



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Física

**Modelado numérico de la propagación de ondas electromagnéticas
mediante el método LOD-FDTD**

**Autora: Eva Garijo Alcalde
Tutora: Ana María Grande Sáez
2023**

Agradecimientos

Me gustaría expresar mi agradecimiento a mis padres su apoyo incondicional y su esfuerzo por darme la mejor educación posible. También quiero agradecer a Ana Grande Sáez por su dedicación para dirigir este TFG. Por resolver todas mis dudas y acompañarme en todo momento.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Objetivos del trabajo y organización de la memoria	2
2. El método de las diferencias finitas en el dominio del tiempo para ondas TE_z	3
2.1. Introducción	3
2.2. Descripción del problema diferencial	3
2.2.1. Reducción de las ecuaciones de Maxwell a dos dimensiones	5
2.3. Solución numérica de ecuaciones diferenciales. Diferencias finitas	7
2.4. Discretización del problema diferencial: el método TE_z -FDTD	9
2.4.1. Malla de Yee para polarización TE_z . Localización de los campos.	10
2.4.2. Aproximación en diferencias del método TE_z -FDTD	11
2.4.3. Algoritmo del esquema TE_z -FDTD.	13
2.5. Propiedades numéricas del método TE_z -FDTD.	14
2.5.1. Estabilidad	14
2.5.2. Relación de dispersión numérica	16
3. El método LOD-FDTD para ondas TE_z	17
3.1. Introducción	17
3.2. Método de Crank-Nicolson	17
3.3. Descripción del problema diferencial.	18
3.4. Esquema LOD-FDTD como perturbación del método de Crank-Nicolson	19
3.5. Esquema LOD-FDTD como método de pasos fraccionados	20
3.6. Obtención de las ecuaciones en diferencias del método TE_z -LOD-FDTD	20
3.6.1. Ecuaciones en diferencias del paso 1 del esquema TE_z -LOD-FDTD	22
3.6.2. Ecuaciones en diferencias del paso 2 del esquema TE_z -LOD-FDTD	23
3.7. Condiciones de contorno	25
3.8. Implementación del esquema LOD-FDTD para ondas TE_z	25
3.8.1. Implementación del primer paso del método TE_z -LOD-FDTD	25
3.8.2. Implementación del segundo paso del método TE_z -LOD-FDTD	26
3.9. Algoritmo del esquema TE_z -LOD-FDTD	28
3.10. Fuentes o excitación de los campos	28
3.10.1. Dependencia temporal de la excitación	29
3.10.2. Distribución espacial de las fuentes	29
3.11. Propiedades numéricas del método TE_z -LOD-FDTD	29

4. Resultados	31
4.1. Propagación de una onda cilíndrica en vacío.	31
4.2. Incidencia de una onda plana en una región dieléctrica	32
4.3. Propagación del modo TM_1 en una guía de placas plano-paralelas.	33
4.4. Guía de placas plano-paralelas en corte. Campo evanescente.	35
4.5. Guía de placas plano-paralelas cargada con un dieléctrico. Cálculo de los coeficientes de transmisión y reflexión.	36
5. Conclusiones y líneas futuras	39
Bibliografía	41
Glosario de acrónimos	43

Capítulo 1

Introducción

El *Electromagnetismo* es la rama de la Física que se encarga del estudio de la interacción entre partículas cargadas en reposo y en movimiento (corrientes). La teoría clásica del Electromagnetismo describe las interacciones entre cargas eléctricas mediante las ecuaciones de Maxwell. Las ecuaciones de Maxwell son un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que relacionan las fuentes (cargas y corrientes) con el campo electromagnético y el flujo.

Las técnicas utilizadas para resolver problemas que involucran el campo electromagnético pueden ser: analíticas, numéricas y experimentales. Las tres técnicas no son independientes. Por un lado, los experimentos suelen ser costosos, consumen mucho tiempo, pueden llegar a ser peligrosos y, por lo general, no permiten mucha flexibilidad en la variación de los parámetros. Por otro lado, se conoce una solución analítica cerrada solo para un número limitado de casos especiales, que no tienen aplicación directa en el mundo real. Así, para salvar la distancia entre la teoría y las aplicaciones avanzadas del electromagnetismo se deben hacer simplificaciones y aproximaciones que permitan resolver los problemas mediante métodos numéricos.

Un paso fundamental para mejorar la capacidad de resolver las ecuaciones de Maxwell fue la llegada de los ordenadores. Antes de esto, era preferible realizar largas manipulaciones analíticas con el fin de evitar los cálculos, aunque esto implicase una aplicabilidad muy reducida. La llegada de ordenadores cada vez más potentes, hace que sea más conveniente utilizar métodos analíticamente sencillos, que pueden requerir grandes cantidades de cálculo, pero con los que se puede tratar un amplio repertorio de problemas sin modificaciones en los algoritmos. La parte del electromagnetismo que se ocupa del modelado y de los métodos computacionales se conoce como *Electromagnetismo Computacional*.

El método de diferencias finitas, FD por sus siglas en inglés, es uno de los métodos numéricos más antiguos y, a su vez, más utilizados para la resolución de ecuaciones diferenciales. Se basa en dividir el dominio de cómputo en un conjunto de celdas elementales. En los nudos del mallado se aproximan las derivadas por diferencias finitas, así las ecuaciones diferenciales se convierten en sistemas de ecuaciones lineales que relacionan las soluciones en los distintos nudos de la red. En 1966, Yee propuso por primera vez el algoritmo FDTD (del inglés *Finite Difference Time Domain*) [1]. El algoritmo se basa en el uso de diferencias finitas centradas para la aproximación de las ecuaciones de Maxwell del rotacional en el dominio del tiempo.

El método FDTD convencional es explícito, el cálculo del campo eléctrico (magnético) en un nudo de la red y en un instante de tiempo, sólo precisa de los valores del campo magnético (eléctrico) en sus nudos adyacentes y en el instante de tiempo anterior. Además, es condicionalmente estable, es decir, la relación entre los tamaños del paso temporal y de la celda espacial no es arbitraria, sino que debe verificar la llamada *condición de estabilidad*

de *Courant-Friedrichs-Lewy* (CFL) para que los errores permanezcan acotados y se atenúen conforme se va avanzando en el esquema en diferencias, esto es, para que la solución no diverja. Esta condición del método FDTD convencional hace que en algunos problemas, en los que la geometría del dominio de cómputo requiere de una discretización muy fina, se necesite un paso temporal muy pequeño, el coste computacional sea inasumible.

Durante las últimas décadas se han estudiado y desarrollado nuevos métodos en diferencias que, manteniendo la simplicidad analítica y la eficiencia del esquema FDTD convencional, son también métodos incondicionalmente estables. Es así como se introducen los métodos implícitos, tanto el esquema ADI-FDTD (del inglés *Alternating Direction Implicit Method*) [3], como el que vamos a estudiar en profundidad en este trabajo, LOD-FDTD (del inglés *Locally One Dimensional-Finite-Difference Time-Domain*). Los métodos incondicionalmente estables que acabamos de nombrar compensan el mayor tiempo de CPU que requieren en cada iteración temporal evitando la necesidad de cumplir la condición CFL. De esta manera, permiten emplear un paso temporal mayor y realizar un menor número de interacciones. En la actualidad, estos y otros métodos permanecen en continuo desarrollo. De hecho, existe una amplia selección de programas informáticos que proporcionan implementaciones de algoritmos populares y potentes en el electromagnetismo computacional y que pueden resolver muchos problemas de ingeniería e investigación.

1.1. Objetivos del trabajo y organización de la memoria

El objetivo de este trabajo de fin de grado consiste en la formulación y el desarrollo de un algoritmo LOD-FDTD en dos dimensiones con el fin de simular la propagación en el plano xy de ondas electromagnéticas con polarización transversal eléctrica respecto de z (TE_z , del inglés *Transverse Electric*). El método LOD-FDTD se presenta como una alternativa incondicionalmente estable al método FDTD convencional, que es condicionalmente estable, sin renunciar a un costo computacional bajo. Estas dos características hacen del método LOD-FDTD un algoritmo muy interesante que merece la pena estudiar.

El trabajo consta de 5 capítulos. En el Capítulo 2, se presenta el problema diferencial que se pretende resolver. Esencialmente, consiste en la resolución de las ecuaciones de Maxwell para la propagación de ondas electromagnéticas TE_z en dos dimensiones espaciales. A continuación, se estudia el método FDTD convencional propuesto por *Yee*, obteniendo las ecuaciones en diferencias correspondientes. Finalmente, se estudian dos de las propiedades numéricas que caracterizan al método FDTD, como son la estabilidad y la dispersión numérica.

En el Capítulo 3, se estudia en profundidad el método LOD-FDTD. Primero, se explica el origen del método, tanto como un método de pasos fraccionados, así como perturbación del conocido esquema de Crank-Nicolson, y se deducen las ecuaciones que lo describen. A continuación, se estudian la estabilidad y la dispersión numérica del método, comparándolas con las propiedades del método FDTD convencional. En la parte final del capítulo, se explica detalladamente la implementación del método, en este caso, utilizando MATLAB[®], incluyendo las condiciones de contorno y los tipos de excitación que se van a utilizar.

En el Capítulo 4, se presentan los resultados obtenidos de la simulación en MATLAB[®] de problemas como la propagación de onda cilíndrica, de onda plana o del modo TM_1 en una guía de ondas de placas plano-paralelas en regiones con uno o varios dieléctricos. Con ellos podremos validar la estabilidad incondicional del esquema LOD-FDTD, así como el correcto funcionamiento del código.

En el Capítulo 5, se presentan las conclusiones y posibles líneas de futuras del trabajo.

Capítulo 2

El método de las diferencias finitas en el dominio del tiempo para ondas TE_z

2.1. Introducción

Las Ecuaciones de Maxwell son un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales acopladas que rigen el comportamiento del campo electromagnético. Su correcta resolución es un problema complicado que, en la mayoría de casos, no es abordable analíticamente y, por tanto, requiere de métodos numéricos que permitan obtener una aproximación a su solución. En este capítulo se presenta el método FDTD (del inglés *Finite Difference Time Domain*) [2] basado en la aproximación de los operadores diferenciales por cocientes en diferencias finitas.

En la parte final del capítulo se describirán algunas propiedades numéricas del método FDTD, como son la estabilidad y la relación de dispersión numérica. Las conclusiones obtenidas de este estudio nos mostrarán la necesidad de buscar un nuevo método que mejore dichas propiedades y sea factible implementarlo en un ordenador.

2.2. Descripción del problema diferencial

El punto de partida de este trabajo son las ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial [5]. Estas, son un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas que rigen el comportamiento del campo electromagnético. Para una región cualquiera del espacio las ecuaciones de Maxwell son las siguientes

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v, \quad (2.1a)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.1b)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.1c)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}, \quad (2.1d)$$

donde, \vec{E} es el campo eléctrico medido en V/m, \vec{B} la inducción magnética medida en T, \vec{D} el desplazamiento eléctrico dado en C/m², \vec{H} la intensidad de campo magnético en

A/m, \vec{J} se refiere a la densidad de corriente medida en A/m² y ρ_v es la densidad volúmica de carga eléctrica libre dada en C/m³. Las relaciones de constitución entre las magnitudes fundamentales \vec{E} y \vec{B} , y las magnitudes macroscópicas \vec{D} , \vec{H} y \vec{J} , que dan cuenta de la respuesta del medio a la presencia del campo electromagnético son, en general, complejas y dependientes tanto del medio como de su historia.

Nuestro objetivo es resolver las ecuaciones de Maxwell para el caso de medios lineales, homogéneos, no dispersivos, isótropos y sin pérdidas eléctricas. No obstante, comenzaremos dando una formulación más general del problema, que incluye medios anisótropos y con pérdidas eléctricas. Para esta clase de medios materiales las relaciones de constitución quedan

$$\vec{D} = \bar{\epsilon}\vec{E}, \quad (2.2a)$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H}, \quad (2.2b)$$

$$\vec{J}_c = \bar{\sigma}\vec{E}, \quad (2.2c)$$

donde μ es la permeabilidad del medio dada en H/m, $\bar{\epsilon}$ es el tensor de permitividad eléctrica del medio expresada en F/m, y $\bar{\sigma}$ es el tensor de conductividad eléctrica del medio medida en S/m. Los tensores de permitividad y conductividad eléctrica están definidos de la siguiente forma

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix},$$

es decir, el medio que estudiamos es uniaxial. Sustituyendo las ecuaciones constitutivas (2.2) en las ecuaciones de Maxwell, obtenemos la forma diferencial de las mismas para medios lineales, homogéneos, no dispersivos, con pérdidas eléctricas y anisótropos, dadas por

$$\bar{\epsilon}(\nabla \cdot \vec{E}) = \rho_v, \quad (2.3a)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0, \quad (2.3b)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.3c)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \bar{\epsilon} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \bar{\sigma} \vec{E}. \quad (2.3d)$$

De esta forma, las ecuaciones de Maxwell quedan escritas únicamente en función de los campos $\vec{E}(x, y, z, t)$ y $\vec{H}(x, y, z, t)$.

En general, las regiones del espacio en las que vamos a implementar los métodos numéricos para la resolución de las ecuaciones de Maxwell podrán contener en su interior zonas compuestas por materiales distintos, caracterizados cada uno por su permeabilidad magnética y su tensor de permitividad eléctrica. Esta situación hace que sea necesario estudiar las llamadas *condiciones de contorno* para el campo electromagnético. Las condiciones de contorno gobiernan el comportamiento del campo electromagnético al atravesar discontinuidades. Se pueden deducir a partir de las ecuaciones de Maxwell en su forma integral, [4]. Una vez sustituidas las ecuaciones constitutivas de los medios lineales, homogéneos, no dispersivos, con pérdidas

eléctricas y anisótropos, obtenemos las siguientes relaciones

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}, \quad (2.4a)$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}_s, \quad (2.4b)$$

$$\vec{n} \cdot (\bar{\epsilon}_2 \vec{E}_2 - \bar{\epsilon}_1 \vec{E}_1) = \rho_s, \quad (2.4c)$$

$$\vec{n} \cdot (\mu_2 \vec{H}_2 - \mu_1 \vec{H}_1) = 0, \quad (2.4d)$$

donde \vec{n} es el vector normal a la superficie de separación entre los dos medios. El vector \vec{K}_s da cuenta de la densidad superficial de corriente libre en la superficie de separación entre los dos medios y $\bar{\epsilon}_2$, $\bar{\epsilon}_1$, μ_1 y μ_2 representan los parámetros constitutivos de los medios 1 y 2, respectivamente.

El último paso para completar el planteamiento del problema que nos ocupa, consiste en notar que basta resolver las ecuaciones del rotacional, ya que estas contienen a las ecuaciones de divergencia. Podemos comprobarlo teóricamente [4] utilizando la ecuación de continuidad. De esta forma, si las condiciones iniciales verifican las ecuaciones de divergencia, y resolvemos las ecuaciones del rotacional, entonces los campos solución deben cumplir con las ecuaciones de la divergencia en todo instante de tiempo.

Finalmente, las ecuaciones del rotacional (2.1a) y (2.1d) que describen, junto con las condiciones frontera, nuestro problema son las ecuaciones de Faraday y Ampère-Maxwell respectivamente, que desglosadas en sus componentes cartesianas quedan

$$\epsilon_x \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma_x E_x, \quad (2.5a)$$

$$\epsilon_y \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma_y E_y, \quad (2.5b)$$

$$\epsilon_z \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma_z E_z, \quad (2.5c)$$

$$\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad (2.6a)$$

$$\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad (2.6b)$$

$$\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}. \quad (2.6c)$$

2.2.1. Reducción de las ecuaciones de Maxwell a dos dimensiones

A partir de este momento vamos a asumir que la estructura donde está definido el problema no presenta ninguna variación según la dirección z . Entonces, si se utiliza como excitación un campo que tampoco varíe según la dirección z , los campos eléctrico y magnético no cambian a lo largo de esta dirección y sus derivadas respecto de z serán nulas, $\partial/\partial z = 0$. Las ecuaciones del rotacional (2.5) y (2.6) se reducen a

$$\epsilon_x \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \sigma_x E_x, \quad (2.7a)$$

$$\epsilon_y \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma_y E_y, \quad (2.7b)$$

$$\epsilon_z \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma_z E_z, \quad (2.7c)$$

$$\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad (2.8a)$$

$$\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (2.8b)$$

$$\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}. \quad (2.8c)$$

Estas ecuaciones forman dos grupos mutuamente desacoplados que describen dos modos de propagación, las ondas TM_z y las TE_z . De esta manera, los dos modos de propagación pueden existir simultáneamente sin interactuar entre ellos. Es importante recordar que este razonamiento es válido para el caso de materiales isótropos o aquellos para los que los tensores que describen sus magnitudes constitutivas son diagonales, como es el que tratamos nosotros. Los dos modos de propagación son, por tanto [2]

- Modo TM_z (H_x , H_y , E_z):

$$\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad (2.9a)$$

$$\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (2.9b)$$

$$\epsilon_z \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma_z E_z. \quad (2.9c)$$

Las ondas, o polarización, TM_z (del inglés *Transverse Magnetic Mode with respect to z*) se presentan cuando las componentes de \vec{H} están contenidas en el plano de propagación (plano xy) y las componentes de \vec{E} están en un plano transversal a la dirección de propagación (E_z en este caso). Además, los campos varían en la dirección x e y , pero son invariantes en z .

- Modo TE_z (E_x , E_y , H_z):

$$\epsilon_x \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \sigma_x E_x, \quad (2.10a)$$

$$\epsilon_y \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma_y E_y, \quad (2.10b)$$

$$\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}. \quad (2.10c)$$

Las ondas TE_z (del inglés *Transverse Electric Mode with respect to z*) se presentan cuando las componentes de \vec{E} están contenidas en el plano de propagación (plano xy) y las componentes de \vec{H} están en un plano transversal (H_z en este caso). De nuevo los campos varían en la dirección x e y , pero son invariantes en z .

Los fenómenos físicos asociados a ambos modos de propagación son muy diferentes debido a la diferencia en la orientación de las líneas de campo de \vec{E} y \vec{H} respecto a la superficie de propagación que se estudia. Desde ahora, nosotros nos vamos a centrar en el estudio de las ondas TE_z , de manera que vamos a resolver el conjunto de ecuaciones (2.10). A continuación, se explican las bases de la aproximación numérica de las derivadas por diferencias finitas, que es el punto de partida del método FDTD.

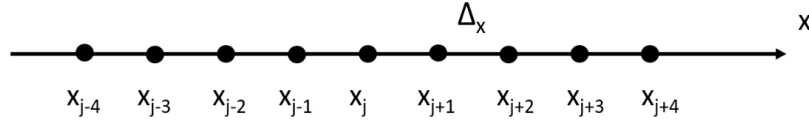


Figura 2.1: Red discreta de puntos que avanza en la dirección positiva del eje x .

2.3. Solución numérica de ecuaciones diferenciales. Diferencias finitas

La ausencia de una solución analítica sencilla a las ecuaciones diferenciales correspondientes al modo TE_z que hemos obtenido, justifica la necesidad del estudio de métodos numéricos para la obtención de aproximaciones a dicha solución. En el caso que nos ocupa, vamos a utilizar los métodos de aproximación por diferencias finitas.

Los métodos basados en diferencias finitas proveen aproximaciones a la solución únicamente en un conjunto discreto de puntos del dominio del problema, llamados nodos de la red o malla. La idea fundamental de los métodos de diferencias finitas es construir, para cada uno de estos nodos, una ecuación algebraica reemplazando los operadores diferenciales por cocientes en diferencias que los aproximan. Obteniéndose así, un sistema de ecuaciones lineales que puede ser resuelto para obtener dichas aproximaciones.

A continuación, se muestran algunas fórmulas en diferencias finitas que se utilizan para discretizar ecuaciones diferenciales [5]. Consideremos en un primer momento funciones de una variable en la recta real. Sea una red discreta de puntos sobre la recta, que denotamos como x_j , $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Los puntos de la red discreta están identificados por un índice j que avanza en la dirección positiva del eje x . Por conveniencia, suponemos que el espacio entre dos nodos consecutivos de la red es uniforme en toda la malla, y dado por Δ_x , de modo que

$$x_j = j\Delta_x, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Las fórmulas en diferencias finitas para aproximar las derivadas de una función se basan en desarrollos en serie de Taylor (1715) de dicha función. Para cualquier función $U(x)$ regular (monoevaluada, finita y continua), si U_j denota el valor $U(x_j)$, el valor $U_{j+\alpha}$ de la función en el punto $x_{j+\alpha}$ puede expresarse en términos de un desarrollo en serie de Taylor en torno al punto x_j como

$$U(x_j + \alpha\Delta_x) = U(x_j) + \frac{\alpha\Delta_x}{1!} \frac{dU(x_j)}{dx} + \frac{(\alpha\Delta_x)^2}{2!} \frac{d^2U(x_j)}{dx^2} + \dots + \frac{(\alpha\Delta_x)^n}{n!} \frac{d^n U(x_j)}{dx^n} + \dots \quad (2.11)$$

Esta expresión evalúa la función en el punto $x_j + \alpha\Delta_x$ a partir de los valores de la función y sus derivadas en el punto x_j . Para obtener aproximaciones numéricas debemos truncar (2.11).

La fórmula en diferencias progresivas se obtiene de evaluar (2.11) en $\alpha = 1$

$$U(x_{j+1}) = U(x_j) + \Delta_x \frac{dU(x_j)}{dx} + O(\Delta_x^2), \quad (2.12)$$

y despejar $\frac{dU(x_j)}{dx}$, de manera que

$$\frac{dU(x_j)}{dx} = \frac{U(x_j + \Delta_x) - U(x_j)}{\Delta_x} + O(\Delta_x), \quad (\Delta_x \rightarrow 0). \quad (2.13)$$

Si asumimos que Δ_x es lo suficientemente pequeño, podemos despreciar los términos en $O(\Delta_x)$ para llegar a

$$\frac{dU(x_j)}{dx} \simeq \frac{U(x_j + \Delta_x) - U(x_j)}{\Delta_x}. \quad (2.14)$$

La ecuación (2.14) se conoce como la expresión en diferencias progresivas de primer orden para la derivada $U'(x)$ en el punto x_j .

La fórmula en diferencias regresivas de primer orden

$$\frac{dU(x_j)}{dx} = \frac{U(x_j) - U(x_j - \Delta_x)}{\Delta_x} + O(\Delta_x), \quad (\Delta_x \rightarrow 0), \quad (2.15)$$

se obtiene de forma similar evaluando el desarrollo de Taylor (2.11) en $\alpha = -1$.

Si restamos la evaluación de (2.11) en $\alpha = \frac{1}{2}$ de la evaluación en $\alpha = -\frac{1}{2}$ y despejamos $U'(x_j)$, obtenemos la fórmula en diferencias centradas de segundo orden para la primera derivada

$$\frac{dU(x_j)}{dx} = \frac{U(x_j + \frac{\Delta_x}{2}) - U(x_j - \frac{\Delta_x}{2})}{\Delta_x} + O(\Delta_x^2), \quad (\Delta_x \rightarrow 0). \quad (2.16)$$

Puede apreciarse que se trata de una aproximación centrada, ya que involucra valores de la función tanto a la derecha ($U(x_j + \frac{\Delta_x}{2})$) como a la izquierda ($U(x_j - \frac{\Delta_x}{2})$) del punto en el que se desea calcular la derivada. Además, debido a la presencia de $O(\Delta_x^2)$ en (2.16), esta aproximación presenta un error de truncamiento de segundo orden. Si definimos el operador finito diferencia centrada δ como

$$\delta U(x) = U\left(x + \frac{\Delta_x}{2}\right) - U\left(x - \frac{\Delta_x}{2}\right), \quad (2.17)$$

podemos expresar (2.16) de una forma más compacta, como

$$\frac{dU(x)}{dx} = \frac{\delta U(x)}{\Delta_x} + O(\Delta_x^2).$$

Como podemos ver, el error cometido al utilizar esta aproximación para la derivada será menor a medida que disminuya el valor del incremento de la variable independiente Δ_x , pues los términos en Δ_x^2 y en potencias de orden superior tenderán a cero más rápidamente.

Finalmente, sustituyendo (2.16) en (2.11) y despejando $U''(x_j)$, obtenemos

$$\frac{d^2U(x_j)}{dx^2} = \frac{U(x_j + \Delta_x) - 2U(x_j) + U(x_j - \Delta_x)}{\Delta_x^2} + O(\Delta_x^2), \quad (\Delta_x \rightarrow 0), \quad (2.18)$$

que es la fórmula en diferencias centradas de segundo orden para la derivada segunda $U''(x)$ en el nodo x_j .

Del mismo modo, es importante deducir la aproximación del valor de una función en un punto mediante diferencias finitas. Si en (2.11) sustituimos primero $\alpha = +1/2$ y después $\alpha = -1/2$ y restamos las dos expresiones resultantes, obtenemos

$$U(x) = \frac{U(x + \Delta_x/2) + U(x - \Delta_x/2)}{2} - \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta_x}{2}\right)^2 \frac{d^2U(x)}{dx^2} - \frac{1}{4!} \left(\frac{\Delta_x}{2}\right)^4 \frac{d^4U(x)}{dx^4} - \dots \quad (2.19)$$

Definiendo ahora el operador finito promedio centrado μ como

$$\mu U(x) \equiv \frac{1}{2} \left[U \left(x + \frac{\Delta_x}{2} \right) + U \left(x - \frac{\Delta_x}{2} \right) \right], \quad (2.20)$$

podemos expresar (2.19) de forma compacta como

$$U(x) = \mu U(x) + O(\Delta_x^2).$$

Al igual que las aproximaciones de las derivadas primera y segunda mediante diferencias finitas centradas, esta aproximación también presenta un error de truncamiento de segundo orden.

Generalización a varias variables

La generalización de la aproximación por diferencias a varias variables es inmediata, sin más que considerar el correspondiente desarrollo en serie de Taylor. En particular, cuando en las ecuaciones que tratamos de aproximar únicamente aparecen derivadas parciales respecto de alguna de las variables (no aparecen derivadas cruzadas), el desarrollo queda

$$\begin{aligned} U(x_j + \alpha \Delta_x, y_k) &= U(x_j, y_k) + \frac{\alpha \Delta_x}{1!} \frac{\partial U(x_j, y_k)}{\partial x} + \frac{(\alpha \Delta_x)^2}{2!} \frac{\partial^2 U(x_j, y_k)}{\partial x^2} \\ &+ \dots + \frac{(\alpha \Delta_x)^n}{n!} \frac{\partial^n U(x_j, y_k)}{\partial x^n} + \dots \end{aligned} \quad (2.21)$$

2.4. Discretización del problema diferencial: el método TE_z-FDTD

Una vez obtenidas las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento del campo electromagnético propagándose en el modo TE_z, para que la formulación en términos del método de diferencias finitas quede completa, debemos definir el conjunto discreto de puntos $\{(x_i, y_j)\}$, contenidos en el dominio $2D$ en el que está definido el problema, en los que vamos a calcular las aproximaciones a la solución en cada instante de tiempo (también discretizado). Además, también es imprescindible definir tanto las condiciones iniciales, como las condiciones de contorno que dicho dominio de definición impone sobre los campos eléctrico y magnético. Por ejemplo, el problema que vamos a tratar nosotros es el de un dominio rectangular al que aplicaremos condiciones frontera de conductor perfecto. Por las condiciones de contorno introducidas en (2.4), sabemos que esto implica que en los bordes del dominio el campo eléctrico tangencial al conductor, y el campo magnético normal a este son nulos. Esto es $\vec{E}_t = 0$ y $\vec{B}_n = 0$.

Para resolver las ecuaciones definidas en (2.10) que describen las ondas TE_z implementamos la discretización espacial introducida por *K. S. Yee* en la comunidad electromagnética en el año 1966. Como hemos descrito anteriormente, el método de diferencias finitas consiste fundamentalmente en aproximar las soluciones en cada punto de la malla sustituyendo en las ecuaciones diferenciales los operadores por operadores en diferencias [5]. Obteniendo en cada nodo un sistema de ecuaciones lineales que debemos resolver.

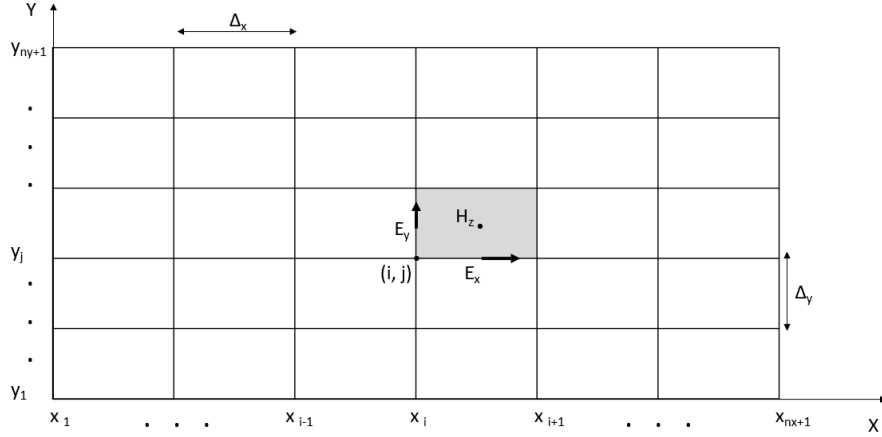


Figura 2.2: Discretización espacial para el modo TE_z según el esquema de *Yee*

2.4.1. Malla de Yee para polarización TE_z . Localización de los campos.

Como ya hemos avanzado, vamos a trabajar en un dominio finito y rectangular en el que uno de los ejes se asocia con la dirección espacial x y el otro, con y . Las longitudes de los lados del dominio serán L_x y L_y , respectivamente. Comenzamos subdividiendo la dirección en x del dominio en n_x subintervalos iguales de longitud Δ_x , de forma que $\Delta_x = \frac{L_x}{n_x}$. Operamos de forma análoga en la dirección y del dominio, definiendo así un mallado bidimensional de $(n_x + 1) \times (n_y + 1)$ nodos que denotamos por

$$(x_i, y_j) = (x_1 + (i - 1)\Delta_x, y_1 + (j - 1)\Delta_y) \quad i = 1, 2, \dots, n_x + 1; \quad j = 1, 2, \dots, n_y + 1,$$

y que forman una partición del dominio en $n_x \times n_y$ celdas rectangulares iguales de dimensiones $\Delta_x \times \Delta_y$. Redefiniendo el origen de coordenadas en el punto (x_1, y_1) , podemos denotar $(x_i, y_j) = ((i - 1)\Delta_x, (j - 1)\Delta_y) \equiv (i, j)$ $i = 1, 2, \dots, n_x + 1; j = 1, 2, \dots, n_y + 1$, como se observa en la Figura 2.2. Con esta notación, los centros de las celdas son los puntos $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$.

Siguiendo el esquema de discretización espacial de *Yee* para cada celda del interior del mallado, el cálculo de los valores de las componentes del campo se realiza en los puntos $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j)$ para la componente E_x , en $(x_i, y_{j+\frac{1}{2}})$ para E_y y en los puntos $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}})$ para H_z , tal como se observa también en la Figura 2.2.

Por otra parte, la discretización temporal del problema consiste en subdividir el intervalo $[0, T_f]$ en el que se desea integrar el problema en n_t intervalos temporales iguales de longitud $\Delta_t = \frac{T_f}{n_t}$. Mientras que el cálculo de las componentes E_x y E_y se realiza en los instantes enteros $t_n = n\Delta_t$, el cálculo de H_z se hace en los instantes intermedios, dados por $t_{n+\frac{1}{2}}$. De esta manera, tenemos descrita tanto la discretización espacial como temporal del problema que nos ocupa. El siguiente paso es sustituir en las ecuaciones (2.10) los operadores diferenciales por sus aproximaciones en diferencias en los puntos descritos.

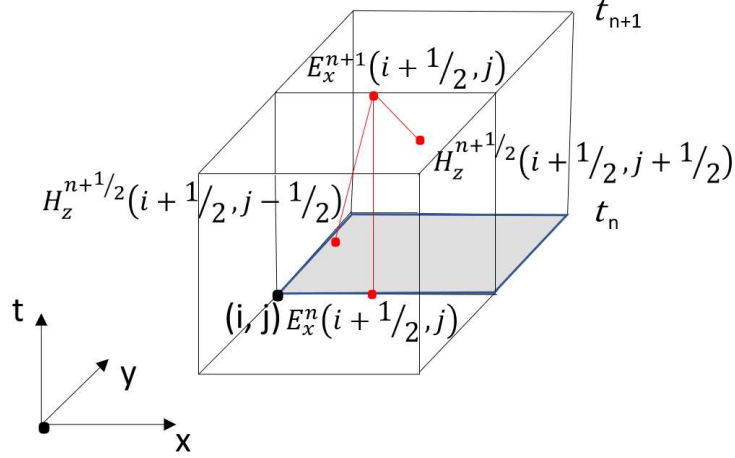


Figura 2.3: Molécula computacional para la obtención de E_x^{n+1} . Se muestran los valores del campo que intervienen en el cómputo de E_x^{n+1} en cada celda.

2.4.2. Aproximación en diferencias del método TE_z-FDTD

A partir de este momento, vamos a considerar materiales sin pérdidas eléctricas. Es decir, tomamos la conductividad nula en todas las ecuaciones. Comenzamos discretizando la ecuación (2.10a) en el punto dado por las coordenadas espaciales $(i + \frac{1}{2}, j)$ y en el instante temporal $n + \frac{1}{2}$, con lo que obtenemos

$$\epsilon_x(i + \frac{1}{2}, j) \frac{\delta_t}{\Delta_t} E_x^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) = \frac{\delta_y}{\Delta_y} H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j). \quad (2.22)$$

Desarrollando los operadores en diferencias

$$\epsilon_x(i + \frac{1}{2}, j) \frac{E_x^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j) - E_x^n(i + \frac{1}{2}, j)}{\Delta_t} = \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2})}{\Delta_y},$$

y despejando el campo eléctrico en la componente x más avanzada en el tiempo, se obtiene

$$E_x^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j) = E_x^n(i + \frac{1}{2}, j) + \frac{\Delta_t}{\epsilon_x(i + \frac{1}{2}, j) \Delta_y} \left[H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}) \right]. \quad (2.23)$$

De esta manera, en el primer paso de cada iteración del método, obtenemos una ecuación explícita para cada celda del mallado. La resolución de esta ecuación nos da la aproximación al valor de la componente del campo eléctrico E_x^{n+1} , a partir de los valores obtenidos de E_x en el mismo punto, y de H_z a su alrededor, en la iteración anterior. Tal como se observa de forma más clara en la Figura 2.3

A continuación, discretizamos la ecuación diferencial (2.10b) sin pérdidas eléctricas. En este caso lo hacemos en el instante $t_{n+\frac{1}{2}}$ y en el punto espacial $(i, j + \frac{1}{2})$, resultando

$$\epsilon_y(i, j + \frac{1}{2}) \frac{\delta_t}{\Delta_t} E_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) = -\frac{\delta_x}{\Delta_x} H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}), \quad (2.24)$$

Desarrollando los operadores en diferencias de forma análoga al caso anterior, se obtiene que

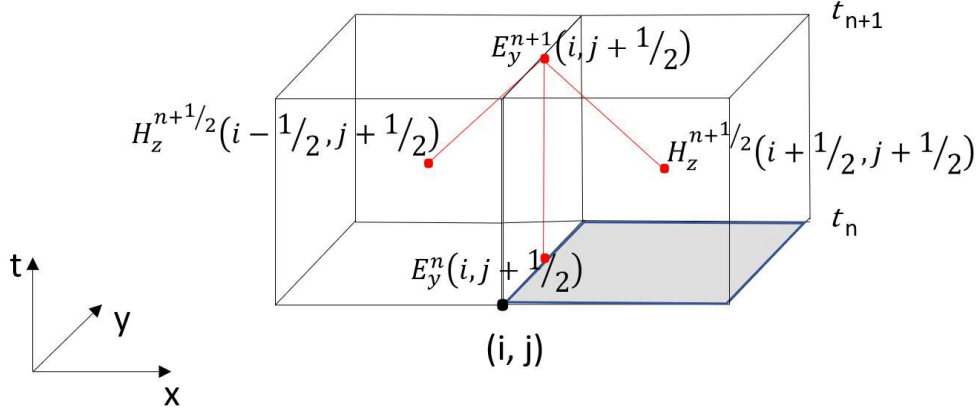


Figura 2.4: Molécula computacional para la obtención de E_y^{n+1} . Se muestran los valores del campo que intervienen en el cómputo de E_y^{n+1} en cada celda.

la ecuación para la componente y de campo eléctrico es

$$E_y^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}) = E_y^n(i, j + \frac{1}{2}) - \frac{\Delta t}{\epsilon_y(i, j + \frac{1}{2}) \Delta x} \left[H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) \right]. \quad (2.25)$$

De manera análoga podemos obtener el valor de E_y en cada celda y en cada instante de tiempo a partir del valor que tenía en el mismo punto en el instante anterior, y de los valores del campo magnético a su alrededor. Tenemos una representación más clara en la Figura 2.4

Finalmente, realizando el mismo procedimiento que en los dos casos anteriores, se discretiza la ecuación diferencial (2.10c). En este caso, se discretiza la ecuación en el instante t_n y en el punto espacial $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$ resultando:

$$\mu(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) \frac{\delta t}{\Delta t} H_z^n(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) = \frac{\delta y}{\Delta y} E_x^n(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - \frac{\delta x}{\Delta x} E_y^n(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}). \quad (2.26)$$

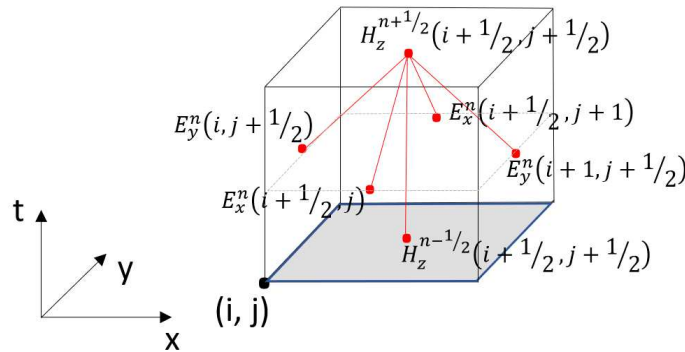


Figura 2.5: Molécula computacional para la obtención de $H_z^{n+\frac{1}{2}}$. Se muestran los valores del campo que intervienen en el cómputo de $H_z^{n+\frac{1}{2}}$ en cada celda.

Desarrollando los operadores en diferencias, se obtiene que la ecuación para la componente de campo magnético es:

$$\begin{aligned}
H_z^{n+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2} \right) &= H_z^{n-\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2} \right) \\
&+ \frac{\Delta t}{\mu \left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2} \right) \Delta_y} \left[E_x^n \left(i + \frac{1}{2}, j + 1 \right) - E_x^n \left(i + \frac{1}{2}, j \right) \right] \\
&- \frac{\Delta t}{\mu \left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2} \right) \Delta_x} \left[E_y^n \left(i + 1, j + \frac{1}{2} \right) - E_y^n \left(i, j + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (2.27)
\end{aligned}$$

Como en los casos anteriores, podemos obtener el valor de H_z en un cierto punto y en un instante de tiempo a partir del valor que tenía en el mismo punto en el instante anterior, y de valores del campo eléctrico a su alrededor, como vemos en la Figura 2.5.

2.4.3. Algoritmo del esquema TE_z-FDTD.

Veamos una breve descripción de la implementación del esquema FDTD. Una vez obtenidos los valores de las componentes del campo ($H_z^{n-\frac{1}{2}}, E_x^n, E_y^n$) en todo el dominio de cómputo, utilizamos la ecuación (2.27) para, con ellos, obtener el valor de $H_z^{n+\frac{1}{2}}$ en el nuevo instante temporal $t_{n+\frac{1}{2}}$. A continuación, con las ecuaciones (2.23) y (2.25) calculamos los valores de las componentes del campo eléctrico en el instante t_{n+1} como función de los valores de las mismas en el instante anterior, así como del valor del campo magnético, esto es $E_\xi^{n+1} = f(H_z^{n+\frac{1}{2}}, E_\xi^n)$, para $\xi = x, y$. Con los valores ($H_z^{n+\frac{1}{2}}, E_x^{n+1}, E_y^{n+1}$) calculados comenzamos una nueva iteración temporal. Podemos representar el esquema FDTD por su diagrama de flujo dado en la Figura 2.6

En cada problema particular que abordemos será necesario añadir en cada iteración las restricciones impuestas por las condiciones de contorno en las componentes del campo contenidas en el borde del dominio.

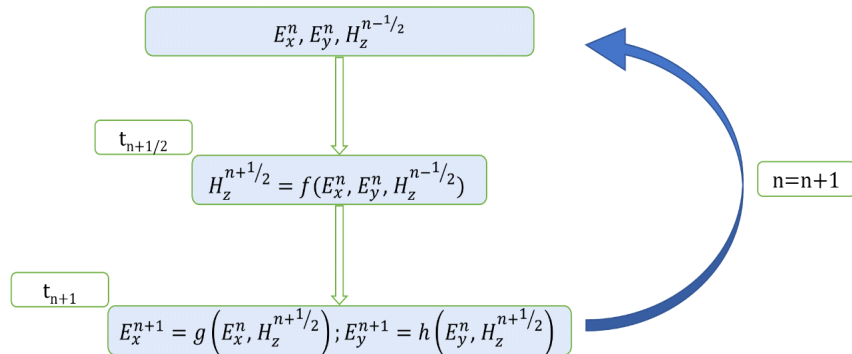


Figura 2.6: Diagrama de flujo del esquema FDTD convencional en 2D (polarización TE_z).

2.5. Propiedades numéricas del método TE_z -FDTD.

A la hora de elegir qué método numérico se va a implementar para resolver un problema, es muy importante hacer un estudio previo que nos permita saber hasta qué punto vamos a obtener buenas aproximaciones de la solución exacta, así como el coste computacional que va a suponer su aplicación. En la última sección del capítulo vamos a hacer un breve estudio de las propiedades numéricas más importantes del esquema TE_z -FDTD.

2.5.1. Estabilidad

La estabilidad de un esquema tiene que ver con la manera en que los errores numéricos se propagan con el algoritmo. Un método se dice que es estable cuando los errores presentes en el dato inicial, o los introducidos a lo largo del proceso de cálculo, permanecen acotados y se atenúan conforme se va avanzando en el esquema en diferencias. Por otro lado, en un método inestable cualquier error en el procesamiento se magnifica conforme avanza el método.

La importancia de la estabilidad radica en que en cada iteración de un método numérico, en realidad, se comienza de nuevo con un problema de valor inicial en el que, debido a la presencia del error de redondeo, la condición inicial es el valor aproximado de la solución calculado en la etapa anterior.

El problema de la estabilidad de un esquema en diferencias finitas puede establecerse como la búsqueda de aquellas condiciones bajo las cuales la diferencia entre la solución teórica y la solución numérica de la ecuación en diferencias permanece acotada cuando el número de iteraciones temporales tiende a infinito.

Cuando no existen restricciones sobre los valores que pueden tomar estos intervalos, el esquema se denomina *incondicionalmente estable*; la mayor parte de los esquemas implícitos son de este tipo. Por el contrario, si existe alguna restricción sobre los valores que pueden tomar los distintos intervalos de discretización, el esquema se denomina *condicionalmente estable*. Generalmente, esta restricción se traduce en alguna relación que deben verificar los intervalos de discretización entre sí. La mayor parte de los esquemas explícitos son condicionalmente estables.

Estabilidad del método FDTD mediante el método de Von Neumann

Esencialmente, este método consiste en introducir unos errores iniciales, descomponer estos errores mediante una serie de Fourier, y estudiar el crecimiento o el decrecimiento de un componente genérico del desarrollo a medida que avanza la variable temporal t . Para ello, sustituimos en la ecuación en derivadas parciales un término (por linealidad basta con sustituir un único armónico) del desarrollo en serie de Fourier de la solución, esto es, el término

$$U^n(i, j) = U^0 Z^n e^{-\mathbf{j}(i\Delta_x k_x + j\Delta_y k_y)}.$$

donde U^0 es la amplitud del armónico, k_x y k_y son las componentes del vector de ondas numérico y Z^n engloba la parte temporal del armónico. Desarrollando las expresiones obtenidas podemos llegar a expresarlas de la forma $U^{n+1} = ZU^n$, donde la cantidad Z se denomina *factor de amplificación del método*. Es fácil comprobar que los errores del método se comportan también como $\varepsilon^{n+1}(i, j) = Z\varepsilon^n(i, j)$ [6]. De esta manera, si $\varepsilon^0(i, j)$ son los errores introducidos en el paso inicial, se tiene que

$$|\varepsilon^n| = |Z|^n |\varepsilon^0|. \quad (2.28)$$

De acuerdo con la definición dada, el método será estable cuando la sucesión de errores sea acotada, de esta manera, el error no crece a medida de avanzan las iteraciones temporales. De acuerdo con (2.28) esto ocurre cuando $|Z| \leq 1$. Este es el criterio de estabilidad de Von Neumann.

Para estudiar la estabilidad del método FDTD sustituimos en el sistema de ecuaciones en diferencias obtenido dado por (2.23), (2.25) y (2.27), una solución del tipo $U^n(i, j) = U^0 Z^n e^{-j(i\Delta_x k_x + j\Delta_y k_y)}$ para cada una de las componentes del campo. Después de operar, las expresiones que obtenemos son las siguientes

$$\begin{aligned} (Z^{\frac{1}{2}} - Z^{-\frac{1}{2}})E_{0x} &= \frac{-2j\Delta_t}{\epsilon_x \Delta_y} \operatorname{sen}\left(\frac{k_y \Delta_y}{2}\right) H_{0z}, \\ (Z^{\frac{1}{2}} - Z^{-\frac{1}{2}})E_{0y} &= +\frac{2j\Delta_t}{\epsilon_y \Delta_x} \operatorname{sen}\left(\frac{k_x \Delta_x}{2}\right) H_{0z}, \\ (Z^{\frac{1}{2}} - Z^{-\frac{1}{2}})H_{0z} &= -\frac{2j\Delta_t}{\mu \Delta_y} \operatorname{sen}\left(\frac{k_y \Delta_y}{2}\right) E_{0x} + \frac{2j\Delta_t}{\mu \Delta_x} \operatorname{sen}\left(\frac{k_x \Delta_x}{2}\right) E_{0y}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Hemos obtenido un sistema de ecuaciones homogéneo. Para que el sistema tenga solución distinta de la trivial, el determinante debe ser nulo. Esto es

$$\det \begin{bmatrix} Z^{\frac{1}{2}} - Z^{-\frac{1}{2}} & 0 & \frac{2j\Delta_t K_y}{\epsilon_x} \\ 0 & Z^{\frac{1}{2}} - Z^{-\frac{1}{2}} & \frac{2j\Delta_t K_x}{\epsilon_y} \\ \frac{2j\Delta_t K_y}{\mu} & -\frac{2j\Delta_t K_x}{\mu} & Z^{\frac{1}{2}} - Z^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = 0, \quad (2.30)$$

donde

$$K_\xi = \frac{1}{\Delta_\xi} \operatorname{sen}\left(\frac{k_\xi \Delta_\xi}{2}\right), \quad \xi = x, y.$$

Este determinante nos da la expresión del factor de amplificación en función de las magnitudes que caracterizan el problema. En concreto, obtenemos

$$(Z^{\frac{1}{2}} - Z^{-\frac{1}{2}})^2 + 4\frac{\Delta_t^2 K_x^2}{\mu \epsilon_y} + 4\frac{\Delta_t^2 K_y^2}{\mu \epsilon_x} = 0. \quad (2.31)$$

En este caso sencillo en el que suponemos un medio homogéneo, isótropo y sin pérdidas, la ecuación (2.31) se convierte en $Z^2 - 2RZ + 1 = 0$, donde R es un coeficiente real dado por

$$R = 1 - \frac{2(\Delta_t)^2}{\mu \epsilon} \left[\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{k_x \Delta_x}{2}\right)}{(\Delta_x)^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{k_y \Delta_y}{2}\right)}{(\Delta_y)^2} \right].$$

La solución a esta ecuación es $Z = R \pm \sqrt{R^2 - 1}$. A partir de ella, veamos en qué casos el método es estable, esto es, cuándo $|Z| < 1$.

1. Si $|R| < 1$, entonces el radicando es negativo y $|Z| = \left| R \pm j\sqrt{1 - R^2} \right| = 1$. En este caso el método es estable.
2. Si $|R| > 1$, entonces ahora el radicando es positivo y Z es un número real. Si $R > 0$, tomando la solución positiva, se tiene $|Z| = |R + \sqrt{R^2 - 1}| > |R| > 1$. Mientras que si $R < 0$, tomando la solución negativa, se tiene $|Z| = |R - \sqrt{R^2 - 1}| > |R| > 1$. En cualquier caso, para una de las soluciones $|Z| > 1$. Por tanto, el método es inestable.

La condición de estabilidad queda por tanto reducida a $-1 \leq R \leq 1$. Veamos en qué se traduce esta condición para las cantidades Δ_t , Δ_x y Δ_y .

- Por ser siempre $\frac{2(\Delta_t)^2}{\mu\epsilon} \left[\frac{\text{sen}^2\left(\frac{k_x\Delta_x}{2}\right)}{(\Delta_x)^2} + \frac{\text{sen}^2\left(\frac{k_y\Delta_y}{2}\right)}{(\Delta_y)^2} \right] \geq 0$ (una cantidad positiva), se tiene directamente que $R \leq 1$.

- Imponemos la segunda desigualdad, $1 - \frac{2(\Delta_t)^2}{\mu\epsilon} \left[\frac{\text{sen}^2\left(\frac{k_x\Delta_x}{2}\right)}{(\Delta_x)^2} + \frac{\text{sen}^2\left(\frac{k_y\Delta_y}{2}\right)}{(\Delta_y)^2} \right] \geq -1 \iff$

$\frac{2(\Delta_t)^2}{\mu\epsilon} \left[\frac{\text{sen}^2\left(\frac{k_x\Delta_x}{2}\right)}{(\Delta_x)^2} + \frac{\text{sen}^2\left(\frac{k_y\Delta_y}{2}\right)}{(\Delta_y)^2} \right] \leq 1$, para todo k_x, k_y . El término entre corchetes está acotado por el valor que toma cuando ambos senos valen 1, mientras que si denotamos por c al máximo valor que puede tomar el producto $\mu\epsilon$, la condición de estabilidad del método queda

$$\Delta_t = \frac{s}{c} \left[\frac{1}{(\Delta_x)^2} + \frac{1}{(\Delta_y)^2} \right]^{-1/2} \quad \text{con } s \leq 1, \quad (2.32)$$

donde s representa el factor de estabilidad que debe ser menor o igual que la unidad para garantizar la estabilidad del esquema FDTD. El parámetro s a menudo recibe el nombre de factor de estabilidad, parámetro de Courant o parámetro CFL (Courant-Friedrichs-Lewy).

2.5.2. Relación de dispersión numérica

La relación de dispersión se define como la relación entre la frecuencia y el número de onda, $\omega = \omega(k_x, k_y)$. El proceso de discretización de las ecuaciones rotacionales de Maxwell lleva asociado la aparición de dispersión numérica, esto es, las ondas que se propagan en el medio simulado a una determinada frecuencia lo hacen con una velocidad de fase distinta de la teórica, lo cual puede llevar a la obtención de resultados no físicos, tales como anisotropía artificial.

La relación de dispersión numérica del método puede obtenerse sustituyendo una onda plana en las ecuaciones discretizadas del método, (2.23), (2.25) y (2.27). Puesto que la expresión discretizada de una onda plana es

$$U^n(i, j) = U^0 e^{j\omega_n \Delta t} e^{-j(i\Delta_x k_x + j\Delta_y k_y)},$$

basta sustituir en las relaciones anteriores $Z = e^{j\omega_n \Delta t}$. Obtenemos la siguiente relación de dispersión

$$\frac{1}{\Delta_t^2} \text{sen}^2 \left(\frac{\omega_n \Delta t}{2} \right) = \frac{1}{\mu\epsilon_y \Delta_x^2} \left(\frac{k_x \Delta_x}{2} \right)^2 + \frac{1}{\mu\epsilon_x \Delta_y^2} \left(\frac{k_y \Delta_y}{2} \right)^2.$$

En el límite, cuando el incremento temporal y el tamaño de la malla tiende a cero, y $\epsilon_y = \epsilon_x = \epsilon$, la ecuación de dispersión numérica tiende a la relación de dispersión exacta del medio continuo $\epsilon\mu\omega^2 = k_x^2 + k_y^2$. Por ello, en la práctica, a la hora de elegir los parámetros de la malla, hay que establecer un compromiso entre mantener suficientemente bajos los errores de dispersión y anisotropía numéricas, y no utilizar mallas demasiado finas que conduzcan a excesivos requerimientos de memoria y de CPU. Es habitual considerar una discretización estándar de 20 muestras espaciales por longitud de onda. Una vez determinado el tamaño espacial de la celda, el paso temporal se calcula a través del criterio de estabilidad.

Capítulo 3

El método LOD-FDTD para ondas TE_z

3.1. Introducción

Durante las últimas décadas se ha experimentado un interés creciente en el desarrollo de esquemas FDTD incondicionalmente estables. Este es el caso, por ejemplo, de los métodos LOD-FDTD (del inglés *Locally One-Dimensional*), o ADI-FDTD (del inglés *Alternating Direction Implicit*). Ambos esquemas utilizan la aproximación por diferencias finitas, por lo que presentan error de dispersión numérica, así como de disipación numérica. Los dos esquemas, además, pueden deducirse como sendas perturbaciones del método implícito de Crank-Nicolson.

En primer lugar, en este capítulo vamos a presentar el método de Crank-Nicolson. A partir de este, desarrollaremos y estudiaremos en profundidad el método LOD-FDTD. En particular, obtendremos las ecuaciones discretizadas que describen el método. Con ello, y tras el correspondiente estudio de sus propiedades numéricas, pondremos de manifiesto las ventajas que este presenta respecto del método FDTD convencional.

3.2. Método de Crank-Nicolson

Comenzamos con una breve introducción sobre el método de Crank-Nicolson para la resolución de ecuaciones diferenciales de evolución. El método de Crank-Nicolson puede obtenerse como aplicación del método de líneas (MOL) a un problema de evolución descrito por ecuaciones en derivadas parciales. En estos problemas, es posible considerar de forma separada la discretización de los operadores en derivadas parciales con respecto a variables espaciales ($\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$) de la discretización del operador de derivación temporal ($\frac{\partial}{\partial t}$).

Sea una ecuación en derivadas parciales en una dimensión espacial, (el método es fácilmente generalizable a varias variables espaciales), dada por

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = F(u, x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}). \quad (3.1)$$

Siguiendo la metodología de las diferencias finitas, sustituimos en la ecuación (3.1) los operadores en derivadas parciales, así como la propia función u , por la correspondiente fórmula

en diferencias centrada de segundo orden para cada valor de la variable continua t . Cuando se pone

$$\frac{\partial u(x_j, t)}{\partial t} \approx \frac{du(x_j, t)}{dt}, \quad j = 1, \dots, n_x, \quad (3.2)$$

y se ignora el error de truncamiento de la fórmula en diferencias, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para las funciones $U_j(t) \approx u(x_j, t)$, $j = 1, \dots, n_x$. Introduciendo el vector $\mathbf{U}(t) = [U_1(t), \dots, U_{n_x}(t)]$, el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias viene dado por

$$\frac{d\mathbf{U}_h(t)}{dt} = A_h \mathbf{U}_h(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.3)$$

dependiente del paso espacial h elegido. Entonces, basta aplicar el método numérico conocido como la regla de los trapecios (método Runge-Kutta) para resolver el sistema. Este queda descrito por

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_h^{n+1} &= \mathbf{U}_h^n + \frac{\Delta t}{2} [A_h \mathbf{U}_h^n + A_h \mathbf{U}_h^{n+1}], \\ \frac{\mathbf{U}_h^{n+1} - \mathbf{U}_h^n}{\Delta t} &= \frac{1}{2} [A_h \mathbf{U}_h^n + A_h \mathbf{U}_h^{n+1}]. \end{aligned}$$

Como resultado se obtiene un esquema de segundo orden en tiempo, implícito e incondicionalmente estable.

3.3. Descripción del problema diferencial.

Nuestras ecuaciones diferenciales de partida son las ecuaciones de Maxwell del rotacional correspondientes al problema en dos dimensiones con polarización TE_z. Considerando un material sin pérdidas, las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{1}{\epsilon_x} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} &= -\frac{1}{\epsilon_y} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

En forma matricial podemos escribirlas como

$$\frac{\partial U}{\partial t} = AU, \quad (3.4)$$

siendo A el operador lineal semidefinido positivo dado por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\epsilon_x} \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\epsilon_y} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix},$$

y U el vector de incógnitas cuyo valor deseamos aproximar en los puntos de la malla dado por

$$U = (E_x \quad E_y \quad H_z)^T.$$

La discretización de (3.4) conforme al esquema de Crank-Nicolson da lugar a las siguientes ecuaciones en diferencias

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = A \frac{U^{n+1} + U^n}{2} + O(\Delta t^2). \quad (3.5)$$

En [7] pueden encontrarse las expresiones completas una vez sustituidos los operadores diferenciales en A por las fórmulas en diferencias correspondientes según lo descrito en la sección anterior. Por ser un esquema implícito, la aplicación directa del método de Crank-Nicolson da lugar a un sistema de ecuaciones lineales descrito por una matriz dispersa de dimensión muy grande que debemos resolver en cada iteración temporal, lo que conlleva un mayor costo computacional que la aplicación del propio método FDTD (ver Capítulo 2). Veamos a continuación, que introduciendo una perturbación al esquema de Crank-Nicolson, podemos obtener un método numérico computacionalmente más eficiente y que mantiene la propiedad de estabilidad incondicional heredada de este. De esta manera podemos evitar la restricción sobre el mallado que impone la condición de estabilidad de Courant. El método que obtenemos a continuación se llama LOD-FDTD.

3.4. Esquema LOD-FDTD como perturbación del método de Crank-Nicolson

Agrupando términos en (3.5) podemos escribir el esquema de Crank-Nicolson en forma factorizada como

$$\left(I - \frac{\Delta t}{2} A \right) U^{n+1} = \left(I + \frac{\Delta t}{2} A \right) U^n + O(\Delta t^3). \quad (3.6)$$

Escribiendo la matriz A como suma de dos matrices tales que cada una de las cuales contiene sólo las derivadas parciales respecto a una de las dos direcciones tenemos

$$A = A_x + A_y, \quad (3.7)$$

$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\epsilon_y} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & -\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \quad A_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\epsilon_x} \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De esta manera, la expresión (3.6) queda

$$\left(I - \frac{\Delta t}{2} A_x - \frac{\Delta t}{2} A_y \right) U^{n+1} = \left(I + \frac{\Delta t}{2} A_x + \frac{\Delta t}{2} A_y \right) U^n + O(\Delta t^3).$$

Sumando y restando el término $\frac{\Delta t^2}{4} A_x A_y U^{n+1}$ en el primer miembro y el término $\frac{\Delta t^2}{4} A_x A_y U^n$ en el segundo queda

$$\begin{aligned} \left(I - \frac{\Delta t}{2} A_x - \frac{\Delta t}{2} A_y + \frac{\Delta t^2}{4} A_x A_y \right) U^{n+1} &= \left(I + \frac{\Delta t}{2} A_x + \frac{\Delta t}{2} A_y + \frac{\Delta t^2}{4} A_x A_y \right) U^n + \\ &+ \frac{\Delta t^2}{4} A_x A_y (U^{n+1} - U^n) + O(\Delta t^3). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Llegados a este punto, tenemos una formulación alternativa del método de Crank-Nicolson para nuestro problema diferencial. El método LOD-FDTD se obtiene de la expresión anterior (3.8) sin más que eliminar el último sumando $\frac{\Delta t^2}{4} A_x A_y (U^{n+1} - U^n)$ y despreciando el término de error. El esquema resultante es, por tanto, de primer orden en tiempo y su factorización puede escribirse así

$$\left(I - \frac{\Delta t}{2} A_x\right) \left(I - \frac{\Delta t}{2} A_y\right) U^{n+1} = \left(I + \frac{\Delta t}{2} A_x\right) \left(I + \frac{\Delta t}{2} A_y\right) U^n. \quad (3.9)$$

3.5. Esquema LOD-FDTD como método de pasos fraccionados

Cuando el operador semidefinido positivo original A , que caracteriza un problema, puede descomponerse en una suma de operadores semidefinidos positivos ($A = A_1 + A_2$) con una estructura simple, el problema original puede reducirse a una cadena de problemas más sencillos que pueden resolverse numéricamente de manera más eficaz. Estas técnicas se denominan *splitting-up methods* o métodos de pasos fraccionados. Veamos cómo el esquema LOD-FDTD puede obtenerse de la aplicación de uno de estos métodos a nuestro sistema (3.4).

Como se ha mencionado antes, el operador A que define nuestro problema puede descomponerse en dos matrices, A_x y A_y , cada una de las cuales contiene sólo derivadas parciales respecto a una de las dos direcciones. El esquema LOD-FDTD es básicamente el resultado de dividir el problema en dos pasos introduciendo una evaluación en el instante intermedio $t_{n+\frac{1}{2}}$ de manera que en el paso $t_n \rightarrow t_{n+\frac{1}{2}}$ aplicamos un esquema Crank-Nicolson para el operador A_x y en el paso $t_{n+\frac{1}{2}} \rightarrow t_{n+1}$ aplicamos también un esquema Crank-Nicolson esta vez para el operador A_y , de manera que obtenemos

$$\frac{U^{n+\frac{1}{2}} - U^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} A_x (U^{n+\frac{1}{2}} + U^n), \quad (3.10a)$$

$$\frac{U^{n+1} - U^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{1}{2} A_y (U^{n+1} + U^{n+\frac{1}{2}}). \quad (3.10b)$$

Agrupando términos, obtenemos las ecuaciones en diferencias en dos pasos que describen el método LOD-FDTD

$$\left(I - \frac{\Delta t}{2} A_x\right) U^{n+\frac{1}{2}} = \left(I + \frac{\Delta t}{2} A_x\right) U^n, \quad (3.11a)$$

$$\left(I - \frac{\Delta t}{2} A_y\right) U^{n+1} = \left(I + \frac{\Delta t}{2} A_y\right) U^{n+\frac{1}{2}}. \quad (3.11b)$$

A partir de estas ecuaciones podemos fácilmente llegar las deducidas de obtener el método LOD-FDTD como perturbación del esquema Crank-Nicolson (3.9).

3.6. Obtención de las ecuaciones en diferencias del método TE_z-LOD-FDTD

En este apartado vamos a obtener las ecuaciones en diferencias del esquema LOD-FDTD para ondas TE_z. Nuestro objetivo es implementar estas ecuaciones en nuestro código de

MATLAB[®]. Desarrollando las ecuaciones discretizadas del método LOD-FDTD obtenidas en (3.10) tenemos que el primer paso del esquema puede escribirse como

$$E_x^{n+\frac{1}{2}} - E_x^n = 0, \quad (3.12a)$$

$$E_y^{n+\frac{1}{2}} - E_y^n = -\frac{\Delta t}{2\epsilon_y} \frac{\partial}{\partial x} \left(H_z^{n+\frac{1}{2}} + H_z^n \right), \quad (3.12b)$$

$$H_z^{n+\frac{1}{2}} - H_z^n = -\frac{\Delta t}{2\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(E_y^{n+\frac{1}{2}} + E_y^n \right). \quad (3.12c)$$

Mientras que para el segundo paso las ecuaciones que se obtienen son

$$E_x^{n+1} - E_x^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t}{2\epsilon_x} \frac{\partial}{\partial y} \left(H_z^{n+\frac{1}{2}} + H_z^{n+1} \right), \quad (3.13a)$$

$$E_y^{n+1} - E_y^{n+\frac{1}{2}} = 0, \quad (3.13b)$$

$$H_z^{n+1} - H_z^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t}{2\mu} \frac{\partial}{\partial y} \left(E_x^{n+\frac{1}{2}} + E_x^{n+1} \right). \quad (3.13c)$$

Como podemos ver, se tiene que $E_x^{n+\frac{1}{2}} = E_x^n$ y $E_y^{n+1} = E_y^{n+\frac{1}{2}}$, por lo tanto podemos eliminar los términos $E_x^{n+\frac{1}{2}}$ y $E_y^{n+\frac{1}{2}}$ de las ecuaciones anteriores. De esta manera, las ecuaciones resultantes para el primer paso son

$$E_y^{n+1} - E_y^n = -\frac{\Delta t}{2\epsilon_y} \frac{\partial}{\partial x} \left[H_z^n + H_z^{n+\frac{1}{2}} \right], \quad (3.14a)$$

$$H_z^{n+\frac{1}{2}} - H_z^n = -\frac{\Delta t}{2\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[E_y^n + E_y^{n+1} \right], \quad (3.14b)$$

y para el segundo

$$E_x^{n+1} - E_x^n = \frac{\Delta t}{2\epsilon_x} \frac{\partial}{\partial y} \left[H_z^{n+\frac{1}{2}} + H_z^{n+1} \right], \quad (3.15a)$$

$$H_z^{n+1} - H_z^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t}{2\mu} \frac{\partial}{\partial y} \left[E_x^n + E_x^{n+1} \right]. \quad (3.15b)$$

El siguiente paso consiste en la discretización espacial de estas ecuaciones. Para ello seguimos el esquema de Yee explicado en el Capítulo 2. Es decir, como se mostró en la Figura 2.2, vamos a calcular los valores de las componentes del campo en los puntos $E_y^n(i, j + \frac{1}{2})$, $E_x^n(i + \frac{1}{2}, j)$ y $H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$. Asumimos μ constante en todo el dominio y evaluamos las ecuaciones del primer paso, (3.14a) en $(i, j + \frac{1}{2})$ y (3.14b) en $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$ y aproximamos $\frac{\partial}{\partial x}$ por el operador en diferencias $\frac{\delta_x}{\Delta_x}$. El resultado es el siguiente

$$E_y^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}) - E_y^n(i, j + \frac{1}{2}) = -\frac{\Delta t}{2\epsilon_{y(i, j + \frac{1}{2})}} \frac{\delta_x}{\Delta_x} \left[H_z^n(i, j + \frac{1}{2}) + H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) \right] \quad (3.16a)$$

$$H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - H_z^n(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) = -\frac{\Delta t}{2\mu} \frac{\delta_x}{\Delta_x} \left[E_y^n(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) + E_y^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) \right]. \quad (3.16b)$$

Para el segundo paso, evaluamos (3.15a) en $(i, j + \frac{1}{2})$ y (3.15b) en $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$. Aproximando $\frac{\partial}{\partial y}$ por el operador $\frac{\delta_y}{\Delta_y}$ el resultado es

$$E_x^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j) - E_x^n(i + \frac{1}{2}, j) = \frac{\Delta_t}{2\epsilon_{x(i+\frac{1}{2},j)}} \frac{\delta_y}{\Delta_y} \left[H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) + H_z^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j) \right] \quad (3.17a)$$

$$H_z^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) = \frac{\Delta_t}{2\mu} \frac{\delta_y}{\Delta_y} \left[E_x^n(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) + E_x^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) \right]. \quad (3.17b)$$

3.6.1. Ecuaciones en diferencias del paso 1 del esquema TE_z-LOD-FDTD

Nos centramos ahora en desarrollar las ecuaciones del primer paso. Observamos que para que en cada ecuación de (3.16) aparezca solo una de las incógnitas debemos eliminar $H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2})$. Para ello, consideramos la segunda ecuación del paso 1 (3.16b) evaluada en $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$ y en $(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$

$$H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) = H_z^n(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - \frac{\Delta_t}{2\mu} \frac{\delta_x}{\Delta_x} \left[E_y^n(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) + E_y^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) \right],$$

$$H_z^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) = H_z^n(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - \frac{\Delta_t}{2\mu} \frac{\delta_x}{\Delta_x} \left[E_y^n(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) + E_y^{n+1}(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) \right].$$

Restando ambas ecuaciones obtenemos

$$\delta_x H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) = \delta_x H_z^n(i, j + \frac{1}{2}) - \frac{\Delta_t}{2\mu} \left\{ \frac{\delta_x}{\Delta_x} \left[E_y^n(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) + E_y^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - E_y^n(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - E_y^{n+1}(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) \right] \right\},$$

$$\delta_x H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) = \delta_x H_z^n(i, j + \frac{1}{2}) - \frac{\Delta_t}{2\Delta_x\mu} \delta_x \left\{ \delta_x \left[E_y^n(i, j + \frac{1}{2}) + E_y^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}) \right] \right\},$$

donde δ_x es el operador finito en diferencia centrada para la aproximación de la derivada parcial respecto de la variable x , definido en (2.17). Sustituyendo en (3.16a) queda

$$E_y^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}) = E_y^n(i, j + \frac{1}{2}) - \frac{\Delta_t}{2\Delta_x\epsilon_{y(i,j+\frac{1}{2})}} \delta_x H_z^n(i, j + \frac{1}{2}) - \frac{\Delta_t}{2\Delta_x\epsilon_{y(i,j+\frac{1}{2})}} \left\{ \delta_x H_z^n(i, j + \frac{1}{2}) - \frac{\Delta_t}{2\Delta_x\mu} \left[\delta_x E_y^n(i, j + \frac{1}{2}) \right] - \frac{\Delta_t}{2\Delta_x\mu} \left[\delta_x E_y^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}) \right] \right\}.$$

Agrupando los términos donde aparece la evaluación de la componente E_y en el instante t_{n+1} queda

$$E_y^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}) - \frac{\Delta_t^2}{4\Delta_x^2\epsilon_{y(i,j+\frac{1}{2})}} \delta_x \left[\frac{1}{\mu} \delta_x E_y^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}) \right] = E_y^n(i, j + \frac{1}{2}) + \frac{\Delta_t^2}{4\Delta_x^2\epsilon_{y(i,j+\frac{1}{2})}} \delta_x \left[\frac{1}{\mu} \delta_x E_y^n(i, j + \frac{1}{2}) \right] - \frac{\Delta_t}{\Delta_x\epsilon_{y(i,j+\frac{1}{2})}} \delta_x H_z^n(i, j + \frac{1}{2}).$$

Si desarrollamos los dos operadores en diferencias δ_x sucesivamente y agrupamos términos llegamos a la ecuación para el cálculo de E_y^{n+1} correspondiente al paso 1 para cada celda del mallado. Teniendo en cuenta que la componente $H_z^{n+\frac{1}{2}}$ se calcula explícitamente mediante la ecuación (3.16b), el sistema de **ecuaciones resultante para el paso 1** es

$$\begin{aligned}
& \left[1 + \frac{\Delta_t^2/\Delta_x^2}{2\epsilon_{y(i,j+\frac{1}{2})}} \frac{1}{\mu} \right] E_y^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}) - \frac{\Delta_t^2/\Delta_x^2}{4\epsilon_{y(i,j+\frac{1}{2})}} \frac{1}{\mu} [E_y^{n+1}(i+1, j + \frac{1}{2}) + E_y^{n+1}(i-1, j + \frac{1}{2})] \\
= & \left[1 - \frac{\Delta_t^2/\Delta_x^2}{4\epsilon_{y(i,j+\frac{1}{2})}} \frac{1}{\mu} \right] E_y^n(i, j + \frac{1}{2}) + \frac{\Delta_t^2/\Delta_x^2}{4\epsilon_{y(i,j+\frac{1}{2})}} \frac{1}{\mu} [E_y^n(i+1, j + \frac{1}{2}) + E_y^n(i-1, j + \frac{1}{2})] \\
& - \frac{\Delta_t/\Delta_x}{\epsilon_{y(i,j+\frac{1}{2})}} [H_z^n(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - H_z^n(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})], \tag{3.18a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) &= H_z^n(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) \\
- \frac{\Delta_t}{2\mu\Delta_x} [E_y^n(i+1, j + \frac{1}{2}) - E_y^n(i, j + \frac{1}{2}) + E_y^{n+1}(i+1, j + \frac{1}{2}) - E_y^{n+1}(i, j + \frac{1}{2})] & . \tag{3.18b}
\end{aligned}$$

Para cada valor de j , la ecuación (3.18a) conduce a un sistema de ecuaciones tridiagonal que permite calcular E_y^{n+1} en el conjunto de puntos dados por $(i, j + \frac{1}{2})$, $i = 1, \dots, n_x + 1$. De esta manera, para resolver E_y^{n+1} en todo el espacio de cómputo hay que resolver un sistema tridiagonal para cada $j = 1, \dots, n_y$.

3.6.2. Ecuaciones en diferencias del paso 2 del esquema TE_z-LOD-FDTD

Vamos ahora con las ecuaciones correspondientes al segundo paso del esquema. En (3.17) vemos que la ecuación (3.17b) para el cálculo de la componente H_z ya es explícita. Desarrollamos por tanto la primera, que está dada por

$$E_x^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j) = E_x^n(i + \frac{1}{2}, j) + \frac{\Delta_t}{2\epsilon_{x(i+\frac{1}{2},j)}} \frac{\delta_y}{\Delta_y} \left[H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) + H_z^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j) \right]. \tag{3.19}$$

De forma análoga al paso 1, debemos eliminar $H_z^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j)$. Evaluamos la segunda ecuación del paso 2 (3.17b) en $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$ y en $(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2})$

$$\begin{aligned}
H_z^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) &= H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) \\
&+ \frac{\Delta_t}{2\mu} \frac{\delta_y}{\Delta_y} [E_x^n(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) + E_x^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})], \\
H_z^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}) &= H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}) \\
&+ \frac{\Delta_t}{2\mu} \frac{\delta_y}{\Delta_y} [E_x^n(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}) + E_x^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2})].
\end{aligned}$$

Restamos ambas ecuaciones e introducimos el operador δ_y

$$\begin{aligned} \delta_y H_z^{n+1} \left(i + \frac{1}{2}, j \right) &= \delta_y H_z^{n+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2}, j \right) \\ &+ \frac{\Delta_t}{2\Delta_y \mu} \delta_y \left\{ \delta_y \left[E_x^n \left(i + \frac{1}{2}, j \right) + E_x^{n+1} \left(i + \frac{1}{2}, j \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

siendo δ_y el operador finito en diferencia centrada para la aproximación de la derivada parcial respecto de la variable y , definido en (2.17). Retomando la ecuación (3.19) y sustituyendo en ella $\delta_y H_z^{n+1} \left(i + \frac{1}{2}, j \right)$ obtenemos

$$\begin{aligned} E_x^{n+1} \left(i + \frac{1}{2}, j \right) &= E_x^n \left(i + \frac{1}{2}, j \right) + \frac{\Delta_t/\Delta_y}{2\epsilon_{x(i+\frac{1}{2},j)}} \delta_y H_z^{n+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2}, j \right) \\ &+ \frac{\Delta_t/\Delta_y}{2\epsilon_{x(i+\frac{1}{2},j)}} \left\{ \delta_y H_z^{n+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2}, j \right) + \frac{\Delta_t}{2\Delta_y} \delta_y \left[\frac{\delta_y}{\mu} E_x^n \left(i + \frac{1}{2}, j \right) + \frac{\delta_y}{\mu} E_x^{n+1} \left(i + \frac{1}{2}, j \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Desarrollando los operadores en diferencias δ_y sucesivamente y agrupando términos, llegamos a la ecuación para el cálculo de E_x^{n+1} correspondiente al paso 2 para cada celda del mallado. Teniendo en cuenta que la componente H_z^{n+1} se calcula explícitamente mediante la ecuación (3.17b), el sistema de **ecuaciones resultante para el paso 2** es

$$\begin{aligned} &\left[1 + \frac{\Delta_t^2/\Delta_y^2}{2\epsilon_{x(i+\frac{1}{2},j)}} \frac{1}{\mu} \right] E_x^{n+1} \left(i + \frac{1}{2}, j \right) - \frac{\Delta_t^2/\Delta_y^2}{4\epsilon_{x(i+\frac{1}{2},j)}} \frac{1}{\mu} \left[E_x^{n+1} \left(i + \frac{1}{2}, j + 1 \right) + E_x^{n+1} \left(i + \frac{1}{2}, j - 1 \right) \right] \\ &= \left[1 - \frac{\Delta_t^2/\Delta_y^2}{2\epsilon_{x(i+\frac{1}{2},j)}} \frac{1}{\mu} \right] E_x^n \left(i + \frac{1}{2}, j \right) + \frac{\Delta_t^2/\Delta_y^2}{4\epsilon_{x(i+\frac{1}{2},j)}} \frac{1}{\mu} \left[E_x^n \left(i + \frac{1}{2}, j + 1 \right) + E_x^n \left(i + \frac{1}{2}, j - 1 \right) \right] \\ &+ \frac{\Delta_t/\Delta_y}{\epsilon_{x(i+\frac{1}{2},j)}} \left[H_z^{n+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2} \right) - H_z^{n+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.20a)$$

$$\begin{aligned} H_z^{n+1} \left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2} \right) &= H_z^{n+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2} \right) \\ &+ \frac{\Delta_t}{2\mu\Delta_y} \left[E_x^n \left(i + 1, j + \frac{1}{2} \right) - E_x^n \left(i, j + \frac{1}{2} \right) + E_x^{n+1} \left(i + 1, j + \frac{1}{2} \right) - E_x^{n+1} \left(i, j + \frac{1}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.20b)$$

Para cada valor de i , la ecuación (3.20a) conduce a un sistema de ecuaciones tridiagonal que permite calcular E_x^{n+1} en el conjunto de puntos dados por $\left(i + \frac{1}{2}, j \right)$, $j = 1, \dots, n_y + 1$. De esta manera, para resolver E_x^{n+1} en todo el espacio de cómputo hay que resolver un sistema tridiagonal para cada $i = 1, \dots, n_x$.

Las ecuaciones que hemos obtenido son válidas para todos los nodos de la malla. No obstante, nos encontramos con un inconveniente cuando debemos resolver el sistema para los nodos situados en el contorno del dominio. Para estos puntos no conocemos los valores de las componentes del campo a su alrededor (fuera del dominio). Para resolver el problema es necesario tener en cuenta las condiciones de contorno. Estas nos proporcionan información del valor de los campos en el borde del dominio

3.7. Condiciones de contorno

Como ya se ha mencionado antes, las condiciones de contorno que vamos a aplicar en este trabajo son las de conductor eléctrico perfecto (PEC). Estas son

$$\vec{E}_t = 0, \quad \vec{B}_n = 0,$$

donde los subíndices se refieren a las componentes tangencial y normal, respectivamente, a la pared metálica. Por lo tanto, la señal se reflejará cuando llegue al borde del dominio computacional. Considerando los puntos donde se evalúa cada componente del campo conforme a la malla de Yee (Figura 2.2), la implementación de las condiciones de contorno para conductor eléctrico perfecto requiere anular las componentes E_x , E_y en los bordes del dominio, de manera que imponemos

$$\begin{aligned} E_y(1, j + \frac{1}{2}) &= E_y(n_x + 1, j + \frac{1}{2}) = 0, & j = 1, \dots, n_y, \\ E_x(i + \frac{1}{2}, 1) &= E_x(i + \frac{1}{2}, n_y + 1) = 0, & i = 1, \dots, n_x. \end{aligned} \quad (3.21)$$

3.8. Implementación del esquema LOD-FDTD para ondas TE_z

La utilidad de cualquier método numérico se basa en su implementación en un ordenador. Una vez obtenidas las ecuaciones discretizadas del esquema (3.18) y (3.20), debemos reescribirlas de manera que podamos programar el algoritmo del método LOD-FDTD, en este caso, lo haremos en MATLAB[®].

3.8.1. Implementación del primer paso del método TE_z -LOD-FDTD

Comenzamos con la primera subiteración. Tal como hemos obtenido en (3.18), en primer lugar debemos resolver n_y sistemas de ecuaciones para obtener el valor de $E_y^{n+1}(i, j)$ en cada punto correspondiente del interior de la malla. Una vez obtenido el valor de $E_y^{n+1}(i, j)$, resolvemos la ecuación explícita que da $H_z^{n+1/2}$ en cada celda del mallado. Para poder escribir las ecuaciones finales de forma más compacta, denotamos los coeficientes que aparecen en (3.18) de la siguiente forma

$$A_{i,j+\frac{1}{2}} = -\frac{\Delta_t^2/\Delta_x^2}{4\epsilon_{y(i,j+\frac{1}{2})}} \frac{1}{\mu}, \quad B_{i,j+\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\Delta_t^2/\Delta_x^2}{2\epsilon_{y(i,j+\frac{1}{2})}} \frac{1}{\mu}, \quad C_{i,j+\frac{1}{2}} = 1 - \frac{\Delta_t^2/\Delta_x^2}{2\epsilon_{y(i,j+\frac{1}{2})}} \frac{1}{\mu}.$$

Sustituyendo en (3.18), podemos escribir para cada $j = 1, \dots, n_y$

$$\begin{aligned} &A_{i,j+\frac{1}{2}} E_y^{n+1}(i-1, j + \frac{1}{2}) + B_{i,j+\frac{1}{2}} E_y^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}) + A_{i,j+\frac{1}{2}} E_y^{n+1}(i+1, j + \frac{1}{2}) \\ &= C_{i,j+\frac{1}{2}} E_y^n(i, j + \frac{1}{2}) - A_{i,j+\frac{1}{2}} [E_y^n(i+1, j + \frac{1}{2}) + E_y^n(i-1, j + \frac{1}{2})] \\ &\quad - \frac{\Delta_t/\Delta_x}{\epsilon_{y(i,j+\frac{1}{2})}} [H_z^n(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - H_z^n(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})]. \end{aligned} \quad (3.22a)$$

Por lo tanto, para cada valor del índice j , el sistema a resolver para calcular E_y es

$$X_{j+\frac{1}{2}} E_{yj+\frac{1}{2}}^{n+1} = \text{RHS}_{j+\frac{1}{2}}^n \quad j = 1, 2, \dots, n_y, \quad (3.23)$$

donde la matriz $X_{j+\frac{1}{2}}$ es una matriz tridiagonal dada por

$$\begin{bmatrix} B_{2,j+\frac{1}{2}} & A_{2,j+\frac{1}{2}} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ A_{3,j+\frac{1}{2}} & B_{3,j+\frac{1}{2}} & A_{3,j+\frac{1}{2}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & A_{i,j+\frac{1}{2}} & B_{i,j+\frac{1}{2}} & A_{i,j+\frac{1}{2}} & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & A_{n_x-1,j+\frac{1}{2}} & B_{n_x-1,j+\frac{1}{2}} & A_{n_x-1,j+\frac{1}{2}} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & A_{n_x,j+\frac{1}{2}} & B_{n_x,j+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_y^{n+1}(2, j+\frac{1}{2}) \\ E_y^{n+1}(3, j+\frac{1}{2}) \\ E_y^{n+1}(4, j+\frac{1}{2}) \\ \vdots \\ E_y^{n+1}(n_x, j+\frac{1}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{RHS}^n(2, j+\frac{1}{2}) \\ \text{RHS}^n(3, j+\frac{1}{2}) \\ \text{RHS}^n(4, j+\frac{1}{2}) \\ \vdots \\ \text{RHS}^n(n_x, j+\frac{1}{2}) \end{bmatrix}.$$

El término de la derecha viene dado por

$$\begin{aligned} \text{RHS}^n(i, j + \frac{1}{2}) &= C_{i,j+\frac{1}{2}} E_y^n(i, j + \frac{1}{2}) - A_{i,j+\frac{1}{2}} \left[E_y^n(i-1, j + \frac{1}{2}) + E_y^n(i+1, j + \frac{1}{2}) \right] \\ &\quad - \frac{\Delta_t}{\epsilon_{y(i,j+\frac{1}{2})} \Delta_x} \left[H_z^n(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - H_z^n(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) \right]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Notamos que para cada valor de j el sistema de ecuaciones que resolvemos nos da el valor de $E_y^{n+1}(i, j + \frac{1}{2})$ para $i = 2, 3, \dots, n_x$, ya que, tal como hemos explicado en el apartado 3.7, los valores de E_y^{n+1} en los puntos del borde de la región de cómputo están determinados por las condiciones de contorno impuestas por el problema. En nuestro caso (condiciones de PEC), la componente E_y se anula en los bordes, es por ello que consideramos $E_y^{n+1}(1, j + \frac{1}{2}) = E_y^{n+1}(n_x + 1, j + \frac{1}{2}) = 0$ para $j = 1, \dots, n_y$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene el valor de $E_y^{n+1}(i, j + \frac{1}{2})$ ($i = 2, 3, \dots, n_x$)

$$E_{y,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = [E_y^{n+1}(2, j + \frac{1}{2}), E_y^{n+1}(3, j + \frac{1}{2}), \dots, E_y^{n+1}(n_x, j + \frac{1}{2})]^T,$$

que es un vector de dimensión $n_x - 1$ que contiene los valores del campo E_y correspondientes a la j -ésima fila en el instante $t = (n + 1) \Delta_t$. Repitiendo este proceso para $j = 1, 2, \dots, n_y$, es decir, resolviendo n_y sistemas de ecuaciones, obtendremos E_y^{n+1} en todos los nudos de la malla.

Una vez obtenido E_y^{n+1} , se calcula $H_z^{n+\frac{1}{2}}$ explícitamente utilizando la ecuación (3.18b).

3.8.2. Implementación del segundo paso del método TE_z-LOD-FDTD

Vamos ahora con la segunda subiteración. En este caso, de las ecuaciones (3.20), sabemos que debemos resolver n_x sistemas de ecuaciones para obtener el valor de $E_x^{n+1}(i, j)$ en cada punto correspondiente del interior de la malla. Utilizando este valor, resolvemos la ecuación explícita que da H_z^{n+1} en cada celda del mallado. Denotamos los coeficientes que aparecen en estas ecuaciones de la siguiente forma

$$A_{i+\frac{1}{2},j} = -\frac{\Delta_t^2/\Delta_y^2}{4\epsilon_{x(i+\frac{1}{2},j)}} \frac{1}{\mu}, \quad B_{i+\frac{1}{2},j} = 1 + \frac{\Delta_t^2/\Delta_y^2}{2\epsilon_{x(i+\frac{1}{2},j)}} \frac{1}{\mu}, \quad C_{i+\frac{1}{2},j} = 1 - \frac{\Delta_t^2/\Delta_y^2}{4\epsilon_{x(i+\frac{1}{2},j)}} \frac{1}{\mu}.$$

Sustituyendo en (3.20a), podemos escribir para cada $i = 1, \dots, n_x$

$$\begin{aligned} & A_{i+\frac{1}{2},j} E_x^{n+1} \left(i + \frac{1}{2}, j - 1 \right) + B_{i+\frac{1}{2},j} E_x^{n+1} \left(i + \frac{1}{2}, j \right) + A_{i+\frac{1}{2},j} E_x^{n+1} \left(i + \frac{1}{2}, j + 1 \right) \\ &= C_{i+\frac{1}{2},j} E_x^n \left(i + \frac{1}{2}, j \right) - A_{i+\frac{1}{2},j} \left[E_x^n \left(i + \frac{1}{2}, j + 1 \right) + E_x^n \left(i + \frac{1}{2}, j - 1 \right) \right] \\ &+ \frac{\Delta t / \Delta y}{\epsilon_{x(i+\frac{1}{2},j)}} \left[H_z^{n+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2} \right) - H_z^{n+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.25a)$$

Por lo tanto, para cada valor del índice i ($i = 1, 2, \dots, n_x$), el sistema a resolver para calcular E_x es

$$Y_{i+\frac{1}{2}} E_{x,i+\frac{1}{2}}^{n+1} = \text{RHS}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \quad i = 1, 2, \dots, n_x \quad (3.26)$$

donde la matriz $Y_{i+\frac{1}{2}}$ es una matriz tridiagonal dada por

$$\begin{bmatrix} B_{i+\frac{1}{2},2} & A_{i+\frac{1}{2},2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ A_{i+\frac{1}{2},3} & B_{i+\frac{1}{2},3} & A_{i+\frac{1}{2},3} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & A_{i+\frac{1}{2},j} & B_{i+\frac{1}{2},j} & A_{i+\frac{1}{2},j} & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & A_{i+\frac{1}{2},n_y-1} & B_{i+\frac{1}{2},n_y-1} & A_{i+\frac{1}{2},n_y-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & A_{i+\frac{1}{2},n_y} & B_{i+\frac{1}{2},n_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x^{n+1} \left(i + \frac{1}{2}, 2 \right) \\ E_x^{n+1} \left(i + \frac{1}{2}, 3 \right) \\ E_x^{n+1} \left(i + \frac{1}{2}, 4 \right) \\ \vdots \\ E_x^{n+1} \left(i + \frac{1}{2}, n_y - 1 \right) \\ E_x^{n+1} \left(i + \frac{1}{2}, n_y \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{RHS}^{n+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2}, 2 \right) \\ \text{RHS}^{n+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2}, 3 \right) \\ \text{RHS}^{n+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2}, 4 \right) \\ \vdots \\ \text{RHS}^{n+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2}, n_y \right) \end{bmatrix}.$$

El término de la derecha viene dado por

$$\begin{aligned} \text{RHS}^{n+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2}, j \right) &= C_{i+\frac{1}{2},j} E_x^n \left(i + \frac{1}{2}, j \right) - A_{i+\frac{1}{2},j} \left[E_x^n \left(i + \frac{1}{2}, j + 1 \right) + E_x^n \left(i + \frac{1}{2}, j - 1 \right) \right] \\ &+ \frac{\Delta t / \Delta y}{\epsilon_{x(i+\frac{1}{2},j)}} \left[H_z^{n+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2} \right) - H_z^{n+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Recordemos que tomamos $E_x^{n+1} \left(i + \frac{1}{2}, 1 \right) = E_x^{n+1} \left(i + \frac{1}{2}, n_y + 1 \right) = 0$ ya que son los valores impuestos por las condiciones de contorno utilizadas (PEC). Entonces, resolviendo cada sistema obtenido (con $i = 1, 2, \dots, n_x$) se obtienen el valor de las incógnitas $E_x^{n+1} \left(i + \frac{1}{2}, j \right)$ con ($j = 2, 3, \dots, n_y$).

$$E_y^{n+1} \left(i + \frac{1}{2}, j \right) = \left[E_y^{n+1} \left(i + \frac{1}{2}, j \right), E_y^{n+1} \left(i + \frac{1}{2}, j \right), \dots, E_y^{n+1} \left(i + \frac{1}{2}, j \right) \right]^T,$$

que es un vector de dimensión $n_y - 1$ que contiene los valores del campo E_x correspondientes a la i -ésima columna en el instante $t = (n + 1) \Delta t$. Repitiendo este proceso para $i = 1, 2, \dots, n_x$, es decir, resolviendo n_x sistemas de ecuaciones, obtendremos E_y^{n+1} en todos los nudos de la malla.

Una vez obtenido E_x^{n+1} , se calcula H_z^{n+1} explícitamente utilizando la ecuación (3.20b).

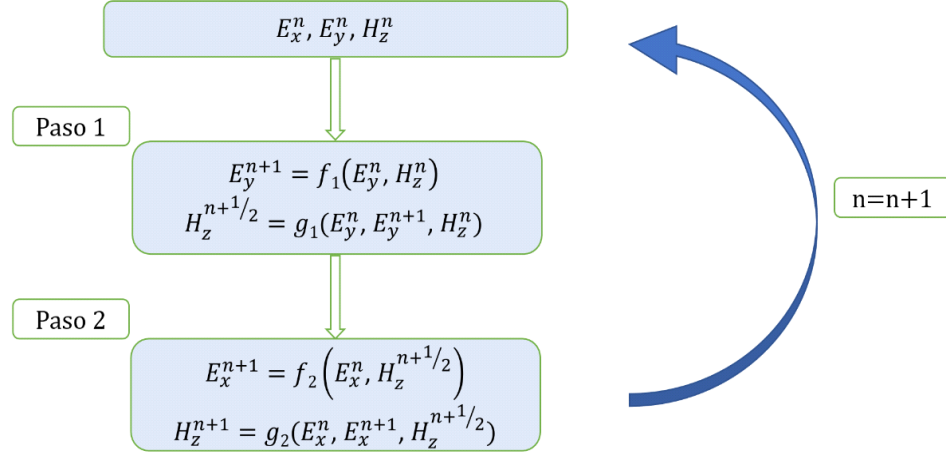


Figura 3.1: Diagrama de flujo del método LOD-FDTD.

3.9. Algoritmo del esquema TE_z -LOD-FDTD

Partiendo de los valores de las componentes E_x^n, E_y^n, H_z^n de los campos en los puntos correspondientes del dominio de cómputo, el algoritmo del método LOD-FDTD sigue los siguientes pasos en cada iteración temporal:

- Cálculo de RHS_{j+1}^n con (3.24), y resolución de n_y sistemas tridiagonales como (3.23) para el cálculo de E_y^{n+1} en todos los puntos del mallado. Utilizando para los puntos del borde las condiciones de contorno (3.21).
- Cálculo de $H_z^{n+1/2}$ mediante (3.18b).
- Cálculo de $RHS_{i+1/2}^{n+1/2}$ con (3.27), y resolución de n_x sistemas tridiagonales como (3.26) para el cálculo de E_x^{n+1} en todos los puntos del mallado. Utilizando para los puntos del borde las condiciones de contorno (3.21).
- Cálculo de H_z^{n+1} mediante (3.20b).

Una vez obtenidos los valores $E_x^{n+1}, E_y^{n+1}, H_z^{n+1}$, comenzamos una nueva iteración temporal repitiendo los pasos anteriores. Repetimos el proceso hasta llegar al tiempo final establecido. El diagrama de flujo se muestra en la Figura 3.1.

3.10. Fuentes o excitación de los campos

Hemos visto en las secciones anteriores, los esquemas en diferencias, en particular el método LOD-FDTD, permiten obtener los valores del campo electromagnético en los nodos de la malla en un instante, a partir de los mismos en instantes anteriores. Para ello, es necesario introducir una excitación en uno o varios puntos de la malla. La excitación implementada se caracteriza tanto por su distribución espacial, los puntos del dominio de cómputo donde se introduce dicha excitación, así como por su variación temporal. Los tipos de fuente que se han desarrollado en este trabajo son los que se describen a continuación.

3.10.1. Dependencia temporal de la excitación

Se han implementado fuentes con dos tipos de dependencia temporal:

- **Sinusoidal:** La fuente sinusoidal es una función seno que en cada iteración temporal toma el valor

$$h^n \equiv h(n\Delta_t) = A \sin(\omega_0 n\Delta_t + \phi_0),$$

donde A es la amplitud, ϕ_0 es el desfase inicial y ω_0 la frecuencia angular.

- **Gaussiana modulada en frecuencia:** La expresión de un pulso gaussiano con modulación en frecuencia tiene la forma

$$h^n \equiv h(n\Delta_t) = A e^{-[\alpha(n-n_0)\Delta_t]^2} \sin(\omega_0 n\Delta_t + \phi_0),$$

donde tomamos $t_0 = n_0\Delta_t$, y los parámetros α y n_0 , que caracterizan al pulso gaussiano, se definen por

$$\alpha = \frac{\pi f_c}{\sqrt{\ln 10^{A_t/20}}}, \quad n_0 = \frac{\sqrt{\ln 10^{A_t/20}}}{\alpha \Delta_t},$$

donde A_f y A_t son la amplitud máxima de la gaussiana en frecuencia y en tiempo, respectivamente. La transformada de Fourier de un pulso gaussiano modulado en frecuencia es otra gaussiana centrada en f_0 , dada por $|H(f)| = e^{-(\pi f/\alpha)^2}$.

3.10.2. Distribución espacial de las fuentes

Atendiendo a su distribución espacial, hemos implementado los siguientes tipos de fuentes:

- **Fuente puntual:** En un punto del dominio de cómputo $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$, introducimos una excitación, que puede ser sinusoidal o gaussiana. Suponiendo que estamos en un medio isótropo y homogéneo, la propagación de dicha fuente puntual originará un frente de onda cilíndrico.
- **Frente de onda plano:** Para conseguir un frente de onda plano en el dominio de cómputo, es necesario introducir excitaciones puntuales a lo largo de una de las direcciones marcadas por los ejes cartesianos. De esta manera, el campo se propaga en la dirección perpendicular. Todos los puntos de un plano perpendicular a la dirección de propagación tendrán la misma fase.
- **Fuente Modal:** En este trabajo simularemos la propagación del modo TM₁ en una guía de onda de placas plano-paralelas. Para conseguir la propagación de un modo TM_{*n*} debemos excitar dicho modo a través de una fuente modal cuyo patrón espacial será el de los modos TM_{*n*} en una guía de onda de placas plano-paralelas [12].

3.11. Propiedades numéricas del método TE_z-LOD-FDTD

El método FDTD convencional es un esquema ampliamente utilizado en electrodinámica computacional, y por lo tanto, es también un método muy desarrollado. Como hemos visto en el Capítulo 2, el esquema FDTD convencional es condicionalmente estable, el tamaño del paso temporal está condicionado por el parámetro de Courant (2.32). Por su parte, los métodos

implícitos como el de Crank-Nicolson (CN) son incondicionalmente estables, evitando así las limitaciones impuestas por el parámetro de Courant. No obstante, el esquema CN requiere resolver una matriz dispersa muy grande en cada iteración, por lo que no resulta útil en la mayoría de problemas prácticos, a pesar de tener una gran precisión.

La principal ventaja de los métodos de pasos fraccionados es que reducen el coste computacional (basta resolver matrices tridiagonales) requerido por esquemas como el de CN sin renunciar a la estabilidad incondicional.

Las propiedades numéricas fundamentales del método LOD-FDTD son las siguientes:

- El método LOD-FDTD es incondicionalmente estable [8]. Aplicando el método de Von Neumann puede demostrarse que el esquema no está sujeto a una condición de estabilidad como el método FDTD convencional.
- Requiere de un costo computacional bajo. Tal como hemos podido comprobar a lo largo de este capítulo, la implementación del esquema LOD-FDTD requiere de la resolución de dos sistemas de ecuaciones de matriz tridiagonal en cada iteración temporal. Este hecho hace que el costo computacional del método sea notablemente menor que el del método de CN.
- El método LOD-FDTD es un método de primer orden en el tiempo, es decir, se comporta como $O(\Delta_t)$. Sustituyendo una solución exacta en las ecuaciones discretizadas resultantes de cada método, y expandiendo en serie de Taylor, se obtiene la expresión del error de truncamiento [9]. El resultado es que el error de truncamiento del método CN depende del cuadrado del paso temporal, $(\Delta_t)^2$, y del tamaño de las celdas espaciales, $(\Delta_\xi)^2$, multiplicado por la derivada tercera de los campos respecto del tiempo y de las componentes espaciales, respectivamente. Mientras, para el método LOD-FDTD, se obtiene que el error de truncamiento de este esquema añade al obtenido para CN un término adicional que depende del paso temporal (Δ_t) (el esquema LOD es una perturbación de CN de orden $O(\Delta_t)$), y de las derivadas espaciales de los campos. Este término de error será dominante, por tanto, en aquellas regiones donde la variación espacial de los campos sea acusada. Por ejemplo, en torno a singularidades asociadas con esquinas o zonas cercanas a fuentes de campo.
- El método TE_z-LOD-FDTD presenta una relación de dispersión numérica dada por [10]

$$-\left(\frac{Z-1}{Z+1}\right) = \frac{\Delta_t^2 K_x^2}{\mu\epsilon_y} + \frac{\Delta_t^2 K_y^2}{\mu\epsilon_x} + \frac{\Delta_t^2 K_x^2}{\mu\epsilon_y} \frac{\Delta_t^2 K_y^2}{\mu\epsilon_x},$$

donde

$$K_\xi = \frac{1}{\Delta_\xi} \text{sen} \left(\frac{k_\xi \Delta_\xi}{2} \right), \text{ para } \xi = x, y,$$

y k_ξ es el número de onda numérico en la dirección ξ . Como se puede ver en [11], la relación de dispersión numérica es la misma para los esquemas LOD-FDTD y ADI-FDTD. No obstante, debemos tener en cuenta que estos métodos no pueden tratarse de manera equivalente para resolver problemas de electrodinámica computacional. Algunas diferencias significativas entre ellos son, por ejemplo, que el método LOD-FDTD presenta un menor coste de tiempo de CPU. Además, este presenta un término en el *splitting error* de orden $O(\Delta_t)$, que no aparece en los esquemas CN y ADI-FDTD.

Capítulo 4

Resultados

En los capítulos anteriores hemos desarrollado la formulación de un esquema LOD-FDTD para ondas con polarización TE_z . A continuación hemos programado dicho algoritmo en MATLAB[®] implementando de esta forma un simulador electromagnético bidimensional para ondas con la polarización mencionada.

En este capítulo presentaremos una serie de resultados obtenidos con dicho simulador y cuyo objetivo fundamental es validar la formulación desarrollada, así como el código LOD-FDTD implementado en MATLAB[®]. Para ello utilizaremos nuestro simulador para visualizar distintos fenómenos de la propagación de ondas electromagnéticas con polarización TE_z y resolveremos algún problema que presente solución analítica. De esta forma podremos comparar los resultados y evaluar la exactitud del algoritmo implementado. En particular, vamos a simular la propagación del modo TM_1 en una guía de ondas de placas plano-paralelas en la que incorporamos una región de material dieléctrico. Calcularemos teórica y numéricamente los coeficientes de reflexión y transmisión del campo en la superficie de separación entre los materiales de diferente permitividad eléctrica.

4.1. Propagación de una onda cilíndrica en vacío.

Comenzamos simulando la propagación de una onda cilíndrica en vacío. Para ello consideramos un dominio de cómputo cuadrado en el plano xy caracterizado por una permitividad $\varepsilon = \varepsilon_0$. En el centro del dominio se ha introducido una fuente puntual sinusoidal, de frecuencia $f_0 = 10$ GHz y amplitud $A = 10$. Para simular nuestro problema tomamos una discretización espacial que tenga, como mínimo, un número $N_\lambda = 20$ de celdas por longitud de onda. Por lo tanto, considerando un mallado con celdas cuadradas, el tamaño de la celda $\Delta_x = \Delta_y$ que elegiremos vendrá dado por

$$\Delta_x = \Delta_y = \frac{\lambda}{N_\lambda} = \frac{c}{f_0 N_\lambda} = 0,015 \text{ m.}$$

El paso temporal que empleado fue $\Delta_t = 70,71$ ps, lo que se corresponde a 2 veces el máximo permitido por la condición de estabilidad de Courant ($s = 2$), mostrando así la estabilidad incondicional del esquema LOD-FDTD implementado. El dominio de simulación empleado fue de $400\Delta_x \times 400\Delta_y$. En la Figura 4.1 se muestra la componente H_z en el instante temporal $t = 125\Delta_t$.

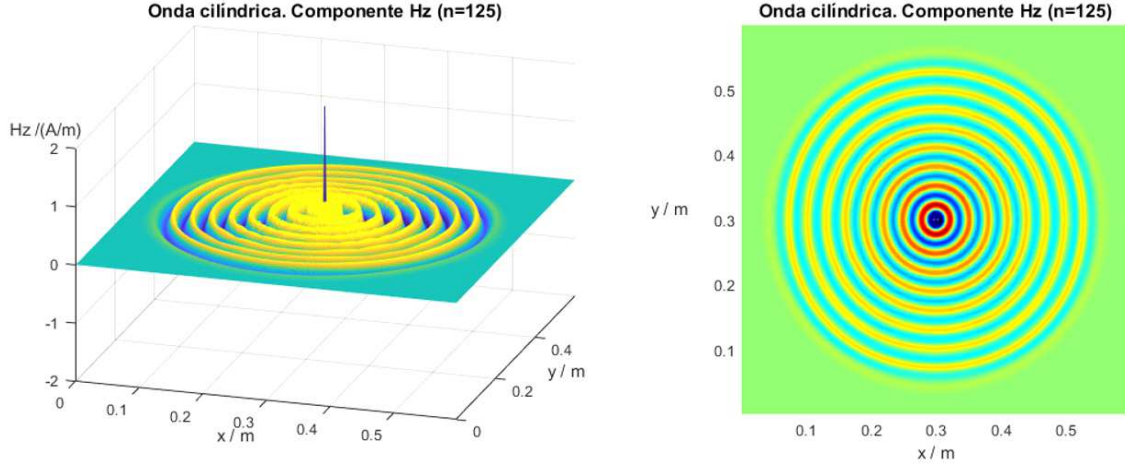


Figura 4.1: Onda cilíndrica propagándose en vacío. Excitación mediante una fuente puntual sinusoidal en el centro del dominio de simulación.

4.2. Incidencia de una onda plana en una región dieléctrica

En un segundo experimento numérico hemos simulado una onda plana de componentes E_x , H_z , que viaja en la dirección $\pm x$ e incide normalmente en una región de material dieléctrico. Para ello hemos considerado un dominio de cómputo de tamaño $800\Delta_x \times 200\Delta_y$ con celdas cuadradas y se ha excitado una onda plana en el plano $x_s = 450\Delta_x$. El dieléctrico comienza en el plano $x = 600\Delta_x$ y llega hasta el final del dominio de computación. La permitividad relativa de la región dieléctrica vale $\epsilon_r = 4$. En la Figura 4.2 se presenta la geometría del problema.

Para la dependencia temporal de la fuente se ha tomado un pulso gaussiano de frecuencia central $f_0 = 10$ GHz y de ancho de banda $BW = 10$ GHz. Respecto a la discretización espacial se ha considerado, como mínimo, un número $N_\lambda = 20$ de celdas por longitud de onda, esto es, $\Delta_x = \Delta_y = \frac{\lambda_{\text{mín}}}{N_\lambda} = 0,75$ mm, siendo $\lambda_{\text{mín}} = \frac{c}{f_0 + BW} = 0,015$ m. Se ha tomado un paso temporal $\Delta_t = 3,54$ ps, de manera que el parámetro s de la condición de estabilidad de Courant tome un valor igual a $s = 2$, mostrando la estabilidad incondicional del esquema LOD-FDTD formulado.

En la Figura 4.2 se muestra el resultado obtenido, tanto en 2D como en 3D, para la componente H_z del campo magnético en el instante temporal $t = 270\Delta_t$. Observamos tres pulsos gaussianos. De izquierda a derecha encontramos, en primer lugar, el pulso emitido por la fuente que viaja en el sentido de las x negativas (el plano en el que se sitúa la fuente está representado por una línea magenta). El siguiente pulso que observamos, es el pulso reflejado en la superficie de separación entre el vacío y el dieléctrico. Por último, encontramos el pulso transmitido que se propaga en la región dieléctrica en el sentido de las x positivas.

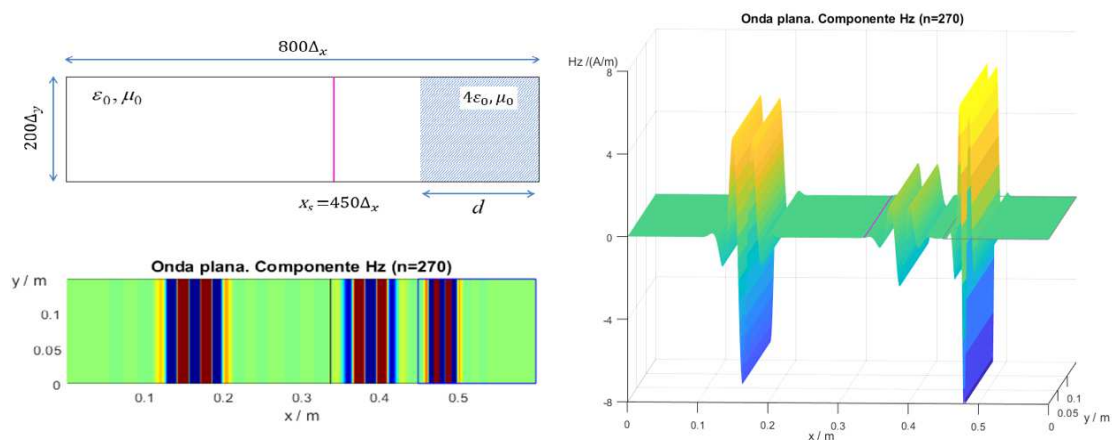


Figura 4.2: Propagación de un pulso de onda plana. Reflexión y transmisión en un material dieléctrico. La excitación se sitúa en el plano $x_s = 450\Delta_x$ y la región dieléctrica comienza en el plano $x_d = 600\Delta_x$.

4.3. Propagación del modo TM_1 en una guía de placas plano-paralelas.

Una guía de ondas es una estructura física que transmite ondas electromagnéticas. El medio dieléctrico en el que esta propagación se produce está limitado, ya sea por un material conductor (microondas y radiofrecuencia) o por otro dieléctrico (para frecuencias ópticas). En función de su geometría, existe una gran variedad de guías de onda que permiten la propagación de ondas electromagnéticas en diferentes configuraciones, llamadas modos de propagación [12]. Las guías de ondas que consisten en dos o más conductores, pueden propagar el *modo transversal electromagnético* (TEM), caracterizado por la ausencia de componentes tanto magnética como eléctrica en la dirección de propagación del campo. También soportan la propagación de los modos *transversal eléctrico* (TE) y *transversal magnético* (TM), caracterizados por la ausencia de componente longitudinal eléctrica y magnética, respectivamente.

En este trabajo, vamos a simular la propagación de los modos TEM y TM en una guía de placas plano-paralelas cuya geometría se muestra en la Figura 4.3. Idealmente, las placas están separadas una distancia d , muy pequeña en comparación con su anchura, w , de manera que se pueden despreciar efectos de borde, así como cualquier variación en la dirección z . De la resolución de las ecuaciones de Maxwell para la propagación del modo TM, resulta que existen infinitos modos transversal magnéticos que puede propagar en nuestra guía de ondas. Cada uno de ellos se denota con TM_n , donde el subíndice n es un entero que designa el número de medias longitudes de onda entre las paredes de la guía en dirección y , en particular, el modo TM_0 coincide con el modo TEM. Cada modo de propagación TM_n tiene una frecuencia de corte f_c , determinada por la geometría de la guía, a partir de la cual se puede propagar y que viene dada por

$$f_c = \frac{nc}{2d} \quad n = 1, 2, \dots, n. \quad (4.1)$$

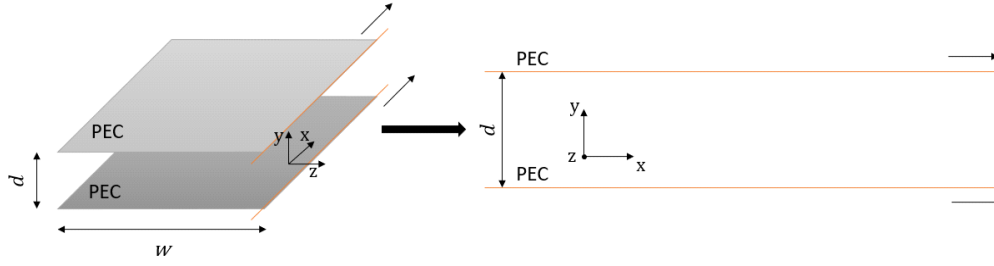


Figura 4.3: Correspondencia del problema de propagación de los modos TM_n en una guía de onda de placas plano-paralelas con la polarización TE_z en dos dimensiones.

En general, la propagación de una onda electromagnética en una guía de ondas es un problema en tres dimensiones. Sin embargo, en el caso de los modos TM_n en una guía de placas plano-paralelas, las componentes del campo no presentan dependencia con la dirección z . Esto hace que el problema se reduzca a dos dimensiones que se corresponden con la sección longitudinal de la guía. En la Figura 4.3, podemos visualizar la geometría del problema, y cómo los modos TM_n (que presentan un campo magnético \vec{H} transversal a la dirección de propagación x) pueden resolverse empleando el algoritmo LOD-FDTD en dos dimensiones para polarización TE_z (que presenta un campo eléctrico \vec{E} transversal al eje z) que hemos implementado.

A continuación, vamos a simular la propagación del modo TM_1 en una guía de placas plano-paralelas vacía. Para ello consideramos un dominio de cómputo de tamaño $1000\Delta_x \times 40\Delta_y$ con celdas rectangulares e introducimos una fuente modal, en el plano medio $x_s = 500\Delta_x$ que excita el modo TM_1 del campo. La excitación tiene una frecuencia central $f_0 = 10$ GHz y un ancho de banda $BW = 3$ GHz. En la dirección y se han considerado celdas de tamaño $\Delta_y = \frac{d}{40} = 0,625$ mm, siendo $d = 25$ mm la distancia de separación entre las placas. En la dirección de propagación x el tamaño de las celdas es $\Delta_x = \frac{\lambda_{g\text{mín}}}{N_\lambda} = 0,59$ mm, siendo $N_\lambda = 20$ el número mínimo de celdas por longitud de onda. La menor longitud de onda que se propaga en la guía [12] viene dada por

$$\lambda_{g\text{mín}} = \frac{2\pi}{\beta_{\text{máx}}} \quad (4.2)$$

donde $\beta_{\text{máx}}$ es el valor máximo, para el rango de frecuencias considerado, de la constante de fase en la guía

$$\beta_{\text{máx}} = \sqrt{k_{\text{máx}}^2 - \left(\frac{\pi}{d}\right)^2}$$

siendo $k_{\text{máx}} = 2\pi f_{\text{máx}} \sqrt{\varepsilon\mu_0}$ y $f_{\text{máx}} = f_0 + BW$.

De nuevo, el paso temporal Δ_t se ha tomado de manera que $\Delta_t = 2,87$ ps, lo que se corresponde a 2 veces el máximo permitido por la condición de estabilidad de Courant ($s = 2$).

Nótese que en los contornos de nuestro dominio de computación tenemos implementada la condición de PEC, de manera que los planos $y = 0$ e $y = 40\Delta_y$ se corresponden con las placas conductoras de la guía y los planos $x = 0$ y $x = 1000\Delta_x$ se han alejado lo suficiente del plano donde se introduce la fuente para evitar reflexiones indeseadas.

En la Figura 4.4 se representa el resultado obtenido para las componentes H_z , E_x y E_y del campo en el instante temporal $t = 625\Delta_t$. En ella podemos ver la dependencia espacial de las

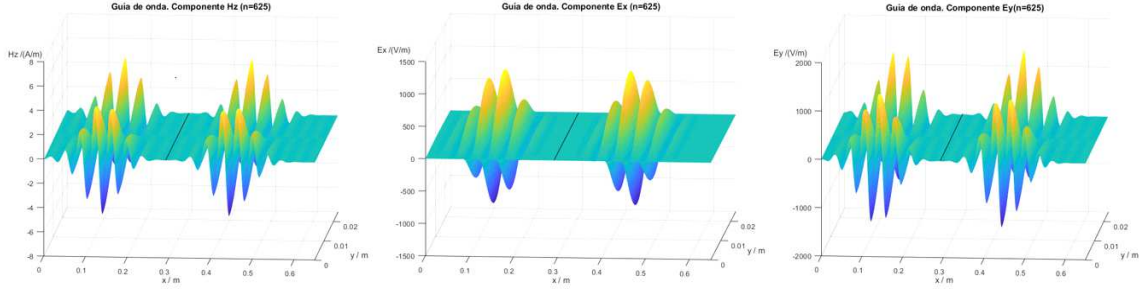


Figura 4.4: Propagación de las componentes E_x , E_y y H_z del campo en una guía de onda rectangular.

componentes del campo electromagnético para el modo TM_1 . Las placas conductoras de la guía de planos-paralelos se corresponden con los planos $y = 0$ e $y = 40\Delta_y$. Se observa cómo, en dichos planos, la componente tangencial del campo eléctrico, E_x , se anula para cumplir las condiciones de contorno en un PEC.

4.4. Guía de placas plano-paralelas en corte. Campo evanescente.

En el siguiente problema que hemos resuelto se ha considerado nuevamente el modo TM_1 de una guía de placas plano-paralelas separadas una distancia $d = 25$ mm. En este caso se ha simulado una señal sinusoidal que se propaga por una región de la guía rellena de material dieléctrico y que incide en una región vacía que se encuentra en corte para la frecuencia de nuestra señal. Para ello hemos tomado un dominio de cómputo de tamaño $620\Delta_x \times 35\Delta_y$ con celdas rectangulares. La región dieléctrica comienza en $x = 0$ y llega hasta el plano $x_d = 500\Delta_x$ y está caracterizada por una permitividad relativa $\varepsilon_r = 5$. En la Figura 4.5 se presenta la geometría del problema.

La fuente modal que excita el modo TM_1 se introduce en el plano $x_s = 380\Delta_x$. La dependencia temporal de la fuente es una senoide de frecuencia $f_0 = 4$ GHz. Para la región dieléctrica la frecuencia de corte del modo TM_1 es 2.68 GHz, mientras que en la zona de vacío la frecuencia de corte dada por (4.1) vale 5.99 GHz. Por ello, nuestra señal puede propagarse en la región dieléctrica pero no en la zona de vacío.

Respecto a la discretización espacial, en la dirección y se consideraron celdas de tamaño $\Delta_y = \frac{d}{15} = 1,7$ mm, siendo d la distancia de separación entre las placas. En la dirección de propagación x , el tamaño de las celdas es de $\Delta_x = \frac{\lambda_g}{N_\lambda} = 1,3$ mm siendo $N_\lambda = 35$ el número mínimo de celdas por longitud de onda. La longitud de onda en la guía vale $\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta}$, donde β es el valor de la constante de fase del modo TM_1 en la región de dieléctrico

$$\beta_{\text{máx}} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{d}\right)^2}$$

siendo $k = 2\pi f_0 \sqrt{\varepsilon\mu_0}$.

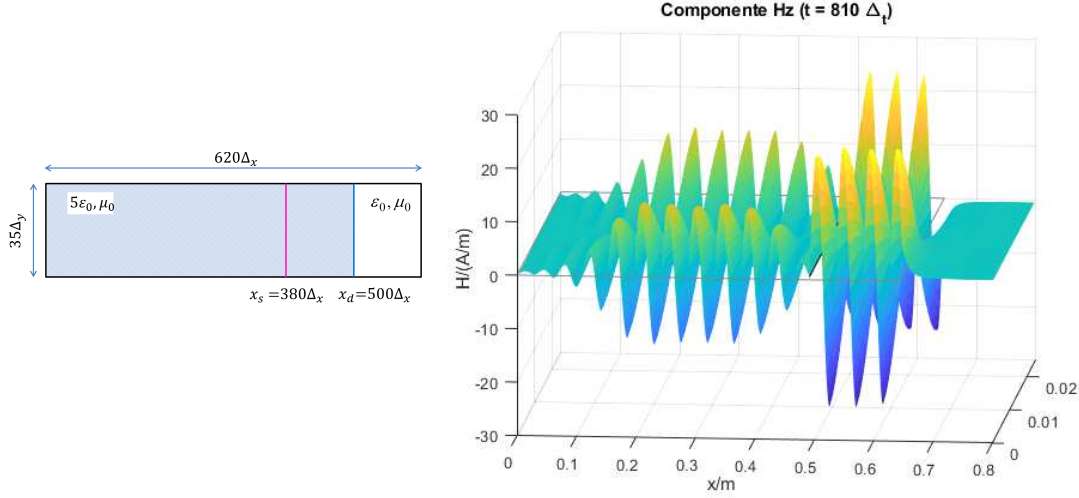


Figura 4.5: Incidencia de la componente H_z de una señal sinusoidal, que se propaga en una región de la guía rellena de dieléctrico, sobre una región vacía para la que se encuentra en corte. Campo evanescente.

El paso temporal Δ_t se ha tomado de manera que $\Delta_t = 5,105$ ps, lo que se corresponde a 1.5 veces el máximo permitido por la condición de estabilidad de Courant ($s = 1,5$).

Igual que en las simulaciones anteriores, en los contornos de nuestro dominio de computación tenemos implementada la condición de PEC, de manera que los planos $y = 0$ y $y = 35\Delta_y$ se corresponden con las placas conductoras de la guía y los planos $x = 0$ y $x = 620\Delta_x$ se han alejado lo suficiente del plano donde se introduce la fuente para evitar reflexiones indeseadas.

En la Figura 4.5 se representa el resultado obtenido para la componente H_z del campo en el instante temporal $t = 810\Delta_t$. En la figura podemos distinguir una primera región ($0 < x < x_s$) en la que tenemos una onda sinusoidal que se propaga viajando en el sentido de las x negativas. En la zona comprendida entre los planos $x_s < x < x_d$, esto es, entre el plano de la fuente y la interfaz entre los medios, observamos una onda estacionaria formada por la superposición de la onda que viaja en el sentido de las x positivas y la que se refleja en la interfaz ($x = x_d$) y viaja en sentido de las x negativas y, por último, en la región de vacío ($x > x_d$), observamos un campo evanescente que decae exponencialmente ya que en esa región el modo TM_1 se encuentra en corte.

4.5. Guía de placas plano-paralelas cargada con un dieléctrico. Cálculo de los coeficientes de transmisión y reflexión.

Finalmente, con el objetivo de evaluar la exactitud del algoritmo LOD-FDTD implementado, vamos a simular la propagación del modo TM_1 en una guía de placas plano-paralelas que incide en una región de material dieléctrico. Calculemos el coeficiente de reflexión y el de transmisión exacto [12] y los compararemos con los coeficientes numéricos obtenidos mediante la simulación con el algoritmo LOD-FDTD desarrollado en este trabajo.

La Figura 4.7 muestra la geometría 2D del problema a simular. La guía de onda está

parcialmente llena de material dieléctrico de permitividad $\varepsilon_r = 4$. Hemos consideramos un dominio de cómputo de tamaño $2000\Delta_x \times 20\Delta_y$ con celdas rectangulares y hemos introducimos una fuente modal, en el plano $x_s = 950\Delta_x$ que excita el modo TM_1 del campo. La excitación tiene una frecuencia central $f_0 = 10$ GHz y un ancho de banda $BW = 3$ GHz. En la dirección y se consideraron celdas de tamaño $\Delta_y = \frac{d}{20} = 1,25$ mm, siendo $d = 25$ mm la distancia de separación entre las placas. En la dirección de propagación x el tamaño de las celdas fue $\Delta_x = \frac{\lambda_{g\min}}{N_\lambda} = 0,29$ mm, siendo $N_\lambda = 40$ el número mínimo de celdas por longitud de onda. La menor longitud de onda que se propaga en la guía viene dada por (4.2).

El paso temporal Δ_t se ha tomado de manera que $\Delta_t = 3,85$ ps, lo que se corresponde a 4 veces el máximo permitido por la condición de estabilidad de Courant ($s = 4$).

Cálculo de los coeficientes de transmisión y reflexión numéricos

Los coeficientes de reflexión y transmisión son funciones de la frecuencia y vienen dados por

$$\Gamma = \frac{E_{ref}(\omega)}{E_{inc}(\omega)}; \quad T = \frac{E_{trans}(\omega)}{E_{inc}(\omega)}.$$

Una de las ventajas que presentan los métodos numéricos formulados en el dominio del tiempo -entre los que se encuentra LOD-FDTD- frente a los que trabajan en el dominio de la frecuencia es que nos van a permitir calcular estos coeficientes de reflexión y transmisión mediante una única simulación. Para ello debemos excitar el circuito mediante una señal cuyo espectro se encuentre en el rango de frecuencias de interés y almacenar la respuesta del sistema ante dicha excitación.

Para calcular los coeficientes de reflexión y transmisión es necesario conocer la excitación introducida, esto es, el campo incidente en el dieléctrico, y la respuesta del sistema a esta excitación. Para la obtención de estas dos secuencias temporales es necesario realizar dos simulaciones. En la primera simulación, cuya geometría se muestra en la Figura 4.6, consideramos nuestra guía de onda vacía, sin la región dieléctrica, y muestreamos la componente de campo E_y en el punto z_1 de coordenadas $(996\Delta_x, 5\Delta_y)$. De esta forma obtenemos la secuencia temporal del campo incidente E_{inc}^n en dicho punto. En la segunda simulación consideramos la estructura completa, con la región dieléctrica, como se muestra en la Figura 4.6. Muestreando de nuevo el campo en el punto z_1 obtenemos la secuencia temporal del campo total E_{total}^n , con lo que el campo reflejado en el punto z_1 podemos obtenerlo considerando $E_{ref}^n = E_{total}^n - E_{inc}^n$.

En esta segunda simulación almacenamos también los valores de la componente E_y en el punto z_2 de coordenadas $(1004\Delta_x, 5\Delta_y)$. Esta secuencia de valores se corresponde con el campo transmitido E_{trans}^n . Es importante destacar que ambas simulaciones han de realizarse en las mismas condiciones, es decir todos los parámetros de ambas simulaciones deben ser idénticos. Así en ambos casos la excitación se introduce en los puntos de la recta $x_s = 950\Delta_x$, el tamaño de celda espacial es $\Delta_y = 1,25$ mm y $\Delta_x = 0,29$ mm. El paso temporal es $\Delta_t = 3,85$ ps ($s=4$).

El siguiente paso es obtener las componentes frecuenciales de las secuencias temporales muestreadas. Así, empleando la transformada discreta de Fourier (DFT) podemos llegar a obtener los coeficientes de reflexión y transmisión numéricos

$$\Gamma|_{z_1} = \frac{\text{DFT}(E_{ref}^n)|_{z_1}}{\text{DFT}(E_{inc}^n)|_{z_1}}, \quad T|_{z_1, z_2} = \frac{\text{DFT}(E_{trans}^n)|_{z_2}}{\text{DFT}(E_{inc}^n)|_{z_1}}.$$

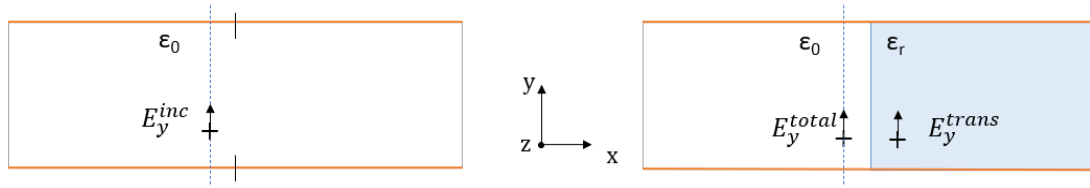


Figura 4.6: Cálculo de los coeficientes de reflexión y transmisión numéricos para la componente E_y por una lámina dieléctrica en una guía de ondas rectangular.

La Figura 4.7 muestra, los coeficientes de reflexión y transmisión teóricos [12] así como los obtenidos mediante nuestra simulación LOD-FDTD ($s = 4$). Se observa que existe un buen acuerdo entre los resultados obtenidos de la simulación y la solución analítica.

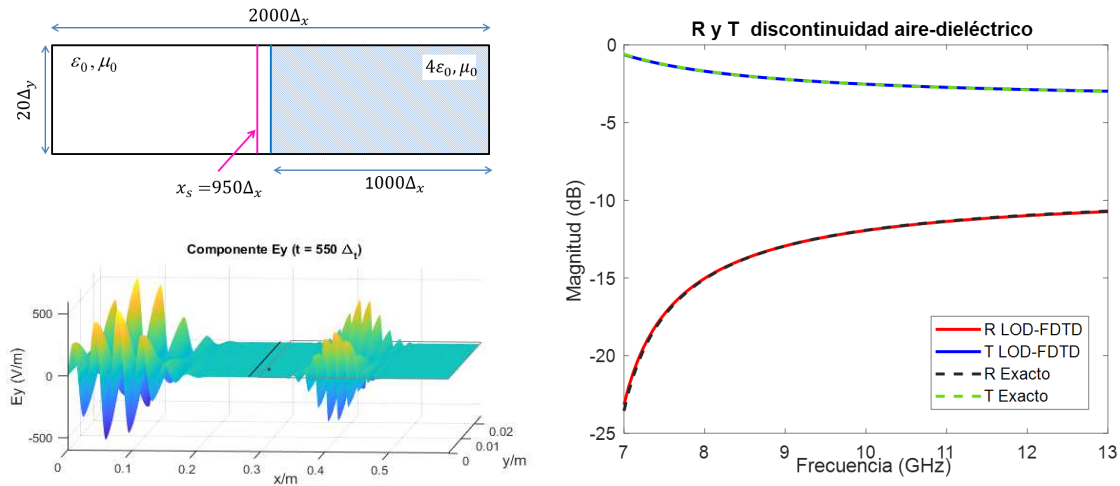


Figura 4.7: Discontinuidad en una guía de placas plano-paralelas. Geometría del problema y coeficientes de reflexión y transmisión (exactos y numéricos) en la interfaz con una región dieléctrica en un rango de frecuencias entre 7 y 13 GHz.

Es importante destacar que, para obtener un buen resultado, debemos utilizar una guía lo suficientemente larga, de manera que el campo reflejado en las paredes del dominio de cómputo sea mínimo (este problema desaparecería con condiciones de contorno absorbentes).

Capítulo 5

Conclusiones y líneas futuras

Entre las principales conclusiones de este trabajo podemos encontrar las siguientes:

- Se han tomado las ecuaciones de Maxwell como punto de partida para la resolución de problemas de propagación para ondas TE_z del campo electromagnético. Tras el estudio de los métodos numéricos de diferencias finitas, desde las ideas matemáticas fundamentales, se han discretizado las ecuaciones según el esquema FDTD introducido por Yee.
- A través del estudio de las propiedades numéricas se han descrito las ventajas que presenta el método FDTD, entre las que destacan el bajo costo computacional que requiere, recordemos que es un método explícito, y la sencillez de su adaptación a una gran variedad de problemas de electrodinámica computacional. También se ha dado cuenta del principal inconveniente que presenta su implementación: es un método condicionalmente estable, en el que el tamaño del paso temporal que podemos considerar está limitado por la condición de Courant, lo que da lugar a largos tiempos de ejecución para simular problemas que requieran gran resolución espacial (un mallado muy fino) o que presenten factores de calidad Q muy altos.
- En este trabajo se presenta el método implícito LOD-FDTD como un esquema que permite solucionar la estabilidad condicional del esquema FDTD. Se ha llevado a cabo la discretización de las ecuaciones de Maxwell para la propagación de ondas TE_z según el esquema LOD-FDTD, y se han incorporado a la formulación del método tanto las condiciones de contorno de conductor eléctrico perfecto (PEC), como las fuentes o excitaciones en el dominio de cómputo.
- Finalmente, se ha programado la formulación del método LOD-FDTD en MATLAB[®], desarrollando de este modo un simulador electromagnético en 2D para ondas TE_z . A través de diferentes experimentos numéricos se ha comprobado cualitativa y cuantitativamente el correcto funcionamiento de nuestro código, así como la estabilidad incondicional del esquema formulado.

Algunas de las líneas futuras dentro del campo de la electrodinámica computacional en el que se encuadra este trabajo son:

- Implementación de condiciones de contorno absorbentes que permitan aplicar el esquema LOD-FDTD a una mayor variedad de problemas que, en particular, requieran la simulación de la propagación de ondas electromagnéticas en regiones abiertas del espacio. Evitando así la necesidad de tomar un dominio de cómputo excesivamente grande con el fin de evitar la reflexión en las paredes del PEC.
- Formulación del esquema LOD-FDTD para la simulación de la interacción y propagación de ondas electromagnéticas en distintos tipos de medios materiales, como pueden ser medios anisótropos, medios con pérdidas, medios dispersivos, etc.

Bibliografía

- [1] S. Yee, “Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell’s equations in isotropic media” *IEEE Trans. Antennas Propagat*, Vol 14, pp. 302–307, 1966.
- [2] A. Taflove and S. C. Hagness, “Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method”. *Artech House, Boston and London*, Third Edition, 2005.
- [3] T. Namiki, “A New FDTD Algorithm Based on Alternating Direction Implicit Method” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol 47, pp. 2003–2007, 1999.
- [4] Roald K. Wangsness, “Campos Electromagnéticos”. *Limusa*, México 1996.
- [5] O. González Rodríguez, “Extensión del Método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo para el Estudio de Estructuras Híbridas de Microondas Incluyendo Circuitos Concentrados Activos y Pasivos”. *Tesis doctoral*. Universidad de Cantabria, 2008.
- [6] J. C. Strikwerda, “Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations, 2nd Ed.”. *SIAM Philadelphia*, 2004.
- [7] G. Sun, and C. W. Trueman, “Approximate Crank–Nicolson Schemes for the 2-D Finite-Difference Time-Domain Method for TEz Waves” *IEEE Trans. Antennas Propagat*, Vol 52, pp. 2963–2972, 2004.
- [8] Q. F. Liu, Z. Chen, and W. Y. Yin, “An arbitrary-order LOD-FDTD method and its stability and numerical dispersion” *IEEE Trans. Antennas Propagat*, Vol. 57, pp. 2409–2417, 2009.
- [9] J. A. Pereda, and A. Grande, “Numerical Dispersion Relation for the 2D LOD-FDTD Method in Lossy Media” *IEEE Antennas Wireless Propagat*, Vol. 16, pp. 2122–2125, 2017.
- [10] A. Grande, and J. A. Pereda, “Accuracy Limitations of the Locally One-Dimensional FDTD technique” *IEEE Antennas Wireless Propagat*, Vol. 13, pp. 1180–1183, 2014.
- [11] J. A. Pereda, A. Grande, O. González, and A. Vegas, “The ADI-FDTD method for the transverse-magnetic waves in lossy materials” *IEEE Trans. Antennas Propagat*, Vol. 57, pp. 2047–2054, 2009.
- [12] D. M. Pozar, “Microwave engineering”. *John wiley & sons*, 2011.

Glosario de acrónimos

FD	Método de Diferencias Finitas.
FDTD	Método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (del inglés Finite Difference Time Domain).
TE _z	Modo Transversal Eléctrico respectode z .
TM _z	Modo Transversal Magnético respectode z .
CFL	Condición de estabilidad de Courant-Friedrichs-Lewy.
MOL	Método de líneas.
CN	Crank-Nicolson.
LOD-FDTD	Del inglés Locally One Dimensional Finite Difference Time Domain.
ADI-FDTD	Del inglés Alternating Direction Implicit Method.
PEC	Conductor Eléctrico Perfecto.
TEM	Modo Transversal Electromagnético.
TM	Modo Transversal Magnético.
TE	Modo Transversal Eléctrico.
BW	Ancho de Banda (del inglés <i>Band-Width</i>).