



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Grafos de aristas

Autora: Silvia López Pardo

Tutor: Antonio Campillo López

28 Septiembre 2023

Índice general

Introducción	5
1. Conceptos básicos	7
1.1. Definiciones previas	7
1.2. Primeras propiedades	8
2. Caracterización e isomorfismos	11
2.1. Caracterización de los grafos de aristas	11
2.2. Isomorfismos de grafos de aristas	17
3. Algunas familias de grafos de aristas	21
3.1. Caminos y estrellas	21
3.2. Ciclos	21
3.3. Árboles	22
3.4. Grafos completos K_n	23
3.5. Grafos bipartitos completos $K_{r,s}$	24
4. Grafos de aristas iterados	27
4.1. Resultados auxiliares	27
4.2. Estudio de algunos parámetros	31
5. Espectro de los grafos de aristas	41
6. Transitabilidad	45
6.1. Grafos eulerianos y grafos de aristas	45
6.2. Grafos hamiltonianos y grafos de aristas	47
7. Colorabilidad	51
7.1. Número e índice cromático	51
7.2. Polinomio cromático	55
Bibliografía	59

Introducción

La Teoría de Grafos es una de las áreas de las Matemáticas más extensas a día de hoy, debido a su utilidad en áreas tan diversas como Informática, Química, Economía o incluso Lingüística. El objetivo de este Trabajo Fin de Grado es el estudio de los grafos de aristas (*line graphs* en inglés, aunque también se pueden denominar con otros términos como *derived graphs* o *interchange graph*), obtenidos a partir de un grafo dado mediante una sencilla transformación: cambiando sus aristas por vértices, y haciendo que dos vértices estén unidos por una arista si las aristas correspondientes del grafo original correspondientes a dichos vértices tienen un vértice en común.

Los grafos de aristas comenzaron a ser estudiados a partir de mediados del siglo XX. Dos de los grandes precursores del desarrollo de esta teoría son L. W. Beineke (1939, Estados Unidos) y H. Whitney (1907-1989, Estados Unidos), autores de los principales resultados enunciados en este trabajo. El primero de ellos probó una elegante caracterización de estos grafos mediante una serie de equivalencias, conocida como el Teorema de Beineke. En una de dichas equivalencias surge de forma natural una lista de "grafos prohibidos", un conjunto de grafos que no pueden formar parte como subgrafo inducido del grafo original a partir del cual queremos calcular su grafo de aristas. Por otra parte, una de las mayores aportaciones de Whitney en este campo es su famoso Teorema de isomorfismo de grafos de aristas (o Teorema de Whitney): es trivial probar que si dos grafos son isomorfos, entonces sus grafos de aristas también lo son, pero en dicho teorema se prueba que los únicos dos grafos no isomorfos cuyos grafos de aristas sí son isomorfos son $K_{1,3}$ y K_3 .

En esta Memoria se abordarán distintos problemas de la Teoría de Grafos aplicados al caso particular de los grafos de aristas, además de los Teoremas de Beineke y Whitney previamente mencionados, y siempre de la manera más autocontenida posible. Algunos de estos problemas incluyen la descripción de los grafos de aristas de algunas familias concretas, el comportamiento de estos grafos al iterar, el rango de los autovalores de dichos grafos, la relación entre grafos eulerianos y hamiltonianos con los grafos de aristas, y los cálculos del número, índice y polinomio cromático para este conjunto de grafos.

En el primer capítulo, daremos una serie de definiciones generales sobre grafos que se usarán durante todo el trabajo, para a continuación enunciar algunas

propiedades básicas sobre los grafos de aristas. En el segundo capítulo demostraremos los Teoremas de Beineke y Whitney, que proporcionan respectivamente la caracterización de los grafos que son de aristas, y la prueba de que cualquier grafo se puede recuperar (salvo la excepción mencionada) a partir de su grafo de aristas.

En los dos siguientes capítulos, daremos propiedades generales de la teoría. En el tercer capítulo detallaremos los grafos de aristas de algunas familias comunes de grafos. En el cuarto capítulo estudiaremos el comportamiento de los grafos de aristas por sucesivas iteraciones, probando, entre otros resultados, que hay una amplia familia de grafos, los grafos prolíficos, para los que tanto los números de vértices y de aristas, como los grados máximo, mínimo y promedio, tienden a infinito. Los grafos prolíficos son aquellos que son conexos, tienen un vértice de grado al menos 3 y no son $K_{1,3}$.

En los tres últimos capítulos, veremos algunas propiedades específicas de los grafos de aristas: en el quinto capítulo nos centraremos en las matrices de incidencia y los autovalores, dando cotas para estos últimos. En el sexto capítulo, probaremos que los grafos de aristas de los grafos eulerianos son a la vez eulerianos y hamiltonianos, una propiedad que tiene importantes aplicaciones técnicas. Por último, en el séptimo capítulo tendremos en cuenta que el número cromático del grafo de aristas es el índice cromático del grafo original para estudiar en detalle el número y el polinomio cromático de los grafos de aristas.

Capítulo 1

Conceptos básicos

En este capítulo vamos a presentar algunas nociones esenciales en la Teoría de Grafos, como son las definiciones de la primera sección, así como algunos resultados sencillos sobre grafos de aristas, que usaremos a lo largo de todo el trabajo. Las referencias principales de este capítulo son [1] y [3].

1.1. Definiciones previas

Comencemos dando algunas definiciones y proposiciones generales:

Definición 1.1. Un *grafo simple*, o simplemente *grafo*, consiste en un conjunto finito de puntos, llamados *vértices*, unidos por un conjunto finito de líneas, llamadas *aristas*, de forma que cada arista tiene un vértice en cada extremo. Si u y v son dos vértices, denotaremos la arista que los une por $e = uv$.

Definición 1.2. Dado v un vértice de un grafo G , el *grado* de v se define como el número de aristas que confluyen en él. Lo denotamos por $\deg(v)$.

Teorema 1.3. (Teorema del apretón de manos) Si G es un grafo con m aristas y cuyos vértices denotamos por v , entonces $\sum (\deg(v)) = 2m$, donde la suma se extiende a todos los vértices de G .

Definición 1.4. Diremos que dos aristas son *adyacentes* (o *consecutivas*) si tienen un vértice común. Diremos que dos vértices u y v son *adyacentes*, y lo denotaremos por $u \sim v$, si están unidos por una arista. Una arista y un vértice son *incidentes* si el vértice es extremo de la arista.

Definición 1.5. Un *camino* en un grafo es una sucesión de vértices y aristas $v_0, e_1, v_1, \dots, v_{t-2}, e_{t-1}, v_{t-1}$, de forma que cada arista es incidente con el vértice que le precede y el vértice que le sigue, y tal que $v_i \neq v_j$ si $i \neq j$. Lo denotaremos por P_t , siendo t el número de vértices. La *longitud* del camino es su número de aristas. Si $v_0 = v_{t-1}$, diremos que el grafo es un *ciclo*.

Definición 1.6. Un grafo es *regular* de grado d , o *d-regular*, si todos sus vértices tienen grado d . Definimos el *grado promedio* de G por $d(G) = \frac{\sum (\deg(v))}{n}$, donde n es el número de vértices del grafo. Es trivial que si un grafo es regular, entonces $\deg(v) = d(G)$ para todo v vértice de G .

Definición 1.7. Un grafo es *completo* si cada par de vértices está unido por una arista. Los denotamos por K_n , donde n es el número de vértices. Los grafos completos K_n son $(n - 1)$ -regulares.

Definición 1.8. Un grafo *bipartito* es un grafo en el que sus vértices se pueden separar en 2 conjuntos disjuntos, de forma que los vértices del mismo conjunto no están unidos entre sí por ninguna arista.

Proposición 1.9. Un grafo es bipartito si y sólo si todos sus ciclos tienen longitud par.

Definición 1.10. Un grafo *bipartito completo* es un grafo bipartito en el que cada vértice de cada uno de los 2 conjuntos está unido a todos los vértices del otro conjunto. Los denotamos por $K_{r,s}$, siendo r, s el número de vértices de cada conjunto. Un caso particular son los *grafos estrella*, $K_{1,s}$.

Esta definición se puede generalizar para grafos k -partitos completos, K_{n_1, n_2, \dots, n_k} , donde n_i es el cardinal del i -ésimo subconjunto de vértices.

Definición 1.11. Un grafo es *conexo* si cualquier par de vértices está unido por una cadena de aristas adyacentes (es decir, por un camino). Un subgrafo conexo maximal se denomina *componente conexa*, o simplemente *componente*, del grafo. Un grafo conexo de n vértices tiene $m \geq n - 1$ aristas.

Definición 1.12. Dado un grafo, un *emparejamiento* es un conjunto de aristas en el que dos aristas cualesquiera no tienen vértices en común. Un *conjunto independiente* es un conjunto de vértices en el que dos vértices cualesquiera no son adyacentes.

Definición 1.13. Un *subgrafo* de un grafo dado es otro grafo tal que todos sus vértices y aristas pertenecen al grafo original. Diremos además que es *inducido* si tiene por aristas todas las del grafo original que unen los vértices que lo componen.

Definición 1.14. Dado un grafo G , un *clique* es un subgrafo inducido completo.

Definición 1.15. Diremos que dos grafos G y H son *isomorfos*, y lo denotaremos por $G \cong H$, si existe una correspondencia biyectiva entre los vértices y entre las aristas de ambos grafos, de forma se conserve la adyacencia (y no adyacencia).

Definición 1.16. Un grafo es *plano* si se puede dibujar en un plano sin que ninguna arista se corte con otra salvo en un vértice que compartan.

1.2. Primeras propiedades

En esta sección vamos a presentar los grafos de aristas, así como algunos resultados sobre su número de vértices y de aristas y sobre el grado de sus vértices. Demos primero su definición:

Definición 1.17. Dado un grafo G , definimos su *grafo de aristas* $L(G)$ como el grafo cuyos vértices se corresponden con las aristas del grafo G , y cuyas aristas unen dos vértices de $L(G)$ si las aristas del grafo G correspondientes a estos vértices son adyacentes.



Figura 1: Ejemplo de un grafo de aristas

Definición 1.18. Llamamos *grafo raíz* (o simplemente *raíz*) de un grafo G al grafo F tal que $L(F) = G$ (si tal grafo existe).

Observación 1.19. Un grafo puede tener más de un grafo raíz. Por ejemplo, el grafo K_3 se puede construir, como grafo de aristas, a partir de $K_{1,3}$ o a partir de K_3 .

A partir del número de vértices y de aristas de un grafo, podemos calcular el número de vértices y de aristas de su grafo de aristas. De igual manera, podemos calcular los grados de los vértices de un grafo de aristas si conocemos los grados de los vértices del grafo original. Más concretamente:

Teorema 1.20. Sea G un grafo con n vértices y m aristas. Entonces

- (I) $L(G)$ tiene m vértices y $\frac{1}{2} \sum (\deg(v))^2 - m$ aristas.
- (II) El grado de un vértice $e = vw$ de $L(G)$ es $\deg(v) + \deg(w) - 2$.

Demostración. (I) Por definición, $L(G)$ tiene tantos vértices como aristas tiene G . Para ver el número de aristas, observemos que cada arista de $L(G)$ proviene de dos aristas consecutivas de G , por lo que cada vértice v de G contribuye a $\binom{\deg(v)}{2}$ aristas de $L(G)$ (si $\deg(v) = 1$, entonces $\binom{\deg(v)}{2} = 0$). Así que $L(G)$ tiene un total de

$$\begin{aligned} \sum \binom{\deg(v)}{2} &= \sum \frac{(\deg(v))(\deg(v) - 1)}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \sum (\deg(v))^2 - \frac{1}{2} \sum (\deg(v)) = \\ &= \frac{1}{2} \sum (\deg(v))^2 - m \end{aligned}$$

aristas.

(II) Dada la arista vw de G , sabemos que hay otras $\deg(v) - 1$ aristas con v como extremo, y otras $\deg(w) - 1$ aristas con w como extremo, cada una de las cuales da lugar a una única arista en $L(G)$ que tiene el vértice vw como extremo. \square

Corolario 1.21. Si un grafo G con n vértices es d -regular, entonces $L(G)$ tiene $\frac{nd}{2}$ vértices y es $2(d-1)$ -regular.

Demostración. Es trivial que un grafo d -regular tiene $\frac{nd}{2}$ aristas. Además, para un vértice $e = vw$ de $L(G)$, se tiene, por 1.20.(II),

$$\deg(e) = \deg(v) + \deg(w) - 2 = 2d - 2.$$

□

Teorema 1.22. Sea G un grafo. Denotamos por $\delta(G)$ y $\Delta(G)$ al mínimo y máximo, respectivamente, de los grados de los vértices de G . Entonces:

- (I) $\delta(L(G)) \geq 2\delta(G) - 2$, y se da la igualdad si y solo si G tiene dos vértices consecutivos de grado $\delta(G)$.
- (II) $\Delta(L(G)) \leq 2\Delta(G) - 2$, y se da la igualdad si y solo si G tiene dos vértices consecutivos de grado $\Delta(G)$.

Demostración. Se deducen de 1.20.(II). □

Finalizamos este capítulo con un resultado sobre conexión en los grafos de aristas:

Teorema 1.23. El grafo de aristas de un grafo conexo es conexo.

Demostración. Sean x, y dos vértices de $L(G)$. Queremos ver que dichos vértices están unidos por una cadena de aristas adyacentes. Sean u, u_1 los vértices de G que son extremos de x visto como arista de G . De igual manera, denotamos $y = v_1v$. Como G es conexo, existe una cadena de aristas adyacentes que une u y v : sean $w_i, i = 1, 2, \dots, t$ los vértices intermedios de dicha cadena ($w_1 = u_1, w_t = v_1$). Las aristas de G uw_1, w_1w_2 tienen un vértice común, por lo que, vistas como vértices de $L(G)$, son adyacentes. Igual, los vértices de $L(G)$ $w_iw_{i+1}, w_{i+1}w_{i+2}$ ($i = 2, \dots, t-1$) son adyacentes, al igual que $w_{t-1}w_t, w_tv$. Es decir, hemos encontrado una cadena de aristas adyacentes que unen $uw_1 = uu_1 = x$ y $w_tv = v_1v = y$. □

Capítulo 2

Caracterización e isomorfismos

En este capítulo vamos a presentar los resultados principales del trabajo, los Teoremas de Beineke y Whitney. Para la primera sección (caracterización), las referencias usadas son [1] y [2]; en la segunda sección (isomorfismos), seguiremos las ideas que Harary usa en [3].

2.1. Caracterización de los grafos de aristas

Comencemos dando una definición que usaremos en la prueba del teorema principal.

Definición 2.1. Un triángulo en un grafo G es *impar* si algún vértice de G es adyacente a un número impar de vértices del triángulo, y es *par* en caso contrario (es decir, si algún vértice de G es adyacente a un número par de vértices del triángulo).

Procedamos a enunciar el Teorema de Beineke:

Teorema 2.2. (Teorema de caracterización de Beineke) Para un grafo G , son equivalentes:

- (I) G es el grafo de aristas de algún grafo.
- (II) Las aristas de G se pueden agrupar en subgrafos completos tales que ningún vértice pertenezca a más de dos de dichos subgrafos.
- (III) El grafo $K_{1,3}$ no es un subgrafo inducido de G , y si uvw y vwx son ambos triángulos impares, entonces u y x son vértices adyacentes.
- (IV) Ninguno de los 9 grafos de la Figura 2 es un grafo inducido de G .

Demostración. Supondremos en todo momento que G es conexo.

(I) \Rightarrow (II) Suponemos que G es el grafo de aristas de un grafo H . Las aristas que confluyen en cada vértice de H forman un subgrafo completo de G , y cada

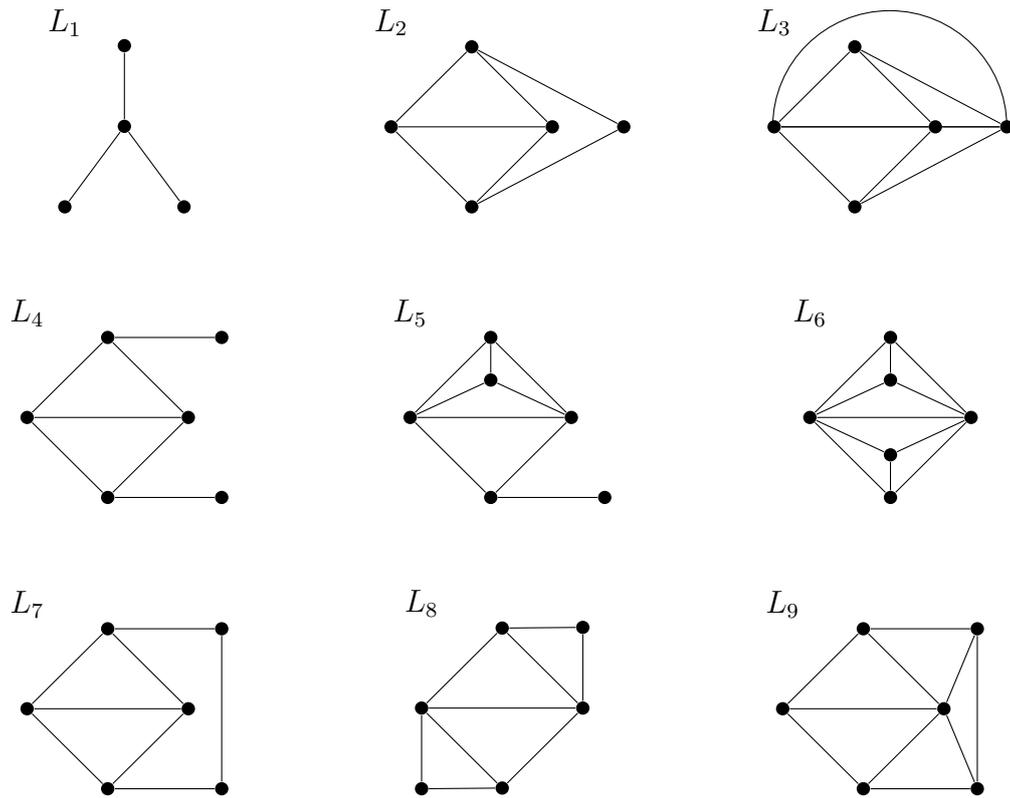


Figura 2: Los nueve *grafos de aristas prohibidos* del Teorema 2.2.(IV)

arista de G pertenece a exactamente uno de estos subgrafos. Como cada arista de H tiene dos vértices, el correspondiente vértice de G está en a lo sumo dos de estos subgrafos completos.

(II) \Rightarrow (I) Queremos construir H tal que $L(H) \cong G$. Para ello, definimos S como la familia de subgrafos completos en la que se descompone G que cumple (II), junto con el conjunto de vértices de G presentes en solo uno de estos subgrafos. Observemos que cada vértice de G está en exactamente dos elementos de S (si el vértice aparece en dos subgrafos, estará presente en cada uno de ellos; si el vértice aparece en solo un subgrafo, entonces estará presente en el subgrafo y como vértice aislado). Ahora, definimos H como el grafo que tiene S como su conjunto de vértices, siendo dos vértices adyacentes si los subgrafos correspondientes tienen un vértice común.

Falta comprobar que $L(H) \cong G$. Veamos que hay una correspondencia biyectiva ϕ entre las aristas de H (es decir, los vértices de $L(H)$) y los vértices de G : para cada arista e de H , definimos $\phi(e)$ como el vértice de G que está en los dos subgrafos completos que en H están unidos por e . Comprobemos si la adyacencia (y no adyacencia) se conserva: sean e y f dos aristas de H . Si e y f son vértices adyacentes en $L(H)$, entonces e une en H dos elementos de S , pongamos A y B , y f une los elementos B y C , y por tanto, $\phi(e)$ y $\phi(f)$ son

adyacentes (pues ambos están en el mismo subgrafo completo B). Ahora, si e y f no son vértices adyacentes en $L(H)$, entonces por el mismo razonamiento anterior, ningún elemento de S contendrá a la vez a $\phi(e)$ y $\phi(f)$ y, por tanto, $\phi(e)$ y $\phi(f)$ no son adyacentes. Por tanto, ϕ conserva la adyacencia y la no adyacencia.

(II) \Rightarrow (IV) Puede verse que para ninguno de los 9 grafos de la Figura se pueden hacer particiones de sus aristas de manera que se formen subgrafos completos y tales que ningún vértice pertenezca a más de dos subgrafos. Por tanto, puesto que (I) \Rightarrow (II), ninguno de estos grafos puede ser un grafo de aristas. Y como todo subgrafo inducido de un grafo de aristas es un grafo de aristas, se tiene lo pedido.

(IV) \Rightarrow (III) Probemos el contrarrecíproco. Supongamos que G no contiene a $K_{1,3} = L_1$ como subgrafo inducido y que además tiene dos triángulos impares uvw y vwx con u y x no adyacentes, $u \approx x$, y veamos que contiene a alguno de los otros ocho grafos de la Figura como subgrafo inducido. Distingamos 2 casos en función de si existe o no un vértice adyacente a un número impar de vértices de ambos triángulos.

Caso 1: Existe un vértice y que es adyacente a un número de impar de vértices del triángulo uvw y a un número impar de vértices del triángulo vwx . Hay dos posibilidades:

Caso 1.a: El vértice y es adyacente a los 3 vértices de uno de los dos triángulos. Entonces, por ser los dos triángulos impares, ese vértice será también adyacente a los 3 vértices del otro triángulo; es decir, y es adyacente a los 4 vértices, y se tiene L_3 como subgrafo inducido.

Caso 1.b: El vértice y es adyacente a un vértice de cada triángulo. Entonces y no puede ser adyacente ni a v ni a w , porque G tendría como subgrafo inducido a $K_{1,3}$, caso que hemos descartado. Por tanto, y es adyacente a u y a x , dando lugar a L_2 .

Caso 2: No existe ningún vértice de G que sea adyacente a un número impar de vértices de ambos triángulo; es decir, existen y adyacente a un número impar de vértices del triángulo uvw , y z adyacente a un número impar de vértices del triángulo vwx . Notemos los siguientes dos hechos:

- Si y ó z es adyacente a v ó w , entonces también es adyacente a u ó x puesto que en caso contrario se tendría que L_1 es subgrafo inducido, caso que hemos descartado.
- Ni y ni z pueden ser adyacentes a u y x a la vez, ya que en ese caso serían adyacentes a un número impar de vértices en ambos triángulos.

Hay tres posibilidades:

Caso 2.a: Tanto y como z son adyacentes a sólo un vértice de cada triángulo. Volvemos a subdividir en casos:

Caso 2.a.i: Se tiene $y \sim u$ y $z \sim x$. Si $y \not\sim z$ obtenemos L_4 , y en caso contrario, obtenemos L_7 .

Caso 2.a.ii: Se tiene $y \sim w$ y $z \sim x$. Entonces deducimos que, por la primera observación, y debe ser adyacente a x ó u , y como y es adyacente a un número impar de vértices de uvw , se tiene que $y \sim x$; y además, por la segunda observación, $z \not\sim u$. Si $y \not\sim z$, entonces el subgrafo inducido generado por los vértices v, x, y y z es L_1 , y en caso contrario, obtenemos L_8 .

Caso 2.a.iii: Se tiene $y \sim w$ y $z \sim v$. Entonces al igual que antes deducimos que $y \sim x$; y por el mismo razonamiento, $z \sim u$. Si $y \not\sim z$ obtenemos L_8 , y en caso contrario, el subgrafo inducido generado por los vértices v, w, x (ó u), y y z es L_2 .

Caso 2.a.iv: Se tiene $y \sim w$ y $z \sim w$. Entonces, al igual que antes, deducimos que $y \sim x$ y $z \sim u$. Si $y \not\sim z$ entonces el subgrafo inducido generado los vértices v, w, y y z es L_1 , y en caso contrario, obtenemos L_9 .

Intercambiando el papel de los vértices que juegan un papel simétrico, se tienen todos los casos.

Caso 2.b: Tanto y como z son adyacentes a los 3 vértices del correspondiente triángulo. Entonces, dado que no existe ningún vértice que sea adyacente a un número impar de vértices de ambos triángulos, deducimos que $y \not\sim x$ y $z \not\sim u$. Si $y \not\sim z$, obtenemos L_6 , y en caso contrario, el subgrafo inducido generado por los vértices v, w, x (ó u), y y z es L_3 .

Caso 2.c: Uno de los vértices, pongamos y , es adyacente a los 3 vértices del correspondiente triángulo, y el otro, z , es adyacente a uno de los vértices del otro triángulo. Entonces deducimos que $y \not\sim x$. Distinguimos casos:

Caso 2.c.i: Se tiene $z \sim x$. Si $y \not\sim z$ obtenemos L_5 , y en caso contrario, el subgrafo inducido generado los vértices v, w, x, y y z es L_2 .

Caso 2.c.ii: Se tiene $z \sim v$ (ó $z \sim w$). Entonces al igual que antes deducimos que $z \sim u$. Si $y \not\sim z$, el subgrafo inducido generado los vértices u, v, w, y y z es L_3 , y en caso contrario, el subgrafo inducido generado los vértices w, x, y y z es L_1 .

(III) \Rightarrow (II) Supongamos que se cumple (III). Claramente, existen dos posibilidades: o bien G contiene 2 triángulos pares con una arista común, o bien si dos triángulos de G comparten una arista, uno de ellos es impar.

Veamos que si estamos en el primer caso, entonces G debe ser isomorfo a uno de los grafos de la Figura 3 (dichos grafos cumplen claramente (II) puesto que un triángulo es un grafo completo). Supongamos que tenemos dos triángulos uvw y $vw x$ pares (notemos que $u \not\sim x$, pues en caso contrario, u estaría unido a un

número impar de vértices del triángulo vwx y por tanto dicho triángulo sería impar, absurdo). Si G no es F_1 , entonces debe tener al menos 5 vértices; llamemos y al quinto vértice (debe estar unido a alguno de los otros 4 vértices puesto que G es conexo). Como los triángulos son pares, y debe ser adyacente o bien a v y w , o bien a u, x y o bien v o bien w (supondremos v). La primera opción no puede darse, ya que entonces el subgrafo inducido generado los vértices u, v, x e y nos daría $K_{1,3}$, caso que hemos descartado por hipótesis. Por tanto, estamos en la segunda opción, que nos lleva al grafo F_2 .

Supongamos ahora G tiene 6 vértices (llamamos z al sexto vértice). Puesto que G es conexo, z debe ser adyacente a algún vértice de los anteriores: no puede ser adyacente sólo a y pues entonces el subgrafo inducido generado los vértices u, x, y y z sería $K_{1,3}$; por tanto, z debe ser adyacente a algún vértice de los triángulos, y por el mismo razonamiento que el usado para y , z debe estar unido a u, x y v ó w (recordemos que $y \sim v$). Si $z \sim v$, tenemos dos opciones: o bien $z \sim y$ (lo que implicaría que los triángulos uvy y vxy son impares (con una arista en común), que por hipótesis nos lleva a que $u \sim x$, absurdo), o bien $z \sim y$ (lo que implicaría que el subgrafo inducido generado los vértices v, w, y y z sería $K_{1,3}$, absurdo también). Por tanto, z debe ser adyacente a w . Además, debe ser adyacente también a y (si no, obtendríamos otra vez que los triángulos uvy y vxy son impares). Por tanto, obtenemos F_3 .

Por último, observemos que G no puede tener más vértices: si tuviera un séptimo vértice, dicho vértice no podría ser adyacente ni sólo a y , ni sólo a z , ni sólo a y y z porque obtendríamos $K_{1,3}$ como subgrafo inducido; por tanto, sería adyacente, al igual que z , a x, u y v ó w , y en cualquiera de los dos casos obtenemos $K_{1,3}$ como subgrafo inducido.

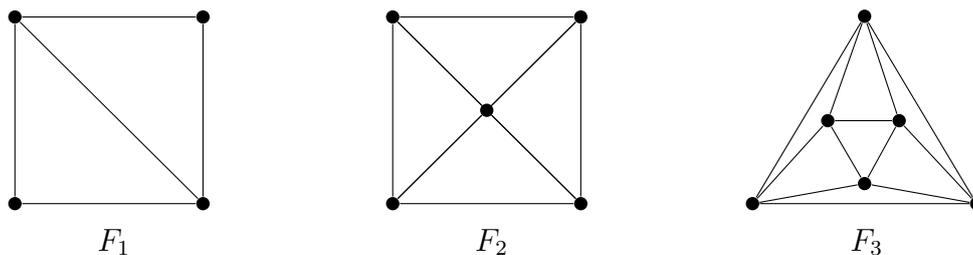


Figura 3: Los tres grafos de la implicación (III) \Rightarrow (II)

Ahora, supongamos que estamos en el caso en el que G no tiene dos triángulos pares con una arista en común. Definimos C como el conjunto de los cliques de G que no son triángulos pares, y T como el conjunto de aristas que pertenece a exactamente un triángulo que sea par. Veamos que los grafos de $C \cup T$ forman una partición del conjunto de aristas de G . Es claro que cada arista de G está en al menos un elemento de $C \cup T$ (si una arista no pertenece a ningún triángulo par, entonces pertenece a algún clique de C ; si arista está en sólo un triángulo

par, entonces pertenece a T ; y el caso en que la arista está dos triángulos pares a la vez no se puede dar por hipótesis). Supongamos ahora que una arista está en dos elementos de $C \cup T$ a la vez. Entonces dichos elementos serán cliques que no sean triángulos pares. Por tanto, si tenemos una arista vw que es común a dos cliques, tienen que existir vértices u y x cada uno en uno de los cliques y que no sean adyacentes. En consecuencia, los triángulos uvw y $vw x$ son triángulos impares, bien formando parte de un clique con al menos 4 vértices, o bien siendo un clique por sí mismo. Pero esto contradice (III), por lo que el caso en el que una arista está en dos elementos a la vez de $C \cup T$ no se puede dar. En conclusión, los elementos de $C \cup T$ dan una partición de las aristas de G .

Ahora, veamos que ningún vértice de G pertenece a más de dos elementos de $C \cup T$. Distinguimos 3 casos:

- Supongamos que un vértice v está en exactamente un elemento de T , digamos la arista vw del triángulo par uvw . Como v está en un sólo elemento de T , la arista uv debe pertenecer a un triángulo impar tuv (pues si no, uv pertenecería también a T , y eso implicaría que v está en dos elementos de T , absurdo). Por otra parte, cualquier vértice que sea adyacente a v debe ser también adyacente a u (si no, el triángulo uvw sería impar). Y además, cualesquiera dos vértices y y z que sean adyacentes a v y, en consecuencia, a u deben ser adyacentes entre sí, puesto que los triángulos uvy y uvz son triángulos que tienen una arista común con uvw y, por tanto, como acabamos de ver, deben ser impares (notemos que tanto y como z existen por argumentos de paridad). En consecuencia, v pertenece al clique $uvyz$, que es un elemento de C . Así que v pertenece a exactamente dos elementos de $C \cup T$.
- Supongamos que un vértice v está en dos elementos de T . Denotemos por vw y vw' a dichos elementos de T , que pertenecen a triángulos pares distintos uvw y $u'vw'$. Como uvw es par y tanto u' como w' son adyacentes a v , se tiene que u debe estar unido a alguno de esos dos vértices (no puede ser w el vértice adyacente a uno de esos dos pues entonces la arista vw estaría en dos triángulos), y, de hecho, debe estar unido a u' (pues si no, vw estaría en dos triángulos). Pero entonces uv pertenecería a dos triángulos pares a la vez, por lo que no puede estar en T y, por tanto, pertenece a S , lo que implica que u' y w son adyacentes (absurdo, pues uvw sería impar). Por tanto, no puede ser que las aristas vw y vw' estén en triángulos distintos, así que tenemos un único triángulo vww' . Esto nos lleva a que v no puede estar en ninguna otra arista de G (si así fuera, el triángulo vww' sería impar, pues dicha arista no podría estar unida ni a w ni a w'). En consecuencia, v está en dos elementos de T (y ninguno de C). El mismo razonamiento descarta el caso en el que v está en más de dos elementos de T a la vez.
- Por último, supongamos que un vértice v está en tres elementos de C . Sean x , y y z vértices respectivos de los cliques que comparten v como vértice.

Hemos visto que ninguna arista puede estar en dos elementos de $C \cup T$ a la vez; en particular, dos cliques de C no pueden compartir aristas, lo que implica que los vértices x , y y z no pueden estar unidos entre sí. Además, dos de estos vértices, por ejemplo x e y , deben ser adyacentes, pues en caso contrario el subgrafo inducido generado por los vértices v , x , y y z es $K_{1,3}$. Por tanto, el triángulo vxy es par (si no fuera par, entonces pertenecería a C y contendría las aristas vx y vy que ya están en otros cliques, absurdo). Eso implica que z debe estar unido o a x o a y (supongamos que es adyacente a y). Pero entonces, por el mismo argumento, el triángulo vyz debe ser par. Esto contradice la hipótesis de que dos triángulos pares no pueden tener una arista común. Por tanto, este caso no se puede dar, y un vértice de G no puede estar en más de dos elementos de C a la vez.

En conclusión, hemos obtenido una partición de las aristas de G formando subgrafos completos en la que ningún vértice está en más de dos subgrafos a la vez. Tenemos así (II). \square

2.2. Isomorfismos de grafos de aristas

Es trivial que si dos grafos son isomorfos, entonces sus respectivos grafos de aristas también lo son. Para el recíproco, sólo hay una excepción:

Teorema 2.3. (Teorema de isomorfismo de Whitney) Los únicos dos grafos conexos no isomorfos cuyos grafos de aristas son isomorfos son $K_{1,3}$ y K_3 .

Demostración. Primero, notemos que entre los grafos de hasta 4 vértices, los únicos distintos cuyos grafos de aristas son isomorfos son K_3 y $K_{1,3}$.

Para los grafos de más de 4 vértices, probaremos el siguiente resultado:

Sean G_1, G_2 dos grafos conexos con más de 4 vértices. Si $\phi_L : L(G_1) \rightarrow L(G_2)$ es un isomorfismo entre sus grafos de aristas, entonces existe un único isomorfismo $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ que hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{\phi} & G_2 \\ \downarrow L & & \downarrow L \\ L(G_1) & \xrightarrow{\phi_L} & L(G_2) \end{array}$$

Probemos primero la unicidad. Supongamos que existen ϕ_1, ϕ_2 dos isomorfismos entre G_1 y G_2 . Veamos que para todo vértice v de G_1 , $\phi_1(v) = \phi_2(v)$.

Sea v vértice de G_1 . Puesto que G_1 es conexo y tiene más de 4 vértices, existen dos aristas $x = uv$ e $y = vw$ (ó $y = uv$), siendo u, w vértices de G_1 (u, v, w vértices distintos). Si $y = vw$, entonces tanto $\phi_1(v)$ como $\phi_2(v)$ son extremos de $\phi_L(x)$ y $\phi_L(y)$ (viendo $\phi_L(x), \phi_L(y)$ como aristas de G_2), y como sólo puede haber un vértice que sea extremo de las dos aristas a la vez, se tiene que $\phi_1(v) = \phi_2(v)$. Por otra parte, si $y = uv$, entonces $\phi_1(u) = \phi_2(u)$ por lo que acabamos de razonar,

y por tanto, $\phi_L(x)$ tiene por vértices a $\phi_1(v)$, $\phi_2(v)$ y $\phi_1(u) = \phi_2(u)$. Por tanto, y puesto que cualquier arista tiene sólo 2 vértices, se tiene que $\phi_1(v) = \phi_2(v)$.

Probemos ahora la existencia del isomorfismo ϕ del cual se deriva ϕ_L . El primer paso es probar que $K_{1,3}$ (visto como subgrafo de G_1) va a pasar a $K_{1,3}$ (visto como subgrafo de G_2) bajo ϕ_L . Denotamos por u, v_1, v_2, v_3 los vértices de G_1 que forman $K_{1,3}$ (siendo u el vértice central), y $x_i = uv_i, i = 1, 2, 3$, las aristas que unen dichos vértices. Puesto que G_1 tiene más de 4 vértices y además G_1 es conexo, existe una arista y de G_1 , que está unida a u o a algún v_i :

- Si y es incidente con u , entonces obtenemos $K_{1,4}$, que visto en $L(G_2)$ se transforma en K_4 (ver Figura 4); en particular, el vértice correspondiente a $\phi_L(y)$ tiene grado 3. Por tanto, en G_2 , la arista $\phi_L(y)$ es adyacente a los tres $\phi(v_i)$.

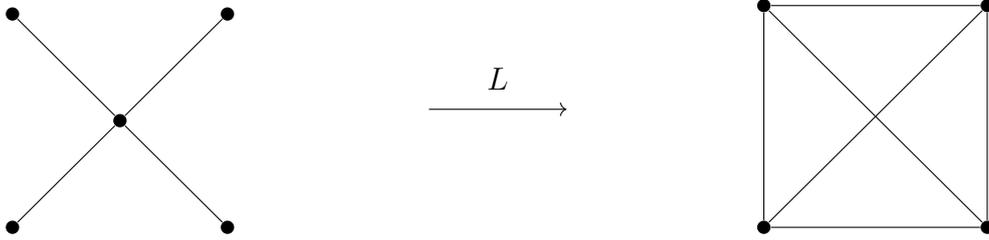


Figura 4: Caso y incidente con u

- Si y es incidente con algún v_i (supongamos por simplicidad que y es incidente con v_1), entonces obtenemos el primer grafo de la Figura 5, que visto en $L(G_2)$ se transforma en el segundo grafo de la misma Figura; en particular, el vértice correspondiente a $\phi_L(y)$ tiene grado 1 (está unido a $\phi_L(v_1)$). Por tanto, en G_2 , la arista $\phi_L(y)$ es adyacente a $\phi(v_1)$ pero no a $\phi(v_2)$ ni $\phi(v_3)$.

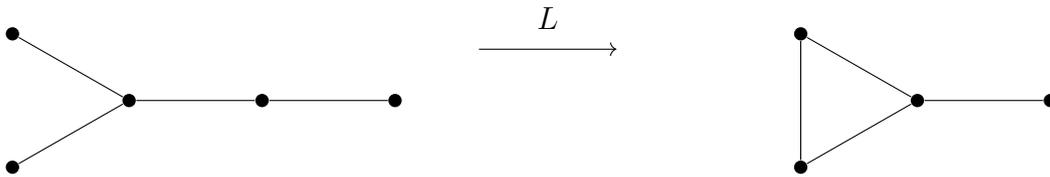


Figura 5: Caso y incidente con algún v_i

Por tanto, la arista $\phi_L(y)$ es adyacente con al menos una de las $\phi_L(x_i)$ en G_2 .

Si las aristas $\phi_L(x_i)$ formaran un triángulo en G_2 , entonces la arista $\phi_L(y)$ sería incidente con uno de los vértices del triángulo, y en ese caso, sería adyacente a dos aristas (no puede ser adyacente a sólo una por estar trabajando con un triángulo, ni puede ser adyacente a las 3 aristas pues sólo consideramos grafos

simples, en los que por cada par de vértices hay como mucho una arista). Por tanto, no estamos en ninguno de los dos casos anteriores y llegamos a contradicción. En conclusión, $K_{1,3}$ va a parar a $K_{1,3}$.

Ahora, para cada v vértice de G_1 , denotamos por $S(v)$ el conjunto de aristas incidentes con v . Veamos que para cada vértice v_1 de G_1 , existe un único v_2 de G_2 tal que $\phi_L(S(v_1)) = S(v_2)$.

- Si $\deg(v_1) \geq 2$, entonces para dos aristas cualquiera incidentes con v_1 , y_1 e y_2 , sea v_2 el vértice de G_2 común de $\phi_L(y_1)$ y $\phi_L(y_2)$. Por tanto, para cada arista x_1 incidente con v_1 , se tiene que $\phi_L(x_1)$ es incidente con v_2 (puesto que, como hemos visto en el paso anterior, $K_{1,3}$ va a $K_{1,3}$), y, del mismo modo y usando la biyectividad de ϕ_L , para cada arista x_2 incidente con v_2 , se tiene que $\phi_L^{-1}(x_2)$ es incidente con v_1 . Y, por tanto, $\phi_L(S(v_1)) = S(v_2)$.
- Si $\deg(v_1) = 1$, entonces sea $x_1 = u_1v_1$ la arista incidente con v_1 . El grado de u_1 es estrictamente mayor que 1 (si no, G no sería conexo), y por el apartado anterior, sabemos que $\phi_L(S(u_1)) = S(u_2)$ para algún u_2 vértice de G_2 , y por tanto, $\phi_L(x_1) = u_2v_2$, para algún v_2 vértice de G_2 . Tomamos una arista x_2 incidente con v_2 . Por lo visto para el caso anterior, $\phi_L^{-1}(x_2)$ es incidente con uno de los dos vértices de la arista x_1 (ya que x_2 y $\phi_L(x_1)$ comparten un vértice), y puesto que $\deg(v_1) = 1$, el vértice común debe ser u_1 ; es decir, $\phi_L^{-1}(x_2)$ es incidente con u_1 , y por tanto, también como en el caso anterior, $\phi_L(\phi_L^{-1}(x_2)) = x_2$ es incidente con u_2 . Por tanto, $x_2 = u_2v_2 = \phi_L(x_1)$ y $\deg(v_2) = 1$.

Es decir, definiendo $\phi(v_1) := v_2$, tenemos una aplicación entre los vértices de G_1 y los de G_2 , que además es inyectiva ya que si $S(u) = S(v)$ entonces $u = v$. Además, dado un vértice v_2 en G_2 , existe una arista x_2 incidente con dicho vértice. Denotamos $u_1v_1 := \phi_L^{-1}(x_2)$. Entonces o bien $\phi(u_1) = v_2$ o bien $\phi(v_1) = v_2$, por lo que ϕ es sobreyectiva. Es decir, ϕ es biyectiva.

Nos falta comprobar que ϕ_L se deriva de ϕ . Sea $x_1 = u_1v_1$ una arista de G_1 . Entonces por lo anterior tenemos que $\phi_L(x_1) = \phi(u_1)\phi(v_1)$, y de igual manera, $\phi_L^{-1}(x_2) = \phi^{-1}(u_2)\phi^{-1}(v_2)$. En conclusión, ϕ es un isomorfismo del cual se deriva ϕ_L . \square

Capítulo 3

Algunas familias de grafos de aristas

El objetivo de este capítulo es caracterizar los grafos de aristas de algunas de las familias de grafos más comunes: caminos, estrellas, ciclos, árboles, grafos completos y grafos bipartitos completos. Las referencias usadas en este capítulo son [1], [3] y [4].

3.1. Caminos y estrellas

Recordamos que un camino P_n ($n \geq 2$) es un grafo conexo formado por un conjunto ordenado de vértices v_0, v_1, \dots, v_{n-1} tales que cada v_i es adyacente a v_{i-1} y v_{i+1} . trivial calcular su grafo de aristas: $L(P_n) \cong P_{n-1}$. En la Figura 1 podemos ver un ejemplo: $L(P_3) \cong P_2$.

Asimismo, como ya hemos visto, los grafos estrella $K_{1,s}$ son grafos bipartitos en los que uno de los dos conjuntos en los que se pueden separar sus vértices tiene sólo un vértice. Al igual que en el caso anterior, también es fácil de ver que $L(K_{1,s}) \cong K_s$. La Figura 4 ilustra un ejemplo: $L(K_{1,4}) \cong K_4$.

3.2. Ciclos

Ya sabemos que los ciclos son un caso particular de caminos, donde el primer y el último vértice son el mismo. A continuación veremos que estos grafos son los únicos en los que se da la particularidad de que su grafo de aristas es isomorfo al propio grafo original.

Teorema 3.1. $L(G) \cong G$ si y sólo si G es un ciclo.

Demostración. La condición suficiente es trivial. Veamos la condición necesaria. Sea G un grafo de n vértices y m aristas. Denotamos por n_L, m_L el número de vértices y aristas, respectivamente, de $L(G)$. Recordemos que, por el Teorema

1.20.(i), $n_L = m$. Si $L(G) \cong G$, entonces $n_L = n$, $m_L = m$. Aplicando de nuevo el Teorema 1.20.(i), tenemos que

$$n = n_L = m = m_L = \frac{1}{2} \sum (deg(v))^2 - m.$$

De aquí deducimos, por una parte, que

$$\left(\frac{1}{n} \sum (deg(v))^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{4m}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = 2.$$

Pero por el Teorema del apretón de manos,

$$\frac{1}{n} \sum deg(v) = \frac{2m}{n} = 2.$$

Es decir, la media y la media cuadrática de $\{deg(v)\}$ es la misma y, por tanto, para todo v vértice de G , $deg(v) = 2$. Es decir, G es un grafo 2-regular, o sea, un ciclo. \square

3.3. Árboles

Comencemos dando la definición de árbol:

Definición 3.2. Un grafo *árbol* es aquel en el que cada par de vértices está unido por exactamente un camino de aristas. Un árbol de n vértices tiene $n - 1$ aristas.

A continuación daremos dos definiciones que serán necesarias para la demostración del Teorema de caracterización de los grafos de aristas de los árboles:

Definición 3.3. Un vértice de un grafo es un *punto de corte* si al eliminarlo, aumenta el número de componentes conexas del grafo. Un *punte* es una arista que cumple lo mismo. Notemos que los puentes de un grafo G son los puntos de corte de $L(G)$.

Definición 3.4. Un *bloque* de un grafo G es un subgrafo conexo que es maximal entre los grafos conexo sin puntos de corte. El *grafo bloque* de un grafo G , denotado por $B(G)$, es el grafo cuyos vértices son los bloques de G , siendo dos vértices adyacentes si los bloques de G correspondientes tienen un punto de corte común.

Necesitaremos también el siguiente Lema, que no demostraremos:

Lema 3.5. Un grafo G es un grafo bloque si y solo si cada bloque de G es completo.

Enunciemos el Teorema principal de esta sección:

Teorema 3.6. Un grafo es el grafo de aristas de un árbol si y solo si es un grafo bloque tal que cada punto de corte está en exactamente dos bloques.

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos $G = L(T)$, para algún grafo árbol T . Entonces, como las aristas de T están en biyección con los bloques de T (los bloques de un grafo árbol están formados precisamente por cada arista junto con sus dos vértices), se tiene que $G = B(T)$. Ahora, cada punto de corte de G corresponde con un puente en T , es decir, dicho vértice está en exactamente dos bloques.

(\Leftarrow) Ahora, sea G un grafo bloque tal que cada punto de corte está en exactamente dos bloques. Por el Lema 3.5, sabemos que cada bloque es completo, y por el Teorema 2.2, G es un grafo de aristas, es decir, existe H tal que $L(H) = G$. Si $G = K_3$, podemos tomar $H = K_{1,3}$ (los grafos estrella son un caso particular de grafos árbol). Si no, razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que H no es un árbol, es decir, H contiene al menos un ciclo. Si H es en sí un ciclo C_n (donde n es el número de vértices del ciclo), entonces $L(H) \cong L(C_n) \cong C_n \cong H$, pero el único ciclo que es un grafo bloque es K_3 , caso que ya hemos descartado. Por tanto, H debe contener propiamente un ciclo, es decir, H contiene un ciclo Z y una arista e que es adyacente a dos aristas del ciclo, pero que no es adyacente a alguna arista f de Z . Vistos en $L(H)$, los vértices e y f están dentro de un ciclo pero no son adyacentes, es decir, el bloque formado por el ciclo no es completo. Esto contradice el lema y, por tanto, H es un grafo árbol. \square

3.4. Grafos completos K_n

Recordemos que los grafos completos K_n son aquellos en los que dos vértices cualesquiera están unidos por una arista. Procedemos en esta sección a describir cómo es el grafo de aristas de K_n :

Teorema 3.7. El grafo de aristas de K_n , satisface:

- (I) Tiene $\binom{n}{2}$ vértices.
- (II) Es regular de grado $2(n-2)$.
- (III) Cada par de vértices no adyacentes son mutuamente adyacentes a exactamente 4 vértices.
- (IV) Cada par de vértices adyacentes son mutuamente adyacentes a exactamente $n-2$ vértices.

Demostración. Todas las propiedades se pueden ver de forma sencilla:

- (I) Aplicando el Corolario 1.21, obtenemos que el grafo de aristas de K_n tiene $\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ vértices.
- (II) De nuevo por el Corolario 1.21, el grafo de aristas de K_n es $2(n-2)$ -regular.
- (III) Veamos los vértices del grafo de aristas como aristas del grafo original. Entonces el enunciado que queremos probar es equivalente a decir que por cada par de aristas sin extremos en común hay exactamente 4 aristas con

un extremo en común con cada una de las dos aristas de partida. Pero esto es trivial: como el grafo original es completo, cada uno de los dos extremos de una de las dos aristas está unido con los dos extremos de la otra arista; es decir, tenemos 4 aristas.

- (IV) Razonando igual que antes, queremos probar que dos aristas adyacentes del grafo original tienen a la vez un extremo común con $n - 2$ aristas. Por una parte, tenemos la arista que une los dos extremos no comunes de ambas aristas. Por otra parte, puesto que cada vértice de K_n tiene grado $n - 1$, hay otras $n - 3$ aristas incidentes con el vértice común a las dos aristas de partida. Es decir, tenemos $1 + n - 3 = n - 2$ aristas.

□

Observación 3.8. El Teorema anterior es en realidad una equivalencia, pero aquí sólo demostraremos la condición necesaria. Además, para la otra implicación hay una excepción: $n = 8$, pues no hay unicidad en el resultado, esto es, hay 3 grafos que cumplen las mismas propiedades anteriores, al igual que $L(K_8)$. El lector puede comprobar los detalles en [1].

Definimos el grafo T_n como el grafo cuyos vértices son los $\binom{n}{2}$ pares de elementos de un conjunto con n elementos, siendo dos vértices adyacentes si los correspondientes subconjuntos de pares de elementos tienen intersección no vacía. Es fácil comprobar que $L(K_n) \cong T_n$, y que, por tanto, T_n cumple todo lo anterior (excepto para el caso antes señalado).

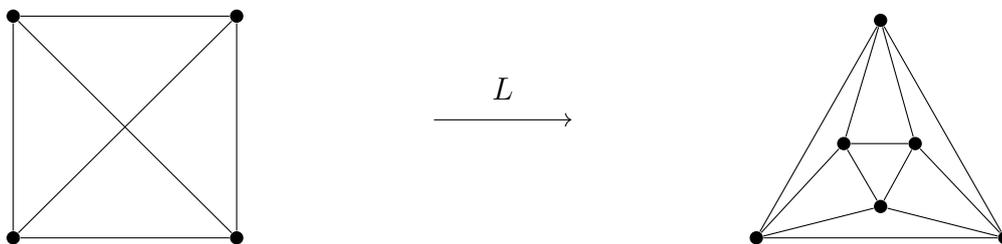


Figura 6: K_4 y su grafo de aristas, T_4

3.5. Grafos bipartitos completos $K_{r,s}$

Al igual que en la sección anterior, recordamos que los grafos bipartitos completos $K_{r,s}$ son grafos bipartitos (es decir, en el que sus vértices se pueden dividir en dos conjuntos de manera que ninguno de los vértices de un conjunto está unido con el resto de vértices del mismo conjunto) y en los que además cada vértice está unido a todos los vértices del otro conjunto. Procedemos pues a describir cómo es el grafo de aristas de $K_{r,s}$, para cualquier r, s :

Teorema 3.9. El grafo de aristas de $K_{r,s}$, excluyendo el caso $r = s = 4$, satisface:

- (I) Tiene rs vértices.
- (II) Es regular de grado $r + s - 2$.
- (III) Cada par de vértices no adyacentes son mutuamente adyacentes a exactamente 2 vértices.
- (IV) Entre los pares de vértices adyacentes, exactamente $r \binom{s}{2}$ son mutuamente adyacentes a $s - 2$ vértices, y los restante $s \binom{r}{2}$ son mutuamente adyacentes a $r - 2$ vértices.

Demostración. (I) Es trivial comprobar que el grafo bipartito completo $K_{r,s}$ tiene rs aristas; por lo tanto, su grafo de aristas tendrá el mismo número de vértices.

- (II) Tomando un vértice cualquiera de $L(K_{r,s})$, podemos calcular su grado aplicando el Teorema 1.20.(II): la arista de $K_{r,s}$ correspondiente a dicho vértice tiene por extremos un vértice de grado r y un vértice de grado s , y esto para todas las aristas. Por tanto, cualquier vértice de $L(K_{r,s})$ tiene grado $r + s - 2$; en particular, $L(K_{r,s})$ es regular.
- (III) Al igual que en el teorema anterior, consideramos dos aristas del grafo original sin extremos en común. Como el grafo es bipartito, cada uno de los dos extremos de una de las dos aristas estará unido con sólo uno de los dos extremos de la otra arista (el otro extremo será del mismo conjunto que el extremo que estamos considerando de la primera arista y, por tanto, no están unidos). Es decir, tenemos 2 aristas.
- (IV) Razonando igual que antes, tomamos dos aristas con un extremo en común. En primer lugar, observemos que para cada uno de los puntos del conjunto de r elementos, hay $\binom{s}{2}$ pares de aristas incidentes con él (puesto que dicho extremo está unido sólo a puntos del conjunto de s elementos); por tanto tenemos $r \binom{s}{2}$ pares de aristas incidentes a la vez con algún vértice del conjunto de r puntos. Ahora, supongamos que el extremo común de ambas aristas pertenece al conjunto de cardinal r . Puesto que el grafo es bipartito, las aristas que tengan un extremo común con las dos aristas de partida deben ser incidentes con el extremo común de ambas, y como cada punto del conjunto de r elementos está unido con los s puntos del otro conjunto, hay otras $s - 2$ aristas incidentes con él. Intercambiando los papeles de r y s , tenemos lo pedido.

□

Observación 3.10. El Teorema anterior es en realidad una equivalencia, pero aquí sólo demostraremos la condición necesaria. Además, para la otra implicación hay una excepción: $r = s = 4$, pues no hay unicidad en el resultado, esto es, hay otro grafo que cumple las mismas propiedades anteriores, al igual que $L(K_{4,4})$. El lector puede comprobar los detalles en [1].

Definimos el grafo $T_{r,s}$ como el grafo cuyos vértices son los rs pares de elementos donde se toma uno de los elementos de un conjunto R con r elementos, y el otro de un conjunto S con s elementos, y en el que dos vértices son adyacentes si los correspondientes subconjuntos de pares de elementos tienen intersección no vacía. Es fácil comprobar que $L(K_{r,s}) \cong T_{r,s}$, y que, por tanto, $T_{r,s}$ cumple todo lo anterior (excepto para el caso antes señalado).

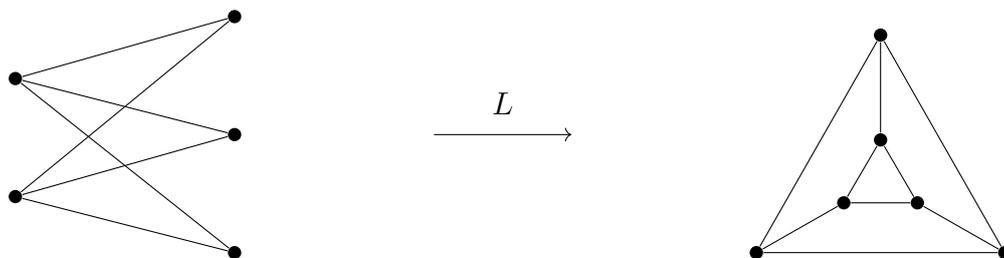


Figura 7: $K_{2,3}$ y su grafo de aristas, $T_{2,3}$

Capítulo 4

Grafos de aristas iterados

En este capítulo nos hacemos una pregunta que surge de forma natural: ¿cómo es el grafo de aristas de un grafo de aristas? La primera sección del capítulo está dedicada a dar algunos resultados auxiliares que servirán de ayuda en las demostraciones de la siguiente sección, en la que, después de deducir las propiedades de los grafos para los que es interesante plantearse esta cuestión, analizaremos lo que sucede con algunos de los parámetros más estudiados en la Teoría de Grafos, como son el número de vértices, el número de aristas, el grado... Para la redacción de este capítulo se ha usado [5] como referencia principal.

Definición 4.1. Sea G un grafo. Definimos su *grafo de aristas iterado*, $L^k(G)$, por $L(G)$ si $k = 1$ y $L(L^{k-1}(G))$ si $k > 1$.

Vamos a estudiar qué ocurre con ciertos parámetros del grafo G según vamos iterando su grafo de aristas. Para ello, definimos el índice:

Definición 4.2. Sea G un grafo, y sea $P(G)$ un parámetro del G . El *índice* de G para P se define por $ind(P, G) = \min \{r : P(G) < P(L^r(G))\}$, si tal r existe.

Dado un parámetro $P(G)$, denotaremos $P_k(G) = P(L^k(G))$. Por comodidad, también usaremos las notaciones $n = n(G)$ (donde $n(G)$ es el número de vértices de G) y $m = m(G)$ (donde $m(G)$ es el número de aristas de G). Por último, denotamos por x_j el número de vértices de grado j de un grafo dado.

4.1. Resultados auxiliares

Demos unos resultados previos:

Lema 4.3. (Desigualdad de Jensen) Si f es una función real convexa (es decir, si dados dos puntos x, y del dominio de f , y dado $t \in (0, 1)$, se tiene $f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$), entonces

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n f(x_i)}{n}.$$

La igualdad se da si y sólo si $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ o si f es lineal.

Proposición 4.4. Para un grafo G (con n vértices y m aristas), se tiene $d_1(G) \geq 2(d(G) - 1)$ (donde $d(G)$ es el grado promedio de G). La igualdad se da si y sólo si G es regular.

Demostración. Sabemos que $n_1(G) = m$, y por el Teorema del apretón de manos, $2m = \sum (deg(v)) = nd(G)$.

Además, por el Teorema 1.20.(I), tenemos que $m_1(G) = \sum \binom{deg(v)}{2}$ y, por tanto,

$$2m_1(G) = 2 \sum \binom{deg(v)}{2} \geq 2n \sum \binom{d(G)}{2}$$

por la desigualdad de Jensen (pues $x \mapsto \binom{x}{2}$ es una función convexa).

Ahora,

$$\begin{aligned} d_1(G) &= \frac{2m_1(G)}{n_1(G)} \geq \frac{2n \sum \binom{d(G)}{2}}{m} = \\ &= \frac{2nd(G)(d(G) - 1)}{2m} = \\ &= \frac{2nd(G)(d(G) - 1)}{nd(G)} = \\ &= 2(d(G) - 1). \end{aligned}$$

La igualdad se da, de nuevo por la desigualdad de Jensen, si y sólo si G es regular. \square

Proposición 4.5. Para un grafo G con n vértices y m aristas, se tiene

$$2(m_1(G) - m) = \sum deg(v)(deg(v) - 2) \geq nd(G)(d(G) - 2).$$

Demostración. Se tiene, usando la desigualdad de Jensen, que

$$\begin{aligned} 2(m_1(G) - m) &= 2 \left(\sum \binom{deg(v)}{2} - \frac{\sum deg(v)}{2} \right) = \\ &= \sum deg(v)(deg(v) - 2) \geq \\ &\geq nd(G)(d(G) - 2). \end{aligned}$$

\square

Proposición 4.6. Si T es un grafo árbol con x_j vértices de grado j , entonces

$$2m_1(T) - 2m = -2 + \sum_{j \geq 3} (j - 1)(j - 2)x_j.$$

Demostración. Para los grafos árbol, se da la igualdad

$$x_1 = 2 + \sum_{j \geq 2} (j - 2)x_j.$$

Además, por el Teorema del apretón de manos, tenemos que

$$2m(T) = \sum \deg(v) = \sum jx_j,$$

y

$$2m_1(T) = \sum \deg(v)(\deg(v) - 1) = \sum j(j - 1)x_j.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} 2m_1(T) - 2m(T) &= \sum j(j - 1)x_j - \sum jx_j = \\ &= \sum j(j - 2)x_j = \\ &= -x_1 + \sum_{j \geq 2} j(j - 2)x_j = \\ &= -2 - \sum_{j \geq 2} (j - 2)x_j + \sum_{j \geq 2} j(j - 2)x_j = \\ &= -2 + \sum_{j \geq 3} (j - 1)(j - 2)x_j. \end{aligned}$$

□

Proposición 4.7. Sea G un grafo conexo y H un subgrafo inducido de G . Entonces $m_1(G) - m_1(H) \geq m(G) - m(H)$.

Demostración. Distingamos casos en función del número de vértices de G :

- Para $n = 2$, se sigue que $G = H = K_2$ y se cumple la desigualdad.
- Para $n = 3$, las únicas posibilidades para G son P_3 y C_3 , y, por lo tanto, para H son P_2 , P_3 y C_3 , lo que también hace que se cumpla la desigualdad.
- Ahora, razonando por reducción al absurdo, sea G el mínimo (respecto a n) grafo conexo tal que existe H subgrafo inducido con $m_1(G) - m_1(H) < m(G) - m(H)$. Se tiene $n \geq 4$. Definimos $a_j = \deg(v_j)$ el grado del vértice v_j en G , y $b_j = \deg(v_j)$ el grado de v_j en H . Observemos que $a_j \geq b_j$. Pero para el grafo G , y por la demostración de la Proposición 4.5, tenemos que

$$\sum a_j(a_j - 2) = 2(m_1(G) - m(G)) < 2(m_1(H) - m(H)) = \sum b_j(b_j - 2),$$

y esto sólo pasa si G tiene un vértice w de grado 1 que no esté en H (pues en otro caso, $a_j(a_j - 2) \geq b_j(b_j - 2)$).

Definimos $G^* = G \setminus \{w\}$ (quitando también la arista incidente con w). Por ser w de grado 1, se tiene que G^* es conexo, y además, $m(G^*) = m - 1$, y $n(G^*) \geq 3$. Ahora, por la condición de minimalidad de G , tenemos que

$$m_1(G^*) - m_1(H) \geq m(G^*) - m(H) = m(G) - 1 - m(H),$$

por lo que $m_1(G^*) \geq m(G) - 1 - m(H) + m_1(H)$. Si probamos que $m_1(G) \geq m_1(G^*) + 1$, habremos acabado, pues obtendremos que $m_1(G) - m_1(H) \geq$

$m(G) - m(H)$, en contradicción con la definición de G , y, por tanto, G no puede existir.

Sea z el vértice adyacente a w en G . Puesto que G es conexo y $n \geq 4$, se tiene $\deg(z) \geq 2$, y en G^* , $\deg(z)$ decrece en 1 y es al menos 1, por lo que

$$m_1(G) - m_1(G^*) = \binom{\deg(z)}{2} - \binom{\deg(z) - 1}{2} \geq 1,$$

por lo que se tiene el resultado. □

Definición 4.8. Una *subdivisión* de un grafo consiste en un nuevo grafo formado al añadir uno o varios vértices (y las aristas correspondientes) en medio de alguna arista del grafo original, es decir, añadiendo un camino en medio de una arista. Diremos que una subdivisión de $K_{1,3}$ es *de tipo A, B ó C*, respectivamente, si el vértice de grado 3 es adyacente a 2, 1 ó 0 vértices de grado 1, respectivamente, mientras que el o los vértices restantes de grado 2 se prolongan en caminos.

En esta sección, además de usar subdivisiones de $K_{1,3}$, hablaremos también de subdivisiones del grafo doble estrella $S_{2,2}$, en el que la prolongación en forma de camino se da entre los 2 vértices de grado 3. Podemos ver ejemplos de subdivisiones de $K_{1,3}$ y $S_{2,2}$ en las Figuras 8 y 9.

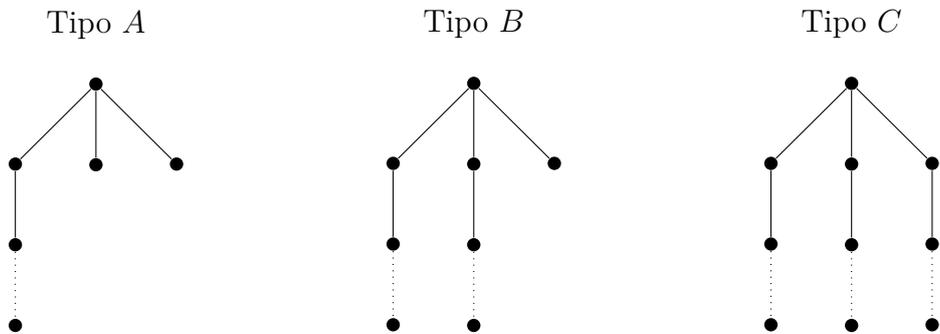


Figura 8: Subdivisiones de $K_{1,3}$

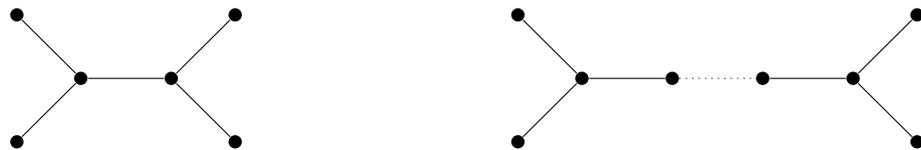


Figura 9: $S_{2,2}$ y su subdivisión

Proposición 4.9. Sea G una subdivisión de tipo C de $K_{1,3}$ cuyos grafos camino comenzando en el vértice de grado 3 tienen respectivamente $m_{G_1} \geq m_{G_2} \geq m_{G_3} \geq 2$ aristas. Entonces

$$m_1(G) = m, m_2(G) = m + 3, m_3(G) \geq m + 15.$$

Demostración. Demostraremos sólo las igualdades para $m_1(G)$ y $m_2(G)$.

Supongamos que tenemos una subdivisión de tipo C de $K_{1,3}$. Las tres aristas incidentes con el vértice de grado 3 se transforman en el triángulo K_3 , por lo que esas 3 aristas se preservan en el grafo de aristas. Por otra parte, cada uno de los tres caminos (sin contar la respectiva arista incidente con el vértice de grado 3) pierde una arista al calcular su grafo de aristas (véase el Capítulo 3). Pero además, para cada uno de esos caminos (viéndolos ya como parte del grafo de aristas), aparece una nueva arista que lo une al triángulo que ya teníamos. En total, $L(G)$ tiene $m - 3 + 3 = m$ aristas.

Para $L^2(G)$, observemos que cada vértice del triángulo que hemos obtenido en la iteración anterior genera un nuevo triángulo al calcular su grafo de aristas; es decir, por cada vértice sumamos 2 nuevas aristas (la tercera arista del triángulo que se origina pertenece al grafo de aristas del triángulo que ya teníamos en el paso anterior). Además, los caminos que comienzan en cada uno de los vértices del triángulo de $L(G)$, al igual que antes, pierden una arista cada uno. Por tanto, $L^2(G)$ tiene $m + 6 - 3 = m + 3$ aristas. \square

Proposición 4.10. Sea G una subdivisión de tipo B de $K_{1,3}$ cuyos grafos camino comenzando en el vértice de grado 3 tienen respectivamente $m_{G_1} \geq m_{G_2} > m_{G_3} = 1$ aristas. Entonces

$$m_1(G) = m, m_2(G) = m + 2, m_3(G) \geq m + 9.$$

Demostración. Se razona de forma análoga a la Proposición 4.9. \square

Proposición 4.11. Sea G una subdivisión de tipo A de $K_{1,3}$ cuyos grafos camino comenzando en el vértice de grado 3 tienen respectivamente $m_{G_1} > m_{G_2} = m_{G_3} = 1$ aristas. Entonces

(I) Si $m_{G_1} \geq 3$, entonces $m_1(G) = m, m_2(G) = m + 1, m_3(G) \geq m + 4$.

(II) Si $m_{G_1} = 2$, entonces $m_1(G) = m, m_2(G) = m + 1, m_3(G) = m + 4$.

Demostración. Se razona de forma análoga a la Proposición 4.9. \square

4.2. Estudio de algunos parámetros

Número de vértices, $n = n(G)$

Consideremos 3 familias de grafos:

- $\deg(v) = 2$ para todo v vértice de G ,
- $\deg(v) \leq 2$ para todo v vértice de G , y $\deg(v) < 2$ para algún v ,
- $\deg(v) \geq 2$ para todo v vértice de G , y $\deg(v) > 2$ para algún v .

Proposición 4.12. Sea G un grafo perteneciente a una de las 3 familias anteriores. Entonces $L(G)$ es de la misma familia que G .

Demostración. Recordemos que, por el Teorema 1.20.(II), $\deg(e) = \deg(v) + \deg(w) - 2$ para un vértice $e = vw$ de $L(G)$. Se sigue el resultado sin más que analizar cada familia por separado. \square

Teorema 4.13. El número de vértices del grafo iterado de G está acotado si G pertenece a la primera o segunda familia, y no está acotado si pertenece a la tercera.

Demostración. Estudiemos cada familia por separado:

- Los grafos del primer tipo son 2-regulares, es decir, ciclos (hemos visto en el Capítulo 3 que $L(C_n) \cong C_n$, siendo C_n un ciclo con n vértices). Por tanto, el número de vértices es siempre constante.
- Ahora, sea un grafo del segundo tipo, con n vértices y m aristas, y sea $L(G)$ su grafo de aristas (con n_L vértices y m_L aristas). Por el Teorema del apretón de manos, deducimos que

$$n_L = m = \frac{1}{2} \sum \deg(v) < \frac{1}{2} \sum 2 = n,$$

por lo que, tras un número finito de iteraciones, obtenemos el grafo nulo.

- Por último, repitiendo el mismo razonamiento para el tercer grupo, tenemos que

$$n_L = m = \frac{1}{2} \sum \deg(v) > \frac{1}{2} \sum 2 = n,$$

por lo que el número de vértices de los grafos iterados no está acotado. \square

Nuestro objetivo es dar condiciones sobre G para recaer en un caso particular de la tercera familia de grafos. Distingamos casos en función del grado de los vértices de G (notemos que, para ilustrar dichos casos, se utilizan con conveniencia Figuras muy similares a las Figuras 4 y 5 del Capítulo 2):

Caso 1: G tiene al menos un vértice de grado ≥ 4 . Entonces G tiene como subgrafo (no necesariamente inducido) a $K_{1,4}$, cuyo grafo de aristas es el que se muestra en la Figura 10, que pertenece a la tercera familia, y por tanto, al iterar, su número de vértices crece.

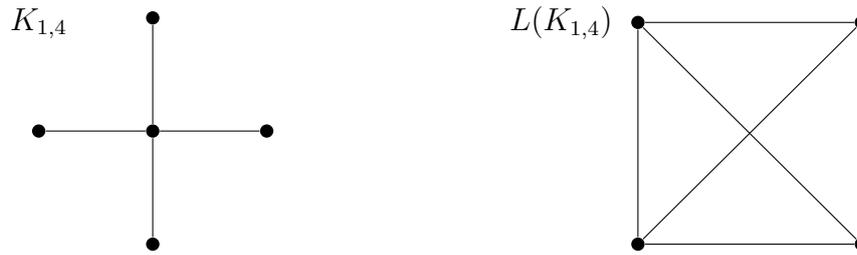


Figura 10: $K_{1,4}$ y su grafo de aristas

Caso 2: todos los vértices de G tienen grado ≤ 3 .

Caso 2.a: G tiene un vértice de grado 3 unido a un vértice de grado ≥ 2 . Entonces G tiene como subgrafo uno de los dos grafos H_1 ó H_2 de la Figura 11, cuyo primer o segundo, respectivamente, grafo de aristas es el mostrado en la misma Figura, que, de nuevo, vuelve a pertenecer a la tercera familia.

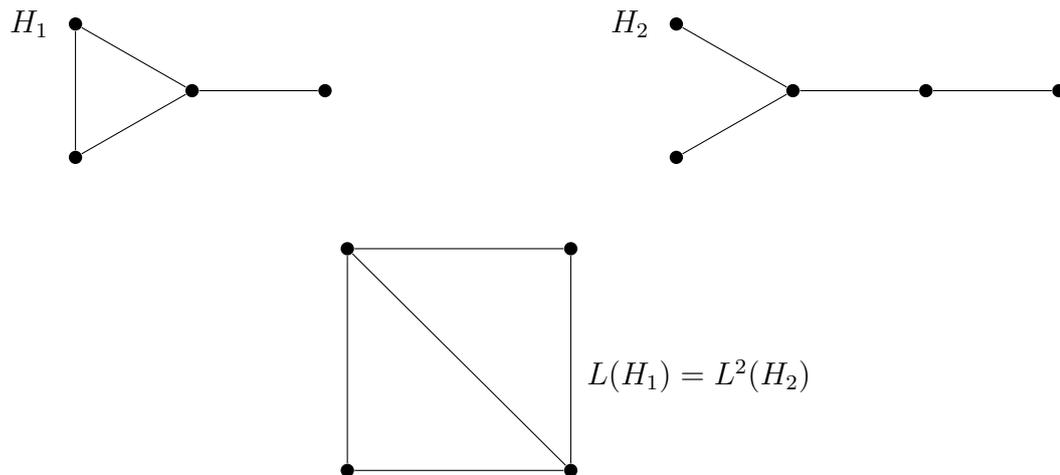


Figura 11: Los dos grafos posibles para el Caso 2.a, y su primer o segundo, respectivamente, grafo de aristas

Caso 2.b: G tiene un vértice de grado 3 unido a vértices de grado 1. Entonces G contiene como subgrafo a $K_{1,3}$, cuyo grafo de aristas es K_3 , grafo 2-regular (es decir, perteneciente a la primera familia).

Esto justifica el uso de la siguiente definición:

Definición 4.14. Un grafo es *prolífico* si es conexo, tiene un vértice de grado al menos 3 y no es $K_{1,3}$.

Notemos que decir que un grafo es prolífico es lo mismo que decir que es conexo y no es un camino, un ciclo o $K_{1,3}$.

Corolario 4.15. Sea G un grafo prolífico, y sea n_k el número de vértices de $L^k(G)$. Entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$.

Introduzcamos la siguiente definición:

Definición 4.16. Sea \mathcal{F} una familia de grafos prolíficos, y P un parámetro. Definimos el *índice* de \mathcal{F} para P por $k(P, \mathcal{F}) = \max \{ind(P, G) : G \in \mathcal{F}\}$. Es decir, el índice de \mathcal{F} para P es el menor número tal que para todo G de \mathcal{F} se tiene $ind(P, G) \leq k(P, \mathcal{F})$.

Tanto para el número de vértices como para el resto de parámetros que nos quedan por estudiar, veamos qué sucede con el índice de \mathcal{F} , siendo \mathcal{F} una familia de grafos prolíficos:

Teorema 4.17. Sea G un grafo prolífico con $n \geq 4$ vértices y m aristas. Entonces:

- (I) Si $m \geq n + 1$, entonces $n_1(G) > n$.
- (II) Si $m = n$, entonces $n_2(G) > n$.
- (III) Si $m = n - 1$, entonces G es un grafo árbol y
 - Si $x_j > 0$ para algún $j \geq 4$, entonces $n_2(G) > n$.
 - Si $x_3 \geq 3$, entonces $n_2(G) > n$.
 - Si $x_3 = 2$, entonces $n_2(G) > n$ pero $n_3(G) > n$ y G es $S_{2,2}$ o una subdivisión de $S_{2,2}$.
 - Si $x_3 = 1$ y G es una subdivisión de tipo B o C de $K_{1,3}$, entonces $n_3(G) > n$.
 - Si $x_3 = 1$ y G es una subdivisión de tipo A de $K_{1,3}$, entonces $n_4(G) > n$.

Demostración. (I) Se tiene $n_1(G) = m \geq n + 1 > n$.

- (II) Si $m = n$, entonces $n_1(G) = m = n$. Ahora, como G es prolífico, en particular no es un ciclo, y por tener el mismo número de aristas que de vértices, no puede ser regular. Aplicando la Proposición 4.4, tenemos que $d_1(G) > 2$, y por el Teorema del apretón de manos,

$$m_1(G) = \frac{d_1(G)n_1(G)}{2} > \frac{2n_1}{2} = n_1(G) = n.$$

Por tanto, $n_2(G) = m_1(G) > n$.

- (III) Como G es un árbol, podemos aplicar la Proposición 4.6, es decir, $2m_1(G) - 2m = -2 + \sum_{j \geq 3} (j-1)(j-2)x_j$. Como G no es un camino, $x_j > 0$ para algún $j \geq 3$.

- Si $x_j > 0$ para algún $j \geq 4$, entonces

$$2m_1(G) - 2m = -2 + \sum_{j \geq 3} (j-1)(j-2)x_j \geq -2 + 6 = 4,$$

y por tanto $n_2(G) - n + 1 = m_1(G) - m \geq 2$, es decir, $n_2(G) \geq n + 1 > n$.

Para el resto de casos, podemos suponer que $x_j = 0$ para todo $j \geq 4$.

- Si $x_3 \geq 3$, entonces

$$2m_1(G) - 2m = -2 + \sum_{j \geq 3} (j-1)(j-2)x_j \geq -2 + 6 = 4,$$

y por tanto $n_2(G) - n + 1 = m_1(G) - m \geq 2$, es decir, $n_2(G) \geq n + 1 > n$.

- Si $x_3 = 2$, entonces

$$2m_1(G) - 2m = -2 + \sum_{j \geq 3} (j-1)(j-2)x_j = -2 + 4 = 2,$$

(en particular, $m_1(G) = m + 1 = n$) y por tanto $n_2(G) - n + 1 = m_1(G) - m = 1$, es decir, $n_2(G) = n$. Pero por otra parte, $m_2(G) = \frac{d_2(G)n_2(G)}{2} = \frac{d_2(G)n}{2}$. Además, puesto que $L(G)$ no es regular (sabemos que G es $S_{2,2}$ o se obtiene de una subdivisión de $S_{2,2}$, y por tanto $L(G)$ tiene vértices de grado 2 y 3), por la Proposición 4.4, tenemos que $d_2(G) > 2(d_1(G) - 1)$. Por tanto,

$$d_2(G) > 2(d_1(G) - 1) = 2 \left(\frac{2m_1(G)}{n_1(G)} - 1 \right) = 2 \left(\frac{2n(G)}{n-1} - 1 \right) = \frac{2(n-1)}{n-1}.$$

Por tanto, $n_3(G) = m_2(G) = \frac{d_2(G)n}{2} > \frac{2(n-1)n}{n-1} > n$.

- Si $x_3 = 1$, entonces G es una subdivisión de $K_{1,3}$. Si es de tipo C , entonces por la Proposición 4.9, tenemos que $n_3(G) = m_2(G) = m(G) + 3 = n - 1 + 3 = n + 2 > n$. Si, por el contrario, es de tipo B , entonces por la Proposición 4.10, tenemos que $n_3(G) = m_2(G) = m(G) + 2 = n - 1 + 2 = n + 1 > n$.
- Si es de tipo A , entonces por la Proposición 4.11, tenemos que $n_3(G) = m_2(G) = m(G) + 1 = n - 1 + 1 = n$, pero $n_4(G) = m_3(G) \geq m(G) + 4 = n - 1 + 4 = n + 3 > n$.

□

Corolario 4.18. $k(n, \mathcal{F}) = 4$.

Número de aristas, $m = m(G)$

Teorema 4.19. Sea G un grafo prolífico, y sea m_k el número de aristas de $L^k(G)$. Entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} m_k = \infty$.

Demostración. Puesto que G es un grafo conexo, sabemos que $m_k \geq n_k - 1$, y por el Corolario 4.15, se tiene el resultado. \square

Teorema 4.20. Sea G un grafo prolífico con $n \geq 4$ vértices. Entonces:

- (I) $m_1(G) \geq m(G)$, y la igualdad se da si y sólo si G es una subdivisión de $K_{1,3}$.
- (II) $m_2(G) \geq m(G) + 1$, y la igualdad se da si y sólo si G es una subdivisión de tipo A de $K_{1,3}$ y $m_2(G) = m_1(G) + 1 = m(G) + 1$.

Demostración. (I) Como G es conexo, por el Teorema 1.23, $L(G)$ es conexo y, por tanto, $m_1(G) \geq n_1(G) - 1 = m(G) - 1$. Si $m_1(G) = m(G) - 1$, entonces, puesto que $m(G) = n_1(G)$, $L(G)$ es un árbol, y esto sólo es posible si G es un grafo camino (si G tuviera algún vértice de grado $d \geq 3$, entonces habría un clique K_d en $L(G)$). Pero esto es absurdo, pues G no sería prolífico. Es decir, $m_1(G) > m(G) - 1$, o sea, $m_1(G) \geq m(G)$.

Para ver la segunda parte, supongamos que $m_1(G) = m(G)$. Por tanto, $d_1(G) = 2$. Si $d(G) = 2$, entonces tenemos que $d_1(G) = 2(d(G) - 1)$, lo que es posible, por el Teorema 4.4, si y sólo si G es 2-regular (es decir, un ciclo), lo que no puede ser pues G es prolífico. Por tanto, $2 > 2(d(G) - 1)$ y $d(G) < 2$. Usando el Teorema del apretón de manos, llegamos a que

$$2 > d(G) = \frac{2m}{n} \Rightarrow m < n,$$

es decir, $m \leq n - 1$. Puesto que G es conexo ($m \geq n - 1$), se tiene que $m = n - 1$, es decir, G es un árbol. Aplicando la Proposición 4.6, tenemos que

$$2m_1(G) - 2m = -2 + \sum_{j \geq 3} (j - 1)(j - 2)x_j.$$

Si $x_3 \geq 2$ o $x_j \geq 1$ para algún $j \geq 4$, entonces tendríamos que

$$-2 + \sum_{j \geq 3} (j - 1)(j - 2)x_j > 0,$$

contradiendo que $m_1(G) = m(G)$. Por tanto, $2m_1(G) - 2m(G) = 0$ si y sólo si $x_3 = 1$ y $x_j = 0$ para $j \geq 4$, es decir, si y sólo si G es una subdivisión de $K_{1,3}$.

- (II) Si G no es una subdivisión de $K_{1,3}$, entonces, por el primer apartado, tenemos que $m_1(G) > m(G)$, y como $L(G)$ tampoco es una subdivisión de $K_{1,3}$, de nuevo, por el primer apartado, tenemos que $m_2(G) > m_1(G) > m(G)$ y, por tanto, $m_2(G) \geq m(G) + 2$.

Por otra parte, si G es una subdivisión de $K_{1,3}$, entonces, por el primer apartado, $m_1(G) = m(G)$. Además, $L(G)$ no es una subdivisión de $K_{1,3}$ (pues $L(G)$ contiene K_3 , formado por las aristas incidentes al vértice de grado 3 de G). Por tanto, de nuevo por el primer apartado, $m_2(G) >$

$m_1(G) = m(G)$. En conclusión, para cualquiera de los dos casos, $m_2(G) > m(G)$.

Además, por la Proposición 4.11, la igualdad se da si y sólo si G es una subdivisión de tipo A de $K_{1,3}$. □

Corolario 4.21. $k(m, \mathcal{F}) = 2$.

Máximo grado de G , $\Delta = \Delta(G)$

Lema 4.22. Para un grafo prolífico G , existe una constante $c(G)$ tal que, para todo $k \geq c(G)$, se tiene $\Delta_{k+1}(G) = 2\Delta_k(G) - 2$.

Teorema 4.23. Sea G un grafo prolífico, y sea Δ_k el máximo grado de $L^k(G)$. Entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_k = \infty$.

Demostración. Aplicando el Lema 4.22, se tiene el resultado. □

Definición 4.24. Un grafo conexo G es un grafo *refinado* si contiene una arista $e = uv$ tal que $\deg(u) + \deg(v) - 2 > \Delta(G)$.

Teorema 4.25. Sea G un grafo prolífico con $\Delta(G) \geq 3$. Entonces

- (I) $\Delta_1(G) > \Delta(G)$ si y sólo si G es un grafo refinado.
- (II) Si G no es un grafo refinado y $\Delta(G) \geq 4$, entonces $\Delta_2(G) > \Delta(G)$, a menos que $G = K_{1,4}$.
- (III) Si G no es un grafo refinado y $\Delta(G) = 3$, entonces $\Delta_2(G) > \Delta(G)$, a menos que G sea o bien una subdivisión de $K_{1,3}$ de tipo A , o bien un árbol obtenido de $S_{2,2}$ subdividiendo la arista del medio al menos dos veces.

Demostración. (I) Se deduce fácilmente de que

$$\begin{aligned} \Delta_1(G) &= \max \{ \deg(e) : e \text{ vértice de } L(G) \} = \\ &= \max \{ \deg(u) + \deg(v) - 2 : u, v \text{ vértices adyacentes de } G \}. \end{aligned}$$

- (II) Supongamos $\Delta \geq 4$. Sea v el vértice de G de grado Δ . Entonces todos los vértices adyacentes de v tienen grado 1 ó 2 (en caso contrario, tendríamos un grafo refinado).

Si todos los vértices adyacentes a v son de grado 1, entonces $G = K_{1,\Delta}$, y, por tanto, $L(G) = K_\Delta$, que es un grafo $\Delta - 1$ -regular, y por tanto, usando el Teorema 1.22.(II), tenemos que

$$\Delta_2(G) = 2\Delta_1(G) - 2 = 2(\Delta - 1) - 2 = 2\Delta - 4 > \Delta$$

para $\Delta > 4$.

Si $\Delta = 4$, entonces tenemos $G = K_{1,4}$, $L(G) = K_4$, $L^2(G) = K_{2,2,2}$, y entonces, $\Delta_2(G) = 4$. Por tanto,

$$\Delta_3(G) = 2\Delta_2(G) - 2 = 8 - 2 = 6 > 4 = \Delta(G).$$

Ahora, supongamos que al menos un vértice de los adyacentes a v es de grado 2. Consideremos las Δ aristas incidentes a v . Estas aristas (vistas como vértices en $L(G)$) forman K_Δ en $L(G)$, y como al menos una de estas aristas es incidente a un vértice de grado 2 en G , entonces dicha arista, vista como vértice de $L(G)$, tiene grado Δ (es adyacente a $\Delta - 1$ vértices en K_Δ , y al vértice generado por la otra arista incidente al vértice de grado 2). Ahora, tomamos una arista de este K_Δ que una el vértice de grado Δ con un vértice (también del K_Δ) de grado al menos $\Delta - 1$. Dicha arista, vista como vértice de $L^2(G)$, tiene grado $\Delta + (\Delta - 1) - 2$. Y como $\Delta \geq 4$, tenemos que

$$\Delta + (\Delta - 1) - 2 \geq \Delta + 1 > \Delta.$$

- (III) Supongamos $\Delta = 3$. Sea v un vértice de grado Δ . Podemos suponer, al igual que antes, que los vértices adyacentes a v son de grado 1 ó 2, y que al menos uno de estos vértices es de grado 2 (en caso contrario, tendríamos $G = K_{1,3}$, absurdo pues G es prolífico).

Supongamos que v tiene al menos dos vértices adyacentes de grado 2, u y w . Entonces en $L(G)$, los vértices uv y vw tienen grado 3, y en $L^2(G)$, la arista que une dichos vértices tendrá grado 4. Por tanto, $\Delta_2(G) = 4 > \Delta_1(G) = \Delta(G) = 3$.

Ahora, supongamos que los vértices de grado Δ tienen exactamente un vértice adyacente de grado 2. Entonces G no puede tener como subgrafo inducido un ciclo (si lo tuviera, al ser G prolífico, debería haber un vértice del ciclo adyacente a un vértice de fuera del ciclo, lo que hace que dicho vértice sea de grado 3 adyacente a dos vértices de grado 2, caso que hemos descartado). Por tanto, G es un árbol. Y además, G tiene 1 ó 2 vértices de grado 3 (no puede tener 3 o más, puesto que no se cumpliría que los vértices de grado 3 son adyacentes a sólo un vértice de grado 2).

- Si G sólo tiene un vértice de grado 3, siendo este vértice adyacente a sólo un vértice de grado 2, entonces G es una subdivisión de $K_{1,3}$ de tipo A , y por tanto, $\Delta_2(G) = \Delta_1(G) = 3$, y $\Delta_3(G) = 4$.
- Si G tiene dos vértices de grado 3, entonces o bien hay dos aristas entre ambos vértices, o bien hay 3 o más (no puede haber sólo una arista pues entonces G no sería refinado, puesto que habría dos vértices de grado 3 adyacentes). Si hay dos aristas, entonces $\Delta_1(G) = 3, \Delta_2(G) = 4$, mientras que si hay 3 o más aristas (y por tanto G se ha obtenido como una subdivisión de $S_{2,2}$ subdividiendo la arista del medio), entonces $\Delta_2(G) = \Delta_1(G) = 3, \Delta_3(G) = 4$.

□

Corolario 4.26. $k(\Delta, \mathcal{F}) = 3$.

Mínimo grado de G , $\delta = \delta(G)$

Lema 4.27. Para un grafo prolífico G , existe una constante $c(G)$ tal que, para todo $k \geq c(G)$, se tiene $\delta_{k+1}(G) = 2\delta_k(G) - 2$.

Teorema 4.28. Sea G un grafo prolífico, y sea δ_k el mínimo grado de $L^k(G)$. Entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = \infty$.

Demostración. Aplicando el Lema 4.27, se tiene el resultado. \square

Teorema 4.29. Sea G un grafo prolífico con $n \geq 4$ vértices.

(I) Si $\mathcal{F} = \{G : \delta(G) \in \{1, 2\}\}$. Entonces $k(\delta, \mathcal{F}) = \infty$.

(II) Si $\mathcal{F} = \{G : \delta(G) \geq 3\}$. Entonces $k(\delta, \mathcal{F}) = 1$.

Demostración. (I) Para $\delta(G) = 1$, consideramos el grafo prolífico G que contiene un camino de longitud l . Necesitamos l iteraciones para hacer que el vértice de grado 1 desaparezca.

Para $\delta(G) = 2$, consideramos el grafo prolífico G que contiene dos vértices u y v unidos por un camino de longitud l . Necesitamos $\lceil \frac{l}{2} \rceil$ iteraciones para hacer que los vértices de grado 2 de este camino desaparezcan.

(II) Para $\delta(G) \geq 3$, entonces por el Teorema 1.22.(I) tenemos que $\delta_1(G) \geq 2(\delta(G) - 1) > \delta(G)$.

\square

Grado promedio de G , $d = d(G)$

Teorema 4.30. Sea G un grafo prolífico, y sea d_k el grado promedio de $L^k(G)$. Entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} d_k = \infty$.

Demostración. Por definición, $\delta(G) \leq d(G)$. Aplicando el Teorema 4.28, se tiene el resultado. \square

Teorema 4.31. Sea G un grafo prolífico con $n \geq 4$ vértices. Entonces $d_1(G) > d(G)$.

Demostración. Por el Teorema 4.4, $d_1(G) \geq 2(d(G) - 1)$, con igualdad si y sólo si G es regular. Como G es prolífico, se tiene que o bien G es regular con $d(G) \geq 3$ (y en ese caso

$$d_1(G) = 2(d(G) - 1) = d(G) + d(G) - 2 \geq d(G) + 3 - 2 = d(G) + 1 > d(G)$$

y se tiene lo pedido), o bien es no regular. En este segundo caso, tenemos dos opciones:

- $d(G) < 2$: sabemos que, por ser G prolífico (en particular, conexo), se tiene que $d(G) > 1$. Por tanto, por 4.4,

$$d_1(G) > 2(d(G) - 1) > 2 > d(G).$$

- $d(G) \geq 2$: entonces el resultado se deduce de 4.4:

$$d_1(G) > d(G) + d(G) - 2 \geq d(G).$$

\square

Corolario 4.32. $k(d, \mathcal{F}) = 1$.

Otros parámetros

Existen otros parámetros muy comunes también en la Teoría de Grafos de los que también existen resultados interesantes a la hora de iterar los grafos de aristas. Algunos de dichos parámetros son: el número cromático y el índice cromático (ver Capítulo 7), el número de emparejamiento, la conectividad de vértices y de aristas, el número de independencia... No entraremos en dichos resultados ni en las definiciones de los términos no usados en este trabajo, pero el lector puede consultar [5] para encontrar los detalles.

Capítulo 5

Espectro de los grafos de aristas

En este capítulo haremos un estudio de las matrices más usuales a la hora de tratar con grafos: las matrices de adyacencia, así como de los autovalores asociadas a dichas matrices. Se dará una relación para calcular la matriz de adyacencia del grafo de aristas a partir de la matriz de adyacencia y de incidencia del grafo original. Además, daremos una cota inferior para los autovalores de los grafos de aristas. Las referencias para este capítulo son [1], [6], [7] y [8].

Definición 5.1. Dada una matriz cuadrada M ,

- (I) su *polinomio característico*, $\phi(M, \lambda)$ es el determinante de $\lambda I - M$, donde I es la matriz identidad,
- (II) sus *autovalores* son las raíces de su polinomio característico,
- (III) sus *autovectores* son los vectores $x \neq 0$ soluciones del sistema $Mx = \lambda x$, donde λ es un autovalor de M ,
- (IV) su *espectro* es el conjunto de autovalores junto con sus respectivas multiplicidades.

Definición 5.2. Sea G un grafo con vértices v_1, v_2, \dots, v_n . Definimos la *matriz de adyacencia* de G a la matriz $n \times n$ que en la entrada (i, j) tiene un 1 si los vértices v_i, v_j son adyacentes, y 0 en caso contrario. Denotamos por $A(G)$ a dicha matriz.

Observación 5.3. (I) Es obvio que la matriz $A(G)$ es simétrica (y, por tanto, sus autovalores son reales). Además, tanto la suma de los elementos de la i -ésima fila como de la i -ésima columna coincide con el grado del vértice v_i .

- (II) Cuando se haga referencia al polinomio característico, autovalores, autovectores o espectro de un grafo G , nos referiremos a los de su matriz de adyacencia.

Definición 5.4. Sea G un grafo con vértices v_1, v_2, \dots, v_n y aristas e_1, \dots, e_m . Definimos la *matriz de incidencia* de G a la matriz $n \times m$ que en la entrada (i, j) tiene un 1 si el vértice v_i y la arista e_j son incidentes, y 0 en caso contrario. Denotamos por $B(G)$ a dicha matriz.

Definición 5.5. Sea G un grafo con vértices v_1, v_2, \dots, v_n . Definimos la *matriz de grados* de G a la matriz diagonal $n \times n$ que en la entrada (i, i) tiene el grado del vértice v_i . Denotamos por $D(G)$ a dicha matriz.

Ilustremos con un ejemplo estas definiciones. Tomando el grafo L_4 de la Figura 2 (en la Figura 12 están señalados en rojo los nombres de los vértices v_i y en azul los de las aristas e_j), obtenemos las siguientes matrices:

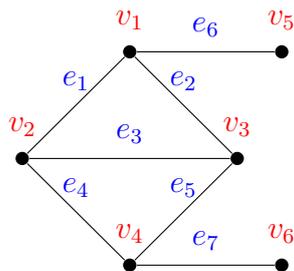


Figura 12: Grafo L_4 de la Figura 2. En rojo, el nombre de los vértices; en azul, el nombre de las aristas

$$A(L_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B(L_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D(L_4) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema 5.6. Para un grafo G , se tiene:

(I) $A(G) = B(G)B(G)^T - D(G)$.

(II) $A(L(G)) = B(G)^T B(G) - 2I$.

Demostración. (I) Sean v_i y v_j dos vértices de G . Si $v_i \sim v_j$, entonces la entrada (i, j) de la matriz es $B(G)B(G)^T$ es 1. Si $v_i \not\sim v_j$, entonces dicha entrada es 0. Por otra parte, el elemento (i, i) de $B(G)B(G)^T$ es el grado del vértice v_i , de donde se deduce el resultado.

(II) Siguiendo la misma idea, sean e_i y e_j dos aristas de G . Si estas aristas son adyacentes, entonces la entrada (i, j) de la matriz es $B(G)^T B(G)$ es 1. Si no son adyacentes, entonces dicha entrada es 0. Además, cada elemento de la diagonal es un 2, de donde se deduce el resultado. \square

Lema 5.7. Si M es una matriz $n \times m$ ($m \geq n$), entonces $\phi(M^T M, x) = x^{m-n} \phi(M M^T, x)$.

Teorema 5.8. Sea G un grafo d -regular con n vértices y m aristas. Entonces

$$\phi(L(G), \lambda) = (\lambda + 2)^{m-n} \phi(G, \lambda - d + 2).$$

Demostración. Usando el Teorema 5.6.(II), tenemos que

$$\begin{aligned} \phi(L(G), \lambda) &= \det(\lambda I - A(L(G))) = \\ &= \det(\lambda I + 2I - B(G)^T B(G)) = \\ &= \det((\lambda + 2)I - B(G)^T B(G)) = \\ &= \phi(B(G)^T B(G), \lambda + 2). \end{aligned}$$

Usando el Lema 5.7, tenemos que

$$\phi(B(G)^T B(G), \lambda + 2) = (\lambda + 2)^{m-n} \phi(B(G)B(G)^T, \lambda + 2).$$

Por último, usando el Teorema 5.6.I, llegamos a

$$\begin{aligned} \phi(B(G)B(G)^T, \lambda + 2) &= \phi(A(G) + dI, \lambda + 2) = \\ &= \det((\lambda + 2)I - A(G) + dI) = \\ &= \det((\lambda - d + 2)I - A(G)) = \\ &= \phi(A(G), \lambda - d + 2). \end{aligned}$$

□

Proposición 5.9. Sea G un grafo cuyo mayor autovalor es Λ . Entonces $\Lambda \leq \Delta(G)$.

Demostración. Sea A la matriz de adyacencia de G , y sea $d_i = \deg(v_i)$. Por otra parte, sea $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ el autovector asociado a Λ , y sea $u = (1, 1, \dots, 1)^T$ el vector de todo unos. Entonces

$$\Lambda = \frac{\Lambda x^T u}{x^T u} = \frac{x^T A u}{x^T u} = \frac{\sum x_i d_i}{\sum x_i} \leq \Delta.$$

□

Teorema 5.10. Para todo λ autovalor de $L(G)$, se tiene $-2 \leq \lambda \leq \Delta(L(G))$.

Demostración. La cota superior se deduce de la Proposición 5.9. Para la cota inferior, observemos que la matriz $B(G)^T B(G)$ es semidefinida positiva, por lo que todos sus autovalores son mayores o iguales que 0 y, por tanto, las raíces del polinomio $\phi(B(G)B(G)^T, x+2)$ son mayores o iguales que -2. Usando la igualdad $\phi(B(G)B(G)^T, x+2) = \phi(B(G)B(G)^T - 2I, x)$ (en particular, las raíces de ambos polinomios son las mismas) y el Teorema 5.6.(II), se deduce el resultado. □

Lema 5.11. Sea M y N dos matrices. Entonces:

(I) Si M es cuadrada, entonces es invertible si y sólo si 0 no es un autovalor de M .

(II) $r(MN) \leq \min \{r(M), r(N)\}$, donde $r(M)$ es el rango de M .

Teorema 5.12. Sea $\lambda(L(G))$ el menor de los autovalores de $L(G)$, siendo G un grafo con n aristas y m vértices. Entonces $\lambda(L(G)) = -2$ si $r(L(G)) < m$.

Demostración. Usando el Lema 5.11.(II), tenemos que

$$\begin{aligned} r(B(G)^T B(G)) &\leq \min \{r(B(G)^T), r(B(G))\} \\ &= \min \{r(B(G)), r(B(G))\} \\ &= r(B(G)) < m. \end{aligned}$$

Es decir, $B(G)^T B(G)$, que es una matriz $m \times m$, no es invertible, y por el Lema 5.11.(I), 0 es un autovalor de $B(G)^T B(G)$, lo que implica que -2 es un autovalor de $B(G)^T B(G) - 2I = A(L(G))$. \square

Capítulo 6

Transitabilidad

Por transitabilidad entendemos la propiedad de un grafo para ser recorrido por todos sus vértices sin pasar dos veces por la misma arista. En esta sección hablaremos tanto de grafos eulerianos como de grafos hamiltonianos, y daremos condiciones para las que un grafo de aristas es de alguno de estos dos tipos. Además, introduciremos el concepto de índice hamiltoniano, pero no haremos un estudio exhaustivo del mismo. Las referencias para este capítulo son [1] y [3].

6.1. Grafos eulerianos y grafos de aristas

Definición 6.1. Un camino es *euleriano* si se puede recorrer entero pasando por cada arista exactamente una vez. Si al recorrerlo se termina en el vértice inicial, entonces es un *ciclo euleriano*. Un grafo es *euleriano* si contiene (al menos) un ciclo euleriano.

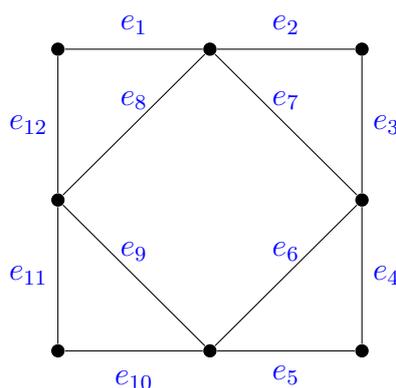


Figura 13: Ejemplo de grafo euleriano, donde las aristas están numeradas según un ciclo euleriano

Teorema 6.2. (Teorema de caracterización de Euler) Si un grafo es conexo, entonces es euleriano si y sólo si todos sus vértices tienen grado par.

Demostración. (\Rightarrow) Sea G euleriano. Cada vez que recorremos un vértice de G , el grado de dicho vértice aumenta en 2, y como cada línea de G se recorre sólo una vez, entonces cada vértice tiene grado par.

(\Leftarrow) Ahora, sean v_0, v_1, \dots, v_k vértices de G . Definimos $W := v_0v_1\dots v_k$ el camino más largo de G en el que cada arista se recorre como mucho una vez (pero cada vértice se puede atravesar más de una vez). Observemos que W debe contener todas las aristas incidentes con v_k ; en caso contrario, W se podría extender, en contra de la maximalidad de W . Además, se debe dar $v_0 = v_k$ (supongamos que no, y sea l el número de veces que pasamos por v_k al recorrer W . Entonces el grado de v_k en W (y también en G) sería $2(l - 1) + 1$, que es impar, en contra de la hipótesis inicial). Ahora, razonemos por reducción al absurdo, suponiendo que W no es un ciclo euleriano. Dado que W es conexo, podemos encontrar una arista que no esté en W pero que sea incidente a algún vértice de W . Denotamos uv_i a esta arista, para algún i , $1 \leq i \leq k$. Entonces podemos encontrar un camino

$$uv_iv_{i+1}\dots v_kv_1v_2\dots v_i,$$

que es estrictamente más largo de W , y cuyas aristas se recorren sólo una vez, lo que es absurdo por la definición de W . Por tanto, W es un ciclo euleriano. \square

Teorema 6.3. El grafo de aristas de un grafo conexo G es euleriano si y sólo si los grados de los vértices de G tienen todos la misma paridad.

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que $L(G)$ es euleriano. Por el Teorema 6.2, el grado de los vértices de $L(G)$ es par, y como el grado de un vértice $e = vw$ de $L(G)$ es $\deg(v) + \deg(w) - 2$, entonces v y w tienen ambos o grado par o grado impar. Puesto que G es conexo, se tiene que entonces todos los vértices tienen grado par o impar.

(\Leftarrow) Recíprocamente, si los vértices de G tienen todos la misma paridad, razonando como antes, llegamos a que el grado de los vértices de $L(G)$ es par, y volviendo a aplicar el Teorema 6.2, se tiene lo pedido. \square

Corolario 6.4. El grafo de aristas de un grafo euleriano es euleriano.

Demostración. Si un grafo es euleriano, por el Teorema 6.2, todos sus vértices tienen grado par; en particular, tienen la misma paridad. Aplicando el Teorema 6.3, se tiene el resultado. \square

Teorema 6.5. Un grafo conexo G es el grafo de aristas de un grafo euleriano si y sólo si existe una partición de las aristas de G en grafos completos con un número par de vértices, y tal que cada vértice está presente en exactamente dos de dichos subgrafos.

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que G es el grafo de aristas de un grafo euleriano H , y sea $e = vw$ una arista de H . Entonces, las aristas incidentes a e (visto como vértice en $G = L(H)$) forman dos subgrafos completos (con el vértice e en común): uno con $\deg(v)$ vértices y el otro con $\deg(w)$ vértices. Pero por ser H euleriano, tanto $\deg(v)$ como $\deg(w)$ son pares. Por tanto, los subgrafos completos tienen un número par de vértices.

(\Leftarrow) Ahora, sea G tal que existe una partición de sus aristas como la descrita en la hipótesis. Por el Teorema 2.2, G es el grafo de aristas de algún grafo H , cuyos vértices son los subgrafos completos de G . Dichos vértices como grado el número de vértices de los subgrafos completos, que por hipótesis es par. Por tanto, por el Teorema 6.2, se tiene que H es euleriano. \square

6.2. Grafos hamiltonianos y grafos de aristas

Definición 6.6. Un camino en un grafo es *hamiltoniano* si recorre todos los vértices del grafo pasando por cada uno exactamente una vez. Si al recorrerlo se termina en el vértice inicial, entonces es un *ciclo hamiltoniano*. Un grafo es *hamiltoniano* si contiene un ciclo hamiltoniano.



Figura 14: Ejemplo de un grafo no hamiltoniano (izquierda) y hamiltoniano (derecha)

Definición 6.7. Dado un ciclo C de $L(G)$, decimos que un vértice de G es *básico* a C si hay al menos dos aristas de G incidentes a él que forman parte de los vértices del ciclo.

Definición 6.8. Diremos que un camino *recubre* a las aristas que tienen al menos uno de sus vértices en dicho camino.

Teorema 6.9. El grafo de aristas de un grafo conexo G es hamiltoniano si y sólo si G tiene un ciclo en el que no se repite ninguna arista y que recubre cada arista de G .

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que $L(G)$ contiene un ciclo hamiltoniano, C_L , y sean w_1, w_2, \dots, w_k vértices de G básicos a C_L . Por definición, los vértices consecutivos de la secuencia anterior deben ser adyacentes, puesto que $w_i w_{i+1}$ es un vértice de C_L . Por tanto, $W := w_1 w_2 \dots w_k w_1$ es un ciclo en el que no se repite ninguna arista. Además, como cada arista de G es un vértice en C_L (por ser C_L un ciclo hamiltoniano), W debe recorrer todas las aristas de G .

(\Leftarrow) Recíprocamente, supongamos que G tiene un ciclo $C = v_1 v_2 \dots v_k$ con todos los vértices distintos (salvo el último y el primero). Entonces las aristas que unen los vértices consecutivos de la secuencia anterior forman un ciclo C_L en $L(G)$. Consideramos ahora $v_1 v_2$. Si en G hay una arista incidente a v_2 y que no está

en C , al pasar a $L(G)$ podemos incluir el vértice correspondiente en C_L , dando lugar a un ciclo más largo. Repitiendo este proceso para todos los vértices de C y para todas las aristas incidentes a dichos vértices que no estén en C , y dado que por hipótesis todas las aristas de G tienen al menos un vértice en C , obtenemos que C_L es un ciclo hamiltoniano en $L(G)$. \square

Corolario 6.10. (I) El grafo de aristas de un grafo euleriano es euleriano y hamiltoniano.

(II) El grafo de aristas de un grafo hamiltoniano es hamiltoniano.

Demostración. (I) La primera parte es el Corolario 6.4. Para la segunda, basta con observar que un ciclo euleriano es por definición un ciclo que recubre todas las aristas del grafo. Aplicando el Teorema 6.9, se tiene el resultado.

(II) Un ciclo hamiltoniano recorre todos los vértices de un grafo; por tanto, recubre todas las aristas del grafo. Aplicando el Teorema 6.9, se tiene el resultado. \square

Teorema 6.11. Si G es un grafo conexo con al menos 3 vértices y sin vértices de grado 2, entonces $L^2(G)$ es hamiltoniano.

Demostración. Las aristas incidentes a cada vértice v de G forman subgrafos completos en $L(G)$. A menos que el grado de v sea 2, obtenemos en $L(G)$ o bien el grafo unipuntual (si $\deg(v) = 1$), o bien un subgrafo que contiene un ciclo hamiltoniano. Ahora, consideramos el subgrafo H de $L(G)$ formado por un ciclo hamiltoniano de cada uno de los subgrafos completos generados por los vértices de grado mayor o igual que 3. Notemos que cada uno de los vértices de $L(G)$ está en uno o dos de estos ciclos y, por tanto, H es un ciclo hamiltoniano de $L(G)$, cuyos vértices tiene grado 2 (si están sólo en un subgrafo) ó 4 (si están en dos). Por tanto, por el Teorema 6.3, H contiene un ciclo euleriano. Además, este ciclo recubre todas las aristas de $L(G)$. Por tanto, por el Teorema 6.9, el grafo de aristas de $L(G)$, $L^2(G)$, es hamiltoniano. \square

Teorema 6.12. Si G es un grafo conexo que no es un camino, entonces existe un $r > 0$ tal que $L^r(G)$ es hamiltoniano.

Demostración. Sea G un grafo conexo que no es un camino. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que G es prolífico (si G fuera un ciclo o $K_{1,3}$, entonces $L(G)$ sería un ciclo, que además es hamiltoniano). Por el Teorema 4.28, existe un $r > 0$ tal que $L^r(G)$ no tiene vértices de grado 2. Aplicando el Teorema 6.11, se tiene que $L^{r+2}(G)$ es hamiltoniano. \square

Usando el Corolario 6.10.(II), observamos que si existe un $r > 0$ tal que $L^r(G)$ es hamiltoniano, entonces para todo $k > r$, $L^k(G)$ será hamiltoniano. Por ello, introducimos la siguiente definición:

Definición 6.13. El número r de la observación anterior se llama el *índice hamiltoniano* de G .

Un resultado interesante (que no demostraremos aquí) es que entre todos los grafos conexos con $n \geq 4$ vértices y grado máximo $\Delta \geq 3$, el máximo índice hamiltoniano es $n - \Delta$. Sin embargo, para el caso general, el problema de calcular el índice hamiltoniano es NP-completo. El lector puede comprobar los detalles en [1].

Capítulo 7

Colorabilidad

Este capítulo lo dedicaremos al estudio de dos de los parámetros más estudiados en la Teoría de grafos: el número cromático y el índice cromático de los grafos de aristas. En la primera sección comprobaremos que el número cromático de un grafo de aristas es el índice cromático del grafo original, lo que nos permitirá enunciar de dos maneras distintas los teoremas de esta sección, entre ellos algunos teoremas clásicos como son el de König y el de Vizing. En la segunda sección daremos resultados sobre el cálculo de los coeficientes del polinomio cromático de los grafos de aristas. Las referencias principales de este capítulo son [1], [9] y [10].

7.1. Número e índice cromático

Definición 7.1. Una *coloración de vértices* (o, si no hay confusión, simplemente *coloración*) de un grafo G es una asignación de colores a los vértices de tal forma que no hay dos vértices adyacentes con el mismo color. Una *coloración de aristas* es una asignación de colores a las aristas de tal forma que no hay dos aristas adyacentes con el mismo color.

Definición 7.2. El *número cromático* de un grafo G es el número mínimo de colores para obtener una coloración de G . Lo denotamos por $\chi(G)$.

Definición 7.3. El *índice cromático* de un grafo G es el número mínimo de colores para obtener una coloración de aristas de G . Lo denotamos por $\chi'(G)$.

Proposición 7.4. Dado un grafo G , se tiene $\chi(L(G)) = \chi'(G)$.

Demostración. Por definición, dos vértices de $L(G)$ son adyacentes si y sólo si las dos aristas de G correspondientes son adyacentes. Por tanto, una coloración de aristas G es igual a una coloración de $L(G)$. \square

Definición 7.5. Diremos que un grafo es *cúbico* si todos sus vértices tienen grado 3. Dicho de otro modo, un grafo cúbico es un grafo 3-regular.

Teorema 7.6. Son equivalentes:

(I) Todos los mapas planos admiten una coloración con 4 colores.

(II) Si un grafo cúbico G es plano, entonces $\chi'(G) = 3$.

(III) Si un grafo cúbico G es plano, entonces $\chi(L(G)) = 3$.

Demostración. (I) \Rightarrow (II) Sea M un mapa plano cúbico conexo. Como se cumple (I), tenemos 4 colores, pongamos amarillo, rojo, azul y verde, que generan una coloración de M . Tomamos ahora G el grafo de los bordes de las regiones del mapa (obtenemos así un grafo cúbico plano). Cada arista de G une dos regiones de colores distintos. Asignemos un color A a las aristas que unen las regiones amarillo-rojo y a las que unen las regiones verde-azul, un color B a las aristas que unen las regiones amarillo-verde y a las que unen las regiones rojo-azul, y un color C a las aristas que unen las regiones amarillo-azul y a las que unen las regiones rojo-verde.

(II) \Rightarrow (I) Supongamos que se cumple (II), y veamos que cada mapa plano se puede colorear con 4 colores. Sea M un mapa plano. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que el mapa M está triangulado (si no fuera el caso, pueden añadirse tantas aristas como sea necesario), y tomamos G como su grafo asociado (aquel en el que los vértices representan las regiones de M). G es entonces un grafo cúbico plano, y por hipótesis, existe una coloración de sus aristas con 3 colores, pongamos azul, verde y rojo. Observemos que el subgrafo de G formado por las aristas de 2 de los 3 colores está formado por ciclos disjuntos, y además, cada región de M está o bien en el interior de uno de estos ciclos disjuntos, o fuera de todos ellos. Tomamos ahora dos pares de los colores de las aristas, por ejemplo rojo-azul y rojo-verde. Entonces para una región de M , hay cuatro posibilidades:

- (A) la región queda dentro de un ciclo con ambas combinaciones de colores,
- (B) la región queda dentro de un ciclo rojo-azul pero fuera de los ciclos rojo-verde,
- (C) la región queda dentro de un ciclo rojo-verde pero fuera de los ciclos rojo-azul,
- (D) la región queda fuera de los ciclos de ambas combinaciones de colores.

Asignándole a cada una de estas opciones un color distinto, obtenemos una coloración de M con 4 colores.

(II) \Leftrightarrow (III) Se deduce de la Proposición 7.4. □

Proposición 7.7. Supongamos que G es un grafo con el menor número de aristas para el que $\chi'(G) > \lambda$. Entonces, para toda coloración de aristas de $G - xy$ tal que el color A no está en el vértice x y el color B no está en el vértice y , se tiene que existe un camino de colores alternados A y B de longitud par que va de y a x .

Demostración. La existencia de un camino que empiece en y y que alterne los colores A y B es obvia (incluimos el caso en el que se obtenga el grafo camino trivial, formado sólo por un vértice).

Veamos que acaba en x por reducción al absurdo: supongamos que el camino termina en otro vértice. Entonces, intercambiando los colores del camino (esto no afecta a la adyacencia de aristas con el mismo color), y añadiendo la arista xy de color A , obtenemos una coloración de aristas de G con λ colores, absurdo. Por tanto, el camino termina en x .

Por último, la longitud debe ser par, pues en caso contrario, el camino terminaría con una arista de color A incidente con x , absurdo. \square

Teorema 7.8. (Teorema de König) El número cromático del grafo de aristas de un grafo bipartito G es el máximo grado de G : $\chi(L(G)) = \Delta(G)$.

Demostración. Probemos el teorema es un versión equivalente para el índice cromático de G . Denotamos $\Delta = \Delta(G)$. Puesto que todas las aristas incidentes con un mismo vértice de G deben tener colores diferentes, se tiene que $\chi'(G) \geq \Delta$. Demostraremos la otra desigualdad por reducción al absurdo. Entonces, supongamos que G es un grafo bipartito con el menor número de aristas para el que $\chi'(G) > \Delta$, y sea $e = vw$ una arista de G . Por tanto, $G - e$ admite una coloración de aristas con a lo sumo Δ colores. Al quitar la arista e , se tiene que ahora los vértices v y w tienen grado $< \Delta$, es decir, tienen menos de Δ colores, y, por tanto, falta al menos un color en cada uno de estos vértices. Si algún color falta en ambos vértices a la vez, entonces dicho color está disponible para la arista e , obteniendo así una coloración de aristas de G con Δ colores, absurdo. Por tanto, supongamos que en el vértice v no está el color A , y en el vértice w no está el color B . Entonces, si v y w están en la misma componente, por la Proposición 7.7, existe un camino de longitud par alternando los colores A y B que va de v a w , contradiciendo por la Proposición 1.9 que G sea bipartito (ya que si añadiésemos la arista vw , obtendríamos un ciclo de longitud impar). Por tanto, v y w deben estar en componentes distintas. Si en la componente de w intercambiamos los colores A y B de las aristas correspondientes, obtenemos una coloración de $G - e$ en la que tanto en v como en w falta el color A , y por tanto, al igual que antes, podría añadirse una arista vw con ese color, con lo que obtendríamos de nuevo una coloración de aristas con Δ colores, absurdo. En conclusión, $\chi'(G) \leq \Delta$. \square

Teorema 7.9. (Teorema de Vizing) El número cromático del grafo de aristas de un grafo G es $\Delta(G)$ ó $\Delta(G) + 1$: $\Delta(G) \leq \chi(L(G)) \leq \Delta(G) + 1$.

Demostración. Demostraremos la versión equivalente para el índice cromático de G . Denotamos $\Delta = \Delta(G)$. La primera desigualdad se deduce de igual manera que en el Teorema de König. Veamos la segunda desigualdad por inducción sobre el número de aristas de G . Para el caso de una sola arista, la desigualdad se da de forma trivial. Supongamos entonces que dada cualquier arista e de G , existe una coloración de aristas de $G - e$ que usa a lo sumo $\Delta + 1$ colores. Entonces, en cada vértice de $G - e$ hay como mucho Δ colores, por lo que al menos falta un color en cada vértice.

Supongamos entonces que $\chi'(G) > \Delta + 1$. Sea wv_0 una arista de G . Definimos $G_0 := G - wv_0$, que por hipótesis, admite una coloración de aristas c_0 con $\Delta + 1$ colores. Sea A el color que falta en el vértice w . Por otra parte, sea $M = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ el conjunto maximal de vértices adyacentes a w tales que el color de wv_{i+1} en la coloración de aristas c_0 (denotamos dicho color por $c_0(wv_{i+1})$) no está en el vértice v_i para todo $i < k$. Definimos, para cada grafo $G_i := G - wv_i$, la coloración de aristas c_i :

$$c_i(e) := \begin{cases} c_0(wv_{i+1}) & \text{para } e = wv_j \text{ con } j \in \{0, 1, \dots, i-1\}, \\ c_0(e) & \text{en otro caso;} \end{cases}$$

Observemos que en cada coloración c_i , en el vértice w faltan los mismos colores que para c_0 .

Ahora, sea B un color que no está en v_k para c_0 . Por la Proposición 7.7, existe un camino que alterna los colores A y B que empieza en v_k en G_k (con la coloración de aristas c_k) y que acaba en w (la última arista de este camino, wv , es de color B , puesto que w no tiene el color A). El vértice v no puede ser v_{k+1} por la maximalidad del conjunto M , por lo que debe ser $v = v_i$ para algún $i, 0 \leq i < k$. Por definición de c_k , se tiene que $B = c_k(wv_i) = c_0(wv_{i+1})$. Por cómo hemos elegido v_{i+1} , se tiene que el color B falta en v_i en c_0 , y, por tanto, también en c_i . Tomamos ahora el camino P que empieza en v_i en G_i con respecto a c_i y acaba en w : el comienzo de este camino coincide con el camino $v_i \cdots v_k$ que hemos considerado en G_k , puesto que el camino $v_k \cdots v_i$ está coloreado de la misma manera en c_i y en c_k . Pero entonces, en c_0 (y, por tanto, en c_i), no hay ninguna arista incidente con v_k de color B . Por tanto, dado que la arista anterior del camino P es de color A , P debe acabar en v_k , contradiciendo la Proposición 7.7 (debería acabar en w pues no hay aristas incidentes con dicho vértice de color A). Hemos llegado a un absurdo, y por tanto, $\chi'(G) \leq \Delta + 1$.

□

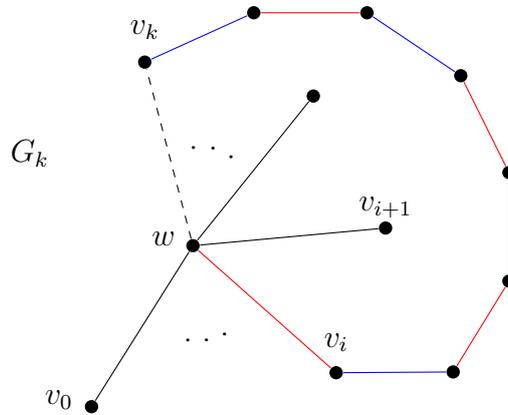


Figura 15: Grafo G_k de la demostración de 7.9

7.2. Polinomio cromático

Definición 7.10. Dado un grafo G , su *polinomio cromático* es una función que determina el número de maneras distintas de colorear un grafo usando k colores. Lo denotamos por $P(G, k)$.

Proposición 7.11. El polinomio cromático es un polinomio en k .

Demostración. Primero, notemos que tenemos la siguiente igualdad: dados u, v dos vértices no adyacentes, si denotamos por G/uv el grafo obtenido colapsando u y v en un sólo vértice, entonces

$$P(G, k) = P(G + uv, k) + P(G/uv, k)$$

Esta expresión se deduce de lo siguiente:

- Si u y v tienen colores diferentes, entonces el número de formas de colorear los vértices de G coincide con el número de formas de colorear los vértices de $G + uv$ con k colores.
- Si u y v tienen el mismo color, entonces el número de formas de colorear los vértices de G coincide con el número de formas de colorear los vértices de G/uv .

Es decir, si G es un grafo con n vértices y m aristas, entonces existen grafos G_1 con $m+1$ aristas y G_2 con $n-1$ vértices tales que $P(G, k) = P(G_1, k) + P(G_2, k)$. Además, la misma fórmula se puede aplicar recursivamente a G_1 y G_2 .

Por otra parte, se deduce trivialmente que, para el grafo completo K_i , se tiene $P(K_i, k) = k(k-1) \cdots (k-i+1) = k^{(i)}$ (expresión que, claramente, es un polinomio en k). Entonces, aplicando la fórmula $P(G, k) = P(G + uv, k) + P(G/uv, k)$ de forma recursiva tantas veces como sea necesario para obtener grafos completos, deducimos que $P(G, k)$ es un polinomio. \square

Definición 7.12. Definimos el *vector de adyacencia* de $L(G)$ como el vector

$$a_L = [a_{1,2}, a_{1,3}, \dots, a_{1,m}, a_{2,3}, a_{2,4}, \dots, a_{2,m}, \dots, a_{m-1,m}],$$

siendo m el número de aristas de G , donde $a_{i,j}$ es 1 si las aristas (de $L(G)$) e_i, e_j son adyacentes, y 0 en caso contrario (no confundir con los coeficientes de la matriz de adyacencia de $L(G)$, donde se considera la adyacencia de los vértices).

Definición 7.13. Si tenemos una partición π de las aristas de un grafo G , definimos el *vector de partición* de π por

$$p_\pi = [p_{1,2}, p_{1,3}, \dots, p_{1,m}, p_{2,3}, p_{2,4}, \dots, p_{2,m}, \dots, p_{m-1,m}],$$

donde $p_{i,j}$ es 1 si las aristas (de G) e_i, e_j están en la misma partición, y 0 en caso contrario.

En una coloración de $L(G)$, hay una partición de las aristas de G según el color que se le asocie. Dichas aristas deben no ser adyacentes, por lo que para las clases de la partición se deben considerar emparejamientos (o conjuntos independientes de $L(G)$). Llamaremos *particiones de color de $L(G)$* a estas particiones. Si una tal partición tiene t clases, entonces el número de coloraciones de $L(G)$ con k colores (suponemos $k \geq t$) es $k^{(t)}$. Con esto, podemos definir el polinomio cromático de $L(G)$ en su forma factorial como

$$P_L(G, k) = \sum_{i=0}^{m-1} r_i k^{(m-i)},$$

donde r_i representa el número de particiones por emparejamientos de las aristas de G (es decir, el número de particiones de color de $L(G)$) en $m - i$ clases. Obviamente, $r_0 = 1$.

Teorema 7.14. Para todo $r_i \neq 0$, se tiene que $i \leq m - \Delta(G)$, o equivalentemente, $\Delta(G) \geq m - i$.

Demostración. Para cualquier partición de color de $L(G)$, se tiene que su número de clases debe ser al menos $\chi(L(G)) = \chi'(G)$. Por el Teorema de Vizing, se tiene que $\chi'(G) = \Delta(G)$ ó $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$, y puesto que r_i representa el número de particiones con $m - i$ clases, se tiene que $m - i \geq \Delta(G)$ ó $m - i \geq \Delta(G) + 1$. Entonces, si $r_i \neq 0$, se tiene que

$$i \leq m - \Delta(G) - 1 \leq m - \Delta.$$

□

Teorema 7.15. Sea π una partición cualquiera de las aristas de G en k clases. Consideramos el vector de la partición, p_π , y el vector de adyacencia de $L(G)$, a_L . Entonces π es una partición de color de $L(G)$ si y sólo si $p_\pi \cdot a_L^T = 0$.

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que π es una partición de color de $L(G)$. Entonces, si dos aristas de G , e_i y e_j , están en la misma clase de π , significa que no son adyacentes, por lo que $p_{i,j} = 1 \Rightarrow a_{i,j} = 0$ (y de igual manera, $a_{i,j} = 1 \Rightarrow p_{i,j} = 0$). Por tanto, $p_\pi \cdot a_L^T = 0$.

(\Leftarrow) Recíprocamente, si π no es una partición de color de $L(G)$, entonces existen dos aristas e_i, e_j de G adyacentes que están en la misma clase de π . Por tanto, $p_{i,j} = 1$, $a_{i,j} = 1$, y entonces $p_\pi \cdot a_L^T \neq 0$. □

Supongamos ahora que a_L tiene t entradas nulas. Eso significa que en el grafo G hay t pares de aristas no adyacentes (o 2-emparejamientos). Observemos que cada emparejamiento de G está formado o bien por una única arista, o bien por uniones de elementos de 2-emparejamientos (observemos que no todas las uniones de 2-emparejamientos dan nuevos emparejamientos).

Definición 7.16. Una *partición de emparejamientos*, o una *M-partición* (del inglés *matching*), es una partición de aristas de G cuyos elementos son o bien una única arista o bien uniones de 2-emparejamientos.

Definición 7.17. Definimos la *matriz de partición de $L(G)$* como la matriz P_M que tiene por filas los vectores de partición de las particiones de emparejamientos que tienen al menos Δ clases, ordenados de mayor a menor según el número de clases de la partición (si hay más de una partición con el mismo número de clases, se ordenan indistintamente).

Observación 7.18. Observemos que el número de clases de cada partición de color de las que forman la matriz P_M debe ser al menos Δ por el Teorema 7.14.

Teorema 7.19. (I) El número de ceros del vector $P_M \cdot a_L^T$ es el número de particiones de color de $L(G)$.

(II) La suma del número de ceros de $P_M \cdot a_L^T$ correspondientes a las particiones de emparejamientos con k clases es el coeficiente r_k de la forma factorial de $P_L(G, k)$.

Demostración. (I) Se deduce de 7.15.

(II) Se deduce de (I). □

Finalicemos con un ejemplo: consideramos el grafo de la Figura 16:

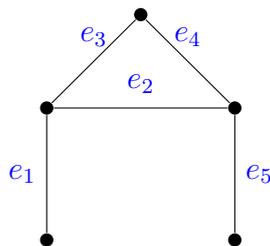


Figura 16: Ejemplo de un grafo para el que vamos a calcular el polinomio cromático de su grafo de aristas

Observemos que $\Delta = 3$ y, por el Teorema 7.14, tendremos sólo r_1 y r_2 (además de r_0). Calculamos ahora el vector de adyacencia:

$$a_L = [1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1].$$

Consideramos los 2-emparejamientos:

$$\{(e_1, e_4), (e_1, e_5), (e_3, e_5)\},$$

y con ellos construimos las M -particiones:

- Con 5 clases tenemos $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$,
- Con 4 clases tenemos $\{(e_1, e_4), e_2, e_3, e_5\}$, $\{(e_1, e_5), e_2, e_3, e_4\}$, $\{(e_3, e_5), e_1, e_2, e_4\}$,
- Con 3 clases tenemos $\{(e_1, e_4, e_5), e_2, e_3\}$, $\{(e_1, e_4), (e_3, e_5), e_2\}$, $\{(e_1, e_3, e_5), e_2, e_4\}$.

Calculamos ahora la matriz P_M , considerando para las filas el orden de las M -particiones que hemos dado:

$$P_M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, $P_M \cdot a_L^T = [0, 0, 0, 0, 1, 0, 1]^T$. Es decir, hay 1 cero correspondientes a las particiones con 5 clases, 3 ceros correspondientes a las particiones de 4 clases, y 1 cero correspondiente a las particiones con 3 clases. Es decir, $r_0 = 1$, $r_1 = 3$ y $r_2 = 1$:

$$P_L(G, k) = k^{(5)} + 3k^{(4)} + k^{(3)},$$

donde $k^{(i)}$ es el número de coloraciones de $L(G)$ con k colores.

Bibliografía

- [1] L. W. Beineke, J. S. Bagga. *Line Graphs and Line Digraphs*. Developments in Mathematics. Springer. 2021.
- [2] L. W. Beineke. *Characterizations of Derived Graphs*. Journal of Combinatorial Theory, 9:129-135. 1970.
- [3] F. Harary. *Graph Theory*. Addison-Wesley Series in Mathematics. Addison-Wesley Publishing Company. 1969.
- [4] A. C. M. van Rooij, H. S. Wilf. *The Interchange Graph of a Finite Graph*. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica, 16:263–269. 1965.
- [5] Y. Caro, J. Lauri, C. Zarb. *Index of Parameters of Iterated Line Graphs*. 2021.
- [6] A. J. Hoffman. *Some recent results on spectral properties of graphs*. Beiträge Zur Graphentheorie (H. Sachs, H. J. Voss, H. Walther, eds.), 75-80. 1968.
- [7] C. Yan. *Properties of spectra of graphs and line graphs*. Applied Mathematics - A Journal of Chinese Universities, 17:371-376. 2002.
- [8] D. K. Ray-Chaudhuri. *Characterization of line graphs*. Journal of Combinatorial Theory, 3:201-214. 1967.
- [9] R. Diestel. *Graph Theory*. Graduate Text in Mathematics. Springer. 2017.
- [10] R. A. Bari. *Line graphs and their chromatic polynomials*. Annals of Discrete Mathematics, 13:15-22. 1982.