Veza između granulometrijske krive i hidrauličkih karakteristika nezasićenog zemljišta zasnovana na teoriji (multi)fraktala

Filip Stanić[1]
Pierre Delage[2]
Daniel Schertzer[3]

APSTRAKT: Za simulaciju tečenja kroz nezasićenu poroznu sredinu neophodno je poznavanje osnovnih hidrauličkih karakteristika tla poput krive vlažnosti i krive vodoprovodljivosti. Veza između vlažnosti / vodoprovodljivosti i kapilarnog potencijala u nezasićenoj poroznoj sredini najčešće se opisuje analitičkim funkcijama sa nekoliko empirijskih parametara čije se vrednosti određuju kalibracijom modela infiltracije. Kako bi model davao pouzdane rezultate za različite tipove zemljišta, umesto empirijskih potrebno je koristiti funkcije sa fizički zasnovanim parametrima, što je predmet istraživanja u ovom radu. Polazeći od pretpostavke da način pakovanja zrna u zemljištu određuje zastupljenost različitih veličina pora što direktno utiče na vlažnost i vodoprovodljivost tla, izvesno je da postoji veza između granulometrijske krive zemljišta i njegovih hidrauličlih karakteristika u nezasićenim uslovima. Koristeći teoriju multifraktala, koja predstavlja statistički alat za opisivanje heterogenosti, razvijen je analitički, fizički zasnovan model granulometrijske krive. U slučaju krive raspodele veličina pora, pomenuti multifraktalni model se svodi na jednostavniji fraktalni koji se dalje koristi za izvođenje novih fizički zasnovanih funkcija vlažnosti i vodoprovodljivosti. Razvijene (multi)fraktalne funkcije granulometrijske krive i nezasićenih hidrauličkih karakteristika poređeni su sa eksperimentalnim podacima različitih tipova zemljišta, pri čemu su dobijena veoma dobra slaganja. Time je potvrđena jasna fizička veza između prethodno navedenih karakteristika tla, što se na dalje može koristiti za bolju procenu hidrauličkih svojstava zemljišta i pouzdaniju simulaciju tečenja kroz nezasićenu poroznu sredinu.

Ključne reči: (multi)fraktali, nezasićena porozna sredina, granulometrijska kriva, kriva vlažnosti, kriva vodoprovodljivosti

Link between the grain size distibution and the hydraulic characteristics in unsaturated soils based on (multi)fractal theory

ABSTRACT: To simulate the water movement within the unsaturated porous medium it is necessary to know some basic soil hydraulic properties such as the water retention curve (WRC) and the hydraulic conductivity function (HCF). The link between the water content / hydraulic conductivity and capillary potential in unsaturated porous medium is most often described by means of analytical functions that depend on several empirical parameters that are estimated through calibration of infiltration models. To adapt the model to various soil types, it is necessary to use physically based functions instead of empirical ones, which is the research subject of this paper. Starting from the assumption that the packing arrangement of grains in soil dictates the representation of different pore sizes that directly influence the soil water retention and conductivity, it is evident there is a link between the soil's grain size distribution and its unsaturated hydraulic properties. By using the multifractal theory, which represents the statistical tool for describing heterogeneity, the analytical grain size distribution function has been developed. In case of the pore size distribution, the mentioned multifractal function is reduced to the fractal one which is further used to derive new physically based soil water retention and hydraulic conductivity functions. Developed (multi)fractal functions have been compared with experimental data of various soil types, obtaining satisfactory agreement. Hence, the physical correlation between the mentioned soil properties has been confirmed, which can be further used for better estimation of the soil hydraulic characteristics and more reliable simulation of water movement within an unsaturated porous medium.

Keywords: (multi)fractals, unsaturated porous medium, grain size distribution curve, water retention curve, hydraulic conductivity function

[1] Dr Filip Stanić, Građevinski fakultet Beograd, fstanic@grf.bg.ac.rs
[2] Prof. Pierre Delage, redovni profesor, Ecole des Ponts ParisTech, pierre.delage@enpc.fr
[3] Prof. Daniel Schertzer, redovni profesor, Ecole des Ponts ParisTech, daniel.schertzer@enpc.fr

1 Uvod

Za pouzdane simulacije tečenja u poroznoj (ne)zasićenoj sredini koriste se numerički modeli zasnovani na rešavanju Richards-ove parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda (Richards, 1931), gde se hidrauličke karakteristike sredine opisuju različitim analitičkim funkcijama (Brooks & Corey 1964, van Genuchten 1980, Fredlund and Xing 1994, Kosugi 1996, itd.). Ove funkcije opisuju vezu između zapreminske vlažnosti, odnosno vodoprovodljivosti, i kapilarnog potencijala, pri čemu se u obzir najčešće uzima samo uticaj kapilarnosti dok se adsorpcija zanemaruje. Novije studije su pokazale da kod nekih materijala i adhezione sile imaju značajan uticaj na kretanje vode, i to ne samo pri vlažnostima manjim od rezidualne već i pri onim bliže saturaciji, zbog čega su u zadnjih desetak godina razvijene mnoge funkcije hidrauličkih karakteristika zemljišta koje uzimaju u obzir i kapilarnu i adsorpcionu komponentu (Peters, 2013; Iden i Durner, 2014; Wang i sar., 2016, itd.).

Glavni problem kod pomenutih funkcija je što, zbog kompleksnosti fizike koju opisuju, zavise od velikog broja parametara među kojima neki, najčešće oni koji opisuju kapilarnu komponentu, nemaju jasno fizičko značenje. Stoga je proces određivanja optimalnih vrednosti parametara, bilo kalibracijom modela infiltracije bilo fitovanjem pomenutih funkcija sa eksperimentalno određenim karakteristikama tla, veoma zametan, a često i nedovoljno pouzdan jer različite kombinacije vrednosti parametara mogu dati podjednako dobre rezultate. U cilju smanjenja neodređenosti neophodno je smanjiti ukupan broj parametara i eliminisati one empirijske. Osnov za razvoj novih analitičkih funkcija je fizički zasnovana veza između granulometrijske krive zrnastih materijala i njihovih krivih vlažnosti i vodoprovodljivosti u kapilarnom režimu, koja se temelji na činjenici da način pakovanja zrna kreira mrežu pora u kojima se zadržava, odnosno kroz koje teče voda.

Da bi se adekvatno opisala veza između pomenutih karakteristika zemljišta, u ovom radu je prvo predstavljena nova funkcija granulometrijske krive (Stanić i sar., 2021). U Stanić i sar. (2021) je prikazan jednostavan algoritam za prepoznavanje zrna materijala iz polja gustina dobijenih skeniranjem uzorka tla CT skenerom, na osnovu kojeg se može odrediti granulometrijska kriva. Predstavljeni algoritam se može i analitički opisati koristeći teoriju multifraktala (Schertzer i Lovejoy, 1987; Schertzer i Lovejoy, 1997), čime se dobija nova funkcija raspodele koja opisuje granulometrijsku krivu. Sličan algoritam se koristi i u slučaju prepoznavanja pora različitih veličina, pri čemu se za analitičko opisivanje krive raspodele koristi jednostavniji fraktalni zakon koji proističe iz multifraktalnog, na osnovu čega se uspostavlja veza između krivih raspodele zrna i pora. Dalje se na osnovu Young-Laplace-ovog zakona koji daje jasnu vezu između veličine pora i kapilarnog potencijala koji se u njima javlja, iz krive rapodele veličine pora izvodi jednačina krive vlažnosti (Stanić i sar., 2020) za kapilarni režim. Konačno, korišćenjem Mualem (1976)-ove pretpostavke da se mreža pora može aproksimirati snopom paralelnih kapilarnih cevcica različitih dimenzija kroz koje prolazi voda, na osnovu jednačine krive vlažnosti se izvodi jednačina krive vodoprovodljivosti (Stanić i sar., 2020). Za razliku od fraktalnih funkcija prikazanih ovde, postojeći fraktalni modeli hidrauličkih karakteristika (Ghanbarian-Alavijeh i sar., 2011) se zasnivaju na krajnje uprošćenoj fizici zbog čega je njihova primena u mnogome ograničena. S obzirom da jednačine hidrauličkih karakteristika tla izvedene u ovom radu uzimaju u obzir samo fenomen kapilarnosti (važe za vlažnosti veće od rezidualne), one se kombinuju sa postojećim „adsorpcionim“ funkcijama (Peters, 2013; Iden i Durner, 2014) čiji je uticaj najdominantniji pri izrazito negativnim vrednostima kapilarnog potencijala (vlažnosti manje od rezidualne).

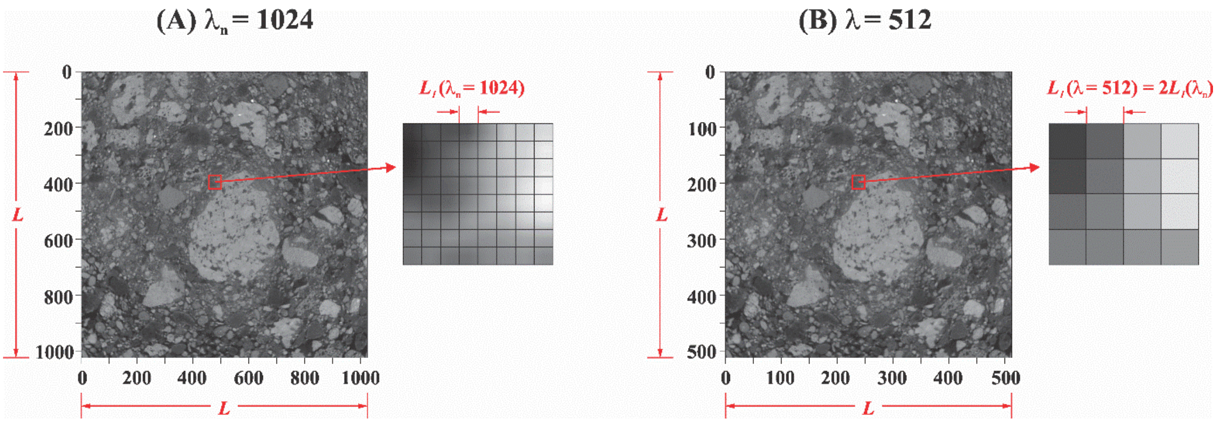
Primarni cilj ovog rada nije predviđanje hidrauličkih karakteristika zemljišta na osnovu njegove granulometrijske krive, već opisivanje pomenutih karakteristika analitičkim funkcijama čiji parametri pružaju fizički zasnovano tumačenje. Stoga je validacija prikazanih funkcija granulometrijske krive i krivih vlažnosti i vodoprovodljivosti urađena na osnovu njihovog poređenja sa eksperimentalnim karakteristikama različitih tipova zemlišta, pri čemu je na primeru supstrata zelenog krova “Green Wave” (Stanić i sar., 2019; Versini i sar., 2020; Stanić i sar., 2021) pokazana korelacija između granulometrije i krivih hidrauličkih karakteristika. Kao dodatak je prikazana i procedura za grubo procenjivanje hidrauličkih karakteristika na osnovu elementarnih podataka koji su dostupni u praksi, kao što su granulometrijska kriva, Darcy-jev koeficijent filtracije i poroznost.

2 Metodologija

U narednim poglavljima su redom izvedene nove analitičke funkcije granulometrijske krive, krive raspodele veličine pora, kao i krive vlažnosti i vodoprovodljivosti, sa ciljem da se prikaže fizički zasnovana veza između raspodele veličina zrna i hidrauličkih karakteristika zemljišta. Kao što je objašnjeno u nastavku teksta, prva od pomenutih funkcija se zasniva na teoriji multifraktala, a preostale tri na teoriji fraktala.

2.1 Funkcija granulometrijske krive

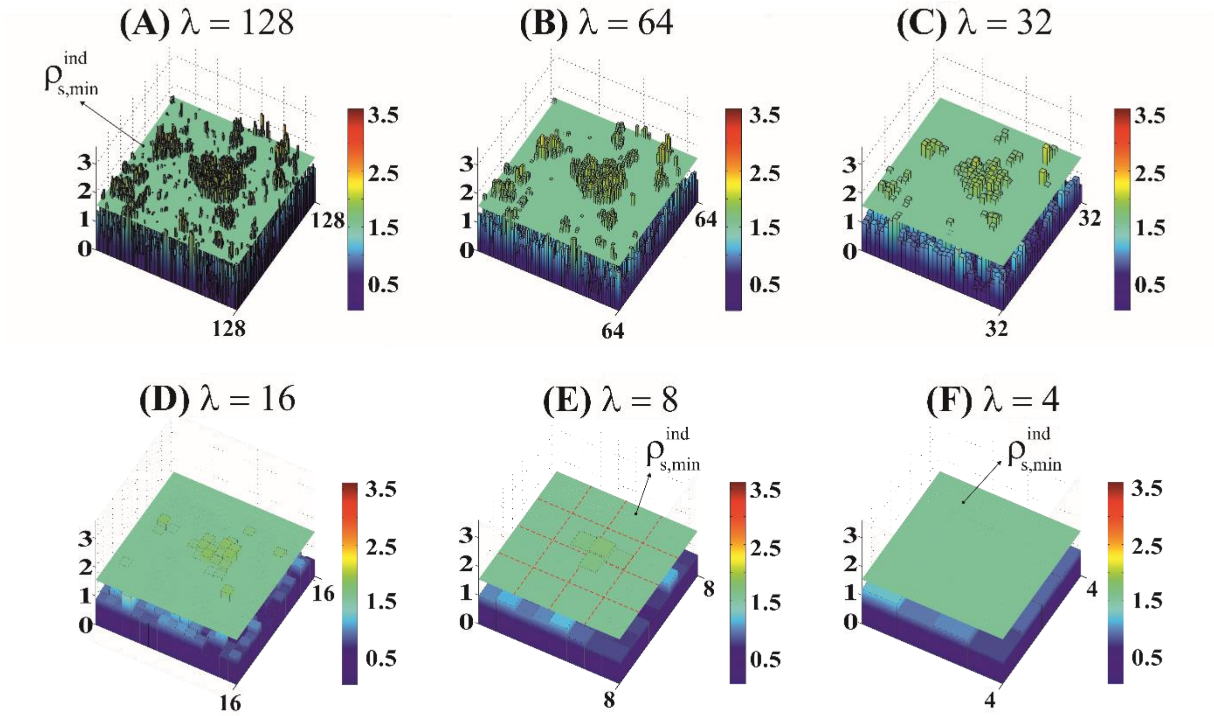
U Stanić i sar. (2021) je detaljno objašnjena procedura korišćenja CT skenera za potrebe skeniranja uzorka tla rendgenskim zracima, pri čemu se kao rezultat dobija trodimenzionalna slika (Euclidean-ova dimenzija E = 3) uzorka u različitim nijansama sive boje, gde svetlije nijanse označavaju veće gustine, a tamnije manje. Nakon što se dobijene vrednosti renormalizuju (podele sa srednjom vrednošću cele slike), dobija se bezdimenzionalno polje indikatora gustine $\rho^{ind}{\sim}\rho/\rho_d$ koje je proporcionalno odnosu gustine u određenoj tački (pikselu) i gustini uzorka u suvom stanju ($\rho^{ind} =$ 1 se odnosi na vrednost gustine u suvom stanju ρ_d).



Slika 1. Horizontalna ravan izvučena iz skeniranog trodimenzionalnog polja ρ^{ind} koje se odnosi na supstrat zelenog krova (preuzeto iz Stanić i sar., 2020) pri dve sukcesivne rezolucije: (a) λ_n = 1024; (b) λ = 512

Figure 1. Horizontal plane extracted from the scanned tridimensional ρ^{ind} field related to the green roof substrate (after Stanić et al., 2020) at two consecutive resolutions: (a) λ_n = 1024; (b) λ = 512

Na Slici 1a je prikazana jedna horizontalna ravan (E = 2) izvučena iz trodimenzionalne slike, čija je veličina L = 60 mm, veličina piksela $L_1(\lambda_n) \approx$ 53.4 µm, a rezolucija $\lambda_n = L/L_1(\lambda_n)$ = 1024 (broj piksela duž jedne ivice slike). Na Slici 1b prikazana je ista ravan pri duplo manjoj rezoluciji λ = 512 koja je dobijena grupisanjem po četiri okolna piksela u jedan koji ima duplo veće dimenzije ($L_1(\lambda) = 2\, L_1(\lambda_n)$) i vrednost ρ^{ind} jednaku prosečnoj vrednosti njegova četiri prethodnika. Algoritam za prepoznavanje zrna iz polja gustina je ilustrovan na Slici 2 (prikazane su vrednosti ρ^{ind}) gde se pri sukcesivnom smanjivanju rezolucije λ određuje zastupljenost vrednosti ρ^{ind} koje su iznad definisane granične vrednosti. Ova granična vrednost se odnosi na minimalnu gustinu zrna $\rho_{s,min}$ i računa se kao $\rho^{ind}_{s,min} = \rho_{s,min}/\rho_d > 1$ (horizontalna ravan na Slici 2).



Slika 2. Trodimenzionalni prikaz sukcesivnog smanjivanja rezolucije polja sa Slike 1 (od λ = 128 do λ = 4), gde se za svako λ razmatraju samo vrednosti ρ^{ind} koje se odnose na čvrstu fazu ($\rho^{ind} \geq \rho^{ind}_{s,min}$) – preuzeto iz Stanić i sar. (2021)

Figure 2. Tridimensional illustration of the consecutive resolution reduction of the field from Figure 1 (od λ = 128 do λ = 4), where for each λ only ρ^{ind} values related to grains are considered ($\rho^{ind} \geq \rho^{ind}_{s,min}$) – after Stanić et al. (2021)

Pod pretpostavkom da je početna rezolucija slike λ_n dovoljno velika da je veličina piksela $L_1(\lambda_n)$ približno jednaka minimalnom prečniku zrna $d_{g,min}$, površina pokrivena vrednostima $\rho^{ind} \geq \rho^{ind}_{s,min}$ (vrednosti iznad horizontalne ravni) predstavlja ukupnu zastupljenost svih zrna ($\geq d_{g,min}$). Sukcesivnim smanjivanjem rezolucije λ i ta zastupljenost se postepeno smanjuje eliminisanjem izolovanih vrednosti $\rho^{ind} \geq \rho^{ind}_{s,min}$ koje se uprosečuju sa okolnim koje su manje od $\rho^{ind}_{s,min}$. S obzirom da novonastale vrednosti ne premašuju $\rho^{ind}_{s,min}$, te oblasti se ne prepoznaju kao zrna pri manjim rezolucijama (ostaju ispod horizontalne ravni), dok veća područja pokrivena vrednostima $\rho^{ind} \geq \rho^{ind}_{s,min}$ ostaju iznad granične vrednosti (oblast u sredini polja na Slici 2 koja ukazuje na zrno velikog prečnika). Drugim rečima, zrna čiji su prečnici manji ili jednaki veličini piksela $L_1(\lambda)$ se ne prepoznaju pri rezolucijama manjim od λ, dok se ona većih prečnika prepoznaju. Zastupljenost zrna čiji su prečnici veći ili jednaki $L_1(\lambda)$ se određuje na sledeći način:

$$P_{grains}\left(d \geq L_1(\lambda)\right) = \frac{N_{grains}\left(d \geq L_1(\lambda)\right)}{\lambda^E} \tag{1}$$

gde je $N_{grains}\left(d \geq L_1(\lambda)\right)$ broj piksela sa vredošću $\rho^{ind} \geq \rho^{ind}_{s,min}$, dok je λ^E (E = 2) ukupan broj piksela pri rezoluciji λ. Kada se jednačina (1) podeli sa zastupljenošću zrna pri početnoj rezoluciji λ_n gde su sva zrna prepoznata, dobija se funkcija raspodele koja opisuje udeo zrna koja su veća ili jednaka $L_1(\lambda)$. Dakle, granulometrijska kriva ima sledeći oblik:

$$P\left(d < L_1(\lambda)\right) = 1 - \frac{P_{grains}\left(d \geq L_1(\lambda)\right)}{P_{grains}\left(d \geq L_1(\lambda)\right)} = 1 - \frac{N_{grains}\left(d \geq L_1(\lambda)\right)}{N_{grains}\left(d \geq L_1(\lambda)\right)}\left(\frac{\lambda_n}{\lambda}\right)^E \tag{2}$$

Uticaj rezolucije na zastupljenost vrednosti koje su veće od neke granične (u ovom slučaju $\rho_{s,min}^{ind}$) može se statistički opisati analitičkim izrazom koji predstavlja prilagođenu formu multifraktalnog zakona koja je prikazana u Stanić i sar. (2021):

$$P_{grains}\big(d \geq L_1(\lambda)\big) = \lambda^{-C_1\left(\frac{\frac{ln\left(\rho_{s,min}^{ind}\right)}{ln(\lambda)}}{C_1\alpha'}+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha'}} \tag{3}$$

gde je $\alpha' = \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^{-1}$, dok su C_1 i α statistički parametri koji opisuju heterogenost polja ρ^{ind}, pri čemu vrednost C_1 [0÷E] određuje opseg oko srednje vrednosti u kojem se ρ^{ind} većinski kreće (kada C_1 teži nuli ρ^{ind} teži srednjoj vrednosti), dok se α odnosi na varijabilnost unutar tog opsega i pojavu ekstremnih vrednosti (α = 0 – nema ekstrema; α = 2 – maksimalna varijabilnost). Na osnovu jednačine (3) može se analitički izraziti i jednačina (2):

$$P\big(d < d_g\big) = 1 - \frac{\left(\frac{L}{d_g}\right)^{-C_1\left(\frac{\frac{ln\left(\rho_{s,min}^{ind}\right)}{ln(L/d_g)}}{C_1\alpha'}+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha'}}}{\left(\frac{L}{d_{g,min}}\right)^{-C_1\left(\frac{\frac{ln\left(\rho_{s,min}^{ind}\right)}{ln\left(L/d_{g,min}\right)}}{C_1\alpha'}+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha'}}} \tag{4}$$

gde su λ i λ_n zamenjeni redno sa L/d_g i $L/d_{g,min}$, dok su d_g i $d_{g,min}$ prečnici aktuelnog i minimalnog zrna jednaki vrednostima piksela $L_1(\lambda)$ i $L_1(\lambda_n)$. Za razliku od nekih fraktalnih modela koji granulometrijsku krivu aproksimiraju stepenom funkcijom čiji je eksponent fiksna vrednost fraktalne dimenzije (Bird i sar., 2000), eksponent u jednačini (4) uzima u obzir različite fraktalne dimenzije za različite d_g (odatle i naziv multifraktali). Kao što je prikazano u Stanić i sar. (2021), funkcija gustine raspodele zrna prečnika d_g se određuje kao izvod jednačine (4) po promenljivoj $ln(L/d_g)$.

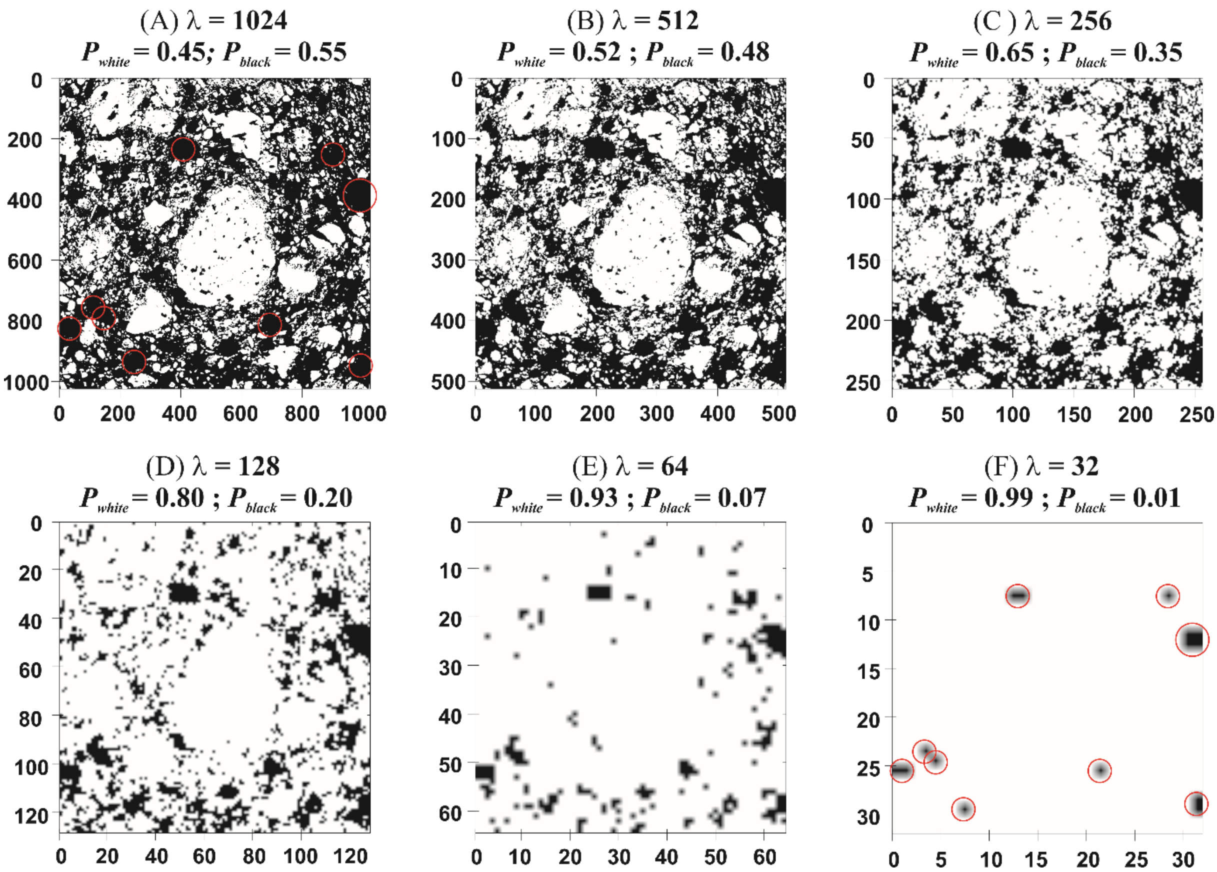
Parametri predstavljene funkcije granulometrijske krive su $\rho_{s,min}^{ind}$, $d_{g,min}$, α i C_1, pri čemu su prva dva fizički zasnovana (određuju se eksperimentalno ili se procenjuju) dok su druga dva statistički parametri. Parametar C_1 najviše utiče na zastupljenost sitnijih zrna, pri čemu manje vrednosti C_1 odgovaraju većoj zastupljenosti. S druge strane, promena vrednosti α manje utiče na zastupljenost sitnih čestica a više na nagib centralnog dela granulometrijske krive koji je strmiji za manje vrednosti α (detaljnije u Stanić i sar., 2021). Vrednosti C_1 i α se direktno određuju statističkom analizom polja ρ^{ind} koristeći metodu “Trace Moment analysis” (Schertzer i Lovejoy, 1987) koja je objašnjena u Stanić i sar. (2021).

2.2 Funkcija krive raspodele veličine pora

Da bi se izvele funkcije hidrauličkih karakteristika neophodno je prvo definisati analitičku funkciju krive raspodele veličine pora u kojima se voda zadržava, odnosno kroz koje teče. Ova funkcija se takođe izvodi na osnovu algoritma sukcesivnog smanjenja rezolucije, pri čemu se umesto vrednosti $\rho^{ind} > \rho_{s,min}^{ind}$ razmatraju vrednosti $\rho^{ind} > 0$, gde se nulta vrednost odnosi na pore ispunjene vazduhom (crne oblasti). S obzirom da $\rho^{ind} = 0$ označava pore, pri uprosečavanju vrednosti ρ^{ind} usled smanjenja rezolucije λ svim vrednostima $\rho^{ind} > 0$ se dodeljuje neka fiksna vrednost, usled čega se dobija crno-bela slika (vidi Sliku 3). Na ovaj način se zastupljenost $\rho^{ind} = 0$ vrednosti (crnih oblasti) postepeno smanjuje zajedno sa rezolucijom λ, pri čemu “opstaju” samo one pore čiji su prečnici veći ili jednaki veličini piksela $L_1(\lambda)$ - na Slici 3a i f su crvenim krugovima obeležene pore većih dimenzija koje odolevaju procesu agregacije. S druge strane, zastupljenost belih piksela ($\rho^{ind} > 0$) se povećava sa smanjenjem λ i to po fraktalnom zakonu (Feder, 1988):

$$P_{white}(\lambda) = \frac{N_{white}(\lambda)}{\left(\frac{\lambda}{\lambda_{min}}\right)^{E}} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\lambda_{min}}\right)^{D_f}}{\left(\frac{\lambda}{\lambda_{min}}\right)^{E}} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_{min}}\right)^{D_f - E} \tag{5}$$

gde je λ_{min} minimalna rezolucija pri kojoj još uvek postoje crni pikseli ($\lambda_{min} = 32$ na Slici 3), dok je D_f fraktalna dimenzija zrna koja uzima vrednosti $[0 \div E]$, pri čemu se $D_f = 0$ odnosi na nepostojanje belih piksela, dok $D_f = E$ ukazuje na nepostojanje crnih.



Slika 3. Primer sukcesivnog smanjivanja rezolucije polja sa Slike 1, gde se pri svakoj rezoluciji λ vrednosti $\rho^{ind} > 0$ fiksiraju na vrednost 1 (beli pikseli), dok vrednosti $\rho^{ind} = 0$ ostaju nepromenjene (crni pikseli) – preuzeto iz Stanić i sar. (2020)

Figure 3. An example of a consecutive resolution reduction of the field from Figure 1, where at each resolution λ values $\rho^{ind} > 0$ are set to one (white pixels), while values $\rho^{ind} = 0$ remain unchanged (black pixels) – after Stanić et al. (2020)

Na osnovu jednačine (5), zastupljenost pora (crnih piksela) koje su komplementarni elementi belim pikselima može se izraziti na sledeći način:

$$P_{pores}(\lambda) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{min}}\right)^{D_f - E} \tag{6}$$

Kao i u slučaju zrna, jednačina (6) označava zastupljenost pora čiji su prečnici veći ili jednaki $L_1(\lambda)$. Da bi se sa zastupljenosti prešlo na funkciju raspodele, jednačina (6) se deli sa ukupnom zastupljenošću pora pri rezoluciji λ_n koja odgovara poroznosti φ:

$$P\big(d \geq L_1(\lambda)\big) = \frac{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{min}}\right)^{D_f-E}}{1-\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_{min}}\right)^{D_f-E}} = \frac{1-\left(\frac{L_1(\lambda_{min})}{L_1(\lambda)}\right)^{D_f-E}}{\varphi} \tag{7}$$

gde su λ i λ_{min} zamenjeni redno sa $\frac{L}{L_1(\lambda)}$ i $\frac{L}{L_1(\lambda_{min})}$. Imajući u vidu da veličine piksela $L_1(\lambda)$ i $L_1(\lambda_{min})$ odgovaraju prečnicima pora d_p i $d_{p,max}$ (prečnik najveće pore), jednačina krive raspodele veličine pora ima sledeći oblik:

$$P\big(d < d_p\big) = 1 - \frac{1-\left(\frac{d_{p,max}}{d_p}\right)^{D_f-3}}{\varphi} \tag{8}$$

Jednačine (5) – (7) su izvedene na osnovu analize dvodimenzionalne slike (E = 2), dok se u jednačini (8) koristi E = 3, jer se kriva raspodele veličine pora odnosi na njihov zapreminski udeo.

Fizički zasnovana veza između granulometrijske krive (jednačina 4) i krive raspodele veličine pora (jednačina 8) se uspostavlja preko parametra D_f. Njegova vrednost se određuje pod pretpostavkom da su pri rezoluciji λ_n prepoznata zrna svih prečnika, što znači da je za $\lambda = \lambda_n$ zastupljenost belih piksela (jednačina 5) jednaka zastupljenosti piksela sa vrednostima $\rho^{ind} > \rho^{ind}_{s,min}$ (jednačina 3), iz čega proističe:

$$D_f = 3 - C_1\left(\frac{\frac{ln\left(\rho^{ind}_{s,min}\right)}{ln\left(L/d_{g,min}\right)}}{C_1\alpha'} + \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha'} \frac{ln\left(\frac{L}{d_{g,min}}\right)}{ln\left(\frac{d_{p,max}}{d_{g,min}}\right)} \tag{9}$$

Dakle, na osnovu četiri parametra funkcije granulometrijske krive (jednačina 4), uz dodatak maksimalne veličine pora $d_{p,max}$, određuje se vrednost fraktalne dimenzije zrna D_f (jednačina 9) koja opisuje krivu raspodele veličine pora (jednačina 8). Jedan od parametara koji utiče na vrednost D_f, a samim tim i na krivu raspodele veličine pora, je $\rho^{ind}_{s,min}$ koji zavisi od gustine uzorka u suvom stanju ρ_d, odnosno zbijenosti, što dodatno potvrđuje fizičku zasnovanost izvedenih jednačina. Kao što je objašnjeno u Stanić i sar. (2020), manje vrednosti D_f se odnose na pore relativno uniformnih veličina što je najčešće slučaj kod slabo graduisanih materijala poput peska, dok se veće vrednosti D_f uglavnom odnose na dobro graduisane materijale kod kojih sitnija zrna popunjavaju praznine između krupnijih čime se stvaraju pore različitih veličina.

2.3 Funkcija krive vlažnosti

Za opisivanje zavisnosti između zapreminske vlažnosti i kapilarnog potencijala u opsegu od zasićenog do potpuno suvog stanja, potrebno je uzeti u obzir i kapilarnu i adsorpcionu komponentu. U tom slučaju, ukupan sadržaj vode $\theta^{tot}(h_k)$ može se napisati u skladu sa Iden i Durner (2014):

$$\theta^{tot}(h_k) = (\theta_s - \theta_r)S_e^{cap}(h_k) + \theta_r S_e^{ads}(h_k) \tag{10}$$

gde su $S_e^{cap} = \frac{\theta^{cap}(h_k)-\theta_r}{\theta_s-\theta_r}$ i $S_e^{ads} = \frac{\theta^{ads}(h_k)}{\theta_r}$ stepeni zasićenosti [0 ÷ 1] za kapilarnu i adsorpcionu vodu, $\theta^{cap}(h_k)$ i $\theta^{ads}(h_k)$ su redno kapilarna i adsorpciona komponenta vlažnosti [-], dok su θ_s i θ_r maksimalna i rezidualna vlažnost [-]. Jednačina (10) jasno ukazuje na to da je za veće vrednosti h_k ($\theta_r < \theta < \theta_s$) dominantan član koji se odnosi na kapilarnost, dok za izrazito negativne vrednosti h_k ($\theta < \theta_r$) tu ulogu preuzima adsorpcija.

Kapilarne sile koje se javljaju u zemljištu zavise najviše od veličine pora. Stoga se na osnovu jednačine (8) i Young-Laplace-ovog zakona izvodi nova fizički-zasnovana funkcija krive vlažnosti za kapilarnu vodu. Prema Young-Laplace-u, nametanjem kapilarnog potencijala h_k = -C/d_p m ($C \approx 2.8\text{x}10^{-5}$) sve pore veće od d_p se prazne. Stoga se na osnovu jednačine (8) izvodi izraz za S_e^{cap}:

$$S_e^{cap}(h_k) = \frac{\theta^{cap}(h_k)-\theta_r}{\theta_s-\theta_r} = \begin{cases} 1, & h_k \geq h_{k,a} \\ 1 - \frac{1-\left(\frac{h_k}{h_{k,a}}\right)^{D_f-3}}{\theta_s-\theta_r}, & h_{k,r} \leq h_k < h_{k,a} \end{cases} \tag{11}$$

gde je D_f gore pomenuta fraktalna dimenzija zrna (jednačina 9), $h_{k,a}$ je najmanja vrednost kapilarnog potencijala pri kojoj materijal ostaje zasićen, dok je $h_{k,r}$ vrednost kapilarnog potencijala koja odgovara rezidulanoj vlažnosti θ_r (iz uslova $S_e^{cap}(h_{k,r}) = 0$ se dobija $h_{k,r} = h_{k,a}[1-(\theta_s-\theta_r)]^{\frac{1}{D_f-3}}$). Treba napomenuti da se u jednačini (11) umesto poroznosti φ koristi $\theta_s - \theta_r$, s obzirom da Young-Laplace-ov zakon važi samo u kapilarnom režimu (vlažnosti veće od rezidualne).

S druge strane, adhezione sile utiču na zadržavanje i kretanje vode koja se u zemljištu nalazi u formi tankog vodenog filma obavijenog oko čestica tla. Na osnovu činjenice da sadržaj adsorpcione vode linearno opada ka nuli sa smanjenjem kapilarnog potencijala u semi-log razmeri (Campbell i Shiozawa, 1992), Peters (2013) je predložio funkciju koja opisuje $S_e^{ads}(h_k)$ a koja je kasnije modifikovana od strane Iden i Durner (2014) i iskorišćena u Stanić i sar. (2020):

$$S_e^{ads}(h_k) = \frac{\theta^{ads}(h_k)}{\theta_r} = 1 + \left(\log_{10}\left(\frac{h_{k,a}}{h_0}\right)\right)^{-1}\left\{\log_{10}\left(\frac{h_k}{h_{k,a}}\right) + b\ln\left[1 + e^{\log_{10}\left(\frac{h_{k,a}}{h_k}\right)/b}\right]\right\} \tag{12}$$

gde je h_0 = -6.3x10^4 m vrednost maksimalnog kapilarnog potencijala koja odgovara potpuno suvom stanju $\theta^{tot} = 0$, dok je b = 0.3 empirijski parametar koji utiče na zakrivljenost krive u blizini vrednosti $h_k = h_{k,a}$. Jednačina (10) se može svesti i na isključivo kapilarni model ukoliko se fiksira vrednost $\theta^{ads}(h_k) = \theta_r$.

2.4 Funkcija krive vodoprovodljivosti

Slično kao u slučaju krive vlažnosti, prema Peters (2013) kriva vodoprovodljivosti za pun opseg vlažnosti se može prikazati kao zbir kapilarne i adsorpcione komponente na sledeći način:

$$K^{tot} = K^{cap} + K^{film} = K_s{}^{cap} K_r{}^{cap} + K_s{}^{film} K_r{}^{film} \tag{13}$$

gde su $K_s{}^{cap}$ i $K_s{}^{film}$ vrednosti kapilarne i adsorpcione vodoprovodljivosti u zasićenom stanju, dok su $K_r{}^{cap}$ i $K_r{}^{film}$ funkcije relativne vodoprovodljivosti za kapilarnu i adsorpcionu komponentu.

Funkcija $K_r{}^{cap}$ je izvedena pod Mualem (1976)–ovom pretpostavkom da se mreža pora može aproksimirati snopom ravnih paralelnih kapilarnih cevčica različitog prečnika od kojih su neke zasićene a neke prazne, pri čemu ukupna količina vode u njima odgovara vlažnosti (odnosnu stepenu zasićenosti) zemljišta. Pod pretpostavkom da se voda kroz cevčice kreće prema Hagen-Poiseuille-ovom zakonu, pri čemu parametar n uzima u obzir zakrivljenost putanje vode (kompenzuje pretpostavku o ravnim cevčicama), Mualem je izveo sledeći izraz za $K_r{}^{cap}$:

$$K_r{}^{cap}(S_e^{cap}) = \left(S_e^{cap}\right)^n \left(\frac{\int_0^{S_e^{cap}} h_k{}^{-1} dS_e^{cap}}{\int_0^1 h_k{}^{-1} dS_e^{cap}}\right)^2 \tag{14}$$

Ako se iz jednačine (11) izrazi $dS_e^{cap} = \frac{D_f-3}{h_{k,a}(\theta_s-\theta_r)}\left(\frac{h_k}{h_{k,a}}\right)^{D_f-4} dh_k$ i ubaci u jednačinu (14), pri čemu se promene granice integracije, dobija se sledeći izraz:

$$K_r{}^{cap}(h_k) = \begin{cases} 1, & h_k \geq h_{k,a} \\ \left(1 - \frac{1-\left(\frac{h_k}{h_{k,a}}\right)^{D_f-3}}{\theta_s-\theta_r}\right)^n \left(\frac{\left(\frac{h_k}{h_{k,a}}\right)^{D_f-4} - \left(\frac{h_{k,r}}{h_{k,a}}\right)^{D_f-4}}{1-\left(\frac{h_{k,r}}{h_{k,a}}\right)^{D_f-4}}\right)^2, & h_{k,r} \leq h_k < h_{k,a} \end{cases} \tag{15}$$

gde je D_f fraktalna dimenzija zrna koja se računa preko jednačine (9). Vrednosti u drugoj zagradi jednačine (15) se kreću između 0 za $h_k = h_{k,r}$ i 1 za $h_k = h_{k,a}$.

Tokunaga (2009) je pokazao da vodoprovodljivost koja potiče od vodenog filma koji obavija zrna linearno opada u log-log razmeri pod nagibom a = -1.5 sa smanjenjem kapilarnog potencijala, na osnovu čega je Peters (2013) izveo jednostavnu jednačinu za ${K_r}^{film}(S_e^{ads})$:

$$ {K_r}^{film}(S_e^{ads}) = \left(\frac{h_0}{h_{k,a}}\right)^{-1.5(1-S_e^{ads})} \tag{16} $$

Treba napomenuti da vrednost nagiba a može da odstupi od -1.5, pogotovu za glinovita zemljišta, jer je ta vrednost odgovara pretpostavci o idealno sferičnim zrnima. Radi smanjenja broja parametara modela, usvojena je vrednost a = -1.5 kao u Peters (2013), Wang i sar. (2016) i Stanić i sar. (2020).

Opisane funkcije hidrauličkih karakteristika (jednačine 10 i 13) zavise od sedam fizički zasnovanih parametara (${K_s}^{cap}$, θ_s, D_f, $h_{k,a}$, θ_r, ${K_s}^{film}$, n), od kojih su ${K_s}^{cap}$ – Darsijev koeficijent filtracije i θ_s – vlažnost zasićenog zemljišta najčešće poznati, dok se D_f određuje iz jednačine (9) na osnovu granulometrijske krive. Vrednosti četiri preostala parametra se određuju iz detaljnih eksperimentalnih krivih vlažnosti i vodoprovodljivosti, kao što je objašnjeno u narednom poglavlju koje se odnosi na validaciju prikazanih funkcija. Kao dodatak priložena je i procedura za grubu procenu hidrauličkih karakteristika zemljišta na osnovu elementarnih ulaznih podataka koji su dostupni u praksi (poglavlje 4).

3 Validacija izvedenih analitičkih funkcija

Za validaciju funkcije granulometrijske krive (jednačina 4) korišćene su skenirane slike supstrata zelenog krova "Green Wave" (Stanić i sar., 2021) na osnovu kojih su određeni parametri funkcije, a dobijeni rezultati su poređeni sa eksperimentalnim podacima (Slika 4). Za isti materijal je urađeno i poređenje fraktalnih funkcija krive vlažnosti (jednačina 10) i vodoprovodljivosti (jednačina 13) sa merenim vrednostima (Slika 5), pri čemu je vrednost parametra D_f određena na osnovu granulometrije (jednačina 9). Konačno, jednačine (10) i (13) su upoređene sa eksperimentalnim krivama vlažnosti i vodoprovodljivosti za još 10 tipova zemljišta, gde su na Slici 6 predstavljeni oni materijali čije su vodoprovodljivosti prikazane u funkciji od kapilarnog potencijala, dok su na Slici 7 predstavljeni oni čije vodoprovodljivosti zavise od vlažnosti. S obzirom da za 10 pomenutih tipova zemljišta nisu dostupni podaci o granulometriji, vrednosti D_f se određuju iz slaganja jednačine (10) i eksperimentalnih krivih vlažnosti.

3.1 Supstrat zelenog krova

3.1.1 Granulometrijska kriva

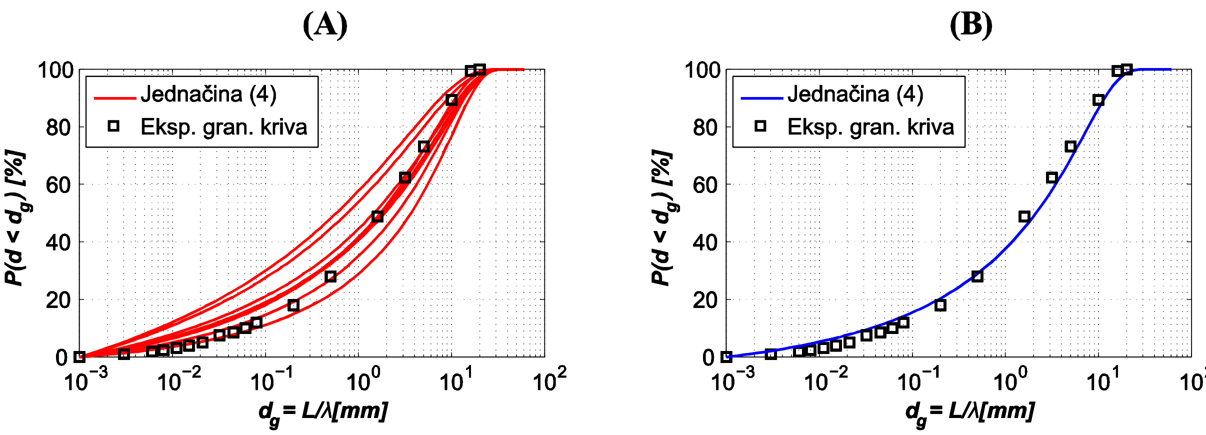
Za skeniranje supstrata zelenog krova korišćen je cilindrični uzorak prečnika 10 cm i visine 15 cm. Način pravljenja uzorka, kao i tehničke karakteristika CT skenera koji je korišćen su prikazane u Stanić i sar. (2021). Kao rezultat skeniranja dobijena je trodimenzionalna slika (1785x1785x3072 voksela), iz koje je izvučeno osam horizontalnih ravni (jedna od njih je prikazana na Slici 1) dimenzija L = 60 mm, rezolucije λ_n = 1024 i veličine piksela $l(\lambda_n) \approx 53.4$ μm. S obzirom da je obezbeđena statistička izotropija unutar skeniranog uzorka, α i C_1 su određeni primenom „Trace Moment analysis" metode na osam izdvojenih dvodimenzionalnih ravni umesto cele trodimenzionalne slike, čime se štedi na vremenu i kompjuterskoj memoriji. Fizički parametri $\rho_{s,min}^{ind} = \rho_{s,min}/\rho_d = 2.2/1.42 = 1.55$ i $d_{g,min} \approx 1$ μm su eksperimentalno određeni i važe za sve analizirane ravni.

Tabela 1. Vrednosti parametara α i C_1, dobijene “Trace Moment analysis” metodom, koje se odnose na osam horizontalnih ravni ρ^{ind} analiziranih u Stanić i sar. (2021). Vrednosti označene sivom bojom se odnose na ravan sa Slike 1

Table 1. Values of α and C1 parameters, obtained by means of Trace Moment analysis, related to eight horizontal ρ^{ind} fields analyzed in Stanić et al. (2021). Values highlighted in grey are related to the plane from Figure 1

	Horizontalna ravan							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
C_1	9.34E-03	9.93E-03	1.64E-02	2.23E-02	1.66E-02	2.72E-02	1.45E-02	1.93E-02
α	1.93	1.96	1.83	1.67	1.80	1.61	1.85	1.66

Na osnovu priloženih vrednosti parametara, korišćenjem jednačine (4) dobija se osam analitičkih krivih prikazanih na Slici 4a (pune linije), gde svaka kriva odgovara jednoj analiziranoj ravni. Dobijene krive su poređene sa eksperimentalnim vrednostima (kvadrati) dobijenim metodama suvog prosejavanja (AFNOR, 1996) i sedimentacije (AFNOR, 1992), pri čemu rezultati pokazuju zadovoljavajuće slaganje sa merenim vrednostima. Kako bi se dobila jedinstvena analitička kriva raspodele veličine zrna koja najbolje opisuje supstrat zelenog krova, parametri α i C_1 su ručno podešeni (Slika 4b) tako da se obezbedi najbolje moguće slaganje sa eksperimentalnim podacima. Dobijene vrednosti (C_1 = 2.25 x 10^{-2}, α = 1.6) upadaju u opseg vrednosti dobijenih statističkom metodom „Trace Moment analysis“ (Tabela 1), čime se potvrđuje verodostojnost prikazane metodologije. Takođe, mala vrednost C_1 i velika vrednost α označavaju blaži nagib centralnog dela krive uz značajniji udeo sitnih čestica, što odgovara opisu dobro graduisanih zrnastih materijala kakav je i analizirani supstrat.



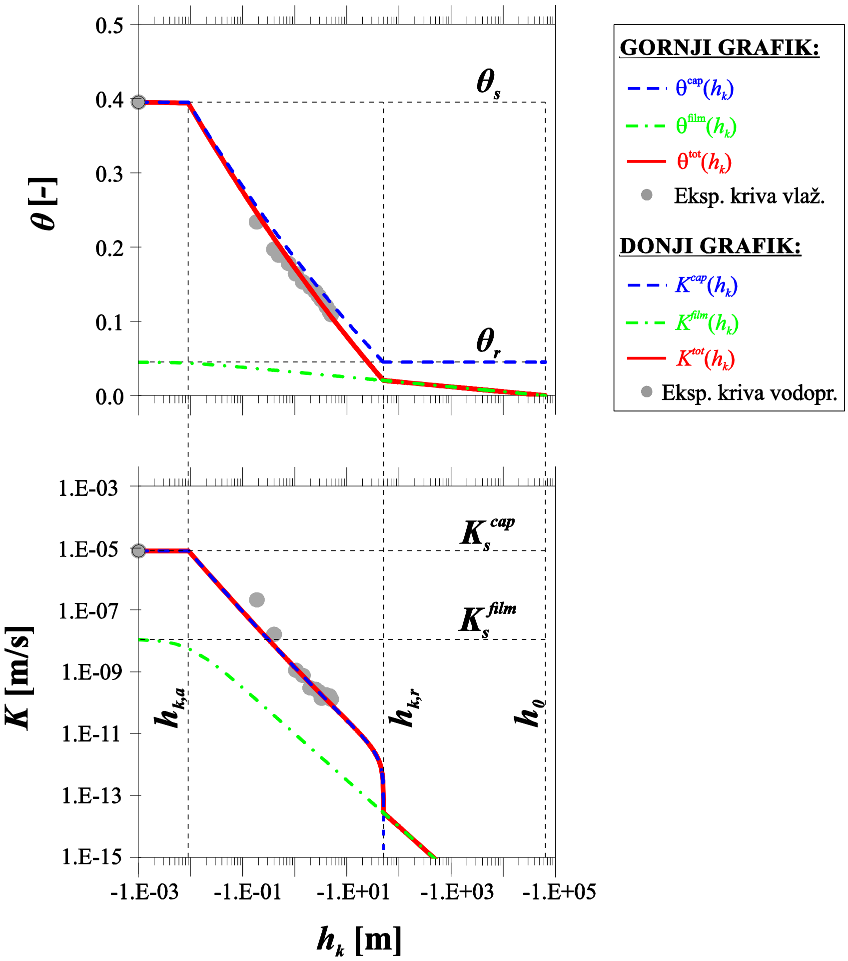
Slika 4. Za supstrat zelenog krova prikazano je poređenje: (a) analitičkih krivih raspodele (pune linije) dobijenih korišćenjem parametara iz Tabele 1 u jednačini 4 i eksperimentalnih vrednosti (kvadrati) – preuzeto iz Stanić i sar. (2021); (b) isto kao u (a) samo za optimalne vrednosti parametara (C_1 = 2.25x10^{-2}, α = 1.6)

Figure 4. For the green roof substrate it is presented the comparison between: (a) analytical probability functions (solid lines) obtained by introducing parameters from Table 1 into equation (4) and experimental data (squares) - after Stanić et al. (2021); (b) same as in (a) just for the optimal parameter values (C_1 = 2.25x10^{-2}, α = 1.6)

3.1.2 Krive vlažnosti i vodoprovodljivosti

Jednačine (10) i (13) zavise od sedam parametara, među kojima su $K_s{}^{cap} = 8.11x10^{-6}$ m/s i θ_s = 0.395 eksperimentalno određeni, dok se D_f određuje na osnovu jednačine (9). Vrednost D_f zavisi od poznatih vrednosti L = 0.06 m, $d_{g,min}$ = 1 x 10^{-6} m, $\rho^{ind}_{s,min} = 1.55$, C_1 = 2.25 x 10^{-2}, α = 1.6 i nepoznate $d_{p,max}$, pa je za proračun D_f moguće iskoristiti zavisnost $d_{p,max}$ = $-C$ / $h_{k,a}$ koja proističe iz Young-

Laplace-ovog zakona. Imajući to u vidu, na osnovu slaganja jednačina (10) i (13) sa eksperimentalnim podacima predstavljenim na Slici 5 (krugovi) određuju se optimalne vrednosti parametara $h_{k,a}$, θ_r, $K_s{}^{film}$ i n (Tabela 2), gde se dobijena vrednost $h_{k,a} = 9 \times 10^{-3}$ m koristi za određivanje $D_f = 2.95$.



Slika 5. Gornji grafik – Poređenje jednačine 10 (puna linija) sa eksperimentalnom krivom vlažnosti (krugovi) supstrata zelenog krova, pri čemu su odvojeno prikazane kapilarna (isprekidana linija) i adsorpciona komponenta (crta-tačka linija); Donji grafik – Poređenje jednačine 13 (puna linija) sa eksperimentalnom krivom vlažnosti (krugovi) – preuzeto iz Stanić i sar. (2020)

Figure 5. Top graph – Comparison between equation 10 (solid line) and experimental water retention curve (circles), where capillary (dashed line) and adsorptive component (dash-dot line) are presented separately: Bottom graph – Comparison between equation 13 (solid line) and experimental hydraulic conductivity data (circles) – after Stanić et al. (2020)

Na primeru rezultata prikazanih na Slici 5 mogu se uočiti neke generalne karakteristike opisanih funkcija hidrauličkih karakteristika. Rezultati pokazuju da u zoni $h_k \geq h_{k,r}$ komponenta K^{film} (tačka-crta linija) nema gotovo nikakav uticaj na K^{tot} (puna linija), s obzirom da je vrednost $K_s{}^{film}$ nekoliko redova veličine manja od $K_s{}^{cap}$, dok je $K^{tot} = K^{film}$ za $h_k < h_{k,r}$. Takođe, za $h_k < h_{k,r}$ kapilarna komponenta θ^{cap} (isprekidana linija) postaje jednaka θ_r, pa na θ^{tot} (puna linija) uticaj ima samo θ^{ads} (tačka-crta linija).

Na ovom primeru je takođe demonstrirana fizički zasnovana veza između granulometrijske krive i krivih vlažnosti i vodoprovodljivosti, koja se ostvaruje preko parametra D_f (jednačina 9). Ukoliko bi eksperimentalni podaci hidrauličkih karakteristika bili još detaljniji u zoni saturacije i pokrivali zonu izrazito negativnih kapilarnih potencijala, bilo bi moguće proceniti vrednosti $h_{k,a}$ i θ_r (objašnjeno u nastavku), pa bi u idealnom slučaju kao nepoznati parametri ostali samo K_s^{film} i n.

Tabela 2. Vrednosti parametara za zemljišta prikazana na Slikama 6 i 7. Parametri označeni sivom bojom su ručno podešeni kako bi se obezbedilo najbolje moguće slaganje između analitičkih i eksperimentalnih krivih – preuzeto iz Stanić i sar. (2020)

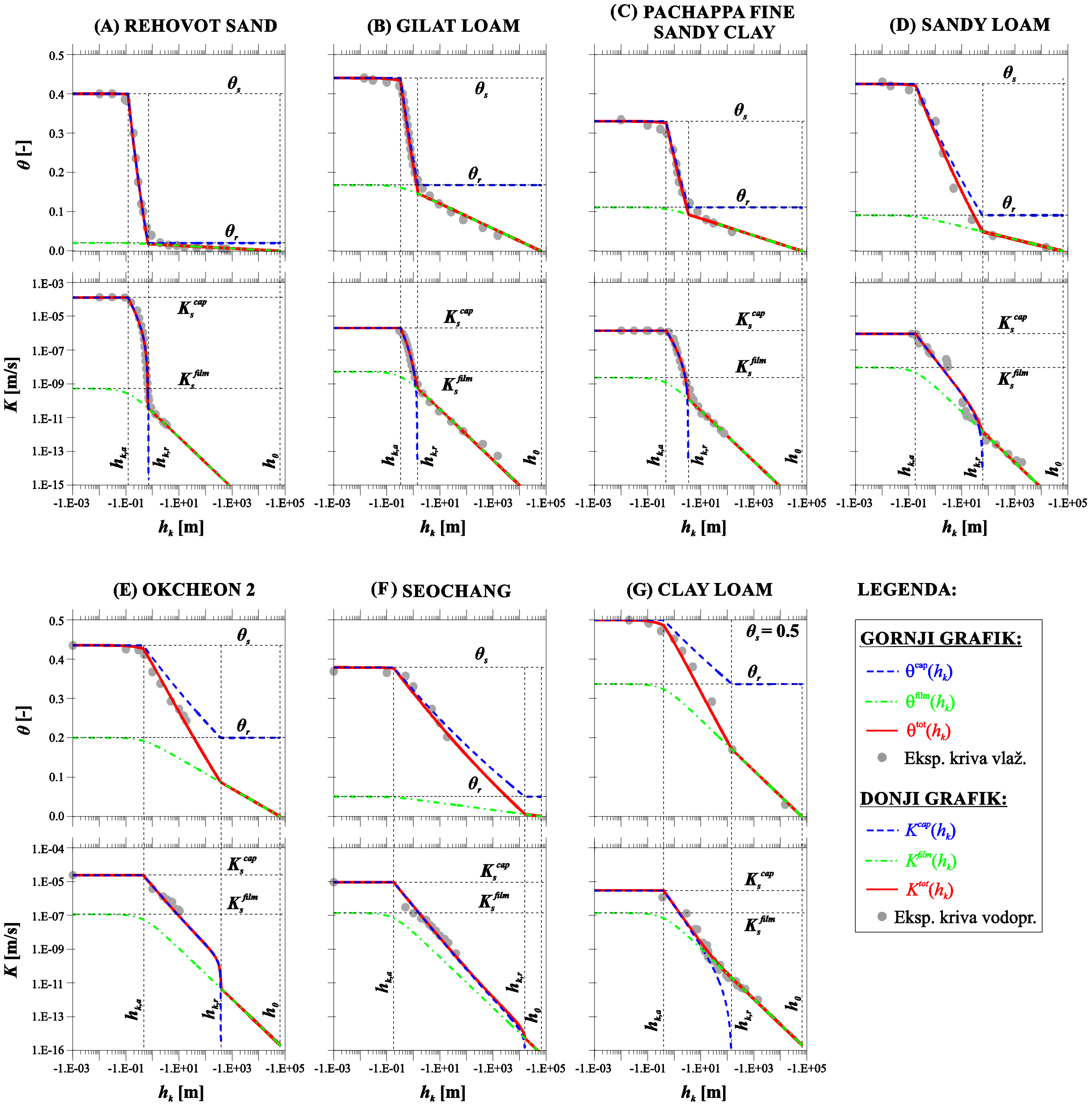
Tabel 2. Values of parameters for soils analyzed in Figures 6 and 7. Parameters highlighted in grey are manually adjusted to provide the best possible agreement between analytical and experimental curves - after Stanić et al. (2020)

Zemljište	*Referenca*	θ_s [-]	K_s^{cap} [m/s]	D_f [-]	$h_{k,a}$ [m]	θ_r [-]	K_s^{film} [m/s]	n [-]	R^2 kriva vlaž.	R^2 kriva vod.
Shonai sand	*Mehta et al. 1994*[1]	0.431	1.09E-04	2.680	0.12	0.064	1.74E-09	1.10	0.98	0.80
Rehovot sand	*Mualem 1976b*[1]	0.400	1.27E-04	2.725	0.12	0.021	5.21E-10	0.30	0.99	0.99
Gilat loam	*Mualem 1976b*[1]	0.440	2.00E-06	2.790	0.33	0.168	5.21E-09	1.00	0.99	0.97
Pachappa loam	*Jackson et al., 1965*[1]	0.460	2.00E-06	2.860	0.50	0.138	9.26E-09	1.20	0.99	0.98
Pachappa fine sandy clay	*Mualem 1976b*[1]	0.330	1.40E-06	2.873	0.50	0.111	2.31E-09	0.20	0.99	0.98
Adelanto loam	*Jackson et al., 1965*[1]	0.430	4.50E-07	2.905	1.50	0.261	2.89E-09	0.30	0.99	1.00
Sandy loam	*Pachepsky et al., 1984*[1]	0.425	9.00E-07	2.930	0.18	0.091	9.26E-09	-0.50	0.99	0.96
GW substrate	*Stanic et al., 2019*	0.395	8.11E-06	2.950	0.009	0.045	1.16E-08	-1.35	0.99	1.00
Okcheon 2	*Oh et al., 2015*[2]	0.435	2.38E-06	2.960	0.45	0.200	1.16E-08	-1.35	0.99	0.99
Seochang	*Oh et al., 2015*[2]	0.379	9.13E-07	2.965	0.18	0.050	1.39E-08	-1.30	0.96	0.99
Clay Loam	*Pachepsky et al., 1984*[3]	0.500	2.90E-07	2.970	0.40	0.337	1.39E-08	1.00	0.99	0.99

[1] iz Rudiyanto et al. (2015)
[2] iz Oh et al. (2015)
[3] iz Zhang (2011), gde su θ_s i K_s^{cap} procenjeni na osnovu eksperimentalnih podataka

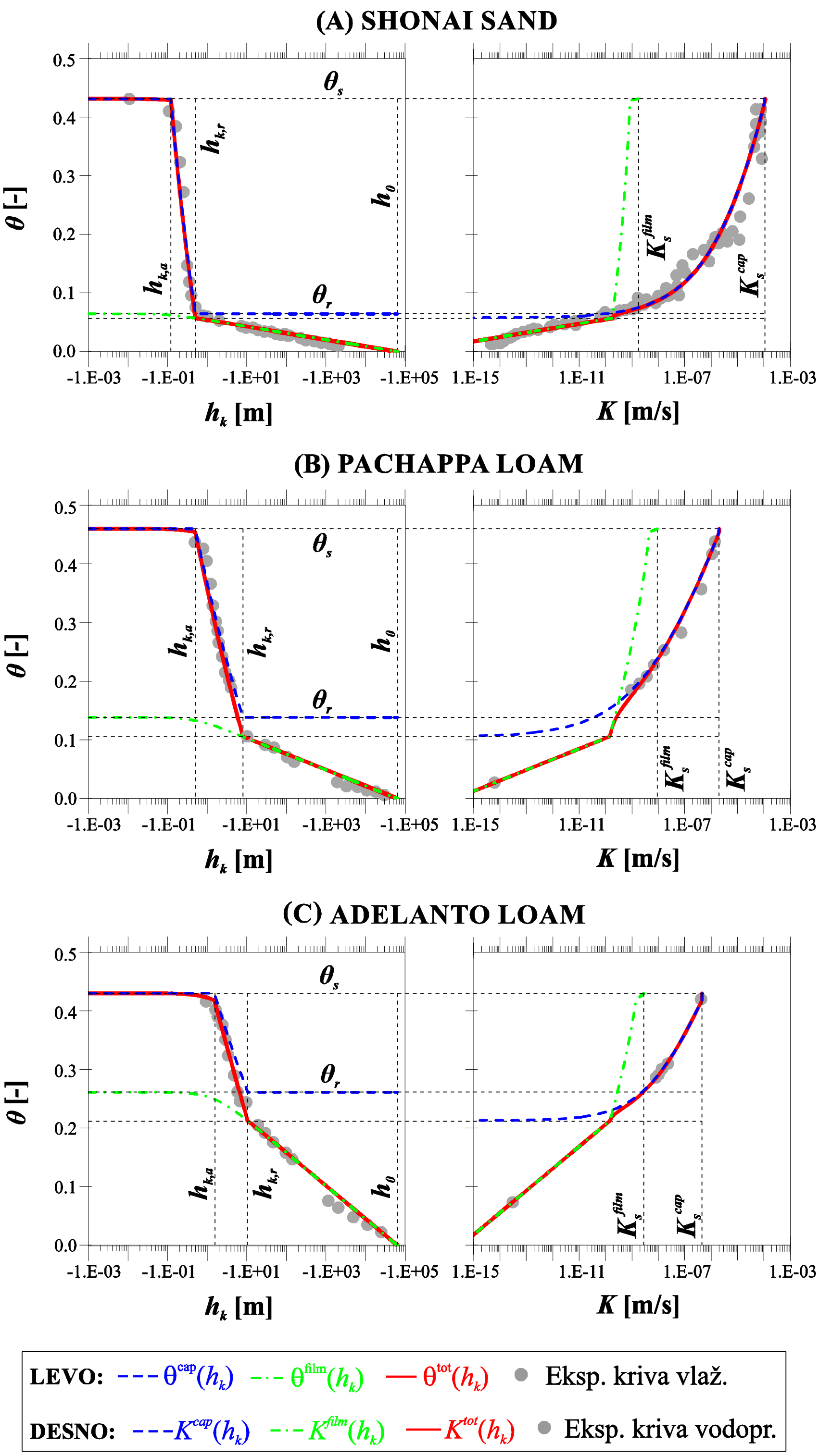
3.2 Ostali tipovi zemljišta

Kao i u slučaju supstrata zelenog krova, eksperimentalne vrednosti K_s^{cap} i θ_s su dostupne za sve analizirane materijale (Tabela 2), dok se preostalih pet parametara određuju na osnovu slaganja prikazanih fraktalnih funkcija i merenja. Većina materijala prikazanih na Slikama 6 i 7 ima detaljna merenja (krugovi) u opsegu od saturacije do apsolutno suvog stanja, na osnovu čega je moguće proceniti vrednosti $h_{k,a}$ i $h_{k,r}$. S obzirom da $h_{k,a}$ odgovara najmanjem kapilarnom potencijalu pri kojem zemljište ostaje zasićeno, njegova vrednost se određuje iz uslova da zapreminska vlažnost počinje da opada za $h_k < h_{k,a}$. Takođe, $h_{k,r}$ se može proceniti na osnovu vrednosti h_k pri kojoj vlažnost počinje sporije da se menja sa promenom kapilarnog potencijala (ili vlažnosti). Nakon što se $h_{k,a}$ i $h_{k,r}$ procene na osnovu eksperimentalnih podataka, ostaje da se odrede parametri D_f, K_s^{film} i n, pri čemu se vrednost $\theta_r = \theta_s - 1 + \left(\frac{h_{k,r}}{h_{k,a}}\right)^{D_f - 3}$ računa iz uslova $S_e^{cap}(h_{k,r}) = 0$. Za sva zemljišta prikazana na Slikama 6 i 7, vrednost D_f je ručno podešavana kako bi se obezbedilo najbolje slaganje između jednačine (10) i merene krive vlažnosti u zoni između $h_{k,a}$ i $h_{k,r}$. Nakon toga su podešene vrednosti K_s^{film} i n koje utiču na slaganje između jednačine (13) i merenih krivih vodoprovodljivosti. Vrednost n zajedno sa D_f utiče na nagib krive vodoprovodljivosti u kapilarnom režimu, pri čemu manje vrednosti n (uključujući i negativne) ublažuju promenu vodoprovodljivosti. S druge strane, vrednost K_s^{film} samo translira adsorpcionu komponentu (tačka-crta linija) duž y ose. U svim slučajevima sa Slike 5, 6 i 7 slaganje između jednačina (10), (13) i eksperimentalnih vrednosti je zadovoljavajuće (R^2 > 0.95 – Tabela 2).



Slika 6. Isto kao na Slici 5 samo za sedam različitih zemljišta – preuzeto iz Stanić i sar. (2020)

Figure 6. Same as in Figure 5, just for seven different soils – after Stanić et al. (2020)



Slika 7. Isto kao na Slici 5 samo za tri dodatna zemljišta, pri čemu se levi grafik odnosi na krivu vlažnosti a desni na krivu vodoprovodljivosti koja je prikazana u funkciji od vlažnosti – preuzeto iz Stanić i sar. (2020)

Figure 7. Same as in Figure 5 just for three additional soils, where left-side graph is related to the water retention curve, while the right-side graph is related to the hydraulic conductivity data presented as a function of water content – after Stanić et al. (2020)

Kod peskovitih zemljišta (Slika 6a i Slika 7a), krive vlažnosti su strmije u zoni $h_k > h_{k,r}$ što je opisano nižim vrednostima D_f koje se odnose na materijale sa relativno uskim opsegom veličina pora koje se zbog toga lako prazne. Takvi materijali gotovo da nemaju adsorpciona svojstva, što se dokazuje i malom vrednošću $\frac{h_{k,r}}{h_{k,a}}$ koja u kombinaciji sa nižim vrednostima D_f daje male vrednosti θ_r. Zbog toga se kapilarna i adsorpciona komponenta mogu posmatrati gotovo zasebno, pri čemu je $\theta^{tot} = \theta^{cap}$ za $h_k > h_{k,r}$ odnosno $\theta^{tot} = \theta^{ads}$ za $h_k < h_{k,r}$. Takođe, kod ovih materijala je najveća razlika između ${K_s}^{cap}$ i ${K_s}^{film}$ (i do pet redova veličine).

U poređenju sa peskovitim zemljištima, kod ilovača i glinovitih zemljišta se uglavnom koriste veće vrednosti D_f. Takođe, veće vrednosti θ_r ukazuju na značajniji uticaj adsorpcione vode. U slučaju peskovite ilovače (Slika 6d) i Adelanto ilovače (Slika 7c), a pogotovu glinovite ilovače (Slika 6g) uočava se odstupanje θ^{cap} od θ^{tot} za $h_k > h_{k,r}$, što znači da se uticaj θ^{ads} na θ^{tot} za $h_k > h_{k,r}$ ne može zanemariti. Takođe, razlika između ${K_s}^{cap}$ i ${K_s}^{film}$ je značajno manja nego kod peskovitih zemljišta (svega dva reda veličine na Slici 6g), što je dodatni pokazatelj snažnog uticaja adsorpcione komponente.

Kao što je već napomenuto, visoke vrednosti D_f se odnose i na dobro graduisane zrnaste materijale sa 5% do 15% čestica sitnijih od 75μm, kao što su supstrat zelenog krova (Slika 5), Okcheon 2 (Slika 6e) i Seochang zemljište (Slika 6f), pri čemu u slučaju Okcheon 2 zemljišta dolazi do značajnijeg odstupanja θ^{cap} od θ^{tot} pri visokim vlažnostima zbog većih vrednosti θ_r. Takođe, nagib krive vodoprovodljivost za $h_k > h_{k,r}$ kod tri pomenuta materijala je blaži, što je opisano negativnim vrednostima parametra n.

4 Procena hidrailičkih karakteristika zemljišta

Vrednosti parametara dobijene u poglavlju 3 daju jasno fizičko tumačenje analiziranih eksperimentalnih karakteristika zemljišta. Međutim, sa stanovišta inženjerske prakse glavni cilj nije opisivanje eksperimentalnih podataka koji su najčešće nedostupni, već procena hidrauličkih karakteristika tla na osnovu elementarnih ulaznih podataka kao što su granulometrijska kriva, gustina zrna ρ_s, ${K_s}^{cap}$ i θ_s. U tom slučaju se preporučuju sledeći koraci:

1. Ukoliko ne postoje skenirane slike tla već samo eksperimentalna granulometrijska kriva, jednačina (4) se uklapa sa merenjima podešavanjem vrednosti parametara α i C_1, pri čemu je neophodno prethodno proceniti vrednosti $\rho_{s,min}^{ind}$, $d_{g,min}$ i L. Ukoliko ne postoji vrednost minimalne gustine zrna $\rho_{s,min}$, $\rho_{s,min}^{ind}$ se procenjuje kao $\approx 0.9\frac{\rho_s}{\rho_d}$, dok se vrednost $d_{g,min}$ procenjuje na osnovu eksperimentalne krive. Vrednost L se odnosi na reprezentativnu elementarnu zapreminu za određivanje granulometrijske krive, a određuje se na osnovu empirijskog izraza $L \approx \left(300 d_{g,max}/\rho_d\right)^{1/3}$ m, gde se $d_{g,max}$ unosi u [m] a ρ_d u [kg/m^3].
2. Na osnovu parametara iz jednačine (4) i procenjene vrednosti $d_{p,max}$ računa se vrednost D_f preko jednačine (9).
3. Na osnovu vrednosti $d_{p,max}$ i $d_{p,min} = d_{g,min}$ se preko Young-Laplace-ovog izraza procenjuju vrednosti $h_{k,a} \approx$ -C/$d_{p,max}$ i $h_{k,r} \approx$ -C/$d_{p,min}$, a zatim i rezidualna vlažnost kao $\theta_r = \theta_s - 1 + \left(\frac{h_{k,r}}{h_{k,a}}\right)^{D_f-3}$.
4. Na kraju je potrebno proceniti vrednosti n i ${K_s}^{film}$ za šta još uvek u literaturi ne postoje konkretne preporuke. Zato se ove vrednosti jedino mogu usvojiti na osnovu prethodno izvedenih zaključaka da negativne vrednosti l najčešće odgovaraju dobro graduisanim zrnastim materijalima, dok je vrednost ${K_s}^{film} \approx (0.01 \div 0.001) \times {K_s}^{cap}$ za zemljišta sa značajnijom adsorpcionom komponentom (ilovača, glina) i ${K_s}^{film} \approx (0.0001 \div 0.00001) \times {K_s}^{cap}$ za zemljišta gde je adsorpcija zanemarljiva (krupnozrna zemljišta i pesak).

Prikazana procedura za procenu hidrauličkih karakteristika zemljišta na osnovu elementarnih ulaznih podataka koji se najčešće sreću u praksi je krajnje uopštena, i u nekim slučajevima može doći i do značajnijeg odstupanja od realnih vrednosti. Međutim, zbog svoje fizičke zasnovanosti predstavljena metodologija je u mnogome pouzdanija od korišćenja standardnih funkcija Brooks & Corey (1964) i van Genuchten (1980) iz nekoliko razloga. Prvo, ove funkcije ne uzimaju u obzir fenomen adsorpcije koji kod nekih vrsta zemljišta može imati značajan uticaj pre svega na njihove retenzione karakteristike. Drugo, čak i kada se koriste u formi modela koji vodi računa o adsorpcji, kao što je Peters (2013), kapilarna komponenta još uvek zavisi od empirijskih parametara čije je vrednosti teško proceniti jer nisu u vezi sa granulometrijskom krivom. Takođe, pomenute funkcije koriste fiksnu vrednost parametra n za sve materijale, što prema mnogim studijama, ukjučujući i ovu, nije fizički utemeljeno.

5 Zaključak

U ovom radu je predstavljena metodologija razvijanja analitičkih fizički zasnovanih funkcija koje opisuju krive raspodele veličina zrna i pora, kao i krive vlažnosti i vodoprovodljivosti, sa ciljem da se pokaže njihova međusobna povezanost. Na osnovu skeniranih uzoraka tla, gde se dobijena polja gustine analiziraju pri različitim rezolucijama, izvedena je funkcija granulometrijske krive koja se zasniva na teoriji multifraktala. Prikazana funkcija zavisi od dva fizička (minimalan prečnik zrna i odnos minimalne gustine zrna i gustine uzorka) i dva statistička parametra multifraktala koji opisuju heterogenost analiziranog polja gustina. Na osnovu slične metodologije izvodi se funkcija krive raspodele veličine pora koja se oslanja na jednostavniji fraktalni (stepeni) zakon. Kombinacijom ove funkcije i Young-Laplace-ovog zakona koji daje vezu između veličine pora i kapilarnog potencijala koji se u njima javlja, izvodi se funkcija krive vlažnosti u kapilarnom režimu. Konačno, koristeći funkciju krive vlažnosti uz pretpostavke Mualem-ovog modela izvodi se funkcija krive vodoprovodljivosti. S obzirom da dobijene funkcije hidrauličkih karakteristika predstavljaju samo kapilarnu komponentu, ukombinovane su sa već postojećim funkcijama koje se odnose na adsorpciju. Konačne funkcije zavise od ukupno sedam fizički zasnovanih parametara, od kojih su dva najčešće poznata (koeficijent filtracije i poroznost) dok se jedan (fraktalna dimenzija) može odrediti na osnovu granulometrijske krive.

Validacija prikazanih funkcija je obavljena na osnovu njihovog poređenja sa eksperimentalnim podacima 11 različitih materijala. Na slučaju supstrata zelenog krova testirana je funkcija granulometrijske krive, kao i analitička veza između njenih parametara i fraktalne dimenzije zrna koja se koristi u slučaju hidrauličkih karakteristika. Rezultati pokazuju zadovoljavajuće slaganje analitičkih i merenih vrednosti, uz jasnu fizički zasnovanu vezu između krivih raspodele zrna i hidrauličkih karakteristika. U slučaju ostalih analiziranih materijala podaci o granulometriji nisu dostupni, pa fraktalnu dimenziju nije moguće sračunati već se njena vrednost određuje na osnovu slaganja između analitičkih i eksperimentalnih krivih vlažnosti i vodoprovodljivosti. S obzirom da su svi parametri fizički zasnovani, za njihovo određivanje nije neophodno koristiti sofisticirane optimizacione algoritme, već ih je moguće kalibrisati ručno prateći proceduru prikazanu u radu. Rezultati pokazuju zadovoljavajuće slaganje sa merenjima ($R^2 > 0.95$), pri čemu se najmanje vrednosti fraktalne dimenzije dobijaju za čista peskovita zemljišta koja su slabo graduisana i čije pore pokrivaju relativno uzak opseg veličina. Ovi materijali nemaju gotovo nikakva adsorpciona svojstva na šta ukazuju i niske vrednosti rezidualne vlažnosti. S druge strane, za glinovita zemljišta i ilovače se koriste veće vrednosti fraktalne dimenzije i rezidualne vlažnosti, što dovodi do značajnijeg uticaja adsorpcione komponente čak i pri vlažnostima bližim saturaciji. Adsorpcija se ne može zanemariti ni kod nekih dobro graduisanih zrnastih materijala koji osim veoma visokih vrednosti fraktalne dimenzije imaju i značajnije rezidualne vlažnosti. Rezultati pokazuju da se kod ovakvih materijala vodoprovodljivost sporije menja sa promenom kapilarnog potencijala što se opisuje negativnim vrednostima Mualem-ovog koeficijenta n.

S obzirom da prikazane funkcije zavise isključivo od fizički zasnovanih parametara, pri čemu postoji jasna veza sa granulometrijksom krivom, na kraju rada je prikazana procedura za grubu procenu krivih vlažnosti i vodoprovodljivosti na osnovu elemntarnih ulaznih podataka koji se mogu naći u praksi (granulometrijska kriva, gustina zrna, Darcy-jev koeficijent filtracije, poroznost).

Literatura

1. AFNOR. (1992). Analyse Granulométrique Des Sols - Méthode Par Sédimentation. France: Association Française de Normalisation.
2. AFNOR. (1996). Analyse Granulométrique - Méthode Par Tamisage à Sec Après Lavage. France: Association Française de Normalisation.
3. Bird N.R.A., Perrier E., Rieu M. (2000). The Water Retention Function for a Model of Soil Structure with Pore and Solid Fractal Distributions. *European Journal of Soil Science*, 51(1): 55–63. https://doi.org/10.1046/j.1365-2389.2000.00278.x.
4. Brooks R.H., Corey A.T. (1964). Hydraulic Properties of Porous Media. Hydrology Papers, 3: 1–27.
5. Campbell G.S., Shiozawa S. (1992). Prediction of Hydraulic Properties of Soils Using Particle-Size Distribution and Bulk Density Data. *In Proceedings of the International Workshop on Indirect Methods for Estimating the Hydraulic Properties of Unsaturated Soil*, 317–328.
6. Feder J. (1988). Fractals. *Plenum Press, New York*.
7. Fredlund D. G., Xing A. (1994). Equations for the Soil-Water Characteristic Curve. *Canadian Geotechnical Journal*, 31: 521–532.
8. Ghanbarian-Alavijeh B., Millán H., Huang G. (2011). A Review of Fractal, Prefractal and Pore-Solid-Fractal Models for Parameterizing the Soil Water Retention Curve. *Canadian Journal of Soil Science*, 91(1): 1–14. https://doi.org/10.4141/cjss10008.
9. Iden S.C., Durner W. (2014). Comment on ‘Simple Consistent Models for Water Retention and Hydraulic Conductivity in the Complete Moisture Range’ by A. Peters. *Water Resources Research*, 50(1): 7530–7534. https://doi.org/10.1002/2014WR015937.Received.
10. Kosugi K. (1996). Lognormal Distribution Model for Unsaturated Soil Hydraulic Properties. *Water Resources Research*, 32(9): 2697–2703.
11. Mualem Y. (1976). A New Model for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Porous Media. *Water Resources Research*, 12(3): 513–522. https://doi.org/10.1029/WR012i003p00513.
12. Peters A. (2013). Simple Consistent Models for Water Retention and Hydraulic Conductivity in the Complete Moisture Range. *Water Resources Research*, 49: 6765–6780. https://doi.org/10.1002/wrcr.20548.
13. Richards L. A. (1931) Capilary Conduction of Liquids through Porous Media, *Physics*, 1: 318–33.
14. Schertzer D., Lovejoy S. (1987). Physical Modeling and Analysis of Rain and Clouds by Anisotropic Scaling Multiplicative Processes. *Journal of Gephysical Research*. 92: 9693–9714.
15. Schertzer D., Lovejoy S. (1997). Universal Multifractals Do Exist!: Comments on ‘A Statistical Analysis of Mesoscale Rainfall as a Random Cascade.’ *Journal of Applied Meteorology*, 36: 1296–1303.
16. Stanić F., Tchiguirinskaia I., Versini P.-A,, Cui Y.-J., Delage P., Aimedieu P., Tarquis A.M., Bornert M., Schertzer D. (2021). A new multifractal-based grain size distribution model. *Geoderma*. 404: 1-12. https://doi.org/10.1016/j.geoderma.2021.115294
17. Stanić F., Cui Y.-J., Delage P., De Laure E., Versini P.-A., Schertzer D., Tchiguirinskaia I. (2019). A Device for the Simultaneous Determination of the Water Retention Properties and the Hydraulic Conductivity Function of an Unsaturated Coarse Material; Application to a Green- Roof Volcanic Substrate. *Geotechnical Testing Journal*. 43(3): 547-564. https://doi.org/10.1520/GTJ20170443.
18. Stanić F., Delage P., Tchiguirinskaia I., Versini P.-A., Cui Y.-J., Schertzer D. (2020). A new fractal approach to account for capillary and adsorption phenomena in the water retention and transfer properties of unsaturated soils. *Water Resources Research*, 56, https://doi.org/10.1029/2020WR027808
19. Tokunaga T. K. (2009). Hydraulic Properties of Adsorbed Water Films in Unsaturated Porous Media. *Water Resources Research*, 45: 1–9. https://doi.org/10.1029/2009WR007734.
20. van Genuchten M. Th. (1980). A Closed-Form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils. *Soil Science Society of America Journal*, 44 (5): 892–898.
21. Versini P.-A., Stanic F., Gires A., Schertzer D., Tchiguirinskaia I. (2020) Measurements of the Water Balance Components of a Large Green Roof in the Greater Paris Area, *Earth Syst. Sci. Data.* 12: 1025–1035. https://doi.org/10.5194/essd-12-1025-2020.
22. Wang Y., Ma J., Guan H. (2016). A Mathematically Continuous Model for Describing the Hydraulic Properties of Unsaturated Porous Media over the Entire Range of Matric Suctions. *Journal of Hydrology*, 541: 873–888. https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2016.07.046.