UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

GIOVANNI ANTONIO CERETA CRUL

UM ESTUDO SOBRE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Curitiba

2014

GIOVANNI ANTONIO CERETA CRUL

UM ESTUDO SOBRE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Kirilov

Curitiba

2014

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela força e sabedoria.

A minha mãe e meu padrasto que me sempre me ajudaram e apoiaram durante todos os anos de graduação. À minha família que sempre esteve ao meu lado me dando forças para não desistir dos meus ideais.

Ao meu orientador Prof. Dr. Alexandre Kirilov, que sempre me ajudou, em todas as fases do meu TCC, sempre me atendeu e orientou com atenção.

A Fernanda, minha amiga da graduação, pela confiança durante todos esses anos que estudamos juntos, pelo apoio nessa fase de conclusão de curso. Ao Flávio e Natally que sempre me ajudaram e à todos os meus demais amigos e colegas.

Resumo

Essa monografia consiste em um material de estudos sobre sequências numéricas que pode ser utilizado na confecção de um material didático direcionado a disciplina de Fundamentos de Análise. Esse trabalho apresenta uma sequência numérica como uma função, expõe alguns tipos de sequências, define sequências convergentes e divergentes, exibe o critério de convergência de Cauchy além de apresentar diversos resultados importantes da análise. Ao final colocamos a representação geométrica das sequências de Fibonacci e Padovam.

Palavras-chave: *sequências numéricas, limites de sequência, teoremas importantes da análise.*

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Nas diversas disciplinas do curso de Matemática da UFPR, percebi que os docentes raramente encontravam uma bibliografia ou material didático que abrangesse todos os assuntos propostos na ementa, que nos apresenta os assuntos abordados na disciplina, de forma adequada para um curso de Licenciatura, com isso veio a ideia da construção de um material didático para a disciplina de Fundamentos de Análise.

Esse trabalho é um primeiro estudo de um dos assuntos constantes na ementa dessa disciplina: sequências numéricas. Iniciamos esse estudo com a ideia intuitiva de sequências (da forma que é usada no dia-a-dia), passamos pela definição matemática (como uma função com domínio nos naturais) e introduzimos os principais tipos de sequências, fornecendo exemplos para melhor compreensão do assunto. A seguir passamos para a construção da ideia de limite, a partir de um exemplo intuitivo, motivando a introdução da definição usual com n_0 e ε.

Um dos diferenciais deste trabalho é que em varias demonstrações de teoremas fornecemos uma ideia da prova antes de apresentar a demonstração rigorosa. Esse encaminhamento didático tem a pretensão de auxiliar o leitor a compreender o processo de construção de uma prova rigorosa e ajudá-lo a construir suas próprias demonstrações.

Ao final do trabalho apresentamos um capítulo descrevendo as sequências de Fibonacci e a Padovan e construções geométricas associadas a essas sequências. Este material foi criado para ser visto como uma forma diferente de se aprender sequências.

Capítulo 2

Apresentação

No dia a dia, é comum usarmos o termo "sequência" para expressar qualquer lista de números ou eventos em uma determinada ordem, como por exemplo: a sequência de alunos na chamada da sala de aula, a sequência de um filme, a sequência dos números sorteados na mega sena e assim por diante.

Na matemática a expressão sequência refere-se sempre a uma lista infinita de termos, funções, matrizes ou números que aparecem em certa ordem, por exemplo: a sequência dos números pares, a sequência do números primos e a sequência dos termos de uma progressão aritmética ou geométrica.

Já na antiguidade, algumas propriedades das sequências numéricas despertaram a curiosidade dos matemáticos gregos: as sequências de números triangulares e dos quadrados perfeitos são dois exemplos que aparecem nos Elementos de Euclides.

Na história moderna da matemática as propriedades das sequências convergentes foram fundamentais nas demonstrações de grandes teoremas da análise matemática, como por exemplo o teorema de Bolzano- Weierstrass.

Neste capítulo vamos introduzir rigorosamente o conceito de sequência e convergência e estudar suas principais propriedades.

2.1 Definição e primeiras propriedades

Chamaremos de sequência numérica a qualquer função definida no conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ que assume valores no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, ou seja:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Dessa forma, a cada $n \in \mathbb{N}$, associamos um número $f(n) \in \mathbb{R}$, o qual denotaremos simplesmente por x_n, ou seja,

$$x_1 = f(1), \quad x_2 = f(2), \ldots, \quad x_n = f(n), \ldots$$

Costuma-se denotar a sequência apenas indicando-se seus termos, ou seja,

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots).$$

Também é comum denotar uma sequência indicando apenas seu termo geral x_n, ou escrevendo apenas $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (x_n).

Por exemplo:

1. $(1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots)$ é a sequência dos números naturais, cujo termo geral é $x_n = n$, com $n \in \mathbb{N}$;

2. $(1, 4, 9, 16 \ldots, n^2, \ldots)$ é a sequência dos quadrados perfeitos, ou seja, $x_n = n^2$, com $n \in \mathbb{N}$;

3. $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots)$ é a sequência dos inversos dos números naturais, isto é, $x_n = 1/n$, com $n \in \mathbb{N}$.

Outros exemplos interessantes de sequências são os seguintes:

1. a sequência constante $(3, 3, 3, ...)$ cujo termo geral é $x_n = 3$, com $n \in \mathbb{N}$, de forma geral $x_n = c, c \in \mathbb{R}$;

2. a sequência dos múltiplos de quatro $(4, 8, 12, 16, 24, \ldots)$ cujo termo geral é $x_n = 4n$, com $n \in \mathbb{N}$;

3. a sequência dos números primos $(2, 3, 5, 7, 11, \ldots)$ que não possui uma lei de formação;

4. a sequência $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$ que possui mais de uma lei de formação, por exemplo: $x_n = 1$, se n é ímpar e $x_n = 0$, se n é par, ou ainda, $x_n = |sen(n\pi/2)|$, para n natural.

2.1.1 Subsequências

Vamos imaginar agora uma fábrica de automóveis na qual a produção de automóveis nunca pare e que nunca feche as portas. Nessa fábrica a maioria dos carros fabricados é colocada à venda, porém uma parte é destinada ao serviço público e uma pequena porcentagem é voltada a testes de qualidade. Como nem todos os carros são colocados a venda, pode ser interessante renumerar os carros que são colocados a disposição dos consumidores, ou enumerar os carros que forem enviados ao laboratório de controle de qualidade ou ao serviço público. Nesse exemplo, da sequência de carros fabricados, pode ser importante considerar subsequências específicas, por exemplo, dentre os carros fabricados, aqueles que foram destinados ao serviço público.

Os termos retirados de uma sequência constituem uma nova sequência, diferente da original, mas que ainda está relacionada com ela. Essa nova sequência é chamada de subsequência.

Definição 2.1 *Dada uma sequência* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*, chamamos de subsequência de* (x_n) *a qualquer restrição da função* x *a um subconjunto infinito:* $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < ... < n_k < ...\}$ *de* $\mathbb{N}$.

Quando a sequência é denotada por $(x_1, x_2, ...x_n, ...)$ ou (x_n), com $n \in \mathbb{N}$, costuma-se denotar uma subsequência por $(x_{n_1}, x_{n_2}, ...x_{n_k}, ...)$ ou (x_{n_k}), com $k \in \mathbb{N}$, preservando o "n"para deixar claro que essa subsequência provém de (x_n). Quando for necessário deixar claro o subconjunto $\mathbb{N}'$, pode-se usar a notação $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$.

Por exemplo, na sequência dos números naturais $(1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$, ou seja, $x_n = n$, podemos considerar as seguintes subsequências:

1. $(2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots, 2k, \ldots)$ dos números pares. Neste caso a notação indicada é $x_{n_k} = 2k, k \in \mathbb{N}$;

2. $(1, 4, 9, 16, 25, \ldots, k^2, \ldots)$ dos números quadrados, para a qual usaremos a notação $x_{n_k} = k^2, k \in \mathbb{N}$;

3. $(2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots)$ dos números primos, que não possui um termo geral. Mesmo assim podemos usar a notação (x_{n_k}).

2.2 Tipos Especiais de Sequências

Na matemática existem sequências que possuem características que as diferenciam das demais e merecem destaque em nosso estudo. Os tipos de sequência que iremos analisar vão nos ajudar, por exemplo, no cálculo de limites, situação em que tais características podem vir a simplificar seu cálculo e nos dar mais ferramentas para o desenvolvimento da teoria. Nessa seção consideraremos as sequências limitadas, monótonas e recorrentes.

2.2.1 Sequências Limitadas

Na língua portuguesa a expressão *limitado* significa algo 'restrito, que não pode transgredir'. Na matemática, falar que uma sequência é limitada significa dizer que todos os seus termos pertencem a um intervalo fechado $[a, b]$, ou seja, seus termos estão restritos a esse intervalo.

Por exemplo, a sequência constante $(2, 2, 2, 2, \ldots)$ é limitada, pois todos os termos são iguais a 2 e portanto pertencem a qualquer intervalo que contenha o número 2, por exemplo, $[0, 3]$. Generalizando esse argumento vemos que toda sequência constante é limitada.

Na sequência $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots)$, todos os termos satisfazem a desigualdade $0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1$, logo essa sequência está contida no intervalo $[0, 1]$, e portanto é limitada.

Definição 2.2 Diremos que uma sequência (x_n) é limitada quando existirem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que:

$$a \leqslant x_n \leqslant b, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Quando uma sequência (x_n) não for limitada diremos que ela é ilimitada.

Observe que, afirmar que um sequência não é limitada significa que para quaisquer $A, B \in \mathbb{R}$ dados, existirá um $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < A$ ou $x_n > B$.

Por exemplo, a sequência $(1, 4, 9, 16 \ldots, n^2, \ldots)$ dos quadrados perfeitos não é limitada pois, para qualquer B positivo dado, é possível encontrar um n natural tal que $n^2 > B$, para isso basta tomar $n > \sqrt{B}$.

Nesse exemplo a sequência não é limitada, porém todos os seus termos são positivos, ou seja, $x_n \geqslant 0$, para todo n, nesse caso dizemos que a sequência é limitada inferiormente e não é limitada superiormente. A definição precisa é a seguinte:

Definição 2.3 A sequência (x_n) é limitada superiormente se existe $B \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leqslant B, \forall n \in \mathbb{N}$. Analogamente (x_n) é limitada inferiormente se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $A \leqslant x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Note que, quando uma sequência é limitada superiormente, o conjunto de seus termos possui supremo. Caso a sequência seja limitada inferiormente, o conjunto de seus termos terá ínfimo; lembrando que supremo é a menor das cotas superiores e ínfimo é a maior das cotas inferiores.

Observação: Toda subsequência de uma sequência limitada é limitada, entretanto, uma sequência ilimitada pode possuir subsequências limitadas. Por exemplo, a sequência

$$(1, -2, 1, 3, 1, -4, 1, 5, 1, -6, 1, 7, \ldots)$$

não é limitada inferiormente nem superiormente, entretanto a subsequência dos termos ímpares $x_{2n-1} = 1$ é constante, e portanto limitada.

O próximo resultado nos fornece uma forma equivalente de definir sequência limitada, a qual será útil para os enunciados e demonstrações que apresentaremos nesse trabalho.

Proposição 2.1 *A sequência (x_n) é limitada se e somente se existe $k > 0$ tal que $|x_n| \leqslant k, \forall n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Como (x_n) é limitada, por definição existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leqslant x_n \leqslant b$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

A ideia é encontrar um $k > 0$ tal que $[a, b] \subset [-k, k]$, pois nesse caso teremos $-k \leqslant x_n \leqslant k$, o que é equivalente a dizer que $|x_n| \leqslant k, \forall n \in \mathbb{N}$.

Para que isso ocorra, basta tomar $k = \max\{|a|, |b|\}$, pois assim teremos $-k \leqslant a$ e $b \leqslant k$. Para provar a volta, basta tomar $a = -k$ e $b = k$. ■

2.2.2 Sequências Monótonas

Na matemática é comum nos depararmos com sequências nas quais os elementos aparecem em ordem crescente ou decrescente, por exemplo, a sequência dos números naturais e a sequência $x_n = 1/n$, com n natural. Na matemática, esse comportamento é normalmente chamado de monótono.

Definição 2.4 Diremos que a sequência (x_n) é:

1. crescente se $x_n < x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots$$

2. decrescente se $x_n > x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n > x_{n+1} > \ldots$$

3. não crescente se $x_n \geq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant \ldots$$

4. não decrescente se $x_n \leq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \ldots$$

Quando uma sequência atender a qualquer uma das definições acima diremos que ela é uma **sequência monótona**.

Vamos analisar alguns exemplos:

1. $x_n = \dfrac{n}{n+1}$, com n natural, é crescente, pois

$$n(n+2) < (n+1)^2 \Rightarrow \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} \Rightarrow x_n < x_{n+1}.$$

2. A sequência $(0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, \ldots)$ não é monótona, porém a subsequência dos termos pares é crescente e a subsequência dos termos ímpares é constante.

Note que toda sequência constante é não crescente e não decrescente.

2.2.3 Sequências Recorrentes

Observe os termos da sequência abaixo:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{2} \\ x_2 &= \sqrt{2+\sqrt{2}}, \qquad \text{ou seja, } x_2 = \sqrt{2+x_1} \\ x_3 &= \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \qquad \text{ou seja, } x_3 = \sqrt{2+x_2} \\ \ldots & \\ x_n &= \sqrt{2+x_{n-1}} \\ x_{n+1} &= \sqrt{2+x_n} \end{aligned}$$

Note que o segundo termo depende do primeiro, o terceiro termo depende do segundo e assim sucessivamente. Sequências como essa são denominadas sequências recorrentes.

Definição 2.5 Dizemos que uma sequência é recorrente quando seus termos, a partir de certo índice, são determinados em função de um ou mais termos anteriores.

Em geral, os primeiros termos de uma sequência recorrente são fixados arbitrariamente. Por exemplo, na sequência acima o primeiro termo foi fixado e todos os demais foram definidos em função desse primeiro, gerando a seguinte lei de formação

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} \end{cases}$$

Para um segundo exemplo, tomemos

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{1+x_n} \end{cases}$$

Neste caso teremos

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{1+1}, \quad x_3 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}, \quad x_4 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}}, \ \ldots$$

Perceba que novamente cada termo dessa sequência depende do anterior logo é uma sequência recorrente, além disso, fazendo n crescer arbitrariamente nos aproximamos da seguinte "fração contínua".

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}$$

que possui aplicações interessantes em teoria de números e análise.

Capítulo 3

Limite de Sequências

O conceito de limite é normalmente utilizado para descrever o comportamento de uma função à medida que a variável independente se aproxima de algum valor pré-fixado. Por exemplo, os conceitos de derivada e continuidade de função, estudados no cálculo, são baseados na ideia de limite.

Nesse capítulo estudaremos o conceito de limite para as sequências numéricas e alguns teoremas importantes da análise matemática. Para isso, vamos introduzir a ideia de limite de sequência analisando um exemplo bastante simples, a partir do qual iremos generalizar o conceito de limite para qualquer sequência numérica.

3.1 Ideia Intuitiva de Limite

Vamos construir o conceito de limite intuitivamente a partir de um exemplo. O primeiro passo é analisar a seguinte frase:

$$\text{“}\frac{1}{n} \text{ tende a 0 quando n tende ao infinito”}$$

Isso significa que $\frac{1}{n}$ se aproxima de 0 conforme n cresce e fica suficientemente grande. Para analisarmos melhor esse fenômeno, observe que, dado o inteiro positivo 1, podemos encontrar outro inteiro, que denotaremos por n_0, com a seguinte propriedade:

$$n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} < 10^{-1}$$

De fato, tomando $n_0 = 10$, por exemplo, temos que

$$\text{se } n > n_0, \text{ então } \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} = 10^{-1}.$$

Em outras palavras, se n é um inteiro maior que $n_0 = 10$, então a distância do número $\frac{1}{n}$ ao número 0 é menor do que 10^{-1}, ou seja,

$$\text{se } n > n_0 \text{ então } |\frac{1}{n} - 0| < 10^{-1}.$$

Analogamente, dado o inteiro 2, também podemos encontrar um inteiro positivo, que para simplificarmos a notação, também chamaremos de n_0, com a seguinte propriedade:

$$\text{se } n > n_0, \text{ então } |\frac{1}{n} - 0| < 10^{-2}$$

Para isso, basta escolher $n_0 = 100$ ou algum inteiro maior do que 100.

Mais geralmente, dado um inteiro positivo k, podemos encontrar um inteiro positivo denotado por n_0, para o qual a seguinte propriedade é válida:

$$\text{Se } n > n_0, \text{ então } |\frac{1}{n} - 0| < 10^{-k}$$

Para isso, dado um k inteiro positivo, basta escolhermos $n_0 = 10^k$, e podemos concluir que $|1/n - 0| < 10^{-k}, \forall n > n_0$.

Generalizando esse raciocínio para uma sequência (x_n) qualquer, temos a seguinte propriedade

Propriedade 3.1 (ideia intuitiva de limite) A sequência (x_n) tende ao número a se, dado um inteiro positivo k, podemos encontrar um índice n_0 tal que, se n é um índice maior que n_0, então a distância do número x_n ao número a é menor do que 10^{-k}, ou seja,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < 10^{-k}.$$

3.2 Definição de limite

Apresentamos agora a definição rigorosa de limite de sequências.

Definição 3.1 Uma sequência (x_n) converge para um número real a se, para qualquer número real $\varepsilon > 0$, existir um número natural n_0, tal que:

$$|x_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

A notação usual é $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, ou simplesmente $\lim x_n = a$, pois a variável n é um número natural, e só faz sentido fazer $n \to \infty$.

Em linguagem matemática:

$$\lim x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tal que } n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

Observe que essa definição é equivalente a ideia intuitiva de limite que enunciamos na proposicao 3.1, ou seja:

1. Propriedade 3.1 $\Rightarrow$ Definição 3.1:

   Dado $\varepsilon > 0$, arbitrário, escolha $k \in \mathbb{N}$, tal que $10^{-k} < \varepsilon$. Como $|x_n - a| < 10^{-k} < \varepsilon$ conclui-se que $|x_n - a| < \varepsilon$

2. Definição 3.1 $\Rightarrow$ Propriedade 3.1:

   Basta tomarmos $\varepsilon = 10^{-k}$ na definição.

Observação 3.1 Note que a afirmação $|x_n - a| < \varepsilon$ é equivalente a dizer que $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, pois

$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

Logo a definição de limite pode ser interpretada da seguinte forma:

$\lim x_n = a$ se, para cada $\varepsilon > 0$ dado, apenas um número finito de termos da sequência (x_n) está fora do intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

De fato, se $\lim x_n = a$, existe um n_0 natural tal que $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, para todo $n > n_0$, e os únicos termos da sequência que podem estar fora desse intervalo são $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0 - 1}, x_{n_0}$.

As sequências que possuem limites são denominadas de convergentes e as que não tem limite são denominadas divergentes. Também é costume usar a notação $x_n \to a$ para indicar que a é o limite de (x_n).

3.3 Teoremas envolvendo limites

Nessa seção vamos enunciar e provar alguns dos principais teoremas sobre limites de sequências. Como um dos objetivos desse material é ajudar os estudantes a compreender o processo de demonstração de um resultado, nossas demonstrações poderão conter instruções de como localizar hipóteses e teses no enunciado, ideias para a demonstração e demonstrações completas. Além disso, em alguns resultados daremos apenas as ideias, com o intuito de motivar os estudantes a construirem suas próprias demonstrações.

Teorema 3.1 (Unicidade do limite) *O limite de uma sequência, quando existe, é único.*

O primeiro passo em uma demonstração é sempre identificar a hipótese (o que sabemos) e a tese (o que queremos provar). Nesse caso, para interpretar o resultado, precisamos introduzir notações. Chamaremos de (x_n) a sequência convergente e $a \doteq \lim x_n$. Dizer que o limite é único pode ser interpretado assim: se ocorrer $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$, então $a = b$. Portanto:

Hipótese: $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$;

Tese: a = b

Note que a hipótese acima não nos diz muita coisa. A dica é sempre escrever as definições contidas na hipótese, pois isso pode ajudar a traçar uma estratégia para a demonstração. Nesse caso teremos:

Hipóteses: Dado $\varepsilon > 0$, existem $n_a, n_b \in \mathbb{N}$ tais que:

$$\Big(n > n_a \Rightarrow x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\Big) \text{ e } \Big(n > n_b \Rightarrow x_n \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)\Big)$$

Observe que, para valores grandes de n, x_n deve estar ao mesmo tempo dentro de dois intervalos: $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ e $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, logo se esses intervalos forem disjuntos, teremos uma contradição. Como a definição de limite vale para qualquer $\varepsilon > 0$, basta tomar $\varepsilon = |b-a|/2$ para obter essa contradição.

Agora que temos uma estratégia para a demonstração, façamos sua redação completa.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $a \neq b$. Como $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$, dado $\varepsilon = \dfrac{|b-a|}{2}$, existem $n_a, n_b \in \mathbb{N}$, tais que $\big(n > n_a \Rightarrow x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\big)$ e $\big(n > n_b \Rightarrow x_n \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)\big)$. Tomando $n_0 = \max\{n_a, n_b\}$ teremos $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$. Como $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (b-\varepsilon, b+\varepsilon) = \varnothing$, temos uma contradição. ∎

Um resultado bastante razoável é que toda subsequência de uma sequência é convergente seja convergente e tenha o mesmo limite, esse é nosso próximo resultado:

Teorema 3.2 *Se* $\lim x_n = a$ *então toda subsequência de* (x_n) *é convergente e converge para o mesmo limite* a.

Hipóteses:

(i) $\lim x_n = a$, ou seja, $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$; e

(ii) (x_{n_j}) é subsequência de (x_n).

Tese: $\lim x_{n_j} = a$

Observe que $|x_n - a| < \varepsilon$ sempre que o índice $n \geq n_0$ e que os índices da subsequência formam um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = (n_1, n_2, ..., n_j, ...)$ de $\mathbb{N}$, logo existe $n_{j_0} > n_0$. Portanto, $|x_{n_j} - a| < \varepsilon$, sempre que $n_j > n_{j_0}$.

Demonstração: Como $\lim x_n = a$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$. Seja $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tomando $n_{j_0} > n_0$ teremos, para todo j com $j > j_0$, que $n_j > n_{j_0} > n_0$ e portanto $|x_{n_j} - a| < \varepsilon$, o que mostra que $\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = a$. ∎

Observação 3.2 Em vista do resultado acima, para provar que uma sequência não converge, basta encontrar duas subsequências convergindo para limites diferentes.

Por exemplo, a sequência $x_n = \cos(n\pi/2)$ é divergente, pois

$$\lim x_{4n} = \lim \cos(2n\pi) = 1 \quad \text{e} \quad \lim x_{2n+1} = \lim \cos((2n+1)\pi/2) = 0.$$

A seguir apresentaremos resultados para sequências limitadas e sequências monótonas que serão úteis para o cálculo de limites.

Teorema 3.3 *Toda sequência convergente é limitada.*

Hipótese: (x_n) é convergente, ou seja, existe $\lim x_n = a$, e portanto

$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n \geqslant n_0 \Rightarrow x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Tese: (x_n) é limitada, ou seja, $\exists A, B \in \mathbb{R}$ tais que $A \leqslant x_n \leqslant B$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência convergente com limite a. Como a definição de limite vale para qualquer $\varepsilon > 0$, tomando $\varepsilon = 1$, existirá $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n \geqslant n_0 \Rightarrow x_n \in (a - 1, a + 1)$.

Note que os únicos termos que podem estar fora do intervalo $(a-1, a+1)$ são $x_1, x_2, x_3, ...x_{n_0-1}$, logo se tomarmos

$$A = \min\{x_1, x_2, ..., x_{n_0-1}, a-1\} \text{ e } B = \max\{x_1, x_2, ..., x_{n_0-1}, a+1\}$$

teremos todos os termos dessa sequência pertencentes ao intervalo $[A, B]$, e portanto a sequência é limitada. ■

Teorema 3.4 *Se* $\lim x_n = L$ *e* $A < L < B$ *então, a partir de um certo índice, teremos* $A < x_n < B$.

A prova desse resultado consiste em organizar as ideias abaixo em um texto com uma argumentação lógica convincente.

1. $\lim x_n = L \Rightarrow \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n \geqslant n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$;

2. Tomando $\varepsilon < \min\{L - A, B - L\}$ tem-se $\varepsilon < L - A \Rightarrow A < L - \varepsilon$ e também $\varepsilon < B - L \Rightarrow L - \varepsilon < B$

3. De 1. e 2. acima, $A \leqslant L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon \leqslant B$, para todo $n \geqslant n_0$.

Teorema 3.5 *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração: Para provarmos esse teorema devemos analisar os quatro casos de monotonicidade: sequência monótona crescente, decrescente, não-crescente e não-decrescente. Vamos começar analisando o caso em que (x_n) é uma sequência crescente, os demais casos serão muito parecidos.

Como (x_n) é uma sequência limitada, existem números reais A e B, tais que $A \leqslant x_n \leqslant B$, $\forall n \in \mathbb{N}$, em particular, o conjunto $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ é limitado superiormente, logo tem supremo.

Seja $S = \sup\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Pela definição de supremo, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $x_{n_0} \in \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ tal que:

$$S - \varepsilon < x_{n_0} < S$$

Como a sequência é crescente, então $S - \varepsilon < x_{n_0} < x_n < S$, para todo $n \geqslant n_0$, e portanto $x_n \in (S - \varepsilon, S + \varepsilon), \forall n \geqslant n_0$. Daqui segue que $\lim x_n = S$, ou seja, a sequência é convergente.

A prova para o caso não-decrescente é praticamente a mesma que fizemos acima, bastando trocar a desigualdade $x_{n_0} < x_n$ por $x_{n_0} \leqslant x_n$. Já nos casos decrescente e não crescente, a prova é completamente análoga a que fizemos, tomando o cuidado de observar que a sequência (x_n) será limitada inferiormente e devemos usar o ínfimo do conjunto. ■

3.4 Propriedades Aritméticas dos limites

Quando estudamos cálculo, aprendemos as propriedades aritméticas dos limite de funções, como por exemplo: limites da soma é igual a somas dos limites, quando ambos existem. É natural que tais resultados também valham para sequências, pois essas podem ser vistam como funções com domínio no conjunto dos números naturais. Porém, como a definição de limite de sequências é bastante particular, vamos enunciar corretamente e demonstrar tais resultados com base em nossas definições.

Teorema 3.6 *Se* $\lim x_n = a$ *e* $\lim y_n = b$*, então lim*$(x_n + y_n) = a + b$*, ou seja, o limite da soma é igual a soma dos limites.*

Demonstração: Como $x_n \to a$ e $y_n \to b$, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon/2$ e $n > n_2 \Rightarrow |y_n - b| < \varepsilon/2$. Logo

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Observe a primeira desigualdade acima é consequência da desigualdade triangular, logo é válida para todo n natural. Porém a segunda desigualdade só é verdadeira quando n for simultaneamente maior que n_1 e n_2, ou seja, quando $n > n_0$, sendo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Logo, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, tomamos o n_0 natural acima e teremos $|(x_n + y_n) - (a + b)| < \varepsilon$ sempre que $n \geqslant n_0$. ■

Teorema 3.7 *Se* $\lim x_n = a$ *e* $k \in \mathbb{R}$ *então* $\lim(kx_n) = ka$.

O passo fundamental dessa prova consiste em entender porque a desigualdade $|kx_n - ka| = |k|\,|x_n - a| < |k|\varepsilon$, para n grande, implica que (kx_n) converge para ka, ou equivalentemente, porque a definição de $x_n \to a$ pode ser reescrita da seguinte forma: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n \geqslant n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon/|k|$. Compreendido isso, a prova torna-se simples e fica a cargo do leitor.

Corolário 3.1 *Se* $\lim x_n = a$ *e* $\lim y_n = b$*, então lim*$(x_n - y_n) = a - b$.

Basta observar que $x_n - y_n = x_n + (-y_n)$ e usar os dois teoremas acima.

Teorema 3.8 *Se* $\lim x_n = 0$ *e* (y_n) *é limitada então* $\lim(x_n y_n) = 0$.

Hipótese: (y_n) é limitada $\Leftrightarrow$ existe $K > 0$ tal que $|y_n| \leqslant K, \forall n$; e

$x_n \to 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que: $n > n_0 \Rightarrow |x_n - 0| < \varepsilon$;

Tese: $x_n y_n \to 0$, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que: $n > n_0 \Rightarrow |x_n y_n - 0| < \varepsilon$.

Note que multiplicando as desigualdades $|y_n| \leqslant K$ e $|x_n| < \varepsilon$ que aparecem na hipótese, obtemos $|x_n y_n| < K\varepsilon$, que é praticamente o que precisamos, exceto pelo K que aparece multiplicando. Para evitar isso, basta exigir na hipótese acima que $|x_n - 0| < \varepsilon/K$, para todo $n > n_0$. Isso é permitido porque já sabemos que $\lim x_n = 0$, ou seja, a definição de limite vale para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, inclusive para ε/K. Agora basta organizar essas ideias na forma de demonstração, o que deixamos para o leitor.

Teorema 3.9 *Se* $\lim x_n = a$ *e* $\lim y_n = b$*, então* $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$.

Demonstração: Em vez de dar uma demonstração clássica desse teorema, vamos usar a força dos teoremas já provados. Primeiramente observe que:

$$x_n y_n - ab = x_n y_n + (-x_n b + x_n b) - ab = x_n(y_n - b) + b(x_n - a).$$

Note que $\lim(y_n - b) = 0$ e $\lim(x_n - a) = 0$, além disso (x_n) é limitada, pois toda sequência convergente é limitada. Logo, pelo teorema 3.8 temos

$$\lim x_n(y_n - b) = 0 \quad \text{e que} \quad \lim b(x_n - a) = 0$$

Portanto $\lim(x_n y_n - ab) = \lim x_n(y_n - b) + \lim b(x_n - a) = 0$, o que implica em $\lim x_n y_n = ab$.

■

Teorema 3.10 *Se* $\lim x_n = a$ *e* $\lim y_n = b, b \neq 0$*, então* $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$

Demonstração: Primeiramente notemos que:

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{x_n b - a y_n}{y_n b} = (x_n b - a y_n)\frac{1}{y_n b}, \tag{3.1}$$

como $\lim(x_n b - y_n a) = b \lim x_n - a \lim y_n = 0$, basta provarmos que a sequência $((y_n b)^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e usar o teorema 3.8 na expressão (3.1) para concluir a demonstração.

Mas $\lim by_n = b^2$, logo tomando $\varepsilon = b^2/2$ na definição de limite, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n > n_0 \Rightarrow by_n \in (b^2 - \frac{b^2}{2}, b^2 + \frac{b^2}{2})$. Em particular, $by_n > b^2/2$, sempre que $n > n_0$, ou seja, $0 < \frac{1}{by_n} < \frac{2}{b^2}$, $\forall n > n_0$. Daqui segue que a sequência $((y_n b)^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. ∎

3.5 Teorema de Bolzano - Weierstrass

Esse teorema leva o nome de dois grandes matemáticos do século XIX: Bernhard Bolzano (1781 – 1848), filósofo, teólogo e matemático que deu importantes contribuições a teoria de conjuntos e ao cálculo infinitesimal; e Karl Weierstrass (1815 – 1887), considerado o pai da análise matemática moderna e um dos principais responsáveis pela fundamentação teórica do Cálculo.

No ano de 1834, em sua obra sobre teoria das funções, Bolzano publicou um lema que estabelecia a existência do supremo para um conjunto específico de números reais, que mais tarde ficou conhecido como Teorema de Bolzano-Weierstrass, um dos teoremas mais importantes da análise. Nessa seção vamos apresentar duas demonstrações diferentes desse resultado e ver algumas consequências. Primeiro vamos ao enunciado.

Teorema 3.11 (Bolzano-Weierstrass) *Toda sequência limitada possui subsequência convergente.*

Apresentamos abaixo duas demonstrações desse teorema, pois ambas envolvem técnicas bastante usadas em análise. A primeira usa o método das bisseções e a segunda o axioma do supremo.

3.5.1 Demonstração 1: Método das Bisseções

Dada uma sequência limitada qualquer (x_n), precisamos construir uma subsequência $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ convergente. O maneira mais intuitiva para fazer isso é através do método da bisseção de intervalos. A ideia é a seguinte:

Como (x_n) é uma sequência limitada, existem números reais a e b tais que

$$a \leqslant x_n \leqslant b, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dividindo o intervalo $[a, b]$ em seu ponto médio, obtemos dois subintervalos $[a, \frac{a+b}{2}]$ e $[\frac{a+b}{2}, b]$. Observe que pelo menos um desses subintervalos possui infinitos pontos da sequência.

Vamos escolher um subintervalos de $[a, b]$ que contenha infinitos pontos da sequência e chamá-lo de I_1 e a seguir escolher um termo x_n da sequência em I_1, o qual passaremos a denotar x_{n_1}. Observe também que o comprimento de I_1 é $(b-a)/2$.

A seguir, dividindo I_1 em seu ponto médio, obtemos dois subintervalos fechados de comprimento $(b-a)/4$, dos quais pelo menos um possui infinitos pontos de (x_n). Escolhemos um desses subintervalos, contendo infinitos pontos da sequência, e o chamamos de I_2. Também escolhemos um termo da sequência (x_n) em I_2, o qual passaremos a denotar x_{n_2}. Note que podemos escolher $n_2 > n_1$, pois existe uma quantidade infinita de termos em I_2.

Façamos mais um passo da construção para deixar o claro o processo. Primeiro dividimos o intervalo I_2 em seu ponto médio, obtendo dois novos subintervalos fechados de comprimento $(b-a)/2^3$. A seguir chamamos de I_3 um dos subintervalos de I_2 que contém uma infinidade de termos da sequência (x_n). Finalmente escolhemos $x_{n_3} \in I_3$ da sequência (x_n), com $n_3 > n_2$.

Prosseguindo nesse processo de construção, obtemos:

i. uma sequência de intervalos encaixados $I_1 \supset I_2 \ldots \supset I_k \ldots$;

ii. uma subsequência (x_{n_k}), com $x_{n_k} \in I_k, \forall k$;

iii. o comprimento de I_k é $|I_k| = (b-a)/2^k$.

Agora, o teorema dos intervalos encaixados garante a existência de pelo menos um ponto $a \in \cap_{n\in\mathbb{N}}$ e o item *iii.* garante que a é o único elemento que pertence a todos os subintervalos I_k. Finalmente, como $x_{n_k}, a \in I_k$ então $|x_{n_k} - a| < (b-a)/2^k$, para todo k temos $\lim x_{n_k} = a$.

Observação 3.3 O texto acima contém praticamente todos os passos para redigir uma demonstração completa do teorema de Bolzano-Weierstrass (e recomendamos fortemente que você faça isso), entretanto cabem aqui algumas observações:

a. o processo de construção acima pode dar a impressão que é necessário usar o axioma de escolha para obter os intervalos I_k e os termos x_{n_k}, entretanto é possível estabelecer uma regra para a escolha em cada passo, por exemplo: podemos chamar de I_{k+1} o subintervalo de I_k mais próximo de a e podemos chamar de n_{k+1} o menor número natural, maior que

n_k, tal que $x_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$, assim fica claro que o princípio da boa ordenação é suficiente para obter a subsequência (x_{n_k});

b. no processo de construção deve-se usar definição por indução, ou seja, dizer como o primeiro termo da subsequência será obtido e supondo obtidos os primeiros k termos, como se faz para obter o termo $k+1$. Entretanto, em geral, em textos de cunho didático como esse, é mais instrutivo apresentar dois ou três passos do processo de construção para ajudar o leitor a compreender melhor a ideia geral;

c. não é preciso usar o item *iii.* acima para garantir que a é o único elemento a pertencer a todos os subintervalos I_k para depois provar que esse a será limite da subsequência. Basta saber que existe um elemento que pertence a todos os subintervalos. Releia a prova acima desconsiderando a afirmação de a ser único para se convencer disso; e

d. para provar que a subsequência é de fato convergente, use a definição de convergência: dado $\varepsilon > 0$ existe k_0 tal que $k \geqslant k_0 \Rightarrow |x_{n_k} - a| < \varepsilon$.

3.5.2 Demonstração 2: Axioma do Supremo

Seja (x_n) uma sequência limitada. Por definição existem números reais a e b tais que: $a \leq x_n \leq b$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Considere agora o seguinte conjunto:

$$X = \{t \in \mathbb{R}; t \leq x_n, \text{ para infinitos termos da sequência } (x_n)\}.$$

Note que:

i. $a \in X$, pois $a \leqslant x_n$, para todo n, e portanto $X \neq \varnothing$;

ii. $b \notin X$ e b é cota superior para X, ou seja $x_n \leqslant b, \forall n \in \mathbb{N}$.

Denotando por $S = \sup X$, vamos construir uma subsequência x_{n_k} que converge para S usando a definição de supremo, da seguinte forma:

a. Como $S = \sup X$, pela definição de supremo, existe $t_1 \in X$ tal que

$$S - 1 < t_1 \leqslant S.$$

Do fato de $t_1 \in X$ sabemos que existe uma infinidade de termos da sequência (x_n) com $t_1 \leq x_n$. Escolha o menor natural n tal que $t_1 \leqslant x_n$ e chame esse termo da sequência de x_{n_1};

b. Supondo escolhidos $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$, escolha $x_{n_{k+1}}$ da seguinte forma: pela definição de supremo existe $t_{k+1} \in X$ tal que

$$S - \frac{1}{k+1} < t_{k+1} \leqslant S.$$

A seguir escolha o menor natural n tal que $t_{k+1} \leqslant x_n$ e chame esse x_n de $x_{n_{k+1}}$.

Como $S - 1/(k+1) < x_{n_k} \leqslant S$, para todo k, segue do teorema do confronto que $\lim x_{n_k} = S$, o que conclui a demonstração do teorema. ■

3.6 Sequências de Cauchy

O francês Augustin Louis Cauchy (1789-1857) foi o primeiro matemático a fazer um estudo rigoroso das condições de convergência de séries infinitas, além de dar uma definição rigorosa para a integral. Em 1821, Cauchy publicou o texto *"Cours d'analyse"* para ser usado por seus alunos na *École Polytechnique*, nesse texto ele estava preocupado com o desenvolvimento dos teoremas básicos do cálculo de forma tão rigorosa quanto era possível naquela época.

Naturalmente, o curso de análise de Cauchy, como qualquer trabalho pioneiro, carecia de rigor em muitos aspectos. Por exemplo, Cauchy assumia que todas as funções contínuas eram diferenciáveis. O auge de rigor em matemática ocorreu no século XX com Nicolas Bourbaki (nome de um grupo de matemáticos franceses na década de 1930, tais como: Jean Dieudonné, André Weil e Henri Cartan) que começou a rever todos os fundamentos da matemática com uma exigência de rigor absoluta.

Neste capítulo veremos um critério de convergência de sequências cuja vantagem é decidir se uma sequência é convergente ou não sem conhecermos o seu limite. Este resultado desempenha um papel fundamental na análise em análise funcional, espaços métricos e topologia e possui um interesse mais teórico que prático.

Definição 3.2 *Dizemos que a sequência (x_n) é de Cauchy se, para cada $\varepsilon > 0$ dado for possível encontrar um n_0 tal que $|x_m - x_n| < \varepsilon$, sempre que $m, n > n_0$. Usando os quantificadores da lógica* *matemática, teremos:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$$

Note que a diferença entre a definição de sequência de Cauchy e de sequência convergente, é que na definição de convergência precisamos conhecer o limíte para podermos usá-la, ao passo que, na definição de sequência de Cauchy exige-se apenas que os termos da sequência fiquem arbitrariamente próximos. Um dos objetivos dessa sessão é provar que estes dois conceitos são equivalentes.

Uma das implicações é bastante simples, pois $|x_m - x_n| \leqslant |x_n - a| + |a - x_m|$, e cada uma das parcelas $|x_n - a|$ e $|a - x_m|$ é menor que ε. Para provar a outra implicação (toda sequência de Cauchy é convergente), precisaremos dois resultados auxiliares sobre sequências de Cauchy.

Teorema 3.12 *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência convergente e $a = lim x_n$. Por definição, dado $\varepsilon > 0$, existe um natural n_0 tal que para todo $n > n_0$ e $n > n_0$ temos $|x_n - a| < \varepsilon/2$ e $|x_m - a| < \varepsilon/2$. Logo

$$|x_m - x_n| = |(x_m - a) + (a - x_n)| \leqslant |x_m - a| + |a - x_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

sempre que $n > n_0$, ou seja, (x_n) é de Cauchy. ∎

Teorema 3.13 *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

A ideia aqui é fixar um índice $m > n_0$ na definição de sequência de Cauchy e repetir a prova de que toda sequência convergente é de Cauchy. Esse termo fixado fará o papel do limite na demonstração do teorema 3.3.

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy. Por definição, dado $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < 1$, sempre que $m, n > n_0$.

Vamos fixar $m^* = n_0 + 1$ na expressão acima. Neste caso, $|x_n - x_{m^*}| < 1$, para todo $n > n_0$. Isso significa que $x_{m^*} - 1 < x_n < x_{m^*} + 1$, ou seja,

$$x_n \in (x_{m^*} - 1, x_{m^*} + 1), \ \forall n > n_0$$

Tomando: A = min $\{x_1, x_2, \ldots, x_{m^*} - 1\}$ e B = max $\{x_1, x_2, \ldots, x_{m^*} + 1\}$, teremos $A \leqslant x_n \leqslant B$, $\forall n \in \mathbb{N}$, logo (x_n)é limitada. ∎

Teorema 3.14 *Seja (x_n) uma sequência de Cauchy e (x_{n_k}) uma subsequência qualquer de (x_n). Se $lim x_{n_k} = a$ então $lim x_n = a$.*

Ideia: Nesse caso temos $|x_n - x_m| < \varepsilon$, quando m e n são grandes e $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$ quando k é grande. Tomando n_k, m e k grandes, as duas desigualdades serão satisfeitas e teremos: $|x_n - a| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - a| \leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a|$.

Demonstração: Como (x_n) é uma sequência de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Além disso, $\lim(x_{n_k}) = a$ logo, para o mesmo $\varepsilon > 0$ acima, existe $k_0 > 0$ tal que

$$k > k_0 \Rightarrow |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Se colocarmos $n_0^* = \max\{n_0, n_{k_0}\}$ teremos $k > k_0 \Leftrightarrow n_k > n_0^*$ e portanto para qualquer $n, n_k > n_0^*$ teremos

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

o que significa que $\lim x_n = a$. ■

Teorema 3.15 *Toda sequência de Cauchy é convergente.*

Para provar esse teorema basta usar o fato que toda sequência de Cauchy é limitada, logo pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass possui subsequência convergente. Segue do teorema acima que a sequência de Cauchy original também é convergente.

3.7 Limites no Infinito

Quase todos os resultados que vimos até agora eram sobre sequências convergentes, porém há uma classe de sequências divergentes que merecem destaque por causa das várias aplicações onde elas aparecem e da regularidade de seu comportamento, são as sequências com limites no infinito, ou seja, sequências cujos valores, em módulo, tornam-se arbitrariamente grandes, por exemplo:

1. $(1, 2, 3, \dots, n, \dots)$, a sequência dos números naturais;

2. $(1, 4, 9 \dots, n^2, \dots)$, a sequência dos quadrados perfeitos;

3. $(2, 4, 6, \dots, 2n, \dots)$, a sequência dos números pares.

Nesses três exemplos dizemos que o limite da sequência é $+\infty$. Em matemática o símbolo $+\infty$ não corresponde a nenhum número e é usado para indicar que o limíte é maior que qualquer número préfixado, ou seja, fixado qualquer número posititivo A, todos termos da sequência (x_n) são maiores que A, quando n é suficientemente grande. Daqui obtemos nossa primeira definição.

Definição 3.3 *Dizemos que a sequência* (x_n) *tem limite infinito, e denotamos isso por* $\lim x_n = \infty$ *se, para qualquer* $A > 0$*, pudermos encontrar* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n > A$*, sempre que* $n > n_0$*.*

Em notação lógica, podemos reescrever a definição acima da seguinte forma:

$$\lim x_n = +\infty \;\Leftrightarrow\; (\forall A > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow x_n > A).$$

Analogamente,

$$\lim x_n = -\infty \;\Leftrightarrow\; (\forall B > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow x_n < -B).$$

Vamos apresentar alguns resultados úteis sobre operações aritméticas com limites no infinito.

Teorema 3.16 *Se* $\lim x_n = \infty$ *e existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $y_n \geqslant c$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, então* $\lim(x_n + y_n) = +\infty$

Ideia: observe que $y_n \geqslant c$ e $x_n > A$, para n grande, logo $x_n + y_n > A + C$, qualquer que seja $A > 0$. Logo basta organizar as definições e ajustar as constantes.

Demonstração: Como, por hipótese, $\lim x_n = +\infty$, dado qualquer $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n > A - C$. Logo

$$x_n + y_n > (A - C) + C = A$$

sempre que $n > n_0$. Portanto, $\lim(x_n + y_n) = +\infty$ ■

Observação 3.4 Observe que é fácil adaptar a demonstração acima para que tenhamos $\lim(x_n.y_n) = +\infty$, basta exigir $C > 0$, pois $x_n > A/C > 0$ e $y_n > C > 0$ implicam que $x_n \cdot y_n > A/C \cdot C = A$, para n grande.

Teorema 3.17 *Seja (x_n) uma sequência de termos positivos. Então*
$\lim x_n = 0$ *se e somente se* $\lim \dfrac{1}{x_n} = +\infty$.

Este é um teorema do tipo "se e somente se", portanto precisamos demonstrar duas proposições:

- A suficiência: $\lim x_n = 0 \Rightarrow \lim \dfrac{1}{x_n} = +\infty$

  Note que a hipótese $x_n \longrightarrow 0$ garante que, dado $\varepsilon > 0$, existe um natural n_0 tal que $|x_n| < \varepsilon$, sempre que $n > n_0$. Assim fica fácil ver que $|1/x_n| > 1/\varepsilon$, sempre que $n > n_0$, ou seja, dado $A > 0$ grande, basta tomar $\varepsilon = 1/A$ na definição acima para encontrar o n_0 que garante que $1/|x_n| > A$.

- A necessidade: $\lim \dfrac{1}{x_n} = +\infty \Rightarrow \lim x_n = 0$;

  Aqui basta usar o mesmo tipo de raciocínio do item anterior.

Demonstração:
($\Rightarrow$) Como $\lim x_n = 0$, dado $A > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n| < \frac{1}{A}$. Logo $\frac{1}{x_n} > A$, sempre que $n > n_0$, ou seja, $\lim 1/x_n = +\infty$.
($\Leftarrow$) Como $\lim \frac{1}{x_n} = +\infty$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{x_n} > \frac{1}{\varepsilon}$, sempre que $n > n_0$. Logo $x_n < \varepsilon, \forall n > n_0$, e portanto $\lim x_n = 0$ ■

Teorema 3.18 *Sejam (x_n) e (y_n) sequências de números positivos. Então:*

a. Se existe um $C > 0$ tal que $x_n > C, \forall n \in \mathbb{N}$, e $\lim y_n = 0$ então $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = +\infty$;

b. Se (x_n) é limitada e $\lim y_n = +\infty$ então lim$\dfrac{x_n}{y_n} = 0$.

Observe que esse teorema pode ser demonstrado, sem grandes dificuldades, a partir das definições, o que é fortemente aconselhado ao leitor. Entretanto propomos aqui uma demonstração alternativa, baseada em resultados anteriores.

Demonstração: No item *a*, observe que $x_n > C > 0 \Leftrightarrow 0 < x_n < 1/C$, para todo natural n, logo a sequência $(1/x_n)$ é limitada. Como $\lim y_n = 0$, segue do teorema 3.8 que $\lim y_n/x_n = \lim y_n \cdot \frac{1}{x_n} = 0$, e do teorema anterior que $\lim x_n/y_n = +\infty$. Para o item *b*, como $\lim y_n = +\infty$, pelo teorema anterior temos $\lim 1/y_n = 0$. Como (x_n) é limitada, segue do teorema 3.8 que $\lim x_n/y_n = \lim x_n \cdot 1/y_n = 0$. ■

3.8 Indeterminações

Todo estudante ouve falar que expressões como $0/0$ e 0^0 não existem ou não fazem sentido. Professores de matemática mais cuidadosos dizem aos seus alunos que essas expressões são chamadas indeterminações e até fornecem argumentos bastante convincentes, tais como:

- ▷ todo número elevado a zero é igual a um, e zero elevado a qualquer número é zero, portanto $0^0 = 1$ e $0^0 = 0$, ou seja, 0^0 é uma indeterminação.
- ▷ Ou ainda: $0/0 = 5$ pois, passando o zero que está dividindo para o outro lado multiplicando tem-se $0 = 5.0$. Logo $0/0$ pode ser 5 ou qualquer outro número, logo é uma indeterminação.

Obviamente tais explicações não tem fundamentação matemática apesar de convencerem a grande maioria das pessoas que esses símbolos podem assumir diferentes valores e portanto não estão bem determinados. Nosso objetivo nessa seção é tornar mais preciso o termo "indeterminação" estudando os sete tipos de indeterminações conhecidos:

$$0^0, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty^0 \ \text{ e } \ 1^\infty$$

Como essas expressões não tem sentido matemático, devem ser analisadas como o resultado de uma operação que envolva limites (de sequências ou de funções). Vamos usar o limite de sequências para analisar cada uma dessas expressões e justificar porque recebem o nome de indeterminação.

Em todos os casos abaixo C é uma constante arbitrária.

- $0/0$

  Considere as sequências: $x_n = C/n$ e $y_n = 1/n$. Note que ambas convergem para 0 e que $\lim x_n/y_n = C$. Logo mudando o valor de C obtemos valores diferentes para a expressão $0/0$. Além disso, tomando $y_n = \pm\frac{1}{n^2}$ teríamos $\lim \frac{x_n}{y_n} = \pm\infty$.

- $0 \cdot \infty$

Considere agora as sequências $x_n = C/n$ e $y_n = n$, então $\lim x_n = 0$ e $\lim y_n = +\infty$, entretanto $\lim x_n.y_n = C$. Além disso, se $y_n = \pm n^2$ tem-se $\lim x_n.y_n = \pm\infty$. Logo $0 \cdot \infty$ é uma indeterminação.

- $\dfrac{\infty}{\infty}$

  Considere agora as sequências $x_n = Cn$ e $y_n = n$. Neste caso $\lim x_n = +\infty$, $\lim y_n = +\infty$ e $\lim x_n/y_n = C$. Além disso, se $x_n = \pm n^2$ tem-se $\lim x_n/y_n = \pm\infty$. Logo $\infty \cdot \infty$ é uma indeterminação.

- $\infty - \infty$

  Considere as sequências $x_n = n + C$ e $y_n = n$. Neste caso $\lim x_n = +\infty$, $\lim y_n = +\infty$ e $\lim x_n - y_n = C$. Além disso, se $x_n = \pm n^2 + n$ tem-se $\lim x_n - y_n = \lim \pm n^2 = \pm\infty$. Logo $\infty - \infty$ é uma indeterminação.

- 1^∞

  Considere as sequências $x_n = 1 + C/n$ e $y_n = n$, assim $\lim x_n = 1$ e $\lim y_n = +\infty$. Note que

  $$\lim (x_n)^{y_n} = \lim \left(1 + \frac{C}{n}\right)^n = e^C,$$

  Logo 1^∞ é uma indeterminação.

- ∞^0

  Considere as sequências $x_n = n$ e $y_n = \frac{\log C}{\log n}$, sendo $C > 0$. Neste caso $\lim x_n = +\infty$, $\lim y_n = 0$ e $\lim (x_n)^{y_n} = C$, pois chamando $z_n = (x_n)^{y_n}$ teremos, para todo n natural que

  $$\log z_n = \log (x_n)^{y_n} = \log \left(n^{\frac{\log C}{\log n}}\right) = \frac{\log C}{\log n} \log n = \log C \Rightarrow z_n = c.$$

- 0^0

  Considere as sequências $x_n = \frac{1}{n}$ e $y_n = -\frac{\log C}{\log n}$, sendo $C > 0$. Neste caso $\lim x_n = 0$, $\lim y_n = 0$ e $\lim (x_n)^{y_n} = C$, pois chamando $z_n = (x_n)^{y_n}$ teremos, para todo n natural que

  $$\log z_n = \log \left(\frac{1}{n}\right)^{-\frac{\log C}{\log n}} = -\frac{\log C}{\log n} \log \frac{1}{n} = -\frac{\log C}{\log n}\Big(\log 1 - \log n\Big)$$

  ou seja $\log z_n = \log C \Rightarrow z_n = c$, para todo natural n.

Capítulo 4

Duas Sequência Famosas

4.1 Sequência de Fibonacci

Neste capítulo apresentamos as sequências de Fibonacci e Padovan que possuem grande interesse matemático e estão associadas a construções geométricas bastante interessantes.

4.1.1 Contexto Histórico

Fibonacci é como ficou conhecido o matemático italiano Leonardo de Pisa, nascido por volta de 1175. O apelido Fibonacci é um diminutivo de *fillius Bonacci*, ou seja, o filho de Bonacci, pois seu pai chamava-se Guilielmo Bonacci. Leonardo começou seus estudos em matemática com professores islâmicos, pois seu pai trabalhava em um entreposto comercial no Mediterrâneo.

Quando regressou a sua terra natal, utilizou os conhecimentos adquiridos em suas viagens para escrever trabalhos, dentre os quais se destacam três grandes obras: *Liber Abbaci* (1202), *Pratica Geometrae* (1220) e *Liber Quadratorum* (1225). O *Liber Abbaci*, cuja tradução é "Livro do Ábaco", refere-se ao estudo do cálculo aritmético e é considerado o melhor tratado sobre Aritmética e Álgebra da época.

4.1.2 Sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci tornou-se conhecida devido ao seguinte problema proposto por Fibonacci na obra "Liber Abaci":

> *"Um homem põe um casal de coelhos dentro de um cercado. Quantos pares de coelhos serão produzidos em um ano, se a natureza desses coelhos é tal que a cada mês um casal gera um novo casal, que se torna fértil a partir do segundo mês?"*

Para resolver o problema devemos levar em conta as seguintes hipóteses:

- A cada mês ocorre a produção de um par de coelhos;
- Cada casal de coelhos começa a produzir quando completa dois meses.

Vamos analisar o crescimento do número de coelhos mês a mês:

1. No primeiro mês há apenas 1 casal de coelhos;
2. Como os coelhos só começam a produzir a partir de dois meses, no segundo mês ainda contamos com 1 casal;
3. Já no terceiro mês teremos o nascimento de 1 casal de coelhos, totalizando assim 2 casais de coelhos;
4. No quarto mês o casal inicial gera mais um casal de coelhos, o casal nascido no mês anterior ainda precisa aguardar um mês para gerar um novo casal. Logo temos 3 casais de coelhos;
5. No quinto mês o casal inicial gera mais um casal de coelhos, o casal nascido no terceiro mês também gera um novo casal e o nascido no mês anterior deve esperar mais um mês para gerar um novo casal. Logo temos 5 casais de coelhos;
6. E assim sucessivamente.

Chamando de x_n o número de casais de coelhos no n-ésimo mês teremos: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 5, x_6 = 8, \ldots$. Chamaremos essa sequência de sequência de Fibonacci:

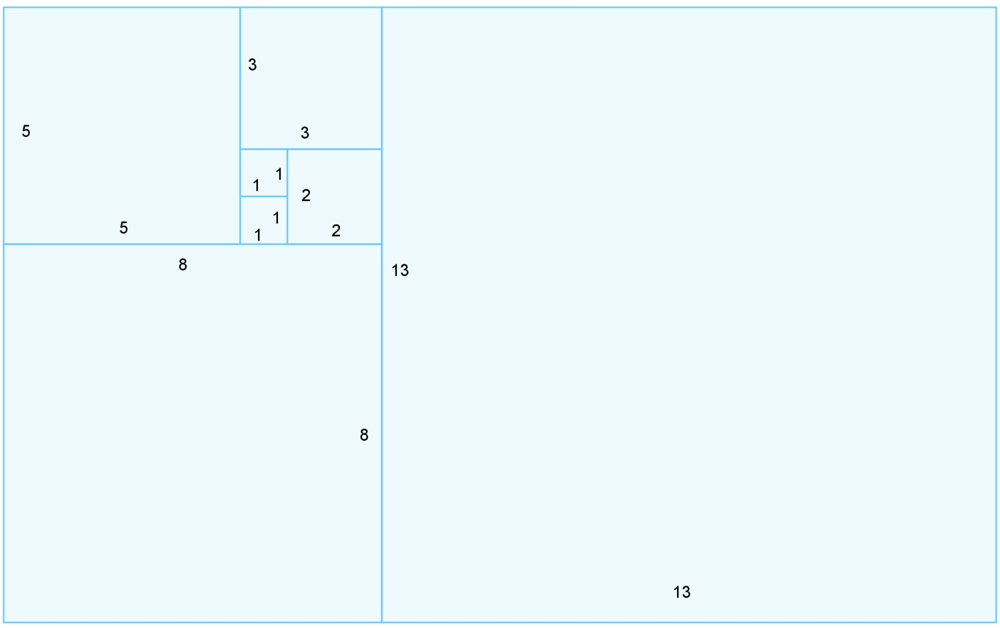
$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots)$$

Observe que cada um dos termos dessa sequência, exceto os dois primeiros, é obtido pela soma dos dois termos anteriores, ou seja, a sequência de Fibonacci é uma sequência recorrente que pode ser definida da seguinte forma

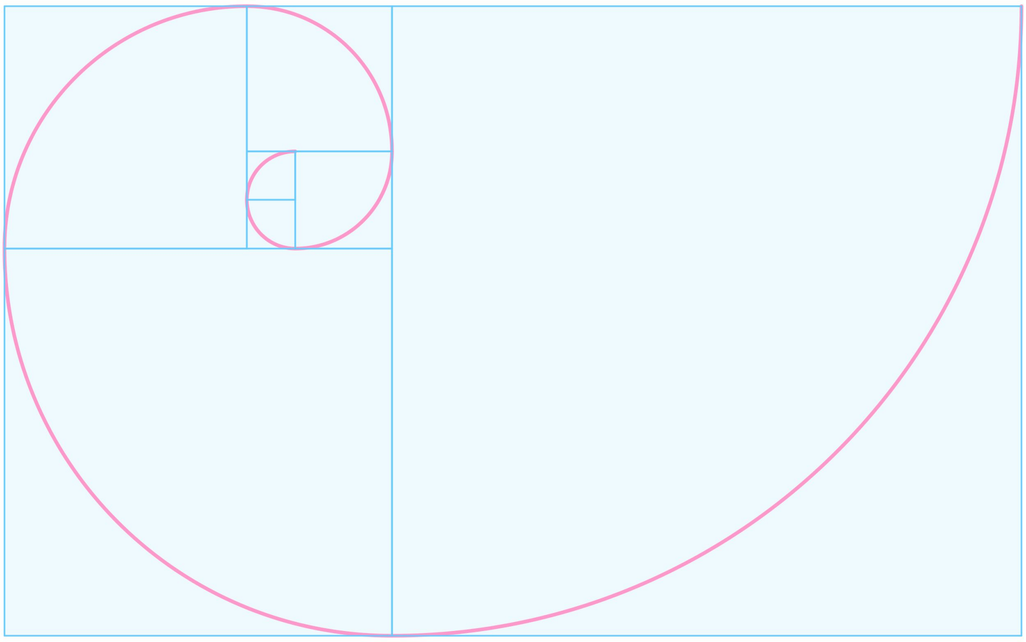
$$\begin{cases} x_1 &= x_2 = 1 \\ x_n &= x_{n-1} + x_{n-2} \end{cases}$$

4.1.3 Representação Geométrica da Sequência de Fibonacci

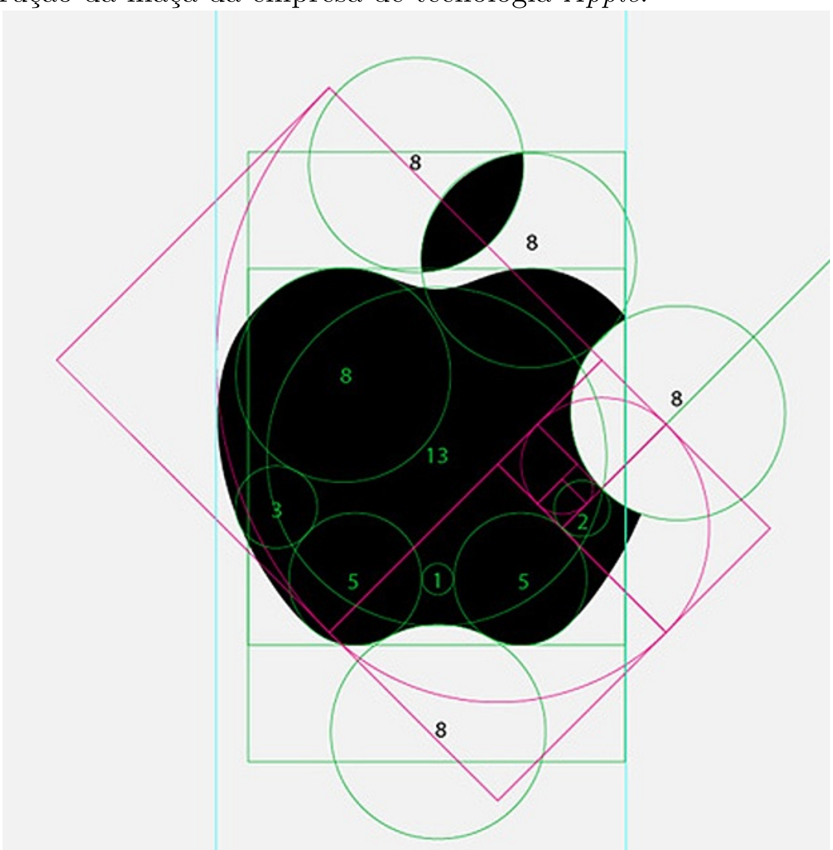
Com a sequência de Fibonacci podemos construir o retângulo de Fibonacci, também conhecido como retângulo áureo ou retângulo de ouro. A construção desse retângulo é de fácil compreensão e pode ser trabalhada no ensino fundamental e médio. Essa construção é feita através da justaposição de quadrados da seguinte forma:



A partir dessa construção, com o uso de um compasso simples, pode-se construir a espiral de Fibonacci:



A título de curiosidade, ilustramos abaixo como o retângulo de Fibonacci foi usado na construção da maçã da empresa de tecnologia *Apple*:



4.2 Sequência de Padovan

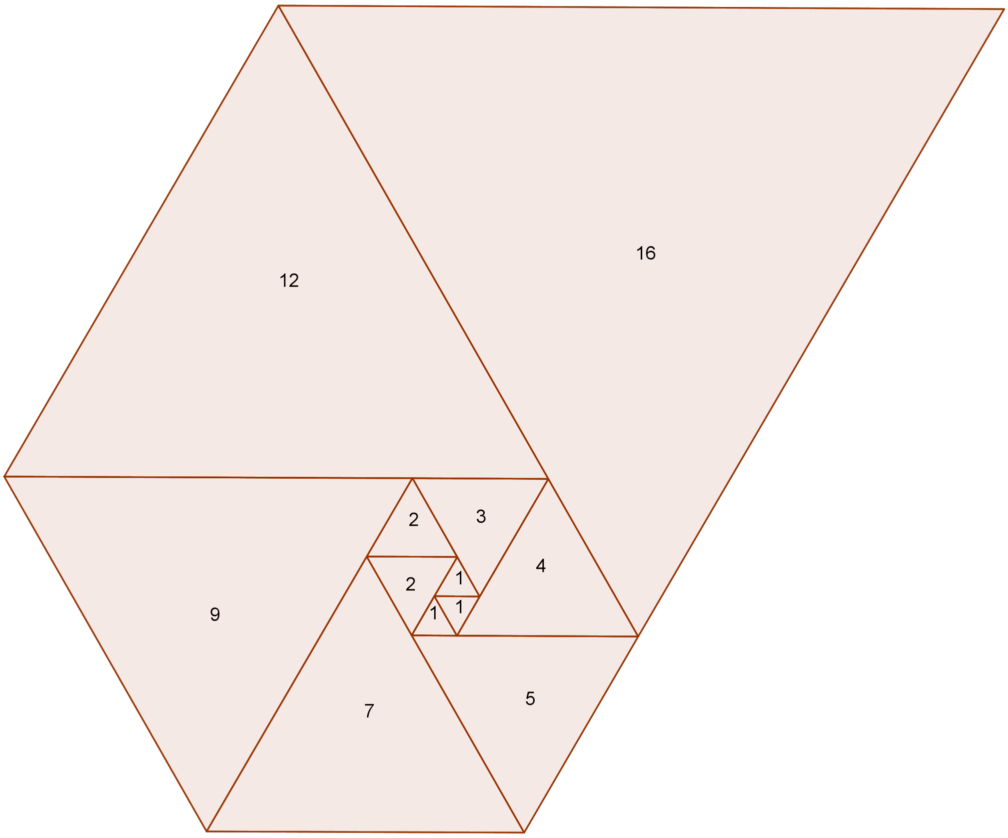
A sequência de Padovan é a sequência de números inteiros definida pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = x_3 = 1 \\ x_n = x_{n-2} + x_{n-3} \end{cases}$$

Os primeiros termos dessa sequência são:

$$(1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37 \ldots).$$

Essa sequência recebe o nome do matemático Richard Padovan. A definição acima foi dada pelo matemático Ian Stewart em seu artigo na revista Scientific American, em junho de 1996. Assim como a sequência de Fibonacci, a sequência de Padovan também possui uma representação geometrica curiosa baseada na construção de triângulos equiláteros cujos lados seguem os termos dessa sequência.



Capítulo 5

Considerações Finais

Neste trabalho tentamos reproduzir os primeiros passos na construção de uma material didático para o tópico de sequência numérica presente na disciplina de Fundamentos de Análise da UFPR. Tendo em vista que este é o primeiro passo, claramente há várias possibilidade de aperfeiçoamento, como por exemplo:

- Inclusão de mais informações históricas de problemas relevantes no desenvolvimento dessa teoria;

- O acréscimo de novos conteúdos, aplicações e exemplos relevantes para a formação de professores de matemática, por se tratar de uma disciplina específica do currículo de Licenciatura em Matemática;

- Confecção de listas de exercícios fundamentais a melhor compreensão e desenvolvimento do conteúdo por parte dos alunos

Sendo assim encerro minha monografia e minha graduação deixando uma parte do meu aprendizado para que os futuros alunos de matemática da Universidade Federal do Paraná e espero que algum deles tenham o interesse em dar continuidade a esse trabalho.

Referências Bibliográficas

- Alexandre Edigley: *Proporção áurea, sequência de Fibonacci e o logo da Apple*, disponível em <www.prof-edigleyalexandre.com/2011/07/proporcao-aurea-sequencia-de-fibonacci.html> acesso em maio de 2014.

- *Augustin Louis Cauchy (1789-1857)*, disponível em <http://ecalculo.if.usp.br/historia/cauchy.htm>, acesso em agosto de 2013

- Ávila, Geraldo.: *Análise Matemática para Licenciatura*, Ed. E. Blücher.

- Ávila, Geraldo.: *Análise Matemática*, Ed. E. Blücher.

- *Bernhard Bolzano*, disponível em <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm98/icm31/Bolzano.htm> acesso em maio de 2014.

- Cavalcanti, Jorge.: *Matemática Discreta, 06*, disponível em <http://www.univasf.edu.br/jorge.cavalcanti/Mat_Disc_Parte06.pdf> acesso em abril de 2014.

- Figueiredo, Djairo G.: *Análise I*, Ed. LTC.

- Lima, Elon L.: *Curso de Análise, vol 1*, Projeto Euclides. SBM.

- Lima, Elon L.: *Análise Real, vol 1*, IMPA, SBM.

- Malta, Iaci; Pesco, Sinésio; Lopes, Hélio.: *Cálculo a uma Variável, vol I, Uma Introdução ao Cálculo*, Ed. PUC- Rio- 2010.

- Moreira, Carlos G.: *Sequências Recorrentes*, disponível em
  < http://www.bienasbm.ufba.br/M55.pdf>
  IMPA, acesso em abril de 2014.

- *Padovan sequence*, disponível em
  $< http : //en.wikipedia.org/wiki/Padovan_sequence >$
  acesso em maio de 2014.

- Pereira, Lívia da C., Ferreira, Marcio V.: *Sequência de Fibonacci: História, propriedades e relações com a razão áurea*, disponível em
  <http://sites.unifra.br/Portals/36/tecnologicas/2008/fibonacci.pdf>
  acesso em maio de 2014.