] por exemplo, nos mostra que  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  e  $\mathbb{O}$  são as únicas álgebras de divisão normadas. Além disto são as únicas álgebras de divisão alternativas (associativa entre dois elementos), como visto em [17].

## Capítulo 2

# História dos números complexos, quatérnios e octônios

Esta secção teve como fonte principal *A História Dos Números Complexos: “das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand”*, de Ulício Pinto Júnior [11]. Nela é contada uma breve história sobre os números complexos, desde sua antiga origem em Alexandria, passando então pela sua rejeição por estudiosos da época, até sua aceitação, no século 17 pelos matemáticos europeus.

### 2.1 Números Complexos

Os números complexos começaram a ser estudados por volta de 50 D.C., por Heron de Alexandria [13] quando este estudava o volume de uma secção de uma pirâmide. Porém o problema se tornou impossível de ser resolvido, visto que Heron se deparou com  $\sqrt{81 - 144} = 3i\sqrt{7}$ . Sendo assim os números imaginários recém descobertos permaneceram no esquecimento durante muito tempo, isto porque os matemáticos tentavam compreender melhor tais números, tentando encontrar algum número que ao quadrado resultasse em um negativo, porem obviamente não alcançaram sucesso nestas tentativas.

Entretanto, os números complexos ganharam notoriedade novamente por volta de 1545 quando o matemático Gerolamo Cardano [8], ao encontrar uma forma de descobrir raízes de equações de terceiro grau, se deparou com os números imaginários. E pelo fato de que muitas raízes destas equações de terceiro grau tinham como soluções números complexos, o números imaginários começaram a ser utilizados e reconhecidos pelos matemáticos, embora ainda não existisse bom entendimento sobre tais números. Ao trabalharem com tais números acerca de problemas polinomiais, surge como consequência o Teorema Fundamental da Álgebra [16], onde afirma que todo polinómio de grau  $n$  tem  $n$  raízes, sendo que algumas podem ser complexas.

A tentativa de encontrar soluções para equações de terceiro grau havia surgido na antiguidade [11] que é um problema de duplicação de um cubo, ou seja, qual deveria ser o comprimento dos lados de um cubo que tem o dobro de volume que outro cubo, de aresta medindo um metro, por exemplo. Neste caso, teríamos que resolver a equação  $x^3 - 2 = 0$ , obtendo solução polémica  $\sqrt[3]{2}$ , algo que na época não era visto como um número, visto que não podíamos 'medir' tal comprimento. Tal problema havia originado de outro ainda mais simples, o de duplicar um quadrado, resolvendo a equação de segundo grau  $x^2 - 2 = 0$ . Além disso problemas como o da Aritmética de Diofanto, que consistia em resolver  $x^3 + x = 4x^2 + 4$  e também soluções para equações como  $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$  descrita

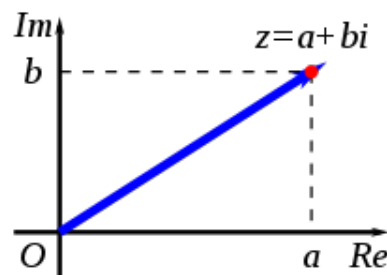


por matemáticos árabes como Omar Khayan, ambos interpretados e resolvidos de maneira geométrica, fizeram parte da história das equações de terceiro grau que impactaram diretamente nos números complexos.

Em 1637, os complexos começam a ganhar forma, quando Rene Descartes formalizou tais números da forma que conhecemos hoje, ou seja, todo número complexo pode ser representado por  $a + bi$ , onde  $a, b$  são números reais. Além disso também deu vida ao termo "imaginário". Acontece que mesmo que os complexos estivessem ganhando notoriedade no meio acadêmico, os matemáticos, como o próprio Descartes, Newton e Girard, ainda tinham dificuldade de aceitar estas descobertas. Havia sempre um conflito acerca da existência ou não destes números, tratando-os como "soluções impossíveis".

Um dos poucos que levaram mais a sério os complexos foi Bombelli, matemático que ajudou a apresentá-los no meio científico, porém até mesmo ele duvidava de suas descobertas, uma vez que não sabia ao certo o que fazer com estes números. Entendeu que  $i^2 = -1$  e que  $i(-i) = 1$ , algo que hoje é evidente mas que em sua época era algo extraordinário demais, e com isso deu origem à conjugação que é muito utilizada à décadas, porém quando ele a apresentou não obteve muito reconhecimento, já que era uma 'ideia maluca' pois estava sendo mostrados soluções reais a partir de números imaginários.

Com o passar do tempo, os matemáticos começaram a aceitar a existência destes novos números. O plano cartesiano complexo é um exemplo disto. Os números complexos começaram a ser representados da mesma maneira que os reais no plano real. Sendo assim seu entendimento era muito mais fácil e intuitivo já que no eixo  $x$  estava representado os números reais e no eixo  $y$  os números imaginários como  $0, i, 2i, 3i$ , onde a letra "i" começou a ser utilizada para representar  $\sqrt{-1}$ , ideia idealizada por Euler. Jhon Wallis e Caspar Wessel foram os primeiros a representar os complexos desta maneira, porém ambos foram ignorados. O plano cartesiano complexo só ganhou relevância a partir do diagrama de Argand, criado por Robert Argand, onde sua popularidade foi impulsionada pelo matemático Gauss que completou o diagrama de Argand com a representação de um número complexo de Descartes  $a + bi$ . Desta forma,  $a$  está no eixo  $x$  e  $y$  está no eixo  $y$ .



Euler foi fundamental para a popularidade dos complexos. Entre suas melhores descobertas está fórmula de Euler de análise complexa  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ , que juntando com a fórmula de Moivre temos  $e^{ni\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$ . Além disso, em 1833, William Rowan Hamilton trouxe uma noção ainda mais avançada aos complexos que foi a representação por vetor. Dado um número complexo  $a + bi$ , este pode ser representado como  $(a, b)$ , bem definido pela soma e multiplicação e de forma que  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ .

## 2.2 Quatérnios

Esta seção teve como fonte principal *Quaternions: a history of complex noncommutative rotation groups in theoretical physics*, de Johannes C. Familton[9]. Aqui a história

é mais voltada a apenas um matemático, William Rowan Hamilton, que foi o principal precursor dos quatérnios. E diferente dos complexos, esta nova álgebra descoberta por Hamilton não sofreu a rejeição sofrida pelo seu antecessor, já que os matemáticos estavam familiarizados com esta nova abstração na matemática vinda dos complexos.

Como sabemos, um número complexo pode ser escrito como  $a + bi$ , onde  $a$  e  $b$  são números reais e  $i$  é a unidade imaginária tal que  $i^2 = -1$ . Outra forma de representá-los é por vetores  $(a, b)$ , onde a base deste espaço vetorial é dada por  $\{1, i\}$ . Seguindo esta lógica, os quatérnios podem ser representados utilizando 3 unidades imaginárias  $a + bi + cj + dk$ , onde a base é dada por  $\{1, i, j, k\}$ , de modo que  $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$  e  $ij = k = -ji, jk = i = -jk, ki = j = -ki$ . Sendo assim, os quatérnios formam uma álgebra não comutativa mas com conjugação. Tais ideias foram criadas pelo matemático William Rowan Hamilton. Isto ocorreu por volta de 1843. Tal descoberta teve como local a ponte Broom (*Broom Bridge*), em Dublin, enquanto Hamilton caminhava por ela. Abaixo uma placa localizada na ponte:



No início de seus estudos com quatérnios, sabendo que nos complexos a multiplicação de dois números gera uma rotação no plano, Hamilton queria saber como isto funcionaria em um espaço tridimensional. Então definiu os tripletos  $a + bi + cj$ , onde  $i^2 = j^2 = -1$ , e se ocupou no problema do que seria a multiplicação  $ij$ . Como nos complexos temos o que Hamilton chamava de lei dos módulos  $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i = u + vi$ , implicando que  $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = u^2 + v^2$  (passando módulo em ambos os lados da equação). O mesmo deveria acontecer aos tripletos, ou seja,  $(a + bi + cj)(d + ei + fj) = u + vi + wj$  então  $(a^2 + b^2 + c^2)(d^2 + e^2 + f^2) = u^2 + v^2 + w^2$ . Hamilton tentou resolver o problema de multiplicar tripletos, porem isto era impossível visto que não existia uma identidade de três quadrados.

A solução então foi sair da terceira dimensão e ir direto a quarta, usando  $a + bi + cj + dk$ . Ao multiplicar um quatérnio com seu conjugado, por exemplo, pela lei dos módulos o resultado deveria ser o módulo do quatérnio  $(a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ . Mas para isto ser possível, a única maneira era considerar as seguintes multiplicações:  $ij = k = -ji, jk = i = -jk, ki = j = -ki$ . Hamilton concluiu que para preservar distância e valor absoluto a comutatividade seria perdida. Tal interesse de Hamilton aos quatérnios veio de sua curiosidade pela álgebra e pela tentativa de compreender o espaço-tempo e não é a toa que os quatérnios atualmente são usados principalmente na álgebra e na física.

Hamilton, após estabelecer os estudos acerca destes novos números, conectou a álgebra dos quatérnios com rotações espaciais. Com o progresso de suas descobertas e ao se deparar que os quatérnios tinham muito potencial para resolver problemas, na tentativa de divulgar seus estudos escreveu o livro *Elements of quaternions* que foi publicado pouco tempo após sua morte, em 1866. Mas Hamilton nunca conseguiu entender completamente como os quatérnios se comportariam como vetores, já que não era tão intuitivo como no

espaço 2-D com complexos, como vimos anteriormente. Este assunto se tornou de claro entendimento tempos depois com Gibbs e Heaviside.

Os estudos sobre quatérnios continuaram a serem desenvolvidos pelas universidades prestigiadas da época como Harvard e Universidade de Michigan, sendo que alguns matemáticos além de Hamilton contribuíram para este progresso. Estudiosos como Benjamim Peirce que era professor do curso sobre quatérnios em Harvard, Peter Tait o sucessor de Hamilton, o filho de Peirce, o James Mills Peirce, Thomas Hill, além dos já citados Gibbs e Heaviside. E com a facilidade de associação entre quatérnios e vetores, sua compreensão hoje é muito mais intuitiva, já que análise vetorial é uma das áreas básicas da matemática. Em computação ocorre o mesmo, quatérnios são utilizados no meio da programação para criar animações por meio de rotações espaciais, já que são é mais fáceis para o computador processar do que matrizes.

Hamilton não foi o único matemático a descobrir os quatérnios. Hermann Günter Grassmann utilizou outra abordagem algébrica para estas questões que eram muito a frente de seu tempo, já que matemáticos desta época não eram familiarizados com dimensões maiores que três. Acontece que Grassmann usava uma linguagem muito complicada, tanto que matemáticos como Gauss tinham dificuldade de entender suas publicações. Basicamente todo seu trabalho foi negligenciado na época. Foi Grassmann que definiu grande parte das operações em análise vetorial como soma, subtração, produto interno, produto externo, diferenciação e teoria de funções, conceitos hoje amplamente conhecidos.

## 2.3 Octônios

Esta seção teve como fonte principal *On quaternions and octonions*, de John H Conway e Derek A. Smith [5]. Aqui percebemos que ainda é possível fazer parte da história destes números, já que foram descobertos recentemente(em relação aos seus antecessores) e seu potencial é gigante.

Os matemáticos não se contentaram com apenas quatro dimensões. Por volta de 1844, John T. Graves, amigo de Hamilton, fez a descoberta da álgebra de oito dimensões, especificamente uma álgebra de divisão normalizada. Hamilton havia enviado uma carta a Graves descrevendo os quatérnios, porém Graves não estava contente o suficiente com aquela descoberta. Para ele faltava alguma coisa, era necessário ir além das dimensões já descobertas. Mas até este momento, os complexos e quatérnios haviam como base de descoberta as identidades de quadrados. Por exemplo, para os complexos temos  $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ . Para os quatérnios, temos algo mais complicado como descrito por Euler em 1748  $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) = (a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3)^2 + (a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2)^2 + (a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1)^2$ . Obviamente que para os octônios a expressão é muito maior. E além disto ela foi provada por Graves [14]. Graves enviou suas descobertas a Hamilton que sentiu muito interesse nos octônios, mas estava ocupado ainda com os quatérnios. Hamilton mostrou a Graves que os octônios não eram associativos (termo que surgiu justamente com Hamilton) e nem comutativos, diferente dos quatérnios que eram apenas não comutativos.

Arthur Cayley, matemático fundamental na compreensão destas recém descobertas álgebras, iria mais tarde conseguir reunir todas elas incluindo os números reais em uma única construção. Ele estava muito interessado nos quatérnios de Hamilton e buscava encontrar relação entre esta álgebra com funções hiperelípticas. Porém acontecimentos constrangedores aconteceram. Cayley havia publicado o artigo intitulado *On Jacobi's*

*Elliptic Functions, in Reply to the Rev. B. Bronwin; and on quaternions* [4] contendo inúmeros erros, mas que tempos depois havia acrescentado uma breve descrição sobre os octônios, fazendo com que Graves 'perdesse' sua reputação de pioneiro dos octônios. E para piorar a situação, ele havia descoberto que a identidade de oito quadrados já tinha sido provada por C. F. Degen em 1818 [6].

Além dos octônios não terem um defensor tão incansável como Hamilton, também não tinham muita utilidade quando descobertos e estes fatos possivelmente implicaram nessa história tão turbulenta. quaternions, por exemplo, já eram utilizados no estudo de rotações, visto que formam o grupo  $SU_2$  (grupo de Lie das matrizes  $2 \times 2$  unitárias com determinante um) que é cobertura dupla do grupo  $SO_3$  (grupo de rotação sobre a origem de um espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$  sob operação de composição). Tal fenómeno hoje é um caso especial da teoria das álgebras de Clifford [2].

As quatro álgebras,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  e  $\mathbb{O}$ , por mais que tivessem sido descobertas muito tempo depois uma da outra, sem correlação, exceção os octônios que surgiram diretamente dos quaternions, em certos estudos elas estão extremamente interligadas, como por exemplo na construção de Cayley-Dickson, que será estudada posteriormente neste TCC. Veremos que é possível sairmos de uma álgebra à outra, formando uma sequência, ao mesmo tempo que perdemos propriedades de uma álgebra para outra. O resultado disto são algumas proposições importantes sobre álgebras de divisão.

## Capítulo 3

# Aplicações dos Complexos

Este capítulo teve como fonte principal o livro *Geometry* de David A. Brannan, Matthew F. Esplen e Jeremy J. Gray [3]. Mostraremos aqui algumas das aplicações dos complexos na área da álgebra, especificamente sobre inversões. Mas fixamos que os complexos também desempenham grande importância também na geometria hiperbólica, que não será tratada aqui.

### 3.1 De Moivre

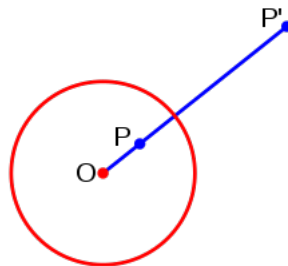
Uma aplicação importante, mas elementar, dos complexos, é a fórmula de De Moivre, na qual afirma que

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{Z}$ . Tal fórmula é diretamente obtida da equação de Euler  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

### 3.2 Inversões

#### 3.2.1 Definição nos Reais



Inicialmente, tomemos um círculo  $C$  de raio  $r$  e centro  $O$  e  $P \neq O$  um ponto. Seja  $P'$  um ponto que pertença à reta  $OP$ , mais próxima à  $O$  e que obedece a propriedade

$$OP \cdot OP' = r^2$$

Dizemos que  $P'$  é o inverso de  $P$  em relação ao círculo  $C$ . Seja  $t(P) = t(x, y) = P'$ , tal transformação para  $P \neq O$ ,  $C$  como sendo o círculo unitário, temos

$$t : (x, y) \rightarrow \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right), \quad (x, y) \neq O$$

### 3.3 Utilização dos Complexos

Assim como os números reais, podemos usar os complexos para definir as isometrias:

- Translação de um ponto  $a + ib = z \in \mathbb{C}$  trasladado até  $z + c$ , onde  $c = x + iy$

$$t(z) = a + ib + (x + iy) = (a + x) + i(b + y)$$

- Reflexão de  $a + ib = z \in \mathbb{C}$  sobre eixo  $x$

$$t(z) = \bar{z} = a - bi$$

- Rotação de  $a + ib = z \in \mathbb{C}$  sobre a origem

$$t(z) = az$$

onde  $|a| = 1$

De qualquer forma, é possível concluir que toda isometria pode ser escrita como

$$t(z) = az + b \text{ ou } t(z) = a\bar{z} + b$$

, onde  $a, b \in \mathbb{C}$  e  $|a| = 1$

Considerando novamente um círculo  $C$  de raio  $r$  e centro  $(a, b)$ , então a inversão de  $z \neq (a, b)$  é dada por

$$t(z) = \frac{r^2}{z - c} + c$$

onde  $c = a + ib$

Caso  $C$  seja um círculo unitário centrado na origem, então  $t(z) = \frac{1}{z}$ . Uma outra propriedade importante é que as inversões são auto-invertíveis, ou seja, a transformação é a própria inversa:

Consideremos uma inversão qualquer  $t(z)$  descrita acima. Calcularemos então  $t(t(z))$ :

$$t(t(z)) = \frac{r^2}{t(z) - c} + c =$$

$$\frac{r^2}{\frac{r^2}{z - c} + c - c} + c =$$

$$\frac{r^2}{\frac{r^2}{z - c}} + c =$$

$$\frac{1}{\frac{1}{z - c}} + c = z$$

## Plano Estendido

Tomemos o plano  $\mathbb{R}^2$  e adicionamos um ponto extra  $\infty$ . Este novo conjunto  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  será denominado de Plano Estendido. Estamos considerando este novo ponto para calcularmos a inversa de todos os pontos de  $\mathbb{R}^2$ , onde a inversão da origem  $(0, 0)$  é  $\left(\frac{0}{0^2+0^2}, \frac{0}{0^2+0^2}\right) = \infty$ . Sendo assim, a nova definição de inversão mapeia todos os pontos, isto para qualquer círculo (que chamaremos de círculo generalizado).

Seja  $l$  uma reta, ao criarmos a união  $l \cup \{\infty\}$ , podemos interpreta-la como um círculo de raio infinito. Usando a imaginação, é como se as "extremidades" da reta se "encontrassem" em  $\infty$ . Chamaremos o conjunto destas retas  $l \cup \{\infty\}$  de reta estendida. Um círculo generalizado em um plano estendido seria ou um círculo ou uma reta generalizada.

Definimos a inversão do plano estendido em relação a um círculo generalizado  $C$  como uma função  $t$  definida da seguinte forma

$$t(P) = \begin{cases} \text{inversa de } P \text{ em relação à } C, & \text{se } P \in \mathbb{C} - \{O\} \\ \infty, & \text{se } P = O \\ O, & \text{se } P = \infty \end{cases} \quad (3.1)$$

, caso  $C$  seja um círculo de raio  $r$  e centro  $O$ . Mas caso  $C$  seja uma reta generalizada  $l \cup \{\infty\}$ , ou seja, tenha raio  $r$  infinito, de modo que  $OP \cdot OP' = r^2$ , teremos uma reflexão em torno da reta  $l$ , sendo que como retas serão refletidas em retas,  $\infty$  também será refletido em  $\infty$ . Temos então,

$$t(P) = \begin{cases} \text{reflexão de } P \text{ em } l, & \text{se } P \in \mathbb{C} \\ \infty, & \text{se } P = \infty \end{cases} \quad (3.2)$$

### 3.3.1 Esfera de Riemann

Assim como já vimos o plano complexo junto com seu ponto infinito, iremos agora tornar suas representações de uma forma melhor, de modo que o ponto infinito seja "visível" e que tenha propriedades de um ponto qualquer. Para isto, consideremos o plano complexo  $\mathbb{C}$  em  $\mathbb{R}^3$ , de modo que ocupe a região formada pelos eixos  $x$  e  $y$ . Desta forma, um número complexo deste plano  $x + iy$  pode ser representado em  $\mathbb{R}^3$  como  $(x, y, 0)$ . Em seguida, colocamos uma esfera (de Riemann)  $\mathbb{S}$  centrada na origem  $O$  com raio  $r = 1$ . Consideremos o polo norte como sendo o ponto  $N = (0, 0, 1)$ . Analogamente  $S = (0, 0, -1)$  o polo sul.

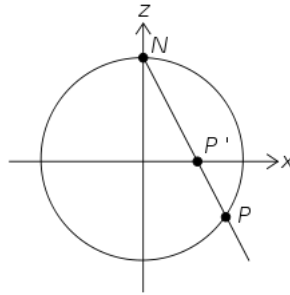
Podemos então traçar uma reta que passa por  $N$  e por  $P' \in \mathbb{C}$ . Logo, tal reta também irá intersectar em  $P \in \mathbb{S}$  e obtemos assim uma correspondência  $\pi : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{C}$  um à um entre os pontos de  $\mathbb{S}$  e os pontos de  $\mathbb{C}$ . Tal correspondência é chamada de projeção estereográfica. Sendo assim podemos usar a esfera de Riemann como forma de visualizar o plano complexo estendido  $\hat{\mathbb{C}}$ .

Desta forma, a fórmula para a projeção estereográfica de um ponto  $(X, Y, Z) \in \mathbb{S}$  é representada por

$$\pi(X, Y, Z) = \frac{X}{1-Z} + i \frac{Y}{1-Z}$$

e sua inversa

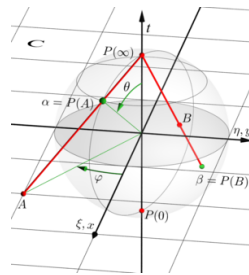
$$\pi^{-1}(x + iy) = (X, Y, Z) = \left( \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right)$$



Isto deve-se ao fato de que se traçarmos outra reta saindo de  $N$ , passando por  $Q \in \mathbb{S}$  e  $Q' \in \mathbb{C}$  e usando um ponto  $R$  que está sobre o eixo  $Z$ , de modo que os segmentos  $RQ'$  e  $OQ$  são paralelos, obtemos dois triângulos  $\Delta NRQ'$  e  $\Delta NOQ$ . E vendo na figura logo abaixo, percebemos que tais triângulos são semelhantes, já que seus ângulos internos são iguais respectivamente. E usando este fato, concluímos que

$$\frac{1 - Z}{Y} = \frac{NR}{RQ'} = \frac{NO}{OQ} = \frac{1}{y}$$

O mesmo resultado também é encontrado para analogamente para  $x$ , onde projetamos a reta  $NP'P$  no plano  $(X, Z)$  e o resultado segue.



Tomemos então um círculo na esfera que intercepta  $N$ . Tal círculo é a intersecção entre a esfera  $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$  como algum plano  $aX + bY + cZ + d = 0$ , onde entre as constantes  $a, b, c, d$  alguma é diferente de 0. Segue-se então que

$$X = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$Y = \frac{2z}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$Z = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}$$

Substituindo tais valores na equação do plano obtemos

$$\frac{2ax + 2by + c(x^2 + y^2 - 1)}{x^2 + y^2 + 1} + d = 0$$

Reescrevendo a equação, obtemos o seguinte círculo generalizado

$$(c + d)x^2 + (c + d)y^2 + 2ax + 2by + (d - c) = 0$$

Como o círculo contém o polo norte  $N$ , então o plano descrito na equação acima também contém  $N = (0, 0, 1)$ . Logo  $c + d = 0$ . Segue-se então que a projeção estereográfica sobre a região do círculo que contém  $N$  é uma reta generalizada  $2ax + 2by + (d - c) = 0$ .



### 3.4 Geometria Inversiva

Seja  $t : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ . Tal transformação será inversiva se  $t$  for composta por transformações inversões. Logo a geometria Inversiva é o estudo das propriedades das figuras em  $\mathbb{C}$  que são preservadas por transformações inversivas. Como exemplo, considere a seguinte função

$$t(P) = \begin{cases} \frac{1}{\bar{P}} & \text{se } P \in \mathbb{C} - \{O\} \\ \infty, & \text{se } P = 0 \\ 0, & \text{se } P = \infty \end{cases} \quad (3.3)$$

Esta função, chamada de função recíproca estendida, é formada pela composição de  $t_1$  inversão em um círculo unitário e  $t_2$  inversão na reta real.

Tomemos agora o conjunto formado por todas as transformações inversivas. Utilizando a operação de composição de funções, temos então um grupo:

- Bem definido

Consideremos duas transformações inversivas

$$u = t_1 \circ t_2 \circ t_3 \circ \dots \circ t_i$$

e

$$v = t_{i+1} \circ t_{i+2} \circ t_{i+3} \circ \dots \circ t_j$$

onde  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_j$  são inversões. Sendo assim, temos

$$u \circ v = (t_1 \circ t_2 \circ t_3 \circ \dots \circ t_i) \circ (t_{i+1} \circ t_{i+2} \circ t_{i+3} \circ \dots \circ t_j)$$

Concluimos então que a composta entre duas transformações inversivas é a composição entre inversões.

- Identidade

Basta utilizarmos a transformação inversiva identidade  $t(z) = z, \quad z \in \mathbb{C}$

- Inversa

Seja  $t = t_1 \circ t_2 \circ t_3 \circ \dots \circ t_i$ . Ao calcularmos sua inversa, obtemos  $t^{-1} = t_i^{-1} \circ t_{i-1}^{-1} \circ t_{i-2}^{-1} \circ \dots \circ t_1^{-1}$ . Mas, como já vimos antes, as inversões são auto-invertíveis, logo

$$t^{-1} = t_i \circ t_{i-1} \circ t_{i-2} \circ \dots \circ t_1$$

ou seja, a inversa é uma transformação inversível pois é composta por inversões.

- Associatividade

Como estamos falando de composição de transformações, logo sempre serão composições associativas por definição.

### 3.4.1 Transformação de Möbius

Como vimos, as isometrias nos complexos podem ser representadas por  $t(z) = az + b$  ou  $t(z) = a\bar{z} + b$  onde  $a, b \in \mathbb{C}$  e  $|a| = 1$ . Analogamente, para as transformações inversivas o mesmo ocorre:  $t(z) = M(z)$  ou  $t(z) = M(\bar{z})$ , onde  $M : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  é a transformação de Möbius que é definida da seguinte forma

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

onde os coeficientes  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  seguem a regra  $ad - bc \neq 0$ , já que não queremos que o numerador seja múltiplo do denominador, criando assim uma função constante. Por convenção, se  $c = 0$  temos  $M(\infty) = \infty$ , ou então para  $c \neq 0$ ,  $M\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty$  e  $M(\infty) = \frac{a}{c}$ . Para  $a = d = 0$  e  $b = c = 1$ , obtemos a função recíproca estendida.

Seja  $c \neq 0$ . Então para  $z \in \mathbb{C} - \left\{\frac{-d}{c}\right\}$ , podemos reescrever a transformação de Möbius da seguinte maneira

$$\begin{aligned} M(z) &= \frac{az + b}{cz + d} = \frac{caz + cb}{c(cz + d)} = \\ &= \frac{-ad + ad + caz + cb}{c(cz + d)} = \frac{-ad + bc + a(cz + d)}{c(cz + d)} = \\ &= \left(\frac{ad - bc}{c}\right) \left(\frac{1}{cz + d}\right) + \frac{a}{c} \end{aligned}$$

Segue-se então que a transformação de Möbius pode ser escrita como a composta de três funções inversivas  $t_1, t_2, t_3$ , onde

$$t_1(z) = \begin{cases} cz + d & \text{se } z \neq \infty \\ \infty, & \text{se } z = \infty \end{cases} \quad (3.4)$$

$t_2$  a função recíproca estendida e  $t_3$  como sendo

$$t_3(z) = \begin{cases} -\left(\frac{ad - bc}{c}\right)z + \left(\frac{a}{c}\right) & \text{se } z \neq \infty \\ \infty, & \text{se } z = \infty \end{cases} \quad (3.5)$$

Afim de estudarmos as composições entre duas ou mais transformações de Möbius, devemos primeiramente organizar os coeficientes. Para isto, usaremos matrizes  $2 \times 2$  como forma de representar os coeficientes da transformação.

### 3.4.2 Matriz Associada

Seja  $M$  uma transformação de Möbius onde

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

onde  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ , então a matriz **associada** à  $M$  é definida por

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

e como  $ad - bc \neq 0$ , temos que  $\mathbf{M}$  é invertível.

Claramente a matriz associada à  $M$  não é única. Isto porque se multiplicarmos numerador e denominador por uma constante,  $M$  permanece inalterado mas  $\mathbf{M}$  terá todos os valores de cada entrada multiplicados pela constante. Desta forma, dada uma transformação  $M$ , sua matriz associada terá a forma  $c\mathbf{M}$ , onde  $c$  é uma constante qualquer.

Sejam  $M_1$  e  $M_2$  duas transformações de Möbius, onde

$$M_1(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{e} \quad M_2(z) = \frac{ez + f}{gz + h}$$

Realizando a composta  $M_1 \circ M_2$ , obtemos

$$\begin{aligned} M_1(M_2(z)) &= \frac{a \left( \frac{ez+f}{gz+h} \right) + b}{c \left( \frac{ez+f}{gz+h} \right) + d} = \\ &= \frac{(ae + bg)z + (af + bh)}{(ce + dg)z + (cf + dh)} \end{aligned}$$

Vemos que a composição gerou outra transformação de Möbius onde  $(ae + bg)(cf + dh) - (af + bh)(ce + dg) \neq 0$ . Além disso, a matriz associada à esta transformação é dada por

$$\begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

Concluimos então que a matriz associada à transformação da composição entre duas transformações de Möbius,  $M_1$  e  $M_2$ , é dada pela multiplicação das matrizes associadas  $\mathbf{M}_1$  e  $\mathbf{M}_2$

### 3.4.3 Grupo Inversível

O conjunto formado por todas as transformações de Möbius formam um grupo, munido da operação de composição de funções.

- Bem definida

Já vimos anteriormente que dadas  $M_1$  e  $M_2$  transformações de Möbius, então a composição entre elas também é de Möbius.

- Identidade

Basta usarmos  $M(z) = \frac{1z+0}{0z+1}$ .

- Inversa

Como sabemos, dado uma transformação de Möbius  $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , então

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Calculando a matriz inversa de  $\mathbf{M}$ , obtemos

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Como a matriz associada não é única e pode ser multiplicada por qualquer constante, temos que a inversa de uma transformação de Möbius é dada por

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- Associatividade

Composição de funções é associativa.

Para finalizarmos as aplicações dos complexos, mostraremos como usar as transformações de Möbius para representar inversões e transformações inversivas. Relembremos então que uma inversão sobre um ponto será ou sobre uma reta estendida ou um círculo. Para o primeiro caso, temos  $t(z) = a\bar{z} + b$  com  $t(\infty) = \infty$ . Seja  $M$  uma transformação de Möbius, temos então  $t(z) = M(\bar{z})$ , onde  $M$  é da seguinte forma

$$M(z) = \frac{az + b}{0z + 1}$$

Caso a inversão de  $\hat{\mathbb{C}}$  seja um círculo de raio  $r$ , temos

$$t(z) = \frac{r^2}{z - c} + c = \frac{c\bar{z} + (r^2 - c\bar{c})}{\bar{z} - \bar{c}} = M(\bar{z})$$

Onde  $M(z) = \frac{cz + (r^2 - c\bar{c})}{z - \bar{c}}$  é uma transformação de Möbius. Concluimos então que qualquer inversão  $t(z)$  pode ser representada por alguma transformação de Möbius  $M(\bar{z})$ . Já em relação às transformações inversivas, o resultado é similar: toda transformação inversiva  $t$  pode ser representada em  $\hat{\mathbb{C}}$  por uma das seguintes fórmulas:

$$t(z) = M(z) \quad \text{ou} \quad t(z) = M(\bar{z})$$

onde  $M$  é uma transformação de Möbius.

Pelo resultado anterior, podemos escrever transformações inversivas como sendo  $t_1(z) = M_1(\bar{z})$  e  $t_2(z) = M_2(\bar{z})$ . E calculando a composta entre as duas obtemos

$$t_1(t_2(z)) = M_1(\overline{M_2(\bar{z})}) = M_1(M_2(z))$$

Segue-se então que a composição entre duas transformações inversivas é uma transformação de Möbius.

Consideremos então uma transformação inversiva qualquer  $t = t_1 \circ \dots \circ t_i$  onde  $t_1, \dots, t_i$  são inversões. Para  $i$  par, podemos reescrever  $t = (t_1 \circ t_2) \circ \dots \circ (t_{i-1} \circ t_i)$ , ou seja,  $t(z) = M(z)$ . Para  $i$  ímpar, como vimos anteriormente toda inversão  $s$  é auto-invertível ( $s = s^{-1}$ ), logo temos  $t = (t_1 \circ \dots \circ t_i \circ s) \circ s = M \circ s$ , mais especificamente  $t(z) = M(\bar{z})$

# Capítulo 4

## Quatérnios e Rotações

Todo este capítulo teve como fonte principal o *Application of Quaternions*, de Gernot Hoffmann [15]. O grande foco aqui será rotações de corpos rígidos, como por exemplo de aeronaves e as diferentes rotações que objetos fazem no espaço. Além das diferenças entre se usar os clássicos ângulos de Euler e os quatérnios para descrever as rotações.

### 4.1 Definições Iniciais

Uma das grandes aplicações dos quatérnios são os estudos de rotação em espaços 3D, composta por ângulos articulares, orientações rígidas do corpo e parâmetros de câmera. Área importante para computação gráfica, satélites, mecânica orbital, navegação, robótica, além de serem mais simples de entender do que os ângulos de Euler e mais compactas e eficientes que notações matriciais.

Quatérnios, como vistos anteriormente, podem ser escritos da forma vetorial  $q = q_1i + q_2j + q_3k + q_4$ , ou seja, quatérnios são uma quadrupla de números reais, de forma que  $q = \mathbf{q} + q_4$ . Estudaremos as aplicações dos quatérnios utilizando a definição matricial:

$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$ . Desta forma, a multiplicação entre dois quatérnios  $P, Q$  se da de forma que

$$PQ = (q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} + q_4)(s_1i + s_2j + s_3k + s_4) = p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k} + p_4 = \mathbf{p} + p_4$$

Obtemos então

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 & q_1 \\ q_3 & -q_4 & -q_1 & q_2 \\ -q_2 & -q_1 & q_4 & q_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix}$$

Concluimos então que  $P = \mathbf{R}(Q)S$ .

Calculando este resultado, chegamos em

(1)

$$\begin{aligned} P = \mathbf{p} + p_4 &= q_4s_4 - (q_1s_1 + q_2s_2 + q_3s_3) + q_4(s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}) + s_4(q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) \\ &+ (q_2s_3 - q_3s_2)\mathbf{i} - (q_3s_1 - q_1s_3)\mathbf{j} + (q_1s_2 - q_2s_1)\mathbf{k} \\ &= (q_4s_4 - \mathbf{q}^\top\mathbf{s}) + (q_4\mathbf{s} + s_4\mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{s}) \end{aligned}$$

Onde  $\mathbf{q}^T \mathbf{s}$  e  $\mathbf{q} \times \mathbf{s}$  representam produto escalar e produto vetorial respectivamente. O conjugado de um quatérnio pode ser representado como

$$Q' = \begin{bmatrix} -q_1 \\ -q_2 \\ -q_3 \\ +q_4 \end{bmatrix}$$

Usando a fórmula descrita anteriormente para a multiplicação e definindo derivada de  $Q$ ,  $\dot{Q}$ , como sendo a derivada em cada coordenada (por exemplo, enquanto o corpo rígido sofre rotação, o tempo  $t$  está passando, logo derivamos sobre cada coordenada  $q(t)$ ) obtemos:

$$\begin{aligned} S' \cdot Q' &= (q_4 s_4 - (-\mathbf{s})^T (-\mathbf{q})) + (q_4 (-\mathbf{s}) + s_4 (-\mathbf{q}) + (-\mathbf{s} \times (-\mathbf{q}))) \\ &= (q_4 s_4 - \mathbf{q}^T \mathbf{s}) - (q_4 \mathbf{s} + s_4 \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{s}) = (QS)' \end{aligned}$$

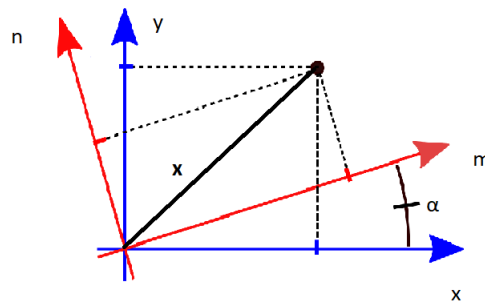
$$\begin{aligned} QQ' &= q_4 q_4 - \mathbf{q}^T \mathbf{q} + q_4 \mathbf{q} + q_4 \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{q} \\ &= q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(2)

$$0 = \dot{k} = \dot{Q}Q' = \dot{Q}Q' + Q\dot{Q}'$$

## 4.2 Rotações

Entraremos agora no campo de rotação do sistema de coordenadas. Seja  $\mathbf{x}$  um ponto que pode ser representado como  $\mathbf{X}_1$  num sistema de coordenadas  $\mathbf{S}_1$ , ou  $\mathbf{X}_2$  num sistema de coordenadas  $\mathbf{S}_2$



Consideremos uma rotação de  $\alpha$  sobre o eixo  $\mathbf{z}_1$ . Tomemos  $Q = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \mathbf{k} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$  e  $Q' = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \mathbf{k} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ , onde  $\mathbf{k}^2 = -1$ . Teremos então que

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_2 &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ &= \begin{bmatrix} x[\cos^2(\frac{\alpha}{2}) - \sin^2(\frac{\alpha}{2})] + 2y[\sin(\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\alpha}{2})] \\ -2x[\sin(\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\alpha}{2})] + y[\cos^2(\frac{\alpha}{2}) - \sin^2(\frac{\alpha}{2})] \\ z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= [\cos(\frac{\alpha}{2}) - \mathbf{k}\sin(\frac{\alpha}{2})](x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})[\cos(\frac{\alpha}{2}) + \mathbf{k}\sin(\frac{\alpha}{2})]$$

Generalizando, o exemplo acima nos mostra que  $\mathbf{X}_2 = Q\mathbf{X}_1Q'$  e analogamente  $\mathbf{X}_1 = Q'\mathbf{X}_2Q$ , para um quatérnio unitário  $\|Q\| = 1$ .

Percebemos que não importa em qual eixo de coordenadas rotacionarmos, sempre terá a forma  $\mathbf{x}_n = Q\mathbf{X}_1Q'$ , pois

$$\mathbf{X}_2 = Q_1\mathbf{X}_1Q_1'$$

$$\mathbf{X}_3 = Q_2\mathbf{X}_2Q_2' = Q_2Q_1\mathbf{X}_1Q_1'Q_2'$$

$$\mathbf{X}_4 = Q_3\mathbf{X}_3Q_3' = Q_3Q_2Q_1\mathbf{X}_1Q_1'Q_2'Q_3'$$

Tais valores em de  $Q$ , como  $q_1, q_2, q_3, q_4$  dependem de uma certa sequencia de ângulos de rotação, denominados de ângulos de Euler. Seja  $Q = q_4 + \mathbf{q}$ . Como vimos antes, a multiplicação entre dois quatérnios resulta  $R = PQ = r_4 + \mathbf{r}$ , onde  $r_4 = p_4q_4 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}$  e  $\mathbf{r} = p_4\mathbf{q} + \mathbf{p}q_4 + \mathbf{p} \times \mathbf{q}$ . Já o produto interno entre dois quatérnios nos fornece  $P.Q = p_4q_4 + \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}$ . O produto entre três quatérnios é dado por

(3)

$$PQR = p_4q_4r_4 - p_4\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - q_4\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - r_0\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - \mathbf{p}\cdot(\mathbf{q} \times \mathbf{r})$$

$$+q_4r_4\mathbf{p} + p_4r_4\mathbf{q} + p_4q_4\mathbf{r} + p_4\mathbf{q} \times \mathbf{r} + q_4\mathbf{p} \times \mathbf{r} +$$

$$+r_4\mathbf{p} \times \mathbf{q} - (\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})\mathbf{p} + (\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{q} + (\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})\mathbf{r}$$

Usando a fórmula para produto interno entre quatérnios, temos as seguintes propriedades

•

$$(PQ).(PQ) = (PQ).(QP) = (P.P)(Q.Q)$$

(3)

•

$$(PQ).(PR) = (P.P)(Q.R)$$

Desta forma, considerando  $\mathbf{X}_4 = \mathbf{C}_{41}\mathbf{X}_1Q'$ , podemos obter uma matriz  $3 \times 3$ , que denominaremos como matrix de Cayley, de modo que transforme a expressão anterior composta por multiplicações a direita e esquerda por apenas uma multiplicação a esquerda

$$\mathbf{X}_4 = \mathbf{C}_{41}\mathbf{X}_1$$

Note que, de (3),  $\mathbf{X}_4.\mathbf{X}_4 = \mathbf{X}_1.\mathbf{X}_1$ . Como a parte escalar permanece a mesma, se  $\mathbf{X}_4 = x_4 + \mathbf{x}_4$ , então  $\mathbf{x}_4.\mathbf{x}_4 = \mathbf{x}_1.\mathbf{x}_1$ . E usando (2), obtemos

$$\mathbf{X}_4 = (q_4 - \mathbf{q}\cdot\mathbf{q})\mathbf{x}_1 + 2q_4\mathbf{q} \times \mathbf{x}_1 + 2\mathbf{q}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}_1)$$

Supondo que estamos rotacionando  $\mathbf{x}_1$  num ângulo  $\alpha$  sobre o vetor unitário  $\mathbf{k}$  e escrevendo  $\mathbf{x}_1 = (\mathbf{x}_1.\mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{x}_1 - (\mathbf{x}_1.\mathbf{n})\mathbf{n})$ . Como a primeiro termo da direita é a

componente de  $\mathbf{x}_1$  paralela a  $\mathbf{n}$ , que permanece inalterado pela rotação, e o segundo termo é a componente de  $\mathbf{x}_1$  perpendicular a  $\mathbf{n}$ , que é girado em

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_4 &= \cos(\alpha)(\mathbf{x}_1 - (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) + \mathbf{n} \times \sin(\alpha)(\mathbf{x}_1 - (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) \\ &= \cos \alpha \mathbf{x}_1 - \cos(\alpha)(\mathbf{x}_1 - (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) + \sin \alpha \mathbf{n} \times \mathbf{x}_1 \\ &\quad - \sin \alpha (\mathbf{n} \times (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) \end{aligned}$$

(4)

$$\mathbf{x}_4 = \cos \alpha \mathbf{x}_1 + \sin \alpha \mathbf{n} \times \mathbf{x}_1 + (1 - \cos \alpha) \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_1)$$

Na tentativa de escrevermos (4) na forma reduzida  $\mathbf{x}_4 = \mathbf{R}(\alpha, \mathbf{n})\mathbf{x}_1$ , onde  $\mathbf{R}(\alpha, \mathbf{n})$  é uma matriz ortogonal que executa a rotação  $\alpha$  em torno do eixo  $\mathbf{n}$ , definimos então uma matriz  $\mathbf{N}$ , de tal forma que  $\mathbf{N}\mathbf{x}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{x}_1$ . Encontramos então

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}_1$$

Onde a equação característica de  $\mathbf{N}$  é dada por

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{N}) = \lambda^3 + (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)\lambda = \lambda^3 + \lambda$$

Como a matriz é ortogonal e simétrica, temos que  $\mathbf{N}^3 = -\mathbf{N}$ . Utilizando (4), vemos que a matriz de rotação  $\mathbf{R}(\alpha, \mathbf{n})$  por um ângulo pequeno  $\epsilon$  é dada por

$$\mathbf{R}(\alpha, \mathbf{n}) = \mathbf{I} + \epsilon \mathbf{N} + O(\epsilon^2)$$

E para um número finito de rotações

$$\mathbf{R}(\alpha, \mathbf{n}) = \mathbf{R}\left(\frac{\alpha}{t}, \mathbf{n}\right)^t = \left(\mathbf{I} + \left(\frac{\alpha}{t}\mathbf{N} + O(t^{-2})\right)\right)^t$$

Tendendo  $t \rightarrow \infty$

$$\mathbf{R}(\alpha, \mathbf{n}) = e^{\alpha \mathbf{N}}$$

Sabendo que a matriz exponencial é definida como

$$e^{\mathbf{N}} = \mathbf{I} + \mathbf{N} + \frac{1}{2}\mathbf{N}^2 + \frac{1}{6}\mathbf{N}^3 + \dots + \frac{1}{(s-1)!}\mathbf{N}^{s-1}$$

Onde  $\mathbf{N}^s = 0$  e usando o fato de que  $\mathbf{N}^3 = -\mathbf{N}$ , concluímos que

$$e^{\alpha \mathbf{N}} = \mathbf{I} + (\sin \alpha)\mathbf{N} + (1 - \cos \alpha)\mathbf{N}^2$$

Usando todos estes fatos, é possível concluir que a matriz de Cayley  $\mathbf{C}_{41}$  é definida como

$$\mathbf{C}_{41} = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 - q_3q_4) & 2(q_1q_3 + q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 + q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(-q_1q_4 + q_2q_3) \\ 2(q_1q_3 - q_2q_4) & 2(q_1q_4 + q_2q_3) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix}$$



Entrando agora nas aplicações que envolvem física, tomemos  $\mathbf{x}_4 = Q\mathbf{x}_1Q'$ , onde  $\mathbf{x}_1$  é constante. Iremos derivar ambos os lados e encontrar a velocidade angular que faz com que o sistema de coordenadas 4 gira em relação ao sistema de coordenadas 1. Sabendo que  $\mathbf{x}_1 = Q'\mathbf{x}_4Q$ ,  $QQ' = 1$  e  $Q\dot{Q}' + \dot{Q}Q' = 0$ ,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_4 &= \dot{Q}\mathbf{x}_1Q' + Q\mathbf{x}_1\dot{Q}' \\ &= \dot{Q}Q'\mathbf{x}_4QQ' + QQ'\mathbf{x}_4Q\dot{Q}' \\ &= \dot{Q}Q'\mathbf{x}_4Q\dot{Q}' \\ &= \dot{Q}Q'\mathbf{x}_4 - \dot{Q}Q'\end{aligned}$$

Definindo  $T = \dot{Q}Q' = \mathbf{t} + t_4$  e usando (1), temos

$$\begin{aligned}T\mathbf{x}_4 &= \mathbf{t}^\top\mathbf{x}_4 + t_4\mathbf{x}_4 + \mathbf{t} \times \mathbf{x}_4 \\ -\mathbf{x}_4T &= -\mathbf{t}^\top\mathbf{x}_4 - t_4\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_4 \times \mathbf{t}\end{aligned}$$

Somando ambas as expressões concluímos que  $\dot{\mathbf{x}}_4 = 2\mathbf{t} \times \mathbf{x}_4$ . Com isto podemos definir a velocidade angular  $\omega$  (ou  $\omega_4^{14}$ ) como sendo  $\omega = -2\mathbf{t}$ . Agora, adicionando componentes e criando um novo quatérnio temos

$$\omega = \boldsymbol{\omega} + \omega_4 = -2T = -2QQ'$$

Usando (2), obtemos  $\dot{Q}Q' = (QQ')' = -Q\dot{Q}'$  e  $T = -T'$  e como consequência  $t_4 = \frac{\omega_4}{2} = 0$ . Desta maneira, queremos obter a matriz de multiplicação que satisfaz  $\omega = -2\dot{Q}Q' = \mathbf{W}(Q)\dot{Q}$ . Multiplicando  $-2Q$  por  $Q'$  e separando os coeficientes de cada unidade  $1, i, j, k$  e transformando para matriz, vemos que

$$\frac{1}{2}\mathbf{W}(Q)^\top = \mathbf{V}(Q)^\top = \begin{bmatrix} -q_4 & -q_3 & q_2 & q_1 \\ q_3 & -q_4 & -q_1 & q_2 \\ -q_2 & -q_1 & -q_4 & q_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{V}$  é ortogonal e além disso

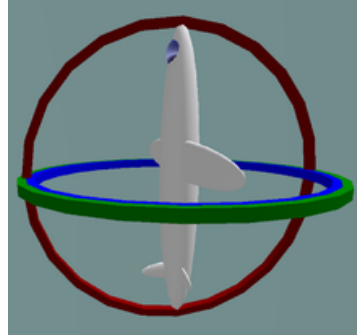
- $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^\top$
- $\mathbf{W}^{-1} = \frac{1}{2}\mathbf{V}^\top = \frac{1}{4}\mathbf{W}^\top$

## 4.3 Ângulos de Euler, aeronaves e quatérnios

### 4.3.1 Resumo

Iremos agora comparar as diferentes transformações entre os clássicos ângulos de Euler com os recentes ângulos de aeronaves. Usaremos o conceito do sistema de coordenadas da mão direita para rotacionarmos nossos sistemas. Iremos parametrizar rotações espaciais em espaços de terceira dimensão usando ambos os ângulos. A grande vantagem de usar os

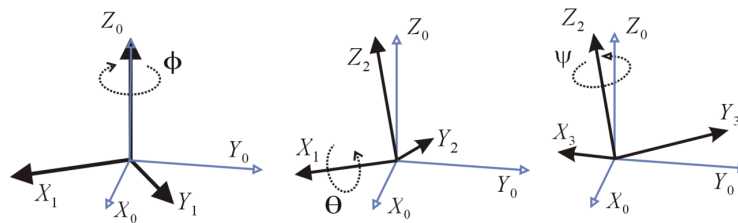
quatérnios no lugar dos clássicos ângulos de Euler é que a notação é muito mais simples, além de evitarem a perda de um grau de liberdade nos mecanismos tridimensionais, o chamado *Gimbal Lock*(GL), que é quando duas das três suspensões cardãs(mostradas na figura abaixo como sendo os círculos em volta dos objetos) se encontram paralelas . Problemas acerca do GL são comuns na engenharia mecânica, especialmente no estudo de aeronaves e robótica.



Esta secção teve como fonte principal o *Euler angles, quaternions, and transformation matrices for space shuttle analysis*, de David M Henderson [1].

## 4.4 Ângulos de Euler

Dado  $\mathbf{x}_4 = \mathbf{T}\mathbf{x}_1$ , na tentativa de isolarmos  $\mathbf{x}_1$ , tomemos a rotação em torno do eixo  $z_1$  num ângulo  $\phi$ , usando ainda os antigos sistemas de coordenadas  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$ . Definimos também os vetores unitários desse sistema como  $\mathbf{e}_{x_1}, \mathbf{e}_{y_1}, \mathbf{e}_{z_1}$  e do sistema gerado como sendo  $\mathbf{e}_{x_2}, \mathbf{e}_{y_2}, \mathbf{e}_{z_2}$ . Na imagem abaixo temos um objeto sofrendo uma rotação do tipo  $z - x - z$ , na qual trabalharemos nos ângulos de Euler



Logo,

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{T}_{21}\mathbf{x}_1 = Q_1\mathbf{x}_1Q_1'$$

Usando a matriz de rotação temos

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ou então na forma de quatérnios

$$Q_1 = \cos \frac{\phi}{2} - \mathbf{k} \sin \frac{\phi}{2}$$

Usando agora os sistemas de coordenadas  $\mathbf{x}_3$  e  $\mathbf{x}_2$ , sabendo que  $\mathbf{x}_3 = \mathbf{T}_{32}\mathbf{x}_2 = Q_2\mathbf{x}_2Q_2'$  e considerando os novos vetores unitários como sendo  $\mathbf{e}_{x_3}, \mathbf{e}_{y_3}, \mathbf{e}_{z_3}$ , ao rotacionarmos sobre o eixo  $x_2$  com ângulo  $\theta$ , obtemos

$$\mathbf{T}_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

e,

$$Q_2 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \mathbf{i} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Usando agora os sistemas de coordenadas  $\mathbf{x}_4$  e  $\mathbf{x}_3$  e rotacionando sobre o eixo  $\mathbf{z}_3$  (eixo que pertence ao conjunto de coordenadas  $\mathbf{x}_3$ ) em um ângulo  $\psi$ , definindo os novos vetores unitários como sendo  $\mathbf{e}_{x_4}, \mathbf{e}_{y_4}, \mathbf{e}_{z_4}$  e sabendo que  $\mathbf{x}_4 = \mathbf{T}_{43}\mathbf{x}_3 = Q_3\mathbf{x}_3Q_3'$  obtemos

$$\mathbf{T}_{43} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$Q_3 = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) - \mathbf{k} \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)$$

Desta forma, definimos  $\mathbf{T}_{41} = \mathbf{T}_{43}\mathbf{T}_{32}\mathbf{T}_{21}$ , onde

$$\mathbf{x}_4 = \mathbf{T}_{41}\mathbf{x}_3 = \mathbf{T}_{43}\mathbf{T}_{32}\mathbf{x}_2 = \mathbf{T}_{43}\mathbf{T}_{32}\mathbf{T}_{21}\mathbf{x}_1$$

#### 4.4.1 Velocidade angular

Na primeira rotação em torno do eixo  $z_1$  num ângulo  $\phi$ , a velocidade angular depende da magnitude de  $\phi$ , ou seja,  $\boldsymbol{\omega}_\phi = \dot{\phi}\mathbf{e}_{z_1}$ . Na segunda rotação em torno do eixo  $x_2$  num ângulo  $\theta$ , e na terceira rotação em torno do eixo  $z_3$  num ângulo  $\psi$  temos respectivamente resultados similares  $\boldsymbol{\omega}_\theta = \dot{\theta}\mathbf{e}_{x_2}$  e  $\boldsymbol{\omega}_\psi = \dot{\psi}\mathbf{e}_{z_3}$ . A velocidade angular será então dada por

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ \sin(\theta) \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \cos(\theta) & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

#### 4.4.2 Transformação para quatérnios

Ao utilizarmos quatérnios para expressar as transformações, a notação é mais simplificada. Pois basta tomarmos  $Q = \mathbf{p} + p_4 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = Q_3Q_2Q_1$ , onde encontramos

- $p_1 = -\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$
- $p_2 = \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$
- $p_3 = -\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$
- $p_4 = \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$

### 4.4.3 Matriz Cayley

Por fim, comparando a matriz  $\mathbf{T}_{41}$  com a matriz Cayley  $\mathbf{C}_{41}$ , vemos que  $\mathbf{x}_4 = \mathbf{T}_{41}\mathbf{x}_1 = \mathbf{C}_{41}\mathbf{x}_1$ . E considerando  $\mathbf{C}_{41} = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , obtemos

- $2(q_1q_3 + q_2q_4) = c_{13} = \sin(\psi) \sin(\theta)$
- $2(-q_1q_4 + q_2q_3) = c_{23} = \cos(\psi) \sin(\theta)$
- $-q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = c_{33} = \cos(\theta)$
- $2(q_1q_3 - q_2q_4) = c_{31} = \sin(\theta) \sin(\phi)$
- $2(q_1q_4 + q_2q_3) = c_{32} = -\sin(\theta) \sin(\phi)$

E utilizando estes resultados, temos

- $q_1 = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi-\psi}{2}\right)$
- $q_2 = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi-\psi}{2}\right)$
- $q_3 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi+\psi}{2}\right)$
- $q_4 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi+\psi}{2}\right)$

Além disso,

- $\tan(\psi) = \frac{c_{13}}{c_{23}}$
- $\tan(\phi) = \frac{-c_{31}}{c_{32}}$
- $\tan(\theta) = \frac{\sqrt{1-c_{33}^2}}{c_{33}}$

## 4.5 Ângulos de aeronaves

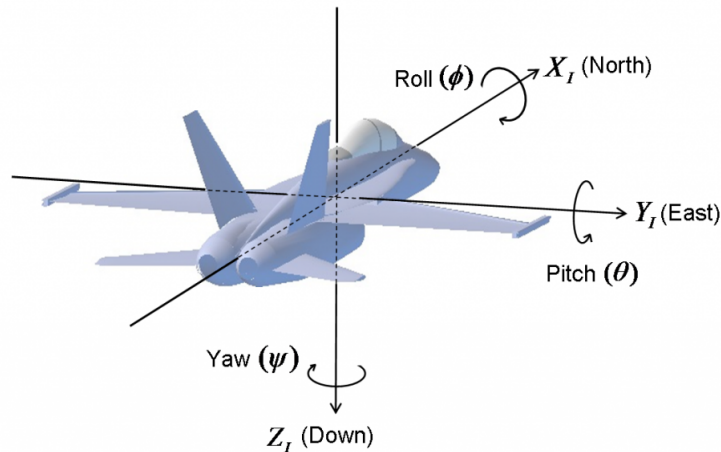
Esta seção teve como fonte principal o *Lecture L29-3D Rigid Body Dynamics*, de J. Peraire e S. Widnall [12].

Diferentemente dos ângulos clássicos de Euler, as rotações em torno de aeronaves se dá em torno dos três diferentes eixos. Isto é, primeiro rotacionamos em torno do eixo  $z_1$ , depois  $y_2$  e  $x_3$ . Utilizaremos as mesmas notações usadas anteriormente nos ângulos de Euler para descrever os novos sistemas referenciais e os vetores unitários.

Tomemos então o mesmo sistema de referência inicial  $\mathbf{x}_1$  e uma rotação em torno do eixo  $z_1$  (Yaw), momento em que a aeronave realiza um movimento de guinada da ponta de uma asa até a outra, criando assim o novo sistema de referência  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{T}_{21}\mathbf{x}_1 = Q_1\mathbf{x}_1Q_1'$ . Temos então esta transformação nas formas de matriz e quatérnios respectivamente

$$\mathbf{T}_{21} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_1 = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \mathbf{k} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$$



Em seguida, uma rotação (arremesso) em torno do ângulo do eixo  $y_2$  (Pitch), em que movimenta o nariz da aeronave para cima ou para baixo, criando novamente um novo sistema referencial  $\mathbf{x}_3 = \mathbf{T}_{32}\mathbf{x}_2 = Q_2\mathbf{x}_2Q_2'$ . Sua representação na forma de matriz e quatérnios são respectivamente

$$\mathbf{T}_{32} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$Q_2 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \mathbf{j} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Por fim, rotacionamos em torno do eixo  $x_3$  (Roll), aplicando assim um movimento de rolamento que vai do nariz da aeronave até a cauda, fazendo com que a aeronave gire suas asas para cima ou para baixo, criando o último sistema referencial  $\mathbf{x}_4 = \mathbf{T}_{43}\mathbf{x}_3 = Q_3\mathbf{x}_3Q_3'$ . As representações nas formas de matrizes e quatérnios são respectivamente

$$\mathbf{T}_{43} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

Concluimos então que  $\mathbf{x}_4 = \mathbf{T}_{43}\mathbf{x}_3 = \mathbf{T}_{43}\mathbf{T}_{32}\mathbf{x}_2 = \mathbf{T}_{43}\mathbf{T}_{32}\mathbf{T}_{21}\mathbf{x}_1$

### 4.5.1 Velocidade angular

Analogamente aos ângulos de Euler, temos a seguinte expressão para a velocidade angular

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & \cos(\theta)\sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\theta)\cos(\phi) \end{pmatrix}$$

### 4.5.2 Transformação para quatérnios

Definindo  $Q = \mathbf{p} + p_4 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = Q_3Q_2Q_1$ , encontramos

- $p_1 = -\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$
- $p_2 = \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$
- $p_3 = \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$
- $p_4 = \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$

### 4.5.3 Matriz Cayley

Por último, comparando a matriz  $\mathbf{T}_{41}$  com a matriz Cayley e considerando  $\mathbf{C}_{41} = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , obtemos

- $2(q_1q_3 + q_2q_4) = c_{13} = -\sin(\theta)$
- $2(-q_1q_4 + q_2q_3) = c_{23} = \cos(\theta)\sin(\phi)$
- $-q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = c_{33} = \cos(\theta)$
- $2(q_1q_3 - q_2q_4) = c_{11} = \cos(\psi)\cos(\theta)$
- $2(q_1q_4 + q_2q_3) = c_{12} = \sin(\psi)\cos(\theta)$

Além disso,

- $\tan(\psi) = \frac{c_{12}}{c_{11}}$
- $\tan(\phi) = \frac{c_{23}}{c_{33}}$
- $\tan(\theta) = \frac{\sqrt{-c_{13}}}{\sqrt{c_{11}^2 + c_{12}^2}}$

# Capítulo 5

## Aplicações dos Octônios

Todo este capítulo utiliza como fonte principal o *The Octonions*, de John C. Baez [2]. Relembrando os conceitos básicos vistos na introdução, trataremos abaixo sobre as principais correlações entre as álgebras de divisão  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  e  $\mathbb{O}$ . Não só são dependentes umas das outras, como também são ordenadas de forma sequencial, ou seja, a construção de uma depende da outra, sendo que a cada transformação uma propriedade algébrica é perdida.

### 5.1 Definições básicas

Como sabemos, os octônios formam uma álgebra de dimensão 8 com a base  $\{1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$  de forma que sua multiplicação é dada pela seguinte tabela

|       |        |        |        |        |        |        |        |  |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--|
|       | $e_1$  | $e_2$  | $e_3$  | $e_4$  | $e_5$  | $e_6$  | $e_7$  |  |
| $e_1$ | -1     | $e_4$  | $e_7$  | $-e_2$ | $e_6$  | $-e_5$ | $-e_3$ |  |
| $e_2$ | $-e_4$ | -1     | $e_5$  | $e_1$  | $-e_3$ | $e_7$  | $-e_6$ |  |
| $e_3$ | $-e_7$ | $-e_5$ | -1     | $e_6$  | $e_2$  | $-e_4$ | $e_1$  |  |
| $e_4$ | $e_2$  | $-e_1$ | $-e_6$ | -1     | $e_7$  | $e_3$  | $-e_5$ |  |
| $e_5$ | $-e_6$ | $e_3$  | $-e_2$ | $-e_7$ | -1     | $e_1$  | $e_4$  |  |
| $e_6$ | $e_5$  | $-e_7$ | $e_4$  | $-e_3$ | $-e_1$ | -1     | $e_2$  |  |
| $e_7$ | $e_3$  | $e_6$  | $-e_1$ | $e_5$  | $-e_4$ | $-e_2$ | -1     |  |

Com as seguintes propriedades :

Unidade imaginárias  $e_1^2 = e_2^2 = \dots = e_7^2 = -1$

Não comutativos  $e_i e_j = -e_j e_i, \quad \forall e_i \neq e_j$

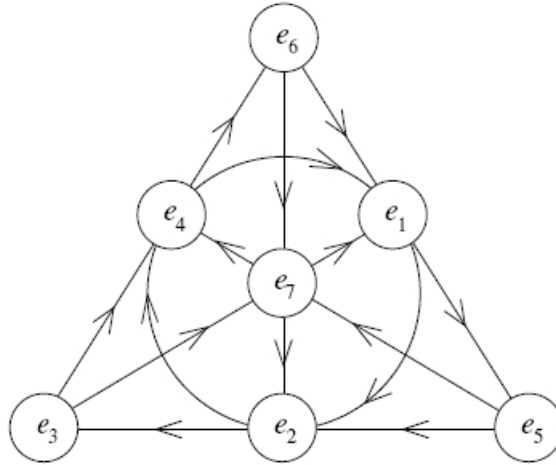
Ciclo de índices  $e_i e_j = e_k \longrightarrow e_{i+1} e_{j+1} = e_{k+1}$

Dobro de índices  $e_i e_j = e_k \longrightarrow e_{2i} e_{2j} = e_{2k}$

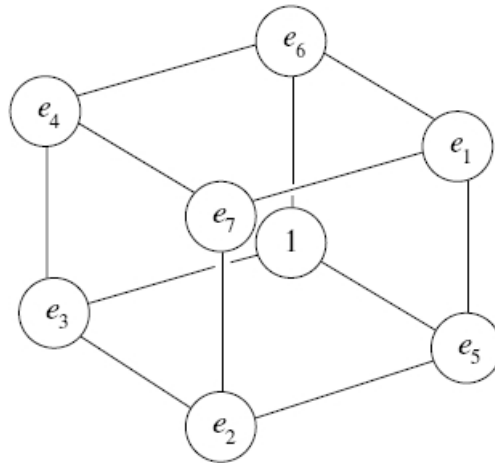
#### 5.1.1 Plano de Fano

E a partir desta construção, construímos o diagrama que irá representar as devidas multiplicações, o plano de Fano, composto por sete linhas e sete pontos. De forma

que os pontos são as unidades imaginárias e as linhas que ligam os pontos indicam as multiplicações ciclicamente ordenadas, descrevendo assim a estrutura algébrica dos octônios.



Estes sete pontos também podem ser representados como os sete elementos menos a identidade do grupo  $\mathbb{Z}_2^3 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . Ou seja, todas as retas de  $\mathbb{Z}_2^3$  que passam pela origem. Porém, como cada reta contém elementos não nulos, podemos pensar que o plano de Fano consiste em todos os elementos não nulos em  $\mathbb{Z}_2^3$ . E definindo  $1 \in \mathbb{O}$  como origem de  $\mathbb{Z}_2^3$ , obtemos



Para facilitar a visualização, temos  $1 = (0, 0, 0)$ ,  $e_1 = (0, 1, 1)$ ,  $e_2 = (1, 1, 0)$ ,  $e_3 = (1, 0, 0)$ ,  $e_4 = (1, 0, 1)$ ,  $e_5 = (0, 1, 0)$ ,  $e_6 = (0, 0, 1)$ ,  $e_7 = (1, 1, 1)$ .

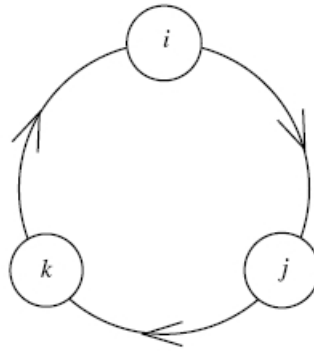
Note que se retirarmos qualquer plano formado pela origem e por outros três pontos quaisquer, por exemplo,  $1e_3e_4e_6$ , então este plano é isomorfo aos quatérnios, já que a multiplicação em  $\mathbb{H}$  funciona de modo similar

A aplicação destes conceitos são utilizadas principalmente no estudo de cociclos.

### 5.1.2 Álgebras de divisão

Antes de darmos sequência, definiremos mais alguns conceitos. Tomemos uma álgebra  $A$  com mapa bilinear de multiplicação  $m : A \times A \rightarrow A$  e elemento unitário  $1 \in A$





(não necessariamente 1 dos reais), de forma que  $m(1, a) = m(a, 1) = a$ . Tal álgebra será também um espaço vetorial. Definimos uma álgebra de divisão  $A$  como sendo uma álgebra com a propriedade  $\forall a, b \in A ; ab = 0 \rightarrow a = 0$  ou  $b = 0$ . Além disso, uma álgebra qualquer  $A$  tem inverso multiplicativo se  $\forall a \in A$ , existe inverso  $a^{-1} \in A$ , tal que,  $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ . Uma álgebra associativa tem inverso multiplicativo se, e somente se, é uma álgebra de divisão. Um exemplo de álgebra de divisão sem inverso multiplicativo são os quatérnios, mas com uma propriedade adicional:  $i^2 = -1 + \epsilon j$ , mas com o resto da multiplicação inalterável. Vemos neste exemplo que seu inverso à direita e à esquerda são respectivamente:

$$\frac{-i + \epsilon k}{1 + \epsilon^2}, \quad \frac{-i - \epsilon k}{1 + \epsilon^2}$$

Ou seja, os inversos multiplicativos de  $i$  são diferentes.

Definimos então o associador para todo  $a, b, c \in A$  e o comutador para todo  $x, y \in A$  como sendo, respectivamente:

$$[a, b, c] = (ab)c - a(bc), \quad [a, b] = ab - ba$$

Dizemos então que uma álgebra é alternativa se é associativa dois a dois, ou seja,

$$[a, a, b] = [a, b, b] = 0$$

E uma álgebra é comutativa se sua multiplicação comuta, ou seja,

$$[a, b] = 0$$

## 5.2 Construção Cayley-Dickson

Ao estudarmos octônios devemos ter um certo conhecimento sobre outras álgebras como os reais, complexos e quatérnios. Isto porque estas álgebras seguem uma determinada sequência, já que uma tem alguma propriedade que outra não tem. Comutatividade e associatividade estão presentes nos complexos enquanto que quatérnios perdem a comutatividade e octônios perdem além da comutatividade a associatividade. Para visualizarmos de forma sequencial estes fatos, usaremos a construção de Cayley-Dickson.

Um complexo  $a + bi$  pode ser representado como um par de números reais  $(a, b)$ , de forma que ser produto é definido como  $(a, b)(c, d) = (ac - db, ad + cb)$  com conjugado  $(a, b)^* = (a, -b)$ . Seguindo o mesmo processo, um quatérnio pode ser representado como um par de números complexos  $(a, b)$ , com produto  $(a, b)(c, d) = (ac - db^*, a^*d + cb)$  e

conjugado  $(a, b)^* = (a^*, -b)$ . O mesmo acontece aos octônios, onde cada elemento desta álgebra pode ser considerado como um par de números quatérnios. Esta é a construção de Cayley-Dickson.

Todas as quatro álgebras tem inverso multiplicativo. Para  $\mathbb{R}$  é trivial e o restante basta analisarmos que

$$(a, b)(a, b)^* = (a, b)(a^*, -b) = (aa^* - (-b)b^*, a^*(-b) + a^*b) = (aa^* + bb^*, 0) = k(1, 0)$$

Ou seja, dado um elemento qualquer  $(a, b)$  destas álgebras, seu inverso é dado por  $\frac{(a, b)^*}{k}$ , onde  $k \in \mathbb{R}$ .

Caso continuássemos a construção, as próximas álgebras não seriam tão interessantes para nossos estudos, já que a propriedade de álgebra de divisão se perde dos octônios para os sedeniões (dimensão 16).

### 5.2.1 Álgebras normadas

Para vermos como isto acontece, precisamos definir algumas álgebras: dizemos que  $A$  é  $*$ -álgebra se a operação de conjugação  $*$  :  $A \rightarrow A$  é bem definida em  $A$ , de modo que dados  $a, b \in A$ , temos

$$\begin{aligned} a^{**} &= a \\ (ab)^* &= b^*a^* \end{aligned}$$

Caso  $a^* = a$ , dizemos que a álgebra é real, ou seja,  $\mathbb{R}$  é uma álgebra real. Caso  $a + a^* \in \mathbb{R}$  e  $aa^* = a^*a > 0$ , dizemos que a  $*$ -álgebra é bem normada com norma  $\|a\|^2 = aa^*$  e inverso multiplicativo  $a^{-1} = \frac{a^*}{\|a\|^2}$

### 5.2.2 Proposições

Usando uma  $*$ -álgebra  $A$ , pela construção de Cayley-Dickson obtemos uma nova  $*$ -álgebra  $A'$ . Supondo que  $A'$  seja equipada com a multiplicação e conjugação visto anteriormente, obtemos os seguintes resultados

**Proposição 1.**  *$A'$  nunca é uma álgebra real.*

Pois se supormos que  $A'$  é real, então dado  $(a, b) \in A$ , temos que  $(a, b) = (a, b)^* = (a^*, -b)$ . Implicando que  $a = a^*$  mas  $b = 0$ . Ou seja, todo elemento de  $A'$  seria escrito como  $(a, 0)$ , o que é uma contradição.

**Proposição 2.**  *$A$  é real  $\iff A'$  é comutativa.*

Se  $A$  é real, então dados  $(a, b), (c, d) \in A'$  obtemos  $(a, b)(c, d) = (ac - db^*, a^*d + cb) = (ac - db, ad + cb) = (ca - bd, da + bc) = (ca - bd^*, d^*a + bc) = (c, d)(a, b)$ .

**Proposição 3.**  *$A$  comutativa e associativa  $\iff A'$  é associativa e bem normada.*

Seja  $(a, b), (c, d), (e, f) \in A'$ , então  $[(a, b)(c, d)](e, f) = [(ac - db^*, a^*d + cb)](e, f) = ((ac - db^*)e - f(a^*d + cb), (ac - db^*)^*f + e(a^*d + cb)) = ((ac)e - (db^*)e - f(d^*a) - f(b^*c^*), (c^*a^*)f - (bd^*f + e(a^*d) + e(cb))) = ((ce - fd^*) - (c^*f + ed)b^*, a^*(c^*f + ed) + (ce - fd^*)b) = (a, b)[(c, d)(e, f)]$

**Proposição 4.** *A associativa e bem normada  $\iff A'$  alternativa e bem normada.*

A prova é análoga a proposição anterior.

**Proposição 5.** *A bem normada  $\iff A'$  bem normada.*

Tomando dois elementos de  $A'$ , temos  $(a, b) + (a, b)^* = (a, b) + (a^*, -b) = (a + a^*, 0)$  que é real, e  $(a, b)(a, b)^* = (a, b)(a^*, -b) = (aa^* - (-b)b^*, a^*(-b) + a^*(-b)) = (\|a\|^2 + \|b\|^2, 0)$  é real.

Concluimos então que  $\mathbb{R}$  é uma  $*$ -álgebra real, comutativa, associativa e bem normada. Usando a segunda proposição obtemos  $\mathbb{C}$  como uma  $*$ -álgebra comutativa, associativa e bem normada. Pela terceira proposição, temos  $\mathbb{H}$  sendo uma  $*$ -álgebra associativa e bem normada. E seguindo o próximo passo e usando a quarta proposição obtemos  $\mathbb{O}$ , restando apenas a propriedade de  $*$ -álgebra bem normada. A última proposição implica que todas as próximas construções de Cayley-Dickson resultarão apenas em  $*$ -álgebras bem normadas.

# Referências Bibliográficas

- [1] Michael J Amoruso. Euler angles and quaternions in six degree of freedom simulations of projectiles. Technical report, ARMY ARMAMENT RESEARCH DEVELOPMENT AND ENGINEERING CENTER PICATINNY ARSENAL . . . , 1996.
- [2] John Baez. The octonions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 39(2):145–205, 2002.
- [3] David A Brannan. Matthew. f. esplen ja jeremy j. gray: Geometry, 1999.
- [4] Arthur Cayley. On jacobi’s elliptic functions, in reply to the rev. b. bronwin, and on quaternions (appendix only). *The collected mathematical Papers, Johnson reprint Co*, page 127, 1863.
- [5] John H Conway and Derek A Smith. *On quaternions and octonions*. AK Peters/CRC Press, 2003.
- [6] Charles W Curtis. The four and eight square problem and division algebras. *Studies in modern algebra*, 2:100–125, 1963.
- [7] Geoffrey M Dixon. *Division Algebras:: Octonions Quaternions Complex Numbers and the Algebraic Design of Physics*, volume 290. Springer Science & Business Media, 2013.
- [8] Artur Ekert. Complex and unpredictable cardano. *International Journal of Theoretical Physics*, 47(8):2101, 2008.
- [9] Johannes C Familton. Quaternions: a history of complex noncommutative rotation groups in theoretical physics. *arXiv preprint arXiv:1504.04885*, 2015.
- [10] Adolf Hurwitz. Ueber die composition der quadratischen formen von beliebig vielen variablen. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1898:309–316, 1898.
- [11] Ulício Pinto Júnior. A história dos números complexos: “das quantidades sofisticadas de cardano às linhas orientadas de argand”. 2009.
- [12] J Peraire and S Widnall. Lecture 129-3d rigid body dynamics. *Dynamics*, 2009.
- [13] David P Robbins. Areas of polygons inscribed in a circle. *Discrete & Computational Geometry*, 12(2):223–236, 1994.

- [14] Hamilton (William Rowan.), Heini Halberstam, and RE Ingram. *The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton: Algebra*. Cambridge University Press, 1967.
- [15] Eugene Salamin. Application of quaternions to computation with rotations. Technical report, Working Paper, 1979.
- [16] Steve Smale. The fundamental theorem of algebra and complexity theory. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 4(1):1–36, 1981.
- [17] Max Zorn. Theorie der alternativen ringe. In *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, volume 8, pages 123–147. Springer, 1931.