Article

« Sur l’estimation d’un système complet de demande sous rationnements quantitatifs »

Camille Bronsard et Lise Salvas-Bronsard

L'Actualité économique, vol. 55, n° 3, 1979, p. 286-302.

SUR L'ESTIMATION D'UN SYSTÈME COMPLET DE DEMANDE SOUS RATIONNEMENTS QUANTITATIFS [1]

La portée de la théorie de la demande sous rationnements quantitatifs tient au fait que, même si un consommateur n'est pas rationné sur les marchés, il l'est ou dans sa demande de biens publics, ou dans les externalités qu'il subit, ou par la structure de récursivité de ses propres consommations. Par ailleurs, comme cette théorie permet d'engendrer des équilibres non walrassiens et, en particulier, un équilibre keynésien (voir Malinvaud [10] et Bénassy [4]), elle est apte à caractériser le comportement du consommateur d'une manière plus riche que la théorie usuelle en le situant dans des contextes institutionnels fort variés, permettant ainsi une approximation plus fine du réel.

Dans cet article, nous allons explorer un élément de la richesse économétrique de cette théorie en comparant les estimations d'une forme structurelle néo-keynésienne et d'une forme structurelle walrassienne. Pour y arriver, nous rappelons d'abord les résultats de la théorie usuelle et les utilisons pour spécifier le modèle de Rotterdam [3], [12]. Nous généralisons ensuite légèrement la théorie de la demande sous rationnements quantitatifs de Drèze, [7], [8], l'interprétons dans un milieu environnant keynésien et l'utilisons pour spécifier une forme structurelle néo-keynésienne. Ces deux points font l'objet de la section 1. La nature de notre généralisation tient, d'une part, aux hypothèses employées et surtout, d'autre part, à la conception du rationnement — Drèze ne considère que les marchandises usuelles. Toutefois, au niveau de l'interprétation économétrique, nous serons fidèles à la forme structurelle de Drèze.

Malheureusement le passage à l'économétrie ne peut être aussi direct. En effet, même si nous avons bel et bien une forme structurelle walrassienne au sortir de la sous-section 1.1 et une forme structurelle

1. Cette recherche a été subventionnée par le Conseil de recherche en sciences humaines du Canada (#410-78-0116) et par le ministère de l'Education du gouvernement du Québec. Serge Roy a été assistant de recherche sur ce projet.

keynésienne au sortir de la sous-section 1.2, rien ne dit que ces deux formes ne soient pas réconciliables d'une certaine manière. Dans la sous-section 1.3 nous montrons qu'en changeant partiellement le sens de la régression dans le modèle walrassien, nous obtenons une forme structurelle mixte qui a la propriété suivante : elle est observationnellement équivalente à la forme structurelle keynésienne si on la tronque et ne diffère de la forme structurelle walrassienne que par la direction de causalité si on ne la tronque pas. Dès lors, la partie que l'on peut tronquer et qui correspond au marché du travail devient capitale : la forme structurelle keynésienne est en fait walrassienne si on peut lui ajouter le bloc travail (la détermination des salaires).

Nos résultats économétriques sont contenus dans la section 2. On estime d'abord la forme structurelle keynésienne et on trouve que *la matrice des effets de débordement est significativement non nulle*. On ajoute alors le bloc de détermination des salaires et les nouvelles restrictions à priori qui accompagnent ce dernier. *Ce nouveau modèle subit également avec succès l'épreuve des données*. Ainsi, les effets de débordement dont on parlait plus haut peuvent en fait être walrassiens, c'est-à-dire ne représenter qu'une hypothèse différente de causalité. On change alors le sens de la régression sur le marché du travail et on revient donc à la forme walrassienne usuelle. *Ce modèle, (étendu au marché du travail) qui ne contient pas d'effets de débordement, est également cohérent avec les données et permet de tester l'hypothèse de séparabilité par rapport au marché du travail.*

Notre conclusion ne sera pas cependant nécessairement ambiguë car ces divers modèles doivent s'interpréter à l'intérieur de systèmes plus vastes. Or de ce point de vue, si on replace nos résultats économétriques dans une interprétation d'équilibre général, le modèle sous rationnement serait préférable à priori.

Section 1 : Trois formes structurelles

Pour élaborer une théorie du consommateur, il faut, d'une part, définir ce dernier et, d'autre part, définir le *contexte institutionnel* dans lequel il agit. C'est bien ce que l'on retrouve dans la plupart des manuels quand on y lit que « le consommateur maximise son utilité à prix et revenu donnés » : le consommateur se trouve alors défini par sa fonction d'utilité (et, possiblement, le domaine de cette fonction) et le contexte institutionnel par un système de prix ne dépendant pas de l'action du consommateur et par un revenu également exogène par rapport à l'action du consommateur. Toutefois, pareille présentation n'insiste pas assez sur le fait que le contexte institutionnel est, pour ainsi dire, un paramètre de la théorie.

En premier lieu, même si les prix sont donnés, ils ne le sont pas nécessairement par des marchés parfaits. L'Etat, un monopoleur, vous, moi avons pu fixer les prix tout aussi bien. Ainsi, la théorie néo-classique usuelle peut s'appliquer dans diverses situations. Elles ont cependant toutes en commun que la même fonction (de demande) s'y applique. On dit alors que le contexte institutionnel est walrassien pour dire que la fonction de demande walrassienne s'y applique.

En second lieu, le contexte institutionnel peut varier : un consommateur peut maximiser son utilité à quantités données et prix variables, maximiser son utilité à prix fixés, biens publics fixés, chômage fixé, etc. Il faut donc s'habituer à spécifier la théorie du consommateur pour divers contextes. En particulier, un modèle macro-économique peut être incohérent si on y substitue une fonction de demande walrassienne alors qu'il tente lui-même de représenter un contexte institutionnel keynésien (le lecteur pourra analyser Candide à cet égard). Ainsi, derrière le problème de spécification fonctionnelle se pose celui de la spécification institutionnelle. Dans cette section nous spécifions deux contextes institutionnels, l'un néo-classique ou walrassien (c'est donc un rappel) et l'autre non walrassien (contenant le cas keynésien). Nous comparons ensuite la structure locale des fonctions de demande qu'on peut y définir. Avant d'aborder la dérivation mathématique de ces fonctions de demande, considérons les résultats.

Les équations (1) et (2) caractérisent le comportement du consommateur dans un *contexte institutionnel walrassien*. On rappelle, en (2), que les effets de substitution sont symétriques, que les fonctions de demande sont homogènes de degré zéro, que la matrice de substitution-complémentarité est négative semi-définie (donc que la fonction de demande compensée est de « pente » négative), que la somme des propensions marginales à consommer (spécifiques à chaque bien) est égale à un.

De si belles propriétés peuvent être utiles en économétrie en tant que restrictions à priori. Pour les imposer, on a avantage à écrire le modèle sous la forme (3) et (4) qui permet, par exemple, d'imposer l'homogénéité à chaque période. Cette transformation est une paramétrisation. Les équations (5) et (6) caractérisent le comportement du consommateur dans un contexte institutionnel où, en plus de faire face à un système de prix donné, le consommateur est rationné sur certains biens. Les biens sur lesquels il est rationné peuvent être des biens publics, des externalités, des biens défendus par la loi, des biens dont les marchés sont défectueux. Dans le cas général, ceci définit un *contexte institutionnel non walrassien*. Dans le cas particulier où le rationnement porte sur les seules offres de travail, on dit *contexte institutionnel keynésien*. Comparons maintenant (5) et (6) à (1) et (2). La matrice S_{11} se comporte comme la matrice K : toutes les propriétés de Slutsky sont préservées par rapport au groupe des biens non rationnés. La demande pour les biens non rationnés (x_1) dépend en plus des rations x_2. La matrice des effets de débordement S_{12} jouit d'une propriété d'additivité : le rationnement peut changer l'affectation de vos dépenses mais non leur niveau car, les biens étant désirables, vous continuez d'utiliser tout dollar marginal sur les biens « 1 » $(p_1'\beta_1 = 1)$. En gros : la théorie néo-classique se « contracte » pour s'appliquer aux seuls biens non rationnés et se paramétrise sur les biens rationnés. La forme observable est la forme (16) — (17).

A ce stade, on pourrait penser qu'il suffit d'estimer (3) — (4), (16) — (17) et de comparer. Il n'en est rien car la forme (5) peut être walrassienne si, au niveau agrégé, le travail est exogène et que, par les syndicats, les consommateurs s'adaptent par des variations de salaire : c'est la forme (18) — (19) paramétrisée en (23) — (24).

Le reste de la section est consacré à la dérivation de ces résultats et à leur précision. Le lecteur pressé peut sauter à la section 2.

Sous-section (1.1)

R^n est l'espace des marchandises et A une partie ouverte de cet espace définissant les consommations physiquement accessibles à un consommateur donné. A est préordonné par $\precsim$ et $\precsim$ est représentable par une fonction d'utilité $u \in C^2$, $Du > 0$, $\xi' D' Du \xi < 0$ pour $\xi \neq 0$ et $\xi' Du = 0$ (u est deux fois continûment dérivable, différentiellement strictement croissante, différentiellement strictement quasi concave ou fortement quasi concave). Le contexte institutionnel est défini par $p'x \leqq m$ où $x \in A$ est un vecteur de consommations (inputs positifs, outputs négatifs), $p > 0$ un système de prix et m un niveau de revenu tel que $A \cap \{ x \mid p'x \leqq m\} \neq \varphi$. Alors, il existe un optimum unique x^*. La proposition 1 définit le comportement adaptatif du consommateur dans le voisinage de x^* si les paramètres institutionnels p et m changent.

Proposition 1 : Sous les hypothèses et conventions précédentes, la fonction de demande (à valeur vectorielle) f *telle que* x = f(p, m) *possède une différentielle que l'on peut écrire sous la forme :*

$$dx = Kdp + x_m\, p'dx \qquad (1)$$

et dont les coefficients jouissent des propriétés :

$$K = K', Kp = 0, \zeta' K \zeta < 0 \quad \text{pour} \quad \zeta \neq \lambda p, \lambda \in R, p'x_m = 1. \qquad (2)$$

(Ces résultats sont trop connus pour être démontrés ici. Rappelons simplement que K est la matrice de Slutsky et x_m le vecteur des effets-revenu. Les démonstrations classiques sont de Samuelson [11], Malinvaud [9] et Debreu [6]. La démonstration la plus compacte est de Barten, Kloek et Lempers [2]).

Corollaire 1 (Barten et Theil) : Les relations (1) et (2) engendrent la forme structurelle walrassienne :

$$\hat{\omega}\,\check{x}\,dx = B\,\check{p}\,dp + b\,\iota'\,\hat{\omega}\check{x}\,dx + \varepsilon \tag{3}$$

que l'on peut estimer sous les relations à priori :

$$B = B',\, B\iota = 0,\, \zeta' B \zeta \leqq 0,\, \iota' b = 1,\, \iota'\varepsilon = 0. \tag{4}$$

Preuve : Soit $\hat{p}$ une matrice diagonale telle que $\hat{p}\iota = p$ où ι est un vecteur d'unités. On peut écrire (1) comme $\hat{p}\,dx = \hat{p}\,K\,\hat{p}\,\check{p}\,dp + \hat{p}\,x_m\,p'dx$ où $\check{p}$ est l'inverse de $\hat{p}$. Posons $\hat{\omega} = \hat{p}\,\hat{x}/m$, $B = \hat{p}\,K\,\hat{p}/m$, $b = \hat{p}\,x_m$. On a (3) et (4) avec $\varepsilon = 0$. Si (3) découle de (1) après agrégation sur le temps, l'espace, les biens et les individus, ε contient les erreurs d'agrégation et peut différer de zéro.

Remarque : Le modèle (3) n'est évidemment estimable que par hypothèses sur ε. En effet, à priori, on peut avoir $\varepsilon = C\,\check{p}\,dp$ rendant B non distincte (par des moyens économétriques) de $B + C$. Nous ferons ces hypothèses dans la section 2. Pour la théorie de l'agrégation voir, par exemple, [1], [12], [13]. Lorsque toutes les composantes de x sont positives on remplace en (3) $\check{x}\,dx$ par $d \log x$.

Sous-section (1.2)

Pour aborder la théorie du consommateur sous *R.Q.*, reprenons la sous-section (1.1). Nous poserons maintenant que R^N $(N \geqq n)$ est l'espace des marchandises et des biens non marchands (biens publics, externalités, caractéristiques socio-culturelles, etc.). A est une partie ouverte de cet espace et définit les consommations physiquement accessibles à un consommateur donné. On supposera encore que u existe et est différentiellement strictement croissante (ce qui implique, par exemple, que les déséconomies externes sont affectées d'un signe négatif) et fortement quasi concave. Le contexte institutionnel est défini par $p'x^M \leqq m$ et $\underline{x} \leqq x \leqq \bar{x}$: x^M est le vecteur des biens pour lesquels il existe un marché, $\underline{x}$ une borne inférieure, $\bar{x}$ une borne supérieure. On a toujours $p > 0$ et un niveau de revenu permettant la subsistance. Alors il existe un optimum unique $x^{**} = \begin{bmatrix} x_1^{**} \\ x_2^{**} \end{bmatrix}$ où x_2^{**} représente les biens qui sont effectivement rationnés — on supposera ici, pour simplifier, que tous les biens non marchands sont de ce type. Souvent un bien marchand qui est rationné l'est par son marché. Il n'en est pas toujours ainsi : il est d'expérience commune qu'il est plus facile de changer de chemise que d'emploi et, dès lors, dans le langage de la théorie, certains achats peuvent être affectés par la prédétermination d'autres variables. Autrement dit, la structure de récursivité d'un complexe de consommation se traduira finalement par une forme de rationnement. La proposition II définit le comportement adaptatif du consommateur dans le voisinage de x^{**} lorsque les paramètres p, m et x_2^{**} sont institutionnellement modifiés et que les rationnements sur x_2^{**} restent effectifs sans que d'autres rationnements s'ajoutent.

Proposition II : Sous les conventions précédentes, la fonction de demande g telle que $x_1 = g\ (p, m, x_2)$ possède une différentielle que l'on peut écrire sous la forme :

$$dx_1 = S_{11}\, dp_1 + \tilde{S}_{12}\, dx_2 + \beta_1\, p_1'\, \boldsymbol{dx_1} \tag{5}$$

et dont les coefficients jouissent des propriétés :

$$S_{11} = S_{11}',\ S_{11}p_1 = 0,\ p_1'\tilde{S}_{12} = 0, \varphi_1' S_{11}\varphi_1 < 0 \text{ pour } \varphi_1 \neq \lambda p_1,$$
$$\lambda \in R,\ p_1'\,\beta_1 = 1. \tag{6}$$

Preuve : Soit π un système de prix fictifs et μ un niveau de revenu fictif tels que $x^{**} = f\ (\pi, \mu)$ où f est définie comme dans la proposition I (on étend simplement R^n à R^N) et est en conséquence une fonction de demande fictive. Par (1), on a :

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}, & K_{12} \\ K_{21}, & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\pi_1 \\ d\pi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_\mu x_1 \\ D_\mu x_2 \end{bmatrix} \pi'\, dx.$$

Or, ces variations fictives ne sont pas sans rapport avec les variations réelles. En effet, les conditions de premier ordre du problème max $u(x)$ sous réserve que a) $p'x^M \leqq m$, b) $\underline{x} \leqq x \leqq \bar{x}$ sont de la forme :

$$D_1 u\ (x^{**}) = \lambda p_1 = \theta \pi_1, \quad \lambda \in R_+, \quad \theta \in R_+ \tag{8}$$

$$D_2 u\ (x^{**}) = \varphi_2 = \theta \pi_2 \tag{9}$$

où $\varphi_2 = \lambda p_2 + \psi_2$ si tous les biens rationnés sont des biens marchands, $\varphi_2 = \psi_2$ dans le cas contraire et où, enfin, φ_2 peut représenter tout cas intermédiaire. On a donc :

$$\gamma \pi_1 = p_1, \quad d\gamma \pi_1 + \gamma d\pi_1 = dp_1, \quad (\gamma = \theta / \lambda) \tag{10}$$

$$\gamma \pi_2 \neq p_2 \tag{11}$$

Par la relation (10), nous avons un lien entre prix fictifs et prix réels. Si nous parvenons à éliminer π_2 et $d\pi_2$ de (7), nous pourrons définir un système complet de demande sous R.Q. observable sur les marchés. Or, dans la seconde « ligne » de (7), K_{22} est de rang maximal (ce qu'on démontre facilement pour K_{22} sous-matrice propre). On a donc :

$$d\pi_2 = K_{22}^{-1}\, dx_2 - K_{22}^{-1} K_{21}\, d\pi_1 - K_{22}^{-1} D_\mu x_2\, \pi' dx \tag{12}$$

que l'on peut reporter dans la première « ligne ». En regroupant les termes :

$$dx_1 = [K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21}]\, d\pi_1 + K_{12}K_{22}^{-1}\, dx_2 + [D_\mu x_1 - K_{12}K_{22}^{-1} D_\mu x_2]\, \pi' dx. \qquad (13)$$

Changeant de notation,

$$dx_1 = S_{11}d\pi_1 + S_{12}dx_2 + \beta_1 \pi' \mathrm{d}x. \qquad (14)$$

Par (2) (où $K_{21}\pi_1 = -K_{22}\pi_2 => - \pi_2 = K_{22}^{-1}K_{21}\pi_1$) et (10), on a $S_{11}d\pi_1 = \frac{1}{\gamma} S_{11}dp_1$ et on récolte au passage que $S_{11}p_1 = 0$. Par ailleurs, K étant homogène de degré moins un en π et μ, on a S_{11} $(\pi, \mu) = \gamma\, S_{11}$ $(p_1, \gamma\pi_2, \gamma\mu)$ de sorte que $S_{11}d\pi_1 = S_{11}dp_1$. Ainsi le premier terme de (14) est observable et par inspection $S_{11} = S'_{11}$. Considérons les deux derniers termes. On a $[S_{12} + \beta_1\pi'_2]\; dx_2 + \beta_1 \frac{1}{\gamma}\, p'_1 dx_1$ où β_1 est homogène de degré moins un en π et μ. Posons $\tilde{S}_{12} = S_{12} + \beta_1\pi'_2$. La relation (14) devient :

$$dx_1 = S_{11}dp_1 + \tilde{S}_{12}dx_2 + \beta_1 p'_1\, dx_1 \qquad (15)$$

où $p'_1\tilde{S}_{12} = 0$, $p'_1\,\beta_1 = 1$ par (2). Reste à prouver que S_{11} est négative semi-définie. On a $\zeta' K \zeta < 0$ pour $\zeta \neq \lambda\pi$, $\lambda \in R$. Posons $\zeta = \begin{bmatrix} I_1 \\ -K_{22}^{-1}K_{21} \end{bmatrix} \varphi_1$. On a alors $\varphi'_1 S_{11} \varphi_1 < 0$ sauf pour $\zeta = \lambda\pi$. Or $\zeta = \lambda\pi$ si et seulement si $\varphi_1 = \lambda\pi_1$. En effet, $\zeta = \lambda\pi => \varphi_1 = \lambda\pi_1$ par inspection et $\varphi_1 = \lambda\pi_1 => \zeta = \lambda\pi$ du fait que $-K_{22}^{-1}K_{21}\,\lambda\pi_1 = \lambda\pi_2$. On a donc $\varphi'_1 S_{11}\varphi_1 < 0$ sauf pour $\varphi_1 = \lambda\pi_1$ et ceci achève la démonstration.

Remarque : S_{11} est une matrice d'effets de substitution contraints. $\tilde{S}_{12}$ est une matrice d'effets de débordement (*spillover effects*) compensés. β_1 est un vecteur d'effets-revenus contraints.

Avant d'envisager une paramétrisation analogue à celle du modèle de Rotterdam, demandons-nous si (5) permet bien de définir une forme structurelle complète. Y postuler que dp_1 est exogène est une hypothèse de même nature qu'en (1), et, en fait, moins restrictive : dans un K-équilibre, les prix sont rigides à court terme ou, en tout cas, réglementés. Que les variations dx_2 soient exogènes au niveau d'un consommateur pourrait s'admettre mais si dx_2 représente une variation de travail il est de la nature même du K-équilibre correspondant qu'elles soient endogènes au niveau du marché. A priori, il semblerait que (15) ne puisse donner naissance à un système complet. Toutefois, on peut supposer que la demande de travail de la part des entreprises, soit $y_2 = h$ (p, y_1), dépend de la demande perçue $y_1(t) = \psi$ $(y_1\ (t-1))$. Alors $dx_2 = dy_2$ pourra se tenir pour exogène.

Remarques : Posons $\tilde{\tilde{S}}_{12} = \tilde{S}_{12} - \beta_1 p'_2$. La relation (15) peut s'écrire :

$$dx_1 = S_{11}dp_1 + \tilde{\tilde{S}}_{12}dx_2 + \beta_1\, p' dx \qquad 15\ (\text{bis})$$

et jouit des propriétés :

$$S_{11} = S'_{11}, \quad p'_1\tilde{\tilde{S}}_{12} = -p'_2, \quad p'_1\beta_1 = 1, \quad S_{11}p_1 = 0, \quad \zeta'_1 S_{11}\zeta_1 < 0 \text{ si } \zeta_1 \neq \lambda p_1. \tag{15 ter}$$

La forme (15 bis) permet une comparaison plus immédiate avec les formes walrassiennes (comme on verra par la suite) de sorte qu'elle servira de base à la paramétrisation du corollaire II.

Corollaire II : Les relations (5) et (6) permettent d'engendrer la forme structurelle non walrassienne.

$$\hat{\omega}_1\check{x}_1 dx_1 = T_{11}\check{p}_1 dp_1 + T_{12}\check{x}_2 dx_2 + \tau_1\iota'\hat{\omega}\,\check{x}\,dx + \eta \tag{16}$$

que l'on peut estimer sous les restrictions à priori

$$T_{11} = T'_{11}, \quad T_{11}\iota = 0, \quad \iota' T_{12} = -\tau_2, \quad \varphi'_1 T_{11}\varphi_1 \leqq 0, \iota'\tau_1 = 1, \quad \iota'\eta = 0. \tag{17}$$

(On paramétrise comme en (3) sauf T_{12} où l'on a $T_{12} = \hat{p}_1\tilde{\tilde{S}}_{12}\hat{x}_2$). Supposons maintenant que $R^N = R^n$ (on se restreint aux marchandises) et que x_2 représente les diverses qualités de travail offertes par un consommateur où le travail est pris comme une denrée homogène. (16) est alors une forme structurelle néo-keynésienne et (11) traduit le rejet par Keynes de la formation classique des revenus.

Comparant (3) et (4) avec (16) et (17), on se rend compte qu'il y a des différences majeures entre les deux systèmes. En (3) et (4), le travail fait partie du vecteur x, il est donc endogène tandis qu'en (16) et (17) il est exogène. Par ailleurs en (3) et (4), les salaires qui sont des éléments du vecteur p affectent directement les demandes de biens tandis qu'en (16) et (17) ce sont les quantités de travail qui affectent les demandes de biens pendant que les salaires disparaissent de l'analyse.

Sous-section (1.3)

Il est possible de réécrire (1) et (2) de manière à rendre les quantités de travail exogène rapprochant par le fait même le modèle walrassien du modèle non walrassien.

Proposition III : Sous les hypothèses et conventions de la proposition I, la fonction de demande walrassienne possède une différentielle que l'on peut écrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dp_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp_1 \\ dx_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} p \,.\, dx \tag{18}$$

dont les coefficients jouissent des propriétés :

$$S_{11} = S'_{11}\ ;\ S_{22} = S'_{22}\ ;\ S_{11}p_1 = 0\ ;\ S'_{12}p_1 = -p_2\ ;\ p'_1\beta_1 = 1\ ;\ S_{12} = -S^1_{21}\ ;\ S_{21}p_1 = p_2\ ;\ \varphi'_1 S_{11}\varphi_1 < 0 \text{ pour } \varphi_1 \neq \lambda p_1, \lambda \in R\ ;\ \varphi'_2 S_{22}\varphi_2 < 0 \text{ pour } \varphi_2 \neq 0. \tag{19}$$

Preuve : (1) peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} I & -K_{12} \\ 0 & -K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dp_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ K_{21} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp_1 \\ dx_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} p'dx. \tag{20}$$

Or, puisque la matrice K_{22} s'inverse, on a :

$$\begin{bmatrix} I & -K_{12} \\ 0 & -K_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & -K_{12}K_{22}^{-1} \\ 0 & K_{22}^{-1} \end{bmatrix} \tag{21}$$

de sorte que (20) peut s'écrire sous la forme (18) avec :

$$S_{11} = K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21}\ ;\ S_{12} = K_{12}K_{22}^{-1}\ ;\ \beta_1 = k_1 - K_{12}K_{22}^{-1}k_2\ ;\ S_{21} = -K_{22}^{-1}K_{21}\ ;\ S_{22} = K_{22}^{-1}\ ;\ \beta_2 = -K_{22}^{-1}k_2. \tag{22}$$

Pour prouver que ces coefficients jouissent des propriétés (19) on procède comme dans la preuve de la proposition II.

Avant de paramétriser (18) d'une manière analogue à la paramétrisation de (1), remarquons que la seule différence entre (18) et (1) revient à la décision sur ce qui est exogène : en (1) les salaires étaient exogènes tandis qu'en (18) ce sont les quantités de travail qui sont exogènes, c'est-à-dire qu'en (1) on suppose l'entreprise tout à fait élastique dans sa demande de travail tandis qu'en (18) on la suppose tout à fait inélastique. Les deux hypothèses sont restrictives.

Corollaire III : Les relations (18) permettent d'engendrer la forme structurelle walrassienne mixte :

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_1 \check{x}_1\, dx_1 &= C_{11}\check{p}_1 dp_1 + C_{12}\hat{\omega}_2 \check{x}_2\, dx_2 + c_1\, \iota' \hat{\omega}\, \check{x}\, dx + \mu_1 \\ \check{p}_2\, dp_2 &= C_{21}\check{p}_1 dp_1 + C_{22}\hat{\omega}_2 \check{x}_2\, dx_2 + c_2\, \iota' \hat{\omega}\, \check{x}\, dx + \mu_2 \end{aligned} \tag{23}$$

que l'on peut estimer sous les restrictions à priori :

$$C_{11} = C'_{11},\ C_{22} = C'_{22},\ C_{11}\iota_1 = 0,\ \iota'_1 c_1 = 1,\ C_{12} = -C'_{21},\ C'_{12}\iota_1 = -\iota_2,\ C_{21}\iota_1 = \iota_2. \tag{24}$$

(On a paramétrisé comme en (16)). Comparant (16) et (17) avec (23) et (24), *on constate que (16) est observationnellement équivalent au premier bloc du modèle (23) et qu'en conséquence le modèle walrassien peut aussi faire apparaître des effets de débordement.* La différence entre le modèle walrassien et le modèle sous rationnements quantitatifs se réduit donc à la présence en (23) du bloc déterminant les salaires et aux restrictions portant sur les liens entre les deux blocs ($C_{12} = -C'_{21}$). Bref, nous avons trois formes structurelles (3), (16) et (23) et leurs restrictions à priori. Nous allons maintenant les estimer et les comparer en restreignant (16) à une interprétation keynésienne.

Section 2 : Estimation et comparaison

Afin d'estimer les modèles (3), (16) et (23), nous devons introduire des hypothèses stochastiques. Nous supposerons que les variables expliquées dans les équations (3), (16) et (23) sont des variables aléatoires dont l'espérance mathématique est décrite par ces équations, c'est-à-dire que les variables ε, η et μ sont des erreurs aléatoires dont l'espérance mathématique est nulle. La matrice de covariances des erreurs aléatoires peut s'écrire $\Sigma \otimes \mathrm{I}$, c'est-à-dire que les erreurs aléatoires d'un système sont reliées entre elles pour une même observation mais ne sont pas reliées d'une observation à l'autre. Nous supposons de plus que les variables explicatives ne sont pas aléatoires. Par ailleurs nous introduisons des ordonnées à l'origine, α en (3), β en (16) et γ en (23). Nous écrirons (3) et (4) sous la forme allégée suivante :

$$\hat{\omega}(t)\, \check{x}(t)\, dx(t) = B\, \check{p}(t)\, dp(t) + b\, \iota'\omega(t)\, \check{x}(t)\, dx(t) + \alpha + \varepsilon(t)$$

$$\text{t.q.} \quad B = B', \quad B\iota = 0, \quad \iota' b = 1, \quad \iota'\alpha = 0, \quad \iota'\varepsilon(t) = 0 \qquad (25)$$

$E\varepsilon(t) = 0$ pour tout t, t représentant une observation. Ecrivant la matrice des erreurs aléatoires $\varepsilon(t)$ sous la forme d'un vecteur et explicitant les observations de façon appropriée, on aura la matrice de covariances décrites plus haut. On a omis les contraintes de négativité semi-définies (nous reviendrons sur ce point dans l'analyse) et écrit la contrainte automatique d'additivité sur l'ordonnée à l'origine.

De la même façon, nous écrirons (16) et (17) puis (23) et (24) sous les formes allégées suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_1(t)\, \check{x}_1(t)\, dx_1(t) &= T_{11}\check{p}_1(t)\, dp_1(t) + T_{12}\check{x}_2(t)\, dx_2(t) \\ &\quad + \tau_1\iota'\hat{\omega}(t)\, \check{x}(t)\, dx(t) + \beta + \eta(t) \end{aligned} \qquad (26)$$

t.q. $T_{11} = T'_{11}$, $T_{11}\iota_1 = 0$, $\iota'_1 T_{12} = -\iota'_2$, $\iota'_1\tau_1 = 1$, $\iota'_1\beta = 0$, $\iota'_1\eta(t) = 0$

$E\eta(t) = 0$ pour tout t.

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_1(t)\, \check{x}_1(t)\, dx_1(t) &= C_{11}\check{p}_1(t)\, dp_1(t) + C_{12}\, \hat{\omega}_2(t)\, \check{x}_2(t)\, dx_2(t) \\ &\quad + c_1\iota'\hat{\omega}(t)\, \check{x}(t)\, dx(t) + \gamma_1 + \mu_1(t) \\ \check{p}_2(t)\, dp_2(t) &= C_{21}\check{p}_1(t)\, dp_1(t) + C_{22}\, \hat{\omega}_2(t)\, \check{x}_2(t)\, dx_2(t) \\ &\quad + c_2\iota'\hat{\omega}(t)\, \check{x}(t)\, dx(t) + \gamma_2 + \mu_2(t) \end{aligned} \qquad (27)$$

t.q. $C_{11} = C'_{11}$, $C_{22} = C'_{22}$, $C_{11}\iota_1 = 0$, $\iota'_1 c_1 = 1$, $C_{12} = -C'_{21}$, $C'_{12}\iota_1 = -\iota_2$ $C_{21}\iota_1 = \iota_2$, $\iota'_1\mu_1(t) = 0$, $E\mu(t) = 0$ pour tout t.

Pour estimer les modèles (25), (26) et (27), on utilisera l'estimateur de moindres carrés généralisés (Zellner [13]) sous contraintes en itérant sur la matrice de covariances des erreurs aléatoires. On pourra vérifier la cohérence entre les observations et les contraintes par des tests χ^2.

Nous analyserons d'abord le modèle sous rationnement, soit le système (26). Considérant les agrégats suivants : alimentation, habillement, habitation, biens durables et biens divers [2], on trouve pour l'économie canadienne sur la période 1947-1977, les estimés présentés dans le tableau 1. Il apparaît que la propension marginale (τ_1) à consommer les biens divers (services, transport, hygiène et soins, etc.) est la plus élevée (0.42) suivie de la propension marginale à acheter des biens durables (0.23) et de l'alimentation (0.17), les propensions marginales à dépenser dans l'habillement et l'habitation étant les plus faibles (0.09). Le rationnement sur le marché du travail a des effets négatifs significatifs sur la demande d'alimentation, d'habillement et de biens divers. Les effets de débordement compensés ($T_{12} + \tau_1 \iota_2'$) qui sont en fait des effets de substitution demeurent négatifs pour ces trois marchés et deviennent positifs pour l'habitation et les biens durables. Quant à la matrice de Slutsky contrainte, on constate que les éléments sur la diagonale sont tous négatifs et en se restreignant aux coefficients relativement grands par rapport à leurs écarts-types, que l'alimentation et l'habitation sont substituts aux biens durables et que l'habillement est substitut aux biens divers. Le test χ^2 ($\chi^2 = 16.3$) ne rejette pas la cohérence entre les observations et l'information à priori contenue dans les équations (26) (avec 10 restrictions à priori, $\chi^2_{.975} = 20.48$). Il reste à comparer ces résultats avec ceux du modèle (27) portant sur les mêmes agrégats. Il apparaît dans le tableau 2 que le premier bloc est très semblable, c'est dire que les contraintes reliant les deux blocs n'affectent pratiquement pas les estimés du premier bloc. Quant au second bloc il indique que l'élasticité des

2. Les données canadiennes sur les dépenses personnelles en biens et services de consommation en dollars courants et en dollars constants de 1947 à 1977 viennent de CANSIM (000589 et 000592), les données sur la demande de travail (l'emploi moyen annuel) sont tirées des publications 72-201 de Statistique Canada. Les indices de prix résultent de la division des dépenses en dollars courants par les dépenses en dollars constants. Les prix p_2 constituent en fait les revenus du travail par employé ; ces revenus sont : la rémunération des salariés, plus les revenus nets des entreprises individuelles non agricoles, plus les revenus nets des exploitants agricoles, plus les soldes et indemnités militaires, provenant de la publication 13-531 de Statistique Canada dont on a soustrait les impôts directs des particuliers (on a fait l'hypothèse d'une répartition proportionnelle des taxes entre les revenus de travail et les autres revenus — la proportion étant la même entre les types d'impôt qu'entre les types de revenu). L'agrégation à 5 biens a été construite à partir de la matrice 3325 de CANSIM de la façon suivante :

Alimentation : ligne 3.
Habillement : ligne 6.
Habitation : ligne 10.
Biens durables : somme des lignes 18, 19, 31.
Biens divers : somme des lignes 4, 5, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 42.

TABLEAU 1

MODÈLE (26)

Secteurs	T_{11} Alimentation	T_{11} Habillement	T_{11} Habitation	T_{11} Biens durables	T_{11} Divers	T_{12}	τ_1	β	χ^2 à la dernière itération	R^2
Alimentation	−0.650 (−1.90)	−0.091 (−0.63)	−0.002 (−0.01)	0.580 (1.40)	0.163 (0.45)	−0.307 (−4.47)	0.169 (4.21)	−0.019 (−1.24)		0.64
Habillement	−0.091 (−0.63)	−0.417 (−2.23)	0.050 (0.26)	−0.192 (−0.79)	0.650 (2.22)	−0.158 (−4.94)	0.091 (4.58)	−0.024 (−3.47)		0.83
Habitation	−0.002 (−0.01)	0.050 (0.26)	−1.13 (−2.80)	0.596 (1.54)	0.487 (1.00)	0.003 (0.05)	0.093 (2.72)	0.047 (3.89)		0.26
Biens durables	0.580 (1.40)	−0.192 (−0.79)	0.596 (1.54)	−1.30 (−1.60)	0.320 (0.57)	−0.018 (−0.16)	0.228 (3.73)	−0.033 (−1.48)		0.62
Divers	0.163 (0.45)	0.650 (2.22)	0.487 (1.00)	0.320 (0.57)	−1.62 (−1.94)	−0.520 (−6.64)	0.419 (8.67)	0.028 (1.65)	16.3	0.83

TABLEAU 2

MODÈLE (27)

Secteurs	C_{11}					C_{12}	c_1	γ_1	χ^2 à la dernière itération	R^2
	Alimentation	Habillement	Habitation	Biens durables	Divers					
Alimentation	−0.650 (−1.88)	−0.083 (−0.57)	−0.024 (−0.10)	0.587 (1.42)	0.170 (0.47)	−0.318 (−5.16)	0.174 (4.51)	−0.019 (−1.31)		0.64
Habillement	−0.083 (−0.57)	−0.420 (−2.25)	0.098 (0.50)	−0.176 (−0.72)	0.581 (1.99)	−0.156 (−4.90)	0.090 (4.51)	−0.022 (−3.30)		0.82
Habitation	−0.024 (−0.10)	0.098 (0.50)	−1.18 (−2.97)	0.590 (1.54)	0.521 (1.08)	−0.006 (−0.12)	0.097 (2.94)	0.046 (3.81)		0.25
Biens durables	0.587 (1.42)	−0.176 (−0.72)	0.590 (1.54)	−1.29 (−1.60)	0.296 (0.53)	−0.023 (−0.24)	0.231 (3.94)	−0.033 (−1.52)		0.62
Divers	0.170 (0.47)	0.581 (1.99)	0.521 (1.08)	0.296 (0.53)	−1.57 (−1.88)	−0.497 (−6.57)	0.408 (8.58)	0.029 (1.74)		0.83
	C_{21}					C_{22}	c_2	γ_2	χ^2 à la dernière itération	R^2
	Alimentation	Habillement	Habitation	Biens durables	Divers					
Travail	0.318 (5.16)	0.156 (4.90)	0.006 (0.12)	0.023 (0.24)	0.497 (6.57)	−0.022 (−0.88)	0.027 (1.99)	0.015 (2.85)	18.7	0.80

TABLEAU 3

MODÈLE (25)

Secteurs	*B*						*b*	α	χ^2 à la dernière itération	R^2
	Alimentation	Habillement	Habitation	Biens durables	Divers	Travail				
Alimentation	−0.496 (−0.96)	0.017 (0.09)	0.091 (0.32)	0.024 (0.05)	0.343 (0.66)	0.021 (0.03)	0.065 (1.39)	−0.007 (−0.31)		0.32
Habillement	0.017 (0.09)	−0.377 (−1.86)	0.125 (0.61)	−0.426 (−1.77)	0.717 (2.10)	−0.055 (−0.15)	0.039 (1.77)	−0.015 (−1.39)		0.58
Habitation	0.091 (0.32)	0.125 (0.61)	−1.158 (−2.83)	0.520 (1.54)	0.720 (1.46)	−0.298 (−0.73)	0.100 (3.70)	0.050 (3.54)		0.26
Biens durables	0.024 (0.05)	−0.426 (−1.77)	0.520 (1.54)	−1.342 (−1.92)	−0.343 (−0.58)	1.567 (2.14)	0.189 (3.95)	−0.057 (−2.32)		0.62
Divers	0.343 (0.66)	0.717 (2.10)	0.720 (1.46)	−0.343 (−0.58)	−1.792 (−1.74)	0.355 (0.32)	0.240 (3.73)	0.047 (1.42)		0.37
Travail	0.021 (0.03)	−0.055 (−0.15)	−0.298 (−0.73)	1.567 (2.14)	0.355 (0.32)	−1.590 (−0.88)	0.366 (3.67)	−0.018 (−0.35)	22.4	0.47

salaires par rapport aux prix des biens divers est la plus élevée suivie de l'élasticité par rapport au prix de l'alimentation et de l'habillement. Une variation dans l'offre ou la demande de travail a un effet positif significatif sur les salaires. Le test χ^2 ($\chi^2 = 18.7$) ne rejette pas la cohérence entre les observations et l'information à priori (avec 15 restrictions à priori, $\chi^2_{.975} = 27.49$). *C'est dire que le modèle walrassien mixte est tout aussi acceptable (du point de vue économétrique) que le modèle sous rationnement.* Enfin, nous analyserons le modèle walrassien direct (25) présenté dans le tableau 3. La propension marginale aux loisirs est la plus élevée (0.37) suivie de la propension marginale à dépenser sur les biens divers (0.24), sur les biens durables (0.19), sur l'habitation (0.10), l'alimentation (0.06), la propension marginale à dépenser sur l'habillement étan la plus faible (0.04). Les éléments sur la diagonale de la matrice de Slutsky sont tous négatifs. On constate que l'habillement est complémentaire aux biens durables, et substitut aux biens divers, que l'habitation est substitut aux biens durables et aux biens divers et enfin que les biens durables sont substituts aux loisirs. On trouve donc un seul coefficient significatif reliant les salaires aux autres biens, ce coefficient est cependant suffisant pour nous amener à rejeter l'hypothèse de séparabilité entre le marché des biens et le marché du travail, hypothèse faite usuellement lors de l'estimation des systèmes complets de demande. Le test χ^2 ($\chi^2 = 22.4$) ne nous amène pas à rejeter la cohérence entre ce modèle et les observations (avec 15 restrictions à priori, $\chi^2_{.975} = 27.49$).

L'utilisation d'autres agrégats (4 groupes de biens, 7 groupes de biens et 8 groupes de biens) [3] nous a conduits essentiellement aux mêmes

3. Les agrégations à 4, 7 et 8 biens ont été construites à partir de la matrice 3325 de CANSIM de la façon suivante :

Agrégation à 4 biens

Biens durables	: ligne 51.
Biens semi-durables	: ligne 52.
Biens non durables	: ligne 53.
Services	: ligne 54.

Agrégation à 7 biens

Alimentation	: somme des lignes 3, 4.
Habillement	: somme des lignes 6, 22.
Habitation	: somme des lignes 10, 18, 19, 20, 21, 23, 24.
Hygiène et soins	: somme des lignes 25, 44, 45.
Transport	: ligne 30.
Culture	: somme des lignes 5, 37, 43, 46.
Divers	: ligne 47.

Agrégation à 8 biens

Alimentation	: ligne 3.
Biens durables et services financiers	: somme des lignes 18, 19, 23, 24, 47.
Boissons alcooliques et tabac	: somme des lignes 4, 5.
Vêtements et chaussures	: somme des lignes 6, 22, 44, 45.
Loyer et loisir	: somme des lignes 11, 12, 13, 21, 38, 39, 40, 43.
Energie	: somme des lignes 14, 15, 16, 33.
Soins médicaux et éducation	: somme des lignes 26, 28, 29, 41.
Transport privé et public	: somme des lignes 20, 31, 32, 34, 35, 36, 46.

résultats : les trois modèles sont toujours cohérents avec les observations ; le modèle (26) est toujours à peu près équivalent au premier bloc de (27), les variations dans les quantités de travail ayant toujours des effets très significatifs sur les demandes de biens. Cependant avec les autres agrégats, le modèle 25 nous conduirait souvent à ne pas rejeter l'hypothèse de séparabilité entre le marché du travail et les marchés des biens, les coefficients reliant des variations de salaires aux demandes de biens étant toujours non significatifs.

En résumé, nos trois modèles sont « bons » ; les deux premiers donnent sans doute une explication plus complète du réel si l'on se reporte aux R^2 mais nos standards économétriques ne conduisent nullement à rejeter le troisième ; enfin, sur la base de l'intuition que l'on peut avoir quant à la substitution et la complémentarité, aucun modèle ne transcende vraiment les autres. *Nous avons un embarras de richesse.*

Section 3 : Conclusion

Cet embarras de richesse est nouveau en microéconomique mais ne l'est pas en macroéconomique. En un sens, trop de modèles conduit à autant d'ambiguïté que pas de modèle du tout. Pour l'instant en tout cas, on ne peut se reposer sur l'économétrie pour le choix entre modèles. Mais on peut considérer l'imbrication de nos trois modèles dans des modèles plus larges.

Or, de ce point de vue, la situation est un peu plus rose. En particulier, nous avons déjà incorporé la forme structurelle keynésienne de cet article dans des modèles macroéconomiques « complets » *sans que ses coefficients ne changent significativement.* C'est donc le modèle à utiliser si l'on croit, comme Malinvaud [10] le fait dans sa troisième conférence, que l'équilibre keynésien est une loi tendancielle de nos économies.

Camille BRONSARD
et
Lise SALVAS-BRONSARD,
Université de Montréal.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARNETT, W.A., 1979, « Theoretical Foundations for the Rotterdam Model », *Review of Economic Studies*, 46, 109-129.

[2] BARTEN, A.P., KLOEK, T., LEMPERS, F.B., 1969, « A Note of a Class of Utility and Production Functions Yielding Everywhere Differentiable Demand Functions », *Review of Economic Studies*, 105, 109-111.

[3] BARTEN, A.P., 1977, « The Systems of Consumer Demand Function Approach : A Review », *Econometrica*, 1, 23-51.

[4] BENASSY, J.P., 1976, « Théorie du déséquilibre et fondements micro-économiques de la macroéconomie », *Revue Economique*, 5, 755-805.

[5] BRONSARD, C., SALVAS-BRONSARD, L., 1977, « Sur les diverses formes structurelles engendrées par la théorie de la demande (modèle direct, modèle réciproque, modèles mixtes, modèles avec rationnement quantitatif, modèle avec catégories socio-professionnelles) : principes de construction, économétrie et analyse d'un exemple par l'estimation du modèle avec catégories socio-professionnelles dans le cas français », miméo, INSEE.

[6] DEBREU, G., 1972, « Smooth Preferences », *Econometrica*, 4, 603-615.

[7] DRÈZE, J.H., 1975, « Existence of an Exchange Equilibrium under Price Rigidities », *International Economic Review*, 2, 301-320.

[8] DRÈZE, J.H., 1977, « Demand Theory under Quantity Rationing : A Note », miméo, C.O.R.E.

[9] MALINVAUD, E., 1971, *Leçons de théorie microéconomique*, Dunod, Paris.

[10] MALINVAUD, E., 1976, *The Theory of Unemployment Reconsidered*, Yrjo Lectures at the University of Helsinki, Basil Blackwell, Oxford.

[11] SAMUELSON, P.A., 1947, *Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press, Cambridge, Mass.

[12] THEIL, H., 1971, *Principles or Econometrics*, North-Holland, Amsterdam.

[13] ZELLNER, A., 1962, « An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests for Aggregation Bias », *Journal of the American Statistical Association*, 298, 348-368.