Article

« Les techniques quantitatives de la gestion de portefeuille »

Éric Renault et Jean-Charles Rochet

L'Actualité économique, vol. 73, 1997, p. 265-310.

L'Actualité économique, Revue d'analyse économique, vol. 73, nos 1-2-3, mars-juin-septembre 1997

LES TECHNIQUES QUANTITATIVES DE LA GESTION DE PORTEFEUILLE

Éric RENAULT
Jean-Charles ROCHET
GREMAQ-IDEI
Institut Universitaire de France,
Université des Sciences Sociales de Toulouse

RÉSUMÉ – L'objectif principal du présent article est de montrer que la «démarche extensive», initiée par Lise Salvas-Bronsard (1972) peut être fructueuse pour reconsidérer les techniques quantitatives de la gestion de portefeuille. Par la même occasion nous rendons hommage à sa démarche synthétique en montrant que celle-ci est toujours éclairante, en permettant des interactions productives entre différents modes d'approche. Nous nous intéressons plus précisément aux relations d'évaluation d'actifs financiers dites multibêtas. Nous montrons que ces relations peuvent être démontrées, interprétées et utilisées, à la fois par une approche micro-économique (section 1 : Approche intrinsèque du problème de portefeuille), une approche macro-économique (section 2 : Équations d'Euler et modèles à facteurs), une approche économétrique (section 3 : Moindres carrés et efficience de portefeuille) et une approche décisionnelle en termes de gestion de portefeuille (section 4 : Gestion dynamique de portefeuille).

ABSTRACT – The main objective of this article is to show that the «synthetic approach» initiated by Lise Salvas-Bronsard (1972) can be useful to reexamine the quantitative analysis of portfolio management. We pay a tribute to her work in showing that it is useful in allowing the interaction of different approaches. More specifically, we are interested by the relations between certain evaluations of financial assets called «multibeta». We show that these relations can be demonstrated and used by a microeconomic approach (Section 1: Intrinsic portfolio approach), a macroeconomic approach (Section 2: Euler equations and factor models), an econometric approach (Section 3: Least-squares and portfolio agency), and a decisional approach in terms of portfolio management (Section 4: Dynamic portfolio management).

INTRODUCTION

En mai 1972, Lise SALVAS-BRONSARD (LSB dans la suite) a présenté à l'Université Catholique de Louvain, à titre de thèse de Doctorat en Sciences économiques, un travail très ambitieux comprenant à la fois la spécification d'un modèle macroéconomique intertemporel et international, l'estimation de celui-ci et son utilisation pour reconsidérer le problème de la politique économique du Canada dans sa globalité. En présentant cette thèse sous le titre «les techniques quantitatives de la politique économique», LSB remerciait son directeur de thèse, A.P. Barten, de lui avoir «suggéré cette démarche extensive consistant à utiliser, pour résoudre un problème donné, la plupart des outils de l'économiste : la théorie microéconomique, la théorie macroéconomique, l'économétrie, la théorie de la décision et la recherche opérationnelle».

L'objectif principal du présent article est de montrer que cette «démarche extensive» peut être fructueuse pour reconsidérer les techniques quantitatives d'autres problèmes décisionnels. En l'occurrence, nous nous intéresserons ici à la gestion de portefeuille, problème décisionnel certes moins vaste que celui de la définition d'une politique économique globale par un pays, mais qui a donné lieu depuis la fin des années soixante (premiers travaux de Markowitz) à une floraison de travaux théoriques et empiriques accompagnant la montée en puissance du rôle des marchés financiers dans l'économie.

Il nous semble en effet que le meilleur hommage que l'on puisse rendre à la démarche synthétique adoptée par LSB non seulement dans sa thèse, mais en fait dans toute sa carrière (par l'étendue de ses champs d'intérêt, allant de la microéconomie théorique jusqu'à l'économétrie appliquée) est de montrer que celle-ci est toujours éclairante, en permettant des interactions productives entre différents modes d'approche.

Plus précisément, on s'intéresse ici aux relations d'évaluation d'actifs financiers dites multibêtas (parce qu'elles font intervenir les coefficients bêtas de régression par rapport à différents «facteurs»), fameuses en gestion quantitative de portefeuille mais souvent mal comprises, précisément parce qu'elles renvoient à différents types de culture. On montrera que ces relations peuvent être démontrées, interprétées et utilisées, à la fois par une approche *microéconomique* (section 1), une approche *macroéconomique* (section 2), une approche *économétrique* (section 3) et une approche *décisionnelle* en termes de gestion de portefeuille (section 4). Nous suivrons ainsi, sur un tout autre sujet, le même plan que la thèse de LSB. Le présent article fait aussi certains emprunts (principalement dans ses sections 1 et 3) à un travail antérieur du premier auteur (Renault, 1988) où sous le titre «Moindres carrés et performance de portefeuille», était déjà mise en exergue l'unité de pensée entre l'approche théorique du problème du portefeuille et le point de vue économétrique.

Soulignons enfin que, du fait même de l'ampleur des champs d'investigation de LSB, on est amené à croiser ceux-ci à tous les niveaux du présent travail :

(i) L'approche moyenne-variance de la section 1 renvoie évidemment à l'intérêt constant de LSB pour la problématique de la décision en incertitude. Dans sa thèse elle écrivait : «Si on résume une perspective aléatoire par un nombre unique qui est l'espérance mathématique, on maximise (ou minimise) l'espérance mathématique de la fonction objectif. Ce critère de décision est encore le plus souvent employé. Une autre possibilité est de considérer dans le critère de décision, l'espérance mathématique et la variance de la fonction-objectif. Il semble cependant que dans un problème de politique économique il n'est pas vraiment nécessaire de considérer la variance puisque dans ce genre de problème on a une très forte probabilité de demeurer à l'intérieur de limites assez étroites, le problème de politique économique portant en fait sur des variations marginales d'instruments». Une telle simplification n'est évidemment plus admissible en gestion de portefeuille, compte tenu de l'ampleur des risques potentiels dans les marchés financiers modernes. LSB concluait d'ailleurs sa thèse sur le constat que : «On ne peut pas dire que les solutions présentées dans cet ouvrage des programmes linéaires et quadratiques soient très satisfaisantes. On a fourni à l'occasion plusieurs explications de ce phénomène : l'incertitude, le mélange de contraintes physiques et financières».

(ii) Cette dernière analyse annonce en un certain sens un des programmes de recherche les plus modernes de la macroéconomie tel qu'il commence à apparaître dans les travaux de Cochrane (1991), Cochrane et Hansen (1992), Hansen et Jagannathan (1991) sous des titres qui évoquent bien cette problématique des interactions «incertitude [...] contraintes physiques et financières» : *Production-Based Asset Pricing and the Link Between Stock Returns and Economic Fluctuations*, *Asset Pricing Lessons for Macroeconomics*, *Implications of Security Market Data for Models of Dynamic Economies*. Nous nous efforcerons dans la section 2 du présent article de dériver les modèles à facteurs et les relations d'évaluation multibêtas associées (déjà obtenues dans la section 1 par une approche microéconomique) des modèles macroéconomiques qui s'inscrivent dans ce programme de recherche. Il convient d'ailleurs de noter que LSB elle-même a pris la mesure des développements de la macroéconomie à l'aube des années quatre-vingt-dix en éditant avec P. Malgrange un ouvrage de synthèse («Macroéconomie, développements récents», 1993) où non seulement la même «démarche synthétique» est toujours mise en exergue mais sont repris les travaux les plus récents de LSB (avec C. Bronsard) relatifs à la formulation des anticipations. La présentation de l'ouvrage en cinq parties souligne de manière frappante la parenté méthodologique avec l'introduction de la thèse de LSB citée ci-dessus puisque ces cinq parties sont décrites de la façon suivante : «Dans la première partie on rappelle les exigences de toute transposition de la microéconomie à la macroéconomie, dans la deuxième on présente différentes constructions théoriques. La troisième est consacrée aux problèmes de simulation et d'optimisation, la quatrième à l'économétrie tandis que la cinquième porte sur la pratique de la macroéconométrie». En ce qui concerne la formulation des anticipations, l'article de C. Bronsard et L. Salvas Bronsard (1993) dans la troisième partie de cet ouvrage propose une représentation du consommateur et du producteur (et de leurs fonctions d'anticipation) en contexte temporaire qui permet d'intégrer «à l'intérieur d'une même structure logique» (pour reprendre les termes de Malinvaud, 1982) l'équilibre keynésien et l'équilibre walrasien (comme cela a bien sûr aussi été proposé à partir d'une toute autre approche par la théorie des équilibres à prix fixes).

Pour revenir au programme de recherche qui nous intéresse dans la section 2 du présent article, celui-ci s'appuie sur la formulation de modèles d'optimisation intertemporelle (avec des anticipations rationnelles) tels qu'il se sont développés dans les années quatre-vingt à la suite de la critique de Lucas (1976). Rappelons, pour faire bref, que Lucas (1976) avait souligné que les modèles traditionnels de la macroéconométrie (modèles linéaires dynamiques à équations simultanées) étaient peu fiables pour prévoir les effets de la politique économique puisque l'hypothèse d'invariance des paramètres de ces modèles lors de changements d'orientation de la politique économique n'est pas tenable en général. En conséquence, il est préférable de voir ces paramètres comme des fonctions de l'environnement économique et d'un ensemble de paramètres fondamentaux sous-jacents qui caractérisent les préférences des agents et la technologie de l'économie. Cette critique est à l'origine d'un énorme programme de recherche, visant à formuler des modèles d'équilibres d'anticipations rationnelles explicitement paramétrés en termes de «préférence et technologie» considérés comme les invariants de l'économie. Nous ne donnerons bien sûr qu'un bref aperçu de ces modèles dans la section 2. Notons simplement à ce stade que, six ans avant la critique de Lucas, LSB s'était précisément intéressée à l'estimation de modèles linéaires dynamiques à équations simultanées où «les coefficients de la forme structurelle ne sont pas les mêmes pour toutes les observations pour lesquelles le modèle est supposé valide» (article Barten et Salvas Bronsard, 1970) intitulé «Two-Stage Least-Squares Estimation with Shifts in the Structural Form»).

(iii) La problématique de base de l'article Barten-Salvas Bronsard (1970) était d'exploiter au mieux l'information statistique produite par deux sous-échantillons (associés à deux périodes distinctes entre lesquelles se déroulait le changement structurel) pour lesquels les coefficients de certaines variables ne changeaient pas. À cause de cette invariance de certains paramètres, on aurait en effet perdu de l'information en estimant séparément le modèle structurel pour chacun des deux sous-échantillons. Cette question est en fait une occurrence particulière de la problématique générale de *l'exhaustivité linéaire* telle qu'elle a été définie par Gouriéroux et Monfort (1980). Nous résumerons dans la section 3 un ensemble de résultats de Renault (1988) où l'on s'attachait à montrer qu'une grande partie des résultats de la théorie du portefeuille (et en particulier les relations d'évaluation multibêtas) peuvent être réinterprétés et redémontrés avec les outils de l'inférence optimale dans le modèle linéaire : théorème de Gauss-Markov et exhaustivité linéaire.

Outre l'exercice d'interprétation, cette approche débouche naturellement sur la problématique de l'estimation et des tests économétriques des relations multibêtas pour laquelle on montrera que la méthodologie d'*inférence GMM* due à Hansen (1982) et Hansen et Singleton (1982) (pour l'application à l'économétrie de la finance) fournit un cadre unificateur, permettant en particulier de discuter le rôle des hypothèses formulées dans les sections 2 et 4. Rappelons enfin que, comme cela a encore été réexpliqué récemment par Hansen, Heaton et Yaron (1996), les «estimateurs GMM ont des antécédents dans la littérature classique des équation simultanées». En particulier, la méthode des doubles moindres carrés (telle qu'est reconsidérée par Barten et Salvas Bronsard, 1970) correspond à une procédure GMM dans le cadre le plus classique de restrictions de moments conditionnels (voir Hansen, Heaton et Yaron, 1996).

(iv) La section 4, dans la mesure où elle s'intéresse aux problématiques plus spécialisées de gestion dynamique de portefeuille et de test de performance, est sans doute la seule de cet article qui ne puisse se situer en filiation de travaux de LSB. On retiendra simplement qu'elle ressort de la même «démarche synthétique» (traiter un problème décisionnel au confluent des différentes approches microéconomique, macroéconomique et économétrique), et aussi qu'elle mériterait des prolongements en termes de gestion du patrimoine des ménages (qui sont précisément les clients des organismes de gestion quantitative de portefeuille), problématique qui a été au coeur des derniers travaux de LSB, en particulier lors de son séjour à la Direction Générale de l'INSEE.

1. APPROCHE INTRINSÈQUE DU PROBLÈME DU PORTEFEUILLE

Les modèles d'évaluation d'actifs financiers sur une période font traditionnement une large place à la théorie du portefeuille, présentée comme l'art de la diversification du risque par la répartition de la richesse investie entre différents actifs risqués. Il est relativement étonnant de constater que cette approche traditionnelle, plutôt que de s'intéresser directement à l'ensemble des rendements aléatoires réalisables, s'attache à décrire des portefeuilles par rapport à une liste d'actifs de référence, dits primitifs. Suivant en cela une démarche initiée par Renault (1988), nous proposons à l'inverse ici une *présentation intrinsèque* de l'ensemble des rendements disponibles qui rend, nous semble-t-il, plus transparentes des propriétés usuelles comme le théorème des deux fonds communs de placement, la maximisation de la performance au sens de Sharpe et surtout les liens logiques entre les deux grands principes d'évaluation: celui du CAPM de Sharpe (1964), Lintner (1965) et Black (1972) d'une part, celui de l'APT de Ross (1976) d'autre part. Notons en outre que la présentation est dite *intrinsèque* parce qu'elle ne s'intéresse qu'aux propriétés de l'espace vectoriel des revenus atteignables (sans référence à une base donnée de celui-ci) comme la présentation du modèle linéaire en économétrie est dite intrinsèque (voir par exemple Monfort, 1982 et Gouriéroux-Monfort, 1980) quand on ne s'intéresse qu'à l'espace vectoriel des variables explicatives (et non à une liste définie de variables engendrant cet espace). Le lien entre théorie du modèle linéaire en économétrie et théorie du portefeuille sera détaillé en section 3.

1.1 *Le modèle*

Un actif financier est défini par le revenu qu'il procure à différentes dates et dans différents états de la nature. N'introduisant pas dans un premier temps la structure temporelle, on définira donc un tel actif par une variable aléatoire réelle y. On supposera toujours que le revenu aléatoire y est d'espérance et de variance finies, si bien que c'est un élément d'un espace de Hilbert $L^2(\mathcal{E}, \mathcal{A}, \Pi)$[1].

La théorie du portefeuille s'intéresse aux revenus qu'un investisseur peut se procurer en combinant arbitrairement les titres disponibles sur les marchés financiers. Si l'on admet qu'il n'y a pas de limitation des ventes à découvert, cet ensemble de revenus atteignables constitue alors un sous-espace vectoriel S de $L^2(\mathcal{E}, \mathcal{A}, \Pi)$. La version traditionnelle de la théorie du portefeuille (Markowitz, 1970; Sharpe, 1964) se limite au cas d'un nombre fini de titres de base. S est alors de dimension finie et par là fermé. La théorie moderne de l'évaluation par arbitrage (Ross, 1976; Harrison et Kreps, 1979; Chamberlain et Rothschild, 1983) considère qu'il est possible de faire tendre le nombre d'actifs vers l'infini. Formellement, cela suppose que si $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de S convergeant dans $L^2(\mathcal{E}, \mathcal{A}, \Pi)$, la limite y de la suite (y_n) appartient encore à S : c'est un revenu de portefeuille qu'il est possible de constituer.

On supposera ainsi que S est un sous-espace vectoriel *fermé* de $L^2(\mathcal{E}, \mathcal{A}, \Pi)$ et qu'il est donc muni lui-même d'une structure d'espace de Hilbert. Par abus de langage, on identifiera les portefeuilles avec les revenus aléatoires qu'ils procurent, c'est-à-dire qu'on parlera directement d'un élément y de S comme d'un portefeuille. Cet abus de langage n'est pas gênant dans la mesure où, par absence d'opportunité d'arbitrage, deux portefeuilles procurant presque sûrement le même revenu ont nécessairement le même prix. On peut donc définir les prix des portefeuilles par une fonctionnelle $P : S \rightarrow \mathbb{R}$. L'absence d'opportunité d'arbitrage implique également que P doit satisfaire plusieurs propriétés : elle est linéaire (le prix d'un portefeuille est la somme des prix des titres qui le composent), et continue (si la limite des revenus procurés par une suite de portefeuille est nulle, la limite des prix de ces portefeuilles est aussi nulle).

Enfin, si la variable aléatoire $\mathbb{1}$ (égale à 1 p.s.) appartient à S, on doit avoir $P(\mathbb{1}) > 0$. On définit alors le rendement sans risque r_F par la formule :

1. L'espace $L^2(\mathcal{E}, \mathcal{A}, \Pi)$ des variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé $(\mathcal{E}, \mathcal{A}, \Pi)$ et de variance finie est muni du produit scalaire :

$(x,y) = Exy = cov\,(x,y) + Ex\ Ey$

Pour ce produit scalaire, $L^2(\mathcal{E}, \mathcal{A}, \Pi)$ est un espace de Hilbert et il est donc possible de définir une projection orthogonale sur tout sous-espace vectoriel fermé.

$$P(\mathbb{1}) = \frac{1}{1+r_F}.$$

La dernière donnée du modèle est l'ensemble fini $\{f_1,...,f_K\}$ de $L^2(\mathcal{E}, \mathcal{A}, \Pi)$ que l'on appelle l'ensemble des facteurs[2] (potentiels). L'espace vectoriel engendré par ces facteurs (qui est donc de dimension finie) est noté F.

1.2 *Représentation de la fonctionnelle de prix*

On a vu plus haut que, par l'absence d'opportunité d'arbitrage, la fonctionnelle P était nécessairement une forme linéaire continue sur S. Par le théorème de Riesz (voir par exemple Choquet, 1973) on peut donc la représenter par le produit scalaire avec une variable aléatoire λ. Remarquons bien que S étant lui-même un espace de Hilbert, on peut imposer que λ soit dans S. Par ailleurs, P peut naturellement s'étendre à $L^2(\mathcal{E}, \mathcal{A}, \Pi)$ tout entier.

Proposition 1 *Il existe un portefeuille λ de S tel que :*

$$\forall y \in S \quad P(y) = \langle \lambda, y \rangle = E(\lambda y). \tag{1}$$

Remarquons pour terminer que l'on peut écarter le cas inintéressant où λ est colinéaire à la projection orthogonale de $\mathbb{1}$ sur S, que nous noterons y^0. Dans ce cas en effet, le prix de tout actif est proportionnel à son espérance de valeur de liquidation

$$\exists k, \forall y \in S \quad P(y) = kE(y). \tag{2}$$

Cela signifie que le risque des actifs n'est pas pris en compte dans leur évaluation. Par exemple, dans le cas où il existe un actif sans risque, la constante k est égale au facteur d'actualisation $\frac{1}{1+r_F}$ et le prix de tout portefeuille est donné par l'espérance de son revenu actualisé. Ce cas trivial et irréaliste sera écarté du reste de notre article : on supposera donc que λ n'est pas colinéaire à $y^0 = Proj_S(\mathbb{1})$.

1.3 *Caractérisation des portefeuilles MV-efficaces*

Par définition, un portefeuille MV-efficace est un élément de variance minimum parmi tous les portefeuilles de même prix p et de même revenu espéré μ. Ce critère, proposé initialement par Markowitz (1970), est sensé traduire simplement le comportement d'aversion pour le risque des investisseurs. Remarquons toutefois qu'il n'est compatible avec la théorie de la décision en environnement

2. L'idée d'un modèle factoriel de portefeuille est d'expliquer les revenus procurés par les titres financiers par un petit nombre de variables faciles à observer (les facteurs). Ces facteurs peuvent être eux-mêmes assimilables à des titres (par exemple des indices boursiers), des taux de change, des prix de marchandises ou des variables macroéconomiques (PIB, taux d'inflation).

aléatoire (Von Neumann-Morgenstern, Savage) que sous des hypothèses restrictives : fonction d'utilité quadratique ou ellipticité des rendements (Ingersoll, 1987; voir aussi section 3).

L'unique portefeuille MV-efficace de prix p et de rendement espéré μ est donc la solution du problème d'optimisation suivant[3] dans S.

$$(\mathcal{P})\begin{cases} \min \frac{1}{2}E(y^2) \\ \text{sous les contraintes} \\ <\lambda,y>=p & (3) \\ <\mathbb{1},y>=\mu & (4) \end{cases}$$

$(\mathcal{P})$ est un problème d'optimisation quadratique sous contraintes linéaires, dont la solution y^* est caractérisée par la condition du premier ordre :

$$\forall h \in S \quad L'(y^*)\,h=0, \tag{5}$$

où L est le Lagrangien de $(\mathcal{P})$:

$$L(y)=\tfrac{1}{2}E(y^2)-\nu_1\{<\lambda,y>-p\}-\nu_2\{<\mathbb{1},y>-\mu\},$$

et $L'(y^*)h$ est la dérivée de L en y^* dans la direction h :

$$L'(y^*)h=\lim_{t\to 0^+}\frac{L(y^*+th)-L(y^*)}{t}=E(y^*h)-\nu_1E(\lambda h)-\nu_2E(h).$$

Donc (5) peut s'écrire

$$\forall h \in S \quad <y^*-\nu_1\lambda-\nu_2\mathbb{1},h>=0,$$

ce qui signifie exactement que y^* est la projection orthogonale sur S du vecteur $(\nu_1\lambda+\nu_2\mathbb{1})$. Comme $\lambda \in S$, et comme la projection orthogonale sous un sous-espace vectoriel est un opérateur linéaire, on en déduit que y^* appartient au plan vectoriel engendré par les vecteurs λ et $y^0=Proj_S(\mathbb{1})$:

$$y^*=\nu_1\lambda+\nu_2y^0.$$

Les contraintes de $\mathcal{P}$ fournissent un système linéaire de deux équations en (ν_1,ν_2) :

$$\begin{cases} <\mathbb{1},y^*>=\nu_1<\mathbb{1},\lambda>+\nu_2<\mathbb{1},y^0>=\mu & (6) \\ <\lambda,y^*>=\nu_1<\lambda,\lambda>+\nu_2<\lambda,y^0>=p. & (7) \end{cases}$$

Comme λ et y^0 ne sont pas colinéaires, ce système a une solution unique. On a donc établi :

Proposition 2 *$\mathcal{P}$ a une solution unique, qui est la combinaison linéaire entre λ et $y^0=Proj_S(\mathbb{1})$ définie par $\nu_1\lambda+\nu_2y^0$, où ν_1 et ν_2 sont caractérisés par les équations (6) et (7).*

---

3. Comme $E(y)$ est fixé, minimiser var (y) équivaut à minimiser $\frac{1}{2}E(y^2)$ ce qui simplifie les calculs.

Ce résultat élémentaire a de nombreuses conséquences intéressantes sur le plan de l'interprétation financière. Tout d'abord si l'on relâche la contrainte (3), le multiplicateur ν_1 s'annule, et la solution de $\mathcal{P}$ est alors colinéaire à y^0. À espérance de revenu fixé, y^0 fournit donc un revenu de variance minimum. Si l'on raisonne en terme de rendements, on voit donc que y^0 constitue (ainsi que ses multiples) un portefeuille dont la variance du rendement est minimum. Le cas le plus simple est celui où ce minimum est nul, ce qui signifie que $\mathbb{1} \in S$ et que $y^0 = \mathbb{1}$. Nous nous placerons désormais dans ce cas : y^0 est appelé le titre sans risque, et son prix est noté $\frac{1}{1+r_F}$.

Si l'on suppose que chaque investisseur détient un portefeuille MV-efficace, alors le portefeuille de marché y^M, défini comme l'ensemble de tous les titres offerts sur le marché (qui est aussi à l'équilibre l'ensemble de tous les portefeuilles des investisseurs) est aussi MV-efficace. Comme l'offre agrégée de titres risqués est non nulle, y^M n'est pas colinéaire au titre sans risque y^0, ce qui signifie que le couple (y^M, y^0) constitue une base du plan vectoriel engendré par λ et y^0. Autrement dit, tout portefeuille MV-efficace est combinaison linéaire du titre sans risque (ou plus généralement du portefeuille dont la variance du rendement est minimum) et du portefeuille de marché. Ce résultat, connu sous le nom de *two-mutual funds result* (Roll, 1977) implique que les portefeuilles MV-efficaces vérifient le modèle factoriel le plus simple, le *Capital Asset Pricing Model*, que nous exposons maintenant.

1.4 *Le Capital Asset Pricing Model (CAPM)*

D'après ce qui précède, tout portefeuille MV-efficace y est combinaison linéaire du titre sans risque y^0 et du portefeuille de marché y^M. C'est aussi vrai pour les rendements nets de ces portefeuilles $R(y) = \frac{y}{P(y)} - 1$ et $R(y^M) = \frac{y^M}{P(y^M)} - 1$. Par conséquent, la régression affine de $R(y)$ sur $R(y^M)$ ne contient pas de résidu :

$$R(y) = \beta(y)R(y^M) + \alpha(y). \tag{8}$$

$\alpha(y)$ et $\beta(y)$ sont donnés par les formules classiques :

$$\beta(y) = \frac{cov(R(y), R(y^M))}{var(R(y^M))}, \tag{9}$$

et

$$\alpha(y) = E[R(y)] - \beta(y)E(R(y^M)]. \tag{10}$$

Le CAPM s'obtient alors en remarquant que le rendement d'un portefeuille est égal à la somme pondérée des rendements des titres qui le composent, c'est-à-dire que (8) peut aussi d'écrire :

$$R(y) = \beta(y)R(y^M) + (1 - \beta(y))r_F. \tag{11}$$

Autrement dit

$$\alpha(y) = (1 - \beta(y))\, r_F,$$

ce qui implique finalement, en utilisant (10) :

$$E[R(y)] - r_F = \beta(y)\, E[R(y^M) - r_F]. \tag{12}$$

Proposition 3 *Si le portefeuille de marché y^M est MV-efficace, alors l'espérance de rendement excédentaire de tout portefeuille MV-efficace (ainsi que tout titre qui le compose) est égale au produit du coefficient de régression affine de $R(y)$ sur $R(y^M)$, par l'espérance du rendement excédentaire du portefeuille de marché.*

1.5 *La droite de marché*

Une autre conséquence importante de la proposition 2 (et du CAPM) est que l'espérance du rendement excédentaire d'un portefeuille MV-efficace est proportionnelle à l'écart-type de ce rendement. En effet, si l'on a

$$R(y) = \beta R(y^M) + (1 - \beta)\, r_F, \tag{13}$$

alors

$$var\,(R(y)) = \beta^2\, var\,(R(y^M)),$$

d'où

$$\sigma(y) \overset{def}{=} \sqrt{var\, R(y)} = \beta\sigma(y^M). \tag{14}$$

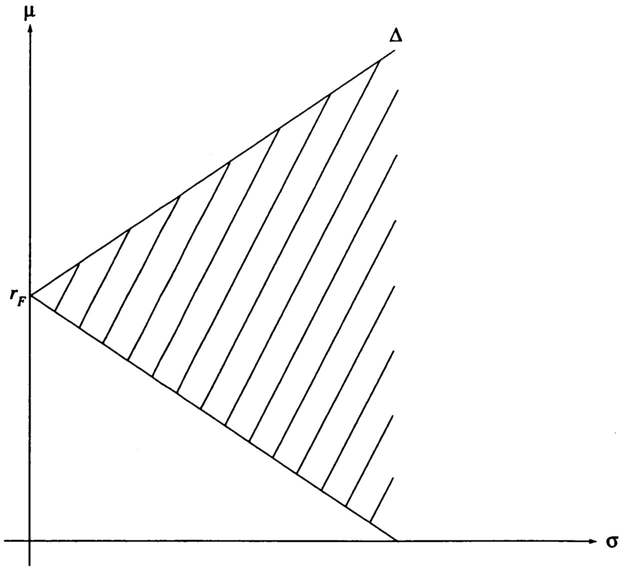
Par ailleurs, en prenant l'espérance de (13) et en tirant β de (14) on obtient l'équation de la droite de marché Δ :

$$\mu(y) \overset{def}{=} E[R(y)] = r_F + \frac{\mu(y^M) - r_F}{\sigma(y^M)}.\sigma(y). \tag{15}$$

L'espérance de rendement d'un portefeuille MV-efficace est donc une fonction affine de l'écart-type de ce rendement. On peut montrer facilement que, dans le plan (σ, μ), l'ensemble décrit par le point $(\sigma(y),\mu(y))$ quand y parcourt S est un cône (cf. figure 1) dont la droite de marché Δ constitue le bord supérieur.

FIGURE 1

L'ENSEMBLE DES COUPLES ($\sigma(Y),\mu(Y)$) ATTEIGNABLES ET LA DROITE DE MARCHÉ



1.6 *Mesure de performance de portefeuilles*

Au vu du résultat précédent, il est assez naturel de mesurer la performance d'un portefeuille y par la pente de la droite qui joint, dans le plan (écart-type, rendement espéré), le point $(\sigma(y),\mu(y))$ au point $(0,r_F)$ représentant le titre sans risque. Cet indicateur, proposé par Sharpe (1964), est appelé depuis l'indice de Sharpe :

$$I(y)=\frac{\mu(y)-r_F}{\sigma(y)}.$$

Ce portefeuille est MV-efficient (relativement à l'espace S des portefeuilles disponibles) si et seulement si $I(y)$ est égal à $I(S) \overset{\text{def}}{=} \max_{y\in S} I(y)$. Si par exemple le portefeuille de marché y^M est MV-efficace, on a $I(y^M) = I(S)$. Plus généralement le nombre $I(S)$ mesure la performance potentielle maximum d'un portefeuille issu de S. Ce nombre augmente (faiblement) quand S croit (au sens de l'inclusion).

Considérons maintenant un ensemble fini de titres «de base», dont les revenus aléatoires sont notés $r_0,...,r_n$ (avec $r_0 = (1 + r_F)$ 1I). On suppose dans un premier temps que les investisseurs n'ont accès qu'à ces titres pour constituer leurs portefeuilles. Autrement dit, l'ensemble des revenus admissibles est l'espace vectoriel S_n engendré par $\{r_0,...,r_n\}$. Au vu de la discussion ci-dessus, il est naturel de se demander à quelles conditions les opportunités d'investissement fournies par un autre espace vectoriel S permettent d'obtenir une performance supérieure à celle donnée par S_n.

Autrement dit, on se demande si la performance potentielle $I(S + S_n)$ de l'espace vectoriel $S + S_n$ (engendré par l'union de S et S_n) est supérieure à $I(S_n)$. Le résultat essentiel est alors la proposition 4, démontrée en annexe 1 :

Proposition 4 *On a équivalence des quatre propriétés suivantes :*

(i) $I(S + S_n) = I(S_n)$. (16)

(ii) La droite de marché de $S + S_n$ *coïncide avec celle de* S_n.

(iii) Il existe n réels $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n$ *tels que, pour tout* $y \in S + S_n$ *tel que* $P(y) = 1$ *on a :*

$$E(y) = \sum_{i=1}^{n} \nu_i \beta_i (S_n, y) + r_0 \tag{17}$$

où $\beta_i (S_n, y)$ *est (pour* $i = 1,...,n$*) le coefficient de* r_i *dans la régression affine de* $R(y)$ *sur* $\{r_1,...,r_n\}$.

La propriété (17) est une relation d'évaluation de type «multibéta». Elle signifie qu'il existe un vecteur ν de IR^n tel que l'espérance de rendement net de n'importe quel portefeuille y de $S + S_n$ (et en particulier de S) s'écrive $< \nu , cov (r^{(n)}, y) >$ où $r^{(n)}$ est le vecteur $(r_1,...,r_n)$. Les variables aléatoires $r_1,...,r_n$ s'interprètent alors comme des facteurs au sens de l'*Arbitrage Pricing Theory* de Ross (1976) que nous exposons maintenant.

1.7 *Le lien avec l'APT de Ross (1976)*

L'idée initiale de Ross (1976) était d'introduire un petit nombre de facteurs aléatoires $(f_1,...f_n)$ tels que le revenu y_i procuré par n'importe quel titre (ou ensemble de titres) est (approximativement) expliqué par ces facteurs. Autrement dit :

$$y_i = \beta_{i0} + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} + f_j + u_i, \tag{18}$$

où les u_i ont une espérance nulle, une variance uniformément bornée et sont indépendants. Dans ce cas (on parle d'*Approximate Factor Structure* ou Structure Factorielle Approchée), l'absence d'opportunité d'arbitrage implique une relation analogue au niveau des prix des actifs :

$$P(y_i) = \beta_{i0} \nu_0 + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \nu_j + \varepsilon_i, \tag{19}$$

où les ν_j sont des coefficients donnés (les «prix des facteurs») et les εi sont uniformément bornés (on parle alors d'Approximate Factor Pricing ou Valorisation Factorielle Approchée). Toute une littérature (voir par exemple Bray, 1994 et les références contenues dans cet article) s'est alors attachée à rechercher à quelles conditions la relation (18) (ou sa version exacte, c'est-à-dire avec $u_i \equiv 0$) était vérifiée, et à quelles conditions elle impliquait la relation (19) (ou sa version exacte, c'est-à-dire avec $\varepsilon_i \equiv 0$). Sans rentrer dans les détails, deux types de résultats ont été obtenus :

- Si l'on n'impose pas *a priori* l'ensemble des facteurs, alors pour tout σ arbitrairement petit, on peut trouver un ensemble de facteurs tels que la relation (18) soit satisfaite avec pour tout i, $var(u_i) \leq \sigma^2$. Cela résulte tout simplement du théorème d'orthogonalisation de Schmidt. Par ailleurs, la linéarité et la continuité de la fonctionnelle de prix impliquent directement (19) avec $|\varepsilon_i|$ majoré par $\sigma \| P \|$.
- Par ailleurs, on a vu que le théorème de Riesz nous fournissait une formule de Valorisation Factorielle Exacte avec un facteur unique λ :

$$\forall y \in S \qquad P(y) = E(\lambda y), \tag{20}$$

où λ est combinaison linéaire de y^0 et de y^M. La relation (20) peut encore s'écrire :

$$\forall y \in S \qquad P(y) = \frac{E(y)}{1+r_F} + cov\ (\lambda, y) \tag{21}$$

$\left(\text{en utilisant le fait que } P(\mathbb{I}) = \frac{1}{1+r_F}\right)$.

En comparaison de cette formule *exacte* avec un facteur *unique*, la formule (19), qui ne fournit qu'un résultat *approché* avec *plusieurs* facteurs n'a d'intérêt que si, pour un motif à préciser, on ne considère pas comme satisfaisante une caractérisation de la structure factorielle par le facteur λ (ou, ce qui revient au même, par le portefeuille de marché). Nous verrons dans les sections 2 et 4 qu'un tel motif peut être fourni par la recherche de facteurs ayant une interprétation macroéconomique et/ou fournissant des stratégies dynamiques de portefeuille.

Pour le moment, contentons nous de remarquer que si l'on prend un espace de facteurs arbitraire F, la formule (18) s'obtient en projetant y_i sur l'espace F (supposé contenir $\mathbb{I}$) et la formule (19) en projetant λ sur le même espace F. Par continuité de P on obtient alors les résultats asymptotiques de Chamberlain et Rothschild (1983), selon lesquels la valorisation factorielle approchée devient asymptotiquement exacte quand le nombre de facteurs tend vers l'infini. Elle est même vraie à distance finie si λ peut s'écrire comme combinaison linéaire exacte d'un nombre fini de facteurs.

2. ÉQUATION D'EULER ET MODÈLES À FACTEURS

2.1 *Équations d'Euler et facteurs d'actualisation stochastique*

Considérons un investisseur représentatif qui a une richesse (évaluée ici en termes réels) disponible à chaque date t pour la consommation immédiate C_t ou pour l'investissement dans n actifs.

Soit p_{it} le prix hors-dividende de l'unité d'actif i et d_{it} le dividende (toujours en termes réels). La contrainte de budget de l'agent à la date t s'écrit :

$$C_t + \sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{it} = \sum_{i=1}^{n} q_{it-1}(p_{it} + d_{it})$$

où q_{it} est la quantité d'actif i que l'agent détient en portefeuille de la date t à la date $t + 1$. Si l'on suppose dans un premier temps que la fonction d'utilité intertemporelle de l'agent est séparable additivement, on peut admettre qu'il maximise à la date t :

$$E\left[\sum_{k=0}^{\infty} \delta^k u(C_{t+k}) \middle| I_t\right] \tag{22}$$

où δ $(0 < \delta < 1)$ est son facteur d'escompte subjectif, u est la fonction d'utilité de la consommation à chaque période et E[... | I_t] désigne l'opérateur d'espérance conditionnelle de variables aléatoires qui se réaliseront dans un futur postérieur à t, le conditionnement se caractérisant par la donnée de l'ensemble I_t de l'information observée par l'agent jusqu'à la date t.

Les conditions du premier ordre de la maximisation de (22) sous la contrainte de budget sont les équations d'Euler[4] :

$$p_{it} u'(C_t) = \delta E[u'(C_{t+1})\,(p_{it+1} + \mathrm{d}_{it+1}) \mid I_t]. \tag{23}$$

Ces conditions, qui peuvent être obtenues par plusieurs approches (voir par exemple Lucas, 1978 et Grossman et Shiller, 1982), sont fondamentales en finance et en macroéconomie modernes parce qu'elles fournissent l'exemple le plus naturel de facteur d'actualisation stochastique :

$$Z_{t,t+1} = \delta \frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)}.$$

On obtient une spécification paramétrique de ce facteur d'actualisation en supposant par exemple que la fonction d'utilité u est caractérisée par un indice relatif d'aversion pour le risque qui est une constante positive α :

$$u(C) = \frac{C^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}, \alpha \geq 0,$$

(en particulier $u(C) = \log C$ dans le cas limite $\alpha \to 1$) si bien que le vecteur θ des paramètres structurels (paramètres de goût supposés invariants en réponse à la critique de Lucas, 1976) est ici :

$$\theta = (\alpha\,, \delta)'.$$

4. On suppose l'absence de contraintes sur les ventes à découvert.

Autrement dit, on a la spécification paramétrique suivante du facteur d'actualisation stochastique :

$$Z_{t,t+1}(\theta) = \delta\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\alpha}. \tag{24}$$

Plus généralement, conformément au titre de l'article de Hansen et Singleton (1982), les modèles d'évaluation d'actifs financiers sont pour la plupart des *modèles non linéaires d'anticipations rationnelles* qui fournissent le prix p_{it} d'un actif i à la date t comme *espérance conditionnelle à l'information* I_t disponible à la date t du gain g_{it+1} promis à une date future $t + 1$ par cet actif (par exemple prix de liquidation plus dividende) multiplié par un facteur d'actualisation stochastique $Z_{t,t+1}$:

$$p_{it} = R[Z_{t,t+1}g_{it+1} \mid I_t]. \tag{25}$$

Toute la diversité des modèles d'évaluation d'actifs financiers est liée au caractère stochastique du facteur d'actualisation $Z_{t,t+1}$ et à sa corrélation avec g_{it+1}. C'est cette corrélation qui fait que les prix des actifs ne sont pas simplement la valeur actualisée de l'espérance de leur gain futur, ce qui introduit en particulier la notion de *rémunération du risque*. C'est aussi pour cette raison que les modèles d'évaluation sont des modèles *non linéaires* d'anticipations rationnelles au sens où ils conduisent à s'intéresser à des anticipations de variables aléatoires qui ne sont pas de simples fonctions linéaires des prix (ou gains) des actifs mais font aussi intervenir des moments d'ordre supérieur (en particulier la variance ou covariance conditionnelle comme mesures du risque).

On peut ainsi caractériser les différents modèles d'évaluation par la forme qu'ils spécifient pour le facteur d'actualisation stochastique $Z_{t,t+1}$. Ce facteur sera en général spécifié comme fonction de différentes variables d'intérêt (rendement du marché ou d'autres portefeuilles de référence comme dans la section 1, taux marginal de substitution entre consommation présente et future comme dans (24) ...). Cette fonction est définie à partir d'un vecteur θ de paramètres structurels, caractéristiques des préférences des investisseurs (facteur d'escompte, degré d'aversion pour le risque, élasticité de substitution intertemporelle ...) et de la technologie. En notant $Z_{t,t+1}(\theta)$ cette spécification paramétrique, le modèle d'évaluation s'écrira donc :

$$p_{it} = E[Z_{t,t+1}(\theta)g_{it+1} \mid I_t]. \tag{26}$$

Ainsi, la conjonction de (23) et (24) caractérise le modèle d'évaluation dit C-CAPM (Consumption Based CAPM) alors que l'équation (12) caractéristique du CAPM peut être réécrite avec les notations (26) en posant :

$$Z_{t,t+1}(\theta) = \delta R^M_{t,t+1} \tag{27}$$

où $\theta = \delta$ et $R^M_{t,t+1}$ désigne le rendement du portefeuille de marché sur la période $[t,t + 1]$. En effet, la conjonction de (26) et (27), en écrivant la relation d'évaluation (26) non seulement pour un actif générique caractérisé par (p_t, g_{t+1}) mais aussi pour l'actif sans risque et le portefeuille de marché, fournit l'ensemble de relations

$$\begin{cases} p_t = \delta E[R^M_{t,t+1} g_{t+1} \mid I_t] \\ 1 = \delta(1 + r_{F_t}) E[R^M_{t,t+1} \mid I_t] \\ 1 = \delta E[(R^M_{t,t+1})^2 \mid I_t]. \end{cases}$$

Ceci implique, en éliminant δ et $E[(R^M_{t,t+1})^2 \mid I_t]$, la relation d'évaluation (12) écrite sous la forme dynamique :

$$\frac{E[g_{t+1} | I_t]}{p_t} - (1 + r_{F_t}) = \frac{cov\left[\frac{g_{t+1}}{p_t}, R^M_{t,t+1} \middle| I_t\right]}{var\left[R^M_{t,t+1} \middle| I_t\right]} \left(E\left(R^M_{t,t+1} \middle| I_t\right) - (1 + r_{F_t})\right).$$

Epstein et Zin (1989) ont proposé un modèle d'évaluation où les préférences sont modélisées par une fonction d'utilité intertemporelle qui n'est pas séparable additivement et fournit un facteur d'actualisation :

$$Z_{t,t+1}(\theta) = \delta^\gamma \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{\gamma(\rho-1)} \left(R^M_{t,t+1} \middle| I_t\right)^{\gamma-1} \tag{28}$$

où $\theta = (\delta, \rho, \gamma)$ est le vecteur des paramètres structurels qui s'interprètent en termes de préférence de la façon suivante :

- δ est un facteur d'escompte subjectif,
- $\rho = 1 - \frac{1}{\sigma}$ où σ est l'élasticité de substitution intertemporelle, et
- $1 - \gamma\rho$ est un indice relatif d'aversion pour le risque.

Un des mérites du modèle d'évaluation (28) est d'englober le CAPM et le C-CAPM comme cas particuliers. On retrouve en effet (24) pour

$(\delta,\rho,\gamma) = (\delta, 1 - \alpha, 1)$

et (27) pour

$(\rho,\gamma) = (1,2)$

(en changeant δ en δ^2). On notera en particulier que le CAPM est un cas limite (ρ = 1 correspondant à une élasticité de substitution infinie) alors que le choix $(\rho,\gamma) = (1,2)$ assure l'identification formelle entre (27) et (28) même si la valeur $1 - \gamma\rho = -1$ est absurde pour un paramètre d'aversion pour le risque. On retrouve comme signalé à la section 1.3, que le CAPM n'est pas en général compatible avec la théorie de la décision en environnement aléatoire si l'on ne fait pas une hypothèse d'«ellipticité» sur la loi des rendements. On retrouvera au paragraphe suivant que la normalité conditionnelle des rendements permet de rendre le modèle général (28) compatible avec le CAPM dès que $\rho = 1$ (sans aucune contrainte sur γ) ou $\gamma = 0$ (sans aucune contrainte sur ρ).

Notons enfin que le modèle général (28) ne prend pas en compte le risque d'inflation, le risque de change, les contraintes de liquidité, la formation d'habitudes, les aléas affectant le secteur productif, et plus généralement tous les phénomènes qui pourraient introduire d'autres variables directrices dans le facteur d'actualisation $Z_{t,t+1}(\theta)$, à côté du taux marginal de substitution ou du rendement du marché et des portefeuilles de référence.

2.2 *Modèles à facteurs associés à un facteur d'actualisation stochastique*

Un modèle structurel d'évaluation du type général (26) est souvent à l'origine du choix d'une représentation factorielle particulière, soit pour les besoins de l'interprétation macroéconomique (interprétation des facteurs comme variables représentatives de la conjoncture macroéconomique) ou pour celui de la gestion de portefeuille (facteurs représentatifs de risques aisément gérables). L'idée de base est de définir un système de K facteurs $F_{k,t+1}$, $k = 1,2,...,K$, qui soient directeurs à la date t pour la dynamique d'un facteur d'actualisation stochastique $Z_{t,t+1}$. Plusieurs justifications sont envisageables :

- soit $Z_{t,t+1}$ coïncide avec sa régression affine sur les facteurs, conditionnellement à l'information I_t disponible à la date t :

$$\begin{cases} Z_{t,t+1} = b_{0t} + \sum_{k=1}^{K} b_{kt} F_{kt+1} \\ b_{kt} \in I_t, k = 0,1,2,\dots,K. \end{cases} \tag{29}$$

- soit $Z_{t,t+1}$ est seulement supposé être conditionnellement à I_t, une fonction déterministe (éventuellement non linéaire) du vecteur $F_{t+1} = (F_{kt+1})1_{\leq k \leq K}$ des K facteurs :

$$Z_{t,t+1} = E[Z_{t,t+1} \mid I_t, F_{t+1}]. \tag{30}$$

Ces facteurs (qui ne fournissent une représentation du facteur d'actualisation qu'au sens large de l'espérance conditionnelle à I_t, et non pas nécessairement au sens plus restrictif d'une régression affine (29) conditionnelle à I_t) sont supposés en outre capables de «dupliquer» tous les gains espérés de portefeuille, au sens où :

$$\begin{cases} E[g_{it+1} | I_t, F_{t+1}] = \lambda_{it} + \sum_{k=1}^{K} \alpha_{ikt} F_{kt+1} \\ \lambda_{it} \beta_{ikt} \in I_t, \ i = 1,2,\dots,n, \ k = 1,2,\dots,K \end{cases} \tag{31}$$

pour tout actif $i = 1,2,...,n$ susceptible de procurer un gain g_{it+1} à la date $t + 1$

On va montrer que chacun des deux ensembles d'hypothèses – l'hypothèse (29) ou le couple d'hypothèses (30)/(31)[5] – va nous fournir une formule de *Valorisation Factorielle Exacte* (conditionnelle à l'information I_t) à K facteurs F_{kt+1}, $k = 1,2,...,K$.

Ceci montre bien l'importance des variables directrices du facteur d'actualisation (dont une liste a été proposée dans la section 2.1 ci-dessus) puisque ce sont elles qui vont définir, via (29) ou (30), les facteurs de la valorisation factorielle.

Pour obtenir cette valorisation factorielle, on commence par remarquer que le modèle d'évaluation général (26) peut toujours être caractérisé par un ensemble de n conditions d'orthogonalité :

$$E[\tilde{r}_{it+1}Z_{t,t+1} \mid I_t] = 0 \qquad \text{pour } i = 1,2,...,n \tag{32}$$

où $\tilde{r}_{it+1}$, désigne, pour $i = 1,2,...,n$ le rendement excédentaire de l'actif i :

$$\tilde{r}_{it+1} = \frac{g_{it+1}}{p_{it}} - 1 - r_{F_t} = r_{it+1} - r_{F_t}. \tag{33}$$

On note ensuite que l'on peut supposer, sans perte de généralité, que les facteurs eux-mêmes vérifient aussi ces conditions d'orthogonalité :

$$E[F_{kt+1}\, Z_{t,t+1} \mid I_t] = 0 \qquad k = 1,2,...,K \tag{34}$$

En effet, si cette hypothèse n'était pas vérifiée, on pourrait remplacer F_{kt+1} par $F_{kt+1} + \nu_{kt}$, avec ν_{kt} solution de :

$$E[F_{kt+1}Z_{t,t+1} \mid I_t] + \nu_{kt}E\,[Z_{t,t+1} \mid I_t] = 0.$$

Ce nombre ν_{kt} existe toujours puisque $E[Z_{t,t+1} \mid I_t] \neq 0$ (cf. la valorisation par (26) de l'actif sans risque de rendement r_{F_t}). D'autre part, l'ajout à F_{kt+1} de ν_{kt} ne modifiera en rien le contenu des hypothèses (29) ou (30). Bien sûr, cela est susceptible de modifier partiellement l'interprétation économique du facteur (mais pas de son innovation). En outre, on est assuré de pouvoir choisir $\nu_{kt} = 0$ si le facteur F_{kt+1} lui-même duplicable comme rendement excédentaire de portefeuille :

$$F_{kt+1} = \sum_{i=1}^{n} a_{ikt}\tilde{r}_{it+1} \tag{35}$$

avec des coefficients a_{ikt} appartenant à I_t (portefeuille composé en t) puisqu'alors (32) implique (34).

Quoiqu'il en soit, la conjonction de (32)/(34) avec (29) ou (30)/(31) va impliquer la *Valorisation Factorielle Exacte* annoncée puisque, si l'on désigne par :

$$\mu_{it} + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ikt} F_{kt+1}, \tag{36}$$

5. (30) est plus faible que (29) mais est complétée par (31)

la régression affine de $\tilde{r}_{it+1}$ sur les facteurs conditionnellement à I_t, on peut envisager deux cas :

1^{er} cas : Si l'hypothèse (31) est vérifiée, la régression affine (35) coïncide avec l'espérance conditionnelle $E[\tilde{r}_{it+1} \mid I_t, F_{t+1}]$, si bien que :

$$0 = E\left[\tilde{r}_{it+1} Z_{t,t+1} | I_t\right]$$
$$= E\left[\left(\mu_{it} + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ikt} F_{kt+1}\right) Z_{t,t+1} | I_t\right],$$

puisque la différence entre $\tilde{r}_{it+1}$ en son espérance conditionnelle est orthogonale à toute fonction de F_{t+1} et en particulier à $Z_{t,t+1}$ (compte tenu de (30)).

On a alors d'après (34) :

$$\mu_{it} E[Z_{t,t+1} \mid I_t] = 0$$

ce qui permet de conclure que

$$\mu_{it} = 0.$$

2^e cas : Si l'hypothèse (29) est satisfaite, alors :

$$0 = E\left[\tilde{r}_{it+1} Z_{t,t+1} | I_t\right]$$
$$= E\left[\left(\mu_{it} + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ikt} F_{kt+1}\right) Z_{t,t+1} | I_t\right]$$

parce que $Z_{t,t+1}$, lui-même fonction affine (sachant I_t) de F_{t+1}, est orthogonal au résidu de la régression affine de $\tilde{r}_{it+1}$ sur F_{t+1}.

On peut donc conclure dans tous les cas que $\mu_{it} = 0$, ce qui, en calculant l'espérance de (35), implique que pour $i = 1,2,\ldots,n$:

$$E\left[r_{it+1} | I_t\right] - r_{F_t} = \sum_{k=1}^{K} \beta_{ikt} E\left[F_{kt+1} | I_t\right] \tag{37}$$

ce qui est exactement une *Valorisation Factorielle Exacte* au sens de la section 1.7 : *Le rendement excédentaire espéré de chaque actif apparaît comme une combinaison linéaire des coefficients bêtas de régression de cet actif sur les différents facteurs.*

Les primes de risque associées aux différents facteurs sont les espérances de ceux-ci, c'est-à-dire les *rendements nets espérés des portefeuilles qui les «dupliquent»* dans le cas (35) où cette duplication est possible.

À titre d'exemple d'application, on peut déduire de ce qui précède une explication de la compatibilité du modèle général (28) avec le CAPM *dès que* $\rho = 1$ (ou $\gamma = 0$)et que le vecteur de rendements est supposé *gaussien* (conditionnellement à I_t). En effet, (28) avec $\rho = 1$ ou $\gamma = 0$ stipule que :

$$0 = E[(R^M_{t,t+1})^{\gamma-1}\, \tilde{r}_{it+1}] \qquad \text{pour } i = 1,2,..., n. \tag{38}$$

Ce modèle est donc un cas d'application des hypothèses (30)/(31) avec $F_{t+1} = R^M_{t,t+1}$, à condition de supposer en outre que :

$$E[g_{it+1} \mid I_t, R^M_{t,t+1}]$$

est une fonction affine (à coefficients dans I_t) de $R^M_{t,t+1}$. Ceci est précisément assuré dans le cas où le vecteur des rendements est gaussien (conditionnellement à I_t) puisque g_{it+1} et $R^M_{t,t+1}$ sont des fonctions affines (à coefficients dans I_t) de ce vecteur. L'hypothèse de normalité permet donc d'obtenir (38) avec $F_{t+1} = R^M_{t,t+1}$, ce qui est précisément la relation (12) caractéristique du CAPM. Si en revanche, on n'est pas prêt à admettre que la loi des rendements vérifie (31) avec $F_{t+1} = R^M_{t,t+1}$, on doit, pour obtenir le CAPM à partir de (38), admettre que $Z_{t,t+1}$ et $R^M_{t,t+1}$ sont en relation affine (conformément à (29)) ce qui impose la restriction $\gamma = 2$, qui est malheureusement incompatible avec l'hypothèse d'aversion pour le risque (puisque par ailleurs, on suppose $\rho = 1$).

3. MOINDRES CARRÉS ET EFFICIENCE DE PORTEFEUILLE

3.1 *Exhaustivité linéaire et performance de portefeuille*

Considérons comme dans la section 1.6 un ensemble fini de titres «de base» dont les revenus aléatoires sont notés $r_0,...,r_n$ (avec $r_0 = (1 + r_F)$ 1I).

On suppose que ces titres sont normalisés de façon à être tous de prix unitaire et l'on note toujours S_n l'ensemble des revenus admissibles, c'est-à-dire l'espace vectoriel engendré par $\{r_0,...,r_n\}$.

On note $r^{(n)}$ le vecteur aléatoire $(r_1, r_2,...,r_n)'$ (matrice colonne de taille n), e_n la matrice colonne de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1, $y = r^{(n)} - r_0 e_n$ le vecteur des rendements excédentaires, et Σ_n la matrice $n \times n$ de covariance de $r^{(n)}(\Sigma_n = Var(r^{(n)})$, c'est-à-dire la matrice de terme général $cov(r_i, r_j)$ $(i,j = 1,...,n)$.

Avec des notations évidentes, le portefeuille de variance minimum dans S_n parmi ceux qui sont de rendement excédentaire espéré $R - r_F$ (pour un réel R donné) est obtenu en cherchant l'élément de variance minimum dans l'ensemble de variables aléatoires réelles :

$$\{\alpha'(r^{(n)} - r_0 e_n); \qquad \alpha \in IR^n, \qquad \alpha'(Er^{(n)} - r_0 e_n) = R - r_F\}. \tag{39}$$

Ceci suggère une analogie entre le concept d'efficience moyenne-variance et la théorie de l'estimation des moindres carrés. Le portefeuille MV-efficace de revenu espéré $1 + R$ (et de prix unitaire) caractérisé ci-dessus par les parts α de richesse investie dans les n actifs risqués peut ainsi être calculé en remarquant que le vecteur α correspondant doit être tel que $\alpha'(r^{(n)} - r_0 e_n)$ soit *le meilleur estimateur linéaire sans biais de* $(R - r_F)$ (au sens du théorème de Gauss-Markov) dans le modèle linéaire :

$$\begin{cases} y = E(r^{(n)} - r_0 e_n)b + u \\ Eu = 0, Var u = \Sigma_n. \end{cases} \tag{40}$$

Or on sait que cet estimateur BLUE (*Best Linear Unbiased Estimator*) est $(R - r_F)\hat{b}$ ou $\hat{b}$ est l'estimateur des moindres carrés généralisés (MCG) dans le modèle linéaire (40) :

$$\hat{b} = \frac{(Er^{(n)} - r_0 e_n)' \sum_n^{-1} (r^{(n)} - r_0 e_n)}{(Er^{(n)} - r_0 e_n)' \sum_n^{-1} (Er^{(n)} - r_0 e_n)}. \tag{41}$$

On retrouve ainsi, par une application immédiate du théorème de Gauss-Markov, la valeur $(R - r_F)\hat{b} = \alpha'(r^{(n)} - r_0 e_n)$ du portefeuille MV-efficace de revenu espéré $1 + R$. Cette correspondance portefeuille MV-efficace/estimateur BLUE est utilisée systématiquement dans Renault (1988) pour retrouver les résultats classiques de la théorie du portefeuille par application de la théorie des moindres carrés généralisés.

On peut par exemple démondrer de nouveau les résultats de la section 1.6 (Proposition 4) par application du concept d'exhaustivité linéaire tel qu'il a été développé par Gourieroux et Monfort (1980). Rappelons que dans un modèle linéaire général :

$$Ey = Xb, \qquad Var\, y = \Omega,$$

une statistique Cy est dite *linéairement exhaustive* si l'estimateur des MCG de b dans le modèle initial coïncide avec l'estimateur des MCG de b dans le modèle *transformé par* C :

$$Ez = (CX)b, \qquad Var\, z = C\Omega C'$$

dont la variable expliquée est $z = Cy$.

Considérons alors une matrice C de taille $p \times n$ et de rang p (de façon que la matrice $C\Omega C'$ soit inversible dès que Ω l'est). Transformer le modèle linéaire (40) par C revient donc à se limiter aux portefeuilles qui peuvent être constitués à partir des p actifs risqués dont les revenus aléatoires constituent les p coefficients du vecteur aléatoire $Cr^{(n)}$. Ces p actifs risqués sont aussi de prix unitaire si on suppose en outre que :

$$C\, e_n = e_p.$$

On considère ainsi les ensembles de revenus admissibles S_n et S_p^C qui sont respectivement les espaces vectoriels engendrés par $\{r_0, r_1,...,r_n\}$ et par $\{r_0, C_1' r^{(n)}, ..., C_p' r^{(n)}\}$ où $C_1',...,C_p'$ désignent les p lignes de la matrice C.

D'après l'équivalence MV-efficace/estimation BLUE mise en exergue ci-dessus, dire que la statistique Cy est linéairement exhaustive dans le modèle (40), c'est-à-dire que les droites de marché de S_n et S_p^C coïncident, ou encore que S_n et S_p^C ont la même performance potentielle : $I(S_n) = I(S_p^C)$. Or d'après un résultat classique sur l'exhaustivité linéaire (cf. Gouriéroux et Monfort, 1980 : 1092) l'exhaustivité linéaire de Cy est caractérisée par le fait que la variable explicative $Er^{(n)} - r_0 e_n$ du modèle initial appartienne à l'image de $\Sigma_n C'$, c'est-à-dire qu'il existe un vecteur γ tel que :

$$Er^{(n)} - r_0 e_n = \Sigma_n C'\gamma = cov[r^{(n)}, \gamma' C r^{(n)}].$$

On retrouve évidemment la condition multibêta (17) caractérisant l'égalité des performances de S_n et S_p^C. Cette condition est en effet clairement équivalente à l'existence de p réels ν_1 , $\nu_2,...,\nu_p$ tels que, pour tout $i = 1,2,...,n$:

$$Er_i = r_0 + \sum_{j=1}^{p} \nu_j \beta_j (S_p^C, r_i). \tag{42}$$

3.2 *Moindres carrés et tests de performance*

Une problématique classique en gestion de portefeuille consiste à se demander s'il est possible de réaliser la performance maximale $I(S_n)$ en investissant seulement dans un sous-ensemble $\{r_0, C_1' r^{(n)},...,C_p' r^{(n)}\}$ d'actifs, c'est-à-dire si est vérifiée l'hypothèse H_0 suivante :

$$H_0 : I(S_n) = I(S_p^C). \tag{43}$$

Compte tenu de la caractérisation (42) de H_0, il est naturel de tester cette hypothèse en considérant la somme des carrés des résidus d'une régression des rendements moyens excédentaires (estimés) sur les coefficients bêtas (estimés). Pour ce faire, le cas le plus simple est celui où l'on peut considérer (comme on le fera toujours dans cette section 4) que les rendements dans S_n observés pendant T périodes unitaires consécutives constituent un échantillon de T variables :

$$r_t^{(n)} = (r_{it})_{1 \le i \le n}, \qquad t = 1,2,...,T,$$

indépendantes et de même loi d'espérance $Er^{(n)}$ et de variance Σ_n. Cette hypothèse d'indépendance et d'équidistribution des rendements est à l'évidence irréaliste au regard en particulier de leurs caractéristiques dynamiques d'*hétéroscédasticité conditionnelle*, largement mises en évidence depuis Engle (1982) et Taylor (1986). On verra cependant dans la section 4 que cette dynamique n'invalide pas nécessairement les résultats démontrés d'abord (section 3) dans un cadre statique (pour simplifier).

Les moments du premier et du second ordre des rendements sont alors estimés par leurs contreparties empiriques :

$$\begin{cases} \bar{r} = \dfrac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{it}, \quad \bar{r}^{(n)} = (\bar{r}_i)_{1 \le i \le n} \\ \hat{\Sigma}_n = \dfrac{1}{T}(r_t^{(n)} - \bar{r}^{(n)})(r_t^{(n)} - \bar{r}^{(n)})'. \end{cases}$$

En notant $B(r_i)$ la matrice $p \times 1$ des coefficients bêtas du rendement r_i, $(i = 1,...,n)$ par rapport aux rendements $C'_k r^{(n)}$, $k = 1,...,p$:

$$\begin{aligned} B(r_i) &= \left(\beta_j(S_p^C, r_i)\right)_{1\le j\le p} \\ &= (C\Sigma_n C')^{-1} cov[Cr^{(n)}, r_i] \ . \end{aligned}$$

les coefficients bêtas estimés sont définis par :

$$\hat{B}(r_i) = (C\hat{\Sigma}_n C')^{-1} \frac{C}{T}\sum_{t=1}^{T}(r_t^{(n)} - \bar{r}^{(n)})(r_{it} - \bar{r}_i)$$

et l'«estimation» de la contrainte (42) se traduit par un «modèle linéaire asymptotique» (voir Gouriéroux, Monfort et Renault, 1988 pour cette notion)[6].

$$\begin{cases} \bar{r}_i - r_0 = \hat{B}(r_i)'\nu + u_i \quad i = 1, 2, ..., n \\ var[\bar{r}^{(n)} - r_0 e_n] \sim \dfrac{\hat{\Sigma}_n}{T}. \end{cases} \tag{44}$$

Pour T assez grand, $\hat{\Sigma}_n$ est régulière et le vecteur ν des paramètres du modèle (44) est identifiable puisque la matrice des exogènes est :

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}' & (r_1) \\ & \vdots \\ \hat{B}' & (r_n) \end{bmatrix} = \hat{\Sigma}_n C'\left(C\hat{\Sigma}_n C'\right)^{-1}, \tag{45}$$

qui est de plein rang colonne comme C'.

L'estimateur des MCG $\hat{\nu}$ de ν dans le modèle (44) est alors :

$$\begin{aligned} \hat{\nu} &= \left(\hat{B}'\hat{\Sigma}_n^{-1}\hat{B}\right)^{-1}\hat{B}'\hat{\Sigma}_n^{-1}\left(\bar{r}^{(n)} - r_0 e_n\right) \\ &= \left[\left(C\hat{\Sigma}_n C'\right)^{-1} C\hat{B}\right]^{-1}\left(C\hat{\Sigma}_n C'\right)^{-1} C\left(\bar{r}^{(n)} - r_0 e_n\right) \end{aligned}$$

soit, d'après (45) :

$$\hat{\nu} = C(\bar{r}^{(n)} - r_0 e_n) \tag{46}$$

$\hat{\nu}$ estime donc le rendement excédentaire espéré du vecteur $Cr^{(n)}$ des actifs primitifs de S_p^C, ce qui est naturel puisque, si l'hypothèse H_0 d'égalité des performances (sous sa forme (42)) est vérifiée, on a (cf. commentaires après (37)) :

$$\nu = C(Er^{(n)} - r_0 e_n) \ .$$

6. On supposera dans toute cette section 3, pour simplifier les notations, que le gain r_0 de l'actif sans risque ne dépend pas de la période t considérée.

La somme des carrés des résidus des MCG du modèle (44) est donc :

$$\mathrm{SCR} = \left(\bar{r}^{(n)} - r_0 e_n\right)' \left(\frac{\hat{\Sigma}_n}{T}\right)^{-1} \left(\bar{r}^{(n)} - r_0 e_n\right)$$

$$-\left(\bar{r}^{(n)} - r_0 e_n\right)' C'\hat{B}' \left(\frac{\hat{\Sigma}_n}{T}\right)^{-1} \hat{B}C\left(\bar{r}^{(n)} - r_0 e_n\right)$$

soit :

$$\mathrm{SCR} = T\left(\bar{r}^{(n)} - r_0 e_n\right)' \hat{\Sigma}_n^{-1}\left(\bar{r}^{(n)} - r_0 e_n\right)$$

$$-T\left(C\bar{r}^{(n)} - r_0 e_p\right)' \left(C\hat{\Sigma}_n C'\right)^{-1}\left(C\bar{r}^{(n)} - r_0 e_p\right)$$

$$\mathrm{SCR} = T\left[\hat{I}^2(S_n) - \hat{I}^2(S_p^C)\right] \tag{47}$$

où $\hat{I}(S_n)$ et $\hat{I}(S_p^C)$ sont les contreparties empiriques des performances potentielles $I(S_n)$ et $I(S_p^C)$. En effet, d'après l'expression (41) du rendement excédentaire MV efficace, l'indice de Sharpe de ce rendement est bien :

$$I(S_n) = \left[\left(Er^{(n)} - r_0 e_n\right)' \Sigma_n^{-1}\left(Er^{(n)} - r_0 e_n\right)\right]^{1/2} \tag{48}$$

et pour la même raison

$$I(S_p^C) = \left[\left(ECr^{(n)} - r_0 e_p\right)' \left(C\Sigma_n C'\right)^{-1}\left(ECr^{(n)} - r_0 e_p\right)\right]^{1/2} \tag{49}$$

ce qui explique la relation (47) entre la somme des carrés des résidus et la différence des carrés des performances estimées.

La somme des carrés des résidus des MCG appliqués aux «contraintes estimées» par (44) fournit donc bien une statistique de test de l'hypothèse H_0 de l'égalité des performances potentielles $I(S_n)$ et $I(S_p^C)$. La loi de cette statistique sous H_0 n'est pas cependant la loi du χ^2 que l'on obtiendrait dans un modèle linéaire standard puisque les variables explicatives du modèle (44) sont elles-mêmes des estimateurs des vrais coefficients bêtas inconnus. Plusieurs auteurs (voir en particulier Jobson et Korkie, 1982) ont déterminé la loi asymptotique sous H_0 de $\mathrm{SCR} = T\,[\hat{I}^2(S_n) - \hat{I}^2(S_p^C)]$, ou plus précisément la relation de cette statistique avec les statistiques de test de Wald, du rapport des maxima de vraisemblance et du score pour tester H_0 sous hypothèse de normalité des rendements. On propose ci-dessous une approche par GMM qui a le double mérite d'unifier ces résultats et de fournir un test valide même si les rendements ne sont pas gaussiens.

3.3 *Test de la propriété MV efficace par une approche GMM*

Ce paragraphe est largement inspiré d'un article de Mackinlay et Richardson (1991) (voir aussi Renault, 1996), qui ont montré comment l'approche GMM, en s'affranchissant de l'hypothèse de normalité, permet de reconsidérer les tests de performance de portefeuille. Par souci de simplicité (voir section 4 pour une problématique plus générale) on ne s'intéressera ici à la problématique de test de performance que pour un portefeuille M donné de rendement excédentaire $\tilde{r}_{mt} = r_{mt} - r_0$, si bien que la condition (43) d'égalité des performances signifie simplement ici que ce portefeuille est MV-efficace dans l'ensemble S_n. Autrement dit, si l'on considère les équations de régression :

$$\begin{cases} \tilde{r}_{it} = a_i + b_i \tilde{r}_{mt} + u_{it} \\ E\, u_{it} = 0 \\ Cov(\tilde{r}_{mt}, u_{it}) = 0 \end{cases} \tag{50}$$

reliant les rendements excédentaires $\tilde{r}_{it} = r_{it} - r_0$, $i = 1,...,n$, des n actifs à celui du portefeuille, la propriété «le portefeuille M est MV efficace» se caractérise par l'hypothèse H_0 (traduction de (42) avec $p = 1$ et S_p^C espace vectoriel engendré par r_0 et r_m) :

$$\underline{H_0} : a_i = 0 \text{ pour } i = 1,2,...,n \quad . \tag{51}$$

En particulier, si l'on considère que M est représentatif du «portefeuille de marché», tester H_0 revient à **tester le modèle CAPM** lui-même.

On note α le vecteur $n \times 1$ $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)'$, β le vecteur n $\times$ 1 $(b_1, b_2, ..., b_n)'$ et Σ_n la matrice de variance du vecteur $(u_{1t}, u_{2t}, ..., u_{nt})'$. On suppose que Σ_n est définie positive, ce qui implique que $\tilde{r}_{mt}$ n'est pas simplement une combinaison linéaire des rendements individuels r_{it}, $i = 1,2,...,n$; autrement dit, le portefeuille de rendement $\tilde{r}_{mt}$ doit inclure d'autres actifs en addition des actifs $i = 1,2,...,n$. Ce sera typiquement le cas si on teste le CAPM avec pour $\tilde{r}_{mt}$ le rendement d'un portefeuille de marché de composition plus large que les n actifs d'intérêt.

On note $f_t(\theta)$ le vecteur :

$$f_t(\theta) = \begin{bmatrix} u_{1t}(a_1, b_1) \\ u_{1t}(a_1, b_1)\tilde{r}_{mt} \\ \vdots \\ u_{it}(a_i, b_i) \\ u_{it}(a_i, b_i)\tilde{r}_{mt} \\ \vdots \\ u_{nt}(a_n, b_n) \\ u_{nt}(a_n, b_n)\tilde{r}_{mt} \end{bmatrix}$$

où $\theta = (a_1,b_1,a_2,b_2,...,a_n,b_n)'$ et $u_{it}(a_i,b_i) = r_{it} - a_i - b_i\,\tilde{r}_{mt}$. Les conditions de moments résumant (50) s'écrivent donc :

$$Ef_t(\theta^0) = 0, \tag{52}$$

et l'estimateur GMM associé est $\hat{\theta}_T$ défini par :

$$g_T(\hat{\theta}_T) = \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1} f_{t+1}(\hat{\theta}_T) = 0$$

Il s'agit bien sûr de l'estimateur des MCO obtenu en faisant la régression actif par actif. D'après la théorie des GMM (Cf. Hansen, 1982) on sait que $\sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta^0)$ converge en loi vers une loi normale centrée de variance :

$$Var_{as}\left[\sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta^0)\right] = D_0^{-1}S_0D_0'^{-1}$$

où $D_0 = E\dfrac{\partial f_t}{\partial \theta'}(\theta^0)$ et $S_0 = Var f_t(\theta^0)$.

On a :

$$D_0 = -Id_n \otimes \begin{bmatrix} 1 & E\tilde{r}_{mt} \\ E\tilde{r}_{mt} & E\tilde{r}_{mt}^2 \end{bmatrix} = -Id_n \otimes \begin{bmatrix} 1 & \mu_{mt} \\ \mu_{mt} & \mu_{mt}^2 + \sigma_{mt}^2 \end{bmatrix}$$

avec des notations évidentes.

D'où :

$$D_0^{-1} = -Id_n \otimes \begin{bmatrix} 1 + \dfrac{\mu_m^2}{\sigma_m^2} & -\dfrac{\mu_m}{\sigma_m^2} \\ -\dfrac{\mu_m}{\sigma_m^2} & \dfrac{1}{\sigma_m^2} \end{bmatrix} \tag{53}$$

$S_0 = Var f_t(\theta^0)$ est une matrice de taille $(2n) \times (2n)$ composée de n blocs 2×2 que l'on peut décomposer de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} E(u_{it}u_{jt}) & E(u_{it}u_{jt}\tilde{r}_{mt}) \\ E(u_{it}u_{jt}\tilde{r}_{mt}) & E(u_{it}u_{jt}\tilde{r}_{mt}^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{ij} & \sigma_{ij}\mu_m \\ \sigma_{ij}\mu_m & \sigma_{ij}(\mu_m^2 + \sigma_m^2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{ij,m} \\ \sigma_{ij,m} & \sigma_{ij,mm} \end{bmatrix} \tag{54}$$

On notera $S_0 = S_0^1 + S_0^2$ la décomposition de la matrice S_0 correspondant à la décomposition (54) de ses blocs 2×2 avec :

$\sigma_{ij} = E(u_{it}u_{jt})$, $\sigma_{ij,m} = Cov[u_{it}u_{jt}\,\tilde{r}_{mt}]$ et $\sigma_{ij,mm} = Cov[u_{it}u_{jt}, \tilde{r}_{mt}^2]$.

Il est à ce stade intéressant de mettre en exergue un cas particulier important, parce qu'il correspond au test d'efficacité *MV* le plus usité.

1^er^ cas : $\sigma_{ij,m} = 0$ et $\sigma_{ij,mm} = 0$

Par définition les erreurs u_{it}, $i = 1,2,...,n$, de la régression affine des rendements (excédentaires) $\tilde{r}_{it}$, $i = 1,2,...,n$ des actifs primitifs sur le rendement (excédentaire) $\tilde{r}_{mt}$ du portefeuille sont non corrélées avec celui-ci. Mais la corrélation qui est en jeu ici est entre une fonction non linéaire $u_{it}u_{jt}$ de ces erreurs et $\tilde{r}_{mt}$ (ou $\tilde{r}^2_{mt}$). Si cette corrélation était non nulle, on pourrait parler d'**hétéroscédasticité conditionnelle** des rendements **en coupe transversale**. En effet, alors que $a_i + b_i \tilde{r}_{mt} = \tilde{r}_{it} - u_{it}$ est la meilleure prévision de $\tilde{r}_{it}$ par une fonction affine de $\tilde{r}_{mt}$, il se pourrait que la variance (resp. covariance) conditionnelle de $\tilde{r}_{it}$ (resp. entre $\tilde{r}_{it}$ et $\tilde{r}_{jt}$) sachant $\tilde{r}_{mt}$ dépende effectivement de $\tilde{r}_{mt}$:

$$E[u^2_{it} \mid \tilde{r}_{mt}] \text{ et } E[u_{it}u_{jt} \mid \tilde{r}_{mt}]$$

fonction non dégénérées de $\tilde{r}_{mt}$, si bien que :

$$\mathrm{E}[u^2_{it}\tilde{r}_{mt}] \neq E[u^2_{it}]E[\tilde{r}_{mt}]$$
$$\mathrm{E}[u_{it}u_{jt}\tilde{r}_{mt}] \neq E[u_{it}u_{jt}]E[\tilde{r}_{mt}]$$

c'est-à-dire $\sigma_{ii,m} \neq 0$ et $\sigma_{ij,m} \neq 0$.

Cette occurrence de **corrélations non linéaires** alors que la corrélation linéaire est exclue par définition ne pourra évidemment pas se produire si le vecteur ($\tilde{r}_{1t}$, r_{2t},..., $\tilde{r}_{nt}$, $\tilde{r}_{mt}$) des rendements est globalement gaussien puisque dans ce cas : les erreurs u_{it} sont non seulement non corrélées avec $\tilde{r}_{mt}$ mais même **indépendantes** de $\tilde{r}_{mt}$ si bien que toute corrélation (linéaire ou non) est exclue.

Il est amusant de constater que ce hiatus (non) corrélation linéaire/corrélation non linéaire se présente ici pour une motivation **statistique** après s'être présenté dans la section 2 pour des motifs **théoriques**. Il s'agissait (voir fin de la section 2), pour rendre le CAPM compatible avec la modélisation de l'aversion pour le risque, de justifier que $a_i + b_i\tilde{r}_{mt}$ soit aussi l'espérance conditionnelle de $\tilde{r}_{it}$ sachant $\tilde{r}_{mt}$, c'est-à-dire que u_{it} soit non corrélé avec toute fonction (linéaire ou non) de $\tilde{r}_{mt}$.

L'hypothèse de non-corrélation $\sigma_{ij,m} = \sigma_{ij,mm} = 0$ retenue pour ce premier cas permet donc d'exprimer $Var f_t(\theta^0)$ comme la matrice S^1_0 composée de n blocs 2×2 :

$$\sigma_{ij}\begin{bmatrix} 1 & \mu_m \\ \mu_m & \mu^2_m + \sigma^2_m \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$S^1_0 = \Sigma_n \otimes \begin{bmatrix} 1 & \mu_m \\ \mu_m & \mu^2_m + \sigma^2_m \end{bmatrix} \quad . \tag{55}$$

Par conséquent, en utilisant cette expression de S_0 et (53), on obtient :

$$Var_{as}\left[\sqrt{T}\left(\hat{\theta}_T - \theta^0\right)\right] = \Sigma_n \otimes \begin{bmatrix} 1+\frac{\mu_m^2}{\sigma_m^2} & -\frac{\mu_m}{\sigma_m^2} \\ -\frac{\mu_m}{\sigma_m^2} & \frac{1}{\sigma_m^2} \end{bmatrix} \tag{56}$$

On en déduit :

$$Var_{as}\sqrt{T}\left(\hat{\alpha}_T - \hat{\alpha}^0\right) = \left(1+\frac{\mu_m^2}{\sigma_m^2}\right)\Sigma_n \tag{57}$$

L'hypothèse H_0 d'efficacité MV du portefeuille se caractérisant par $\alpha^0 = 0$, la statistique de test de Wald de cette hypothèse s'écrit donc :

$$\xi_T^W = T\hat{\alpha}'_T\,\hat{\Sigma}_n^{-1}\,\hat{\alpha}_T\left(1+\frac{\hat{\mu}_m^2}{\hat{\sigma}_m^2}\right)^{-1} \tag{58}$$

où $\hat{\mu}_m$ (resp $\hat{\sigma}_m^2$) est la moyenne empirique (resp. variance empirique) du rendement excédentaire $\tilde{r}_{mt}$ sur les T périodes. L'expression (58) de la statistique de test de Wald, déduite de GMM (sous l'hypothèse $\sigma_{ij,m} = \sigma_{ij,mm} = 0$), coïncide avec celle obtenue auparavant dans la littérature à partir de la théorie du maximum de vraisemblance sous hypothèse de normalité (voir par exemple Jobson et Korkie, 1982 et Gibbons, Ross et Shanken, 1989). Ce test consiste à refuser l'hypothèse H_0 d'efficacité MV du portefeuille considéré (au niveau asymptotique α) si ξ_T^W dépasse le seuil critique $\chi^2_{95\%}(n)$($\chi^2(n)$ est la loi asymptotique de ξ_T^W sous H_0).

Pour faire le lien avec la somme des carrés des écarts à la formule d'évaluation du CAPM (formule (12) correspondant à (42) avec $p = 1$), il suffit de remarquer que, $\hat{\alpha}_T$ étant l'estimateur des MCO, on a par application de (47) :

$$T\hat{\alpha}'_T\,\hat{\Sigma}_n^{-1}\,\alpha_T = T\left(\bar{r}^{(n)} - \bar{r}_m\hat{\beta}\right)'\,\hat{\Sigma}_n^{-1}\left(\bar{r}^{(n)} - \bar{r}_m\hat{\beta}\right) = T.\mathrm{SCR} = T\left[\hat{I}^2(S_n) - \hat{I}^2\left(S_P^C\right)\right]$$

avec ici $I\left(S_P^C\right) = \frac{\mu_m}{\sigma_m}$, performance de Sharpe du portefeuille considéré ($p = 1$).

Autrement dit, la statistique de test de Wald s'écrit en termes de performance :

$$\xi_T^W = T\left[\hat{I}(S_n) - \frac{\hat{\mu}_m^2}{\hat{\sigma}_m^2}\right]\left(1+\frac{\hat{\mu}_m^2}{\hat{\sigma}_m^2}\right)^{-1} \tag{59}$$

On remarquera que, comme annoncé dans la section 3.2, ce n'est pas directement

$$T.\mathrm{SCR} = T\left[\hat{I}^2(S_n) - \frac{\hat{\mu}_m^2}{\hat{\sigma}_m^2}\right]$$

qui suit asymptotiquement une loi $\chi^2(n)$ sous H_0, mais, pour tenir compte de l'aléa inhérent à l'estimation des coefficients bêtas, cette somme des carrés des résidus doit être multipliée par un facteur correctif $\left[1+\frac{\hat{\mu}_m^2}{\hat{\sigma}_m^2}\right]^{-1}$.

Deux intuitions peuvent aider à interpréter ce facteur correctif :

- d'abord, puisque ce facteur est inférieur à 1, on observe que, si on l'oubliait, on ferait un test de niveau effectif supérieur au niveau nominal. Autrement dit, quand on se place «sous H_0», sachant que l'on a remplacé les vrais coefficients bêtas inconnus (qui vérifient H_0) par des estimateurs non contraints (qui ne la vérifient pas en général), il n'est pas surprenant qu'il faille compenser par un facteur correctif cette «pénalisation» de H_0. Il est d'ailleurs amusant de constater (voir Renault, 1996) que si on teste H_0 en utilisant des estimateurs GMM **contraints** par H_0 (et en faisant le test de suridentification de Hansen, 1982), le même facteur correctif apparaît exactement au sens inverse; les estimateurs contraints favorisant trop H_0, il convient de compenser en multipliant SCR par le facteur $1+\frac{\hat{\mu}_m^2}{\hat{\sigma}_m^2}$.
- l'écart à 1 du facteur correctif (ou de son inverse) est le carré de l'indice de performance de Sharpe du portefeuille $\tilde{r}_m$, qui serait la performance potentielle de l'ensemble des opportunités d'investissement si $\tilde{r}_m$ était *MV*-efficace (c'est-à-dire si H_0 était vérifiée). Autrement dit, plus forte est la pente de la droite de marché, plus le terme correctif est important dans l'analyse de la significativité de l'écart à cette droite.

2e cas : $\sigma_{ij,m} \neq 0$ ou $\sigma_{ij,mm} \neq 0$

Le premier cas ci-dessus est une justification supplémentaire au parti pris de cette section de mettre en exergue l'unité de pensée entre théorie financière et économétrie.On a pu constater :

- d'une part, que l'**écart des performances** potentielles des investissements (notion issue de la théorie financière) est la mesure pertinente pour **tester la significativité** d'un écart à la droite de marché.
- d'autre part, cette mesure ne s'est avérée pertinente que grâce à des hypothèses simplificatrices de non corrélation non linéaire qui sont en général justifiées par une hypothèse de normalité jointe des rendements qui, pour des raisons analogues, rend le CAPM plus attrayant vis-à-vis de la théorie générale des choix en incertitude.

On va montrer maintenant que dans le cas contraire où est permise une certaine hétéroscédasticité conditionnelle des rendements en coupe transversale, l'écart des performances potentielles n'est plus la mesure utile pour tester la propriété d'efficacité *MV*.

D'après (54), la variance asymptotique de $\sqrt{T}\left(\hat{\theta}_T - \theta^0\right)$ s'écrit de façon générale :

$$Var_{as}\left[\sqrt{T}\left(\hat{\theta}_T - \theta^0\right)\right] = D_0^{-1} S_0^1 D_0^{-1} + D_0^{-1} S_0^2 D_0^{-1}$$

soit, en retenant les termes correspondant à $\hat{\alpha}_T$:

$$Var_{as}\left[\sqrt{T}\left(\hat{\alpha}_T - \alpha^0\right)\right] = \left(1 + \frac{\mu_m^2}{\sigma_m^2}\right)\Sigma_n + \frac{1}{\sigma_m^2}\psi_n \tag{60}$$

où ψ_n est la matrice $n \times n$ qui corrige la variance de $\hat{\alpha}_T$ pour l'hétéroscédasticité conditionnelle en regroupant les coefficients nord-est des n matrices 2×2 :

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{\mu_m^2}{\sigma_m^2} & -\frac{\mu_m}{\sigma_m^2} \\ -\frac{\mu_m}{\sigma_m^2} & \frac{1}{\sigma_m^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{ij,m} \\ \sigma_{ij,m} & \sigma_{ij,mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + \frac{\mu_m^2}{\sigma_m^2} & -\frac{\mu_m}{\sigma_m^2} \\ -\frac{\mu_m}{\sigma_m^2} & \frac{1}{\sigma_m^2} \end{bmatrix}$$

qui composent par bloc la matrice $D_0^{-1} S_0^2 D_0^{-1}$. Le calcul du produit ci-dessus donne l'expression des coefficients ψ_{ij} de $\psi_n (i,j = 1,...,n)$

$$\psi_{ij} = \frac{\mu_m^2}{\sigma_m^2}\sigma_{ij,mm} - 2\mu_m\left(1 + \frac{\mu_m^2}{\sigma_m^2}\right)\sigma_{ij,m} \tag{61}$$

Ainsi, la statistique de test de Wald de H_0 s'écrit maintenant :

$$\xi_T^W = T\hat{\alpha}_T'\left[\left(1 + \frac{\hat{\mu}_m^2}{\hat{\sigma}_m^2}\right)\hat{\Sigma}_n + \frac{1}{\hat{\sigma}_m^2}\hat{\psi}_n\right]^{-1}\hat{\alpha}_T \tag{62}$$

(où $\hat{\psi}_n$ est la contrepartie empirique de ψ_n), ce qui ne s'exprime plus comme la multiplication de $\text{SCR} = T\left[\hat{l}^2(S_n) - \frac{\hat{\mu}_m^2}{\hat{\sigma}_m^2}\right]$ par un simple facteur correctif du niveau. Le vecteur $\hat{\alpha} = \overline{r}^{(n)} - \overline{r}_n\hat{\beta}$ des écarts estimés à la droite de marché **n'est plus mesuré avec une norme proportionnelle avec** $\hat{\Sigma}_n^{-1}$ mais avec une norme «corrigée de l'hétéroscédasticité conditionnelle». Pour apprécier l'impact effectif de cette corrélation sur les conclusions d'un test d'efficacité moyenne-variance, MacKinlay et Richardson (1991) proposent deux approches : une évaluation théorique fondée sur la loi de Student et une évaluation empirique fondée sur des rendements mensuels d'actions négociées au *New York Stock Exchange et à l'American Stock Exchange*. Nous résumons seulement ci-dessous les motivations et les résultats de l'évaluation théorique. La loi de Student multivariée est souvent utilisée comme alternative à la loi normale pour modéliser la loi des rendements d'actifs financiers, et cela pour au moins deux raisons :

- d'une part, elle permet de rendre compte d'une régularité empirique bien connue : la distribution des rendements observée est souvent **leptokurtique** au sens où les queues de distribution sont plus épaisses et en même temps le mode est plus prononcé que pour la loi normale. Pour une loi de Student de paramètre ν, le coefficient de Kurtosis (mesuré comme le ratio du moment centre d'ordre 4 sur le carré de la variance) est égal à $3\frac{\nu-2}{\nu-4}$. Autrement dit, pour ν grand, la différence avec la loi normale n'est pas importante $\left(\frac{\nu-2}{\nu-4}\sim 1\right)$, mais cette différence est en revanche sensible pour des valeurs de ν de l'ordre de 5 ou 10 $\left(\frac{\nu-2}{\nu-4}=3 \text{ ou } 4/3\right)$ qui semblent réalistes selon les études empiriques (voir par exemple Blattberg et Gonedes, 1974).
- d'autre part, la loi de Student permet, comme la loi normale, de rationaliser l'approche moyenne-variance en termes de maximisation de l'utilité espérée (voir par exemple Ingersoll, 1987)).

Selon MacKinlay et Richardson (1991), l'éventualité que le vecteur des rendements soit Student plutôt que gaussien est susceptible d'introduire des différences significatives entre la statistique de test de Wald correctement calculée par (62) et son approximation (prenant $\psi_n = 0$) fondée sur la présomption de normalité des rendements. Ils montrent plus précisément que la statistique (62) se déduit de la statistique de Wald calculée sous hypothèse de normalité en la multipliant par un facteur correctif :

$$\left[1+\frac{\hat{\mu}_m^2}{\hat{\sigma}_m^2}\right]\left[1+\frac{\nu-2}{\nu-4}\cdot\frac{\hat{\mu}_m^2}{\hat{\sigma}_m^2}\right]^{-1}.$$

Il est frappant de constater que l'écart à 1 de ce facteur correctif est directement caractérisé par l'écart à 1 du facteur de leptokurticité $\frac{\nu-2}{\nu-4}$. En d'autres termes, plus la loi est leptokurtique, plus la statistique de test de Wald calculée en supposant la normalité **surestime** la statistique correcte (62). Le test de Wald mal spécifié (parce qu'il ne tient pas compte de l'hétéroscédasticité conditionnelle) conduira donc à **rejeter trop souvent** l'hypothèse nulle d'efficacité moyenne-variance.

4. GESTION DYNAMIQUE DE PORTEFEUILLE

Dans l'optique de montrer comment les concepts introduits dans les sections précédentes peuvent fournir des outils opérationnels pour la gestion de portefeuille, nous reconsidérons dans cette section des résultats issus de travaux antérieurs de Gouriéroux, Monfort et Renault (1991), (1995) et Pastorello et Renault (1994).

4.1 *Modèles dynamiques à facteurs*

Nous avons proposé dans la section 2 divers fondements théoriques à une valorisation factorielle exacte (voir (37)) :

$$E\left[\tilde{r}_{it+1}\middle|I_t\right]-r_{F_t}=\sum_{k=1}^{K}\beta_{ikt}E\left[F_{kt+1}\middle|I_t\right] \tag{63}$$

où les β_{ikt}, $k = 1,2,...,K$, désignent les coefficients bêtas de la régression affine sur les «facteurs» F_{kt+1} du rendement excédentaire $\tilde{r}_{it+1}(i = 1,2,...,n)$ **conditionnellement** à l'information I_t disponible à la date t :

$$\begin{cases} \tilde{r}_{it+1}=\sum_{k=1}^{K}\beta_{ikt}F_{kt+1}+u_{it+1} \\ E\left[u_{it+1}\middle|I_t\right]=0 \quad i=1,\ldots,n \\ Cov\left[u_{it+1},F_{kt+1}\middle|I_t\right]=0 \quad i=1,\ldots n \\ \qquad\qquad\qquad\qquad k=1,\ldots,K \end{cases} \tag{64}$$

Rappellons que la nullité de l'«intercept» μ_{it} de cette régression[7] (équivalente à la relation multibêta (63)) traduit précisément le modèle d'évaluation d'actifs financiers auquel on se réfère. Dans une problématique de gestion de portefeuille, il peut dans certains cas être plus naturel (voir exemple plus loin) de raisonner en termes de gain plutôt qu'en termes de rendement. Alors que $\tilde{r}_{it+1}=\frac{g_{it+1}}{p_{it}}-\left(1+r_{F_t}\right)$ désigne le rendement excédentaire d'un investissement dans l'actif i sur la période $[t,t + 1]$, $\tilde{g}_{it+1} = \tilde{r}_{it+1} - p_{it} = g_{it+1} - (1 + r_{F_t})p_{it}$ désigne le «gain net»[8]. Dans la mesure où on suppose toujours que les prix p_{it} des actifs à la date t appartiennent à l'information I_t, l'équation de régression (64) peut être multipliée terme à terme par p_{it} pour fournir l'équation de régression conditionnelle à I_t du gain net sur les facteurs : les coefficients bêtas et les termes d'erreur sont dans ce cas tous multipliés par p_{it}. On considèrera donc de façon générale le modèle de régression conditionnelle à I_t :

7. Nous employons l'anglicisme «intercept» pour désigner l'ordonnée à l'origine d'un hyperplan de régression conditionnelle à I_t. Nous évitons la terminologie française «terme constant» qui pourrait donner à penser à tort que ce terme est constant alors qu'il s'agit en général d'un processus stochastique adapté à I_t.

8. $\frac{\tilde{g}_{it+1}}{1+r_{F_t}}$ est la valeur actuelle nette (selon un concept bien connu en théorie de l'investissement) de l'investissement dans l'actif i sur la période $[t,t + 1]$.

$$\begin{cases} y_{it+1} = \sum_{k=1}^{K} \beta_{ikt} F_{kt+1} + u_{it+1} \\ E\left[u_{it+1} \middle| I_t\right] = 0 \quad i = 1,\ldots,n \\ Cov\left[u_{it+1}, F_{kt+1} \middle| I_t\right] = 0 \quad i = 1,\ldots n;\ k = 1,\ldots,K \end{cases} \tag{65}$$

où y_{it+1} peut désigner selon le cas, soit le rendement excédentaire, soit le gain net de l'actif i (en corrigeant en conséquence les coefficients bêtas et les termes d'erreurs). Matriciellement, ce système sera noté :

$$\begin{cases} Y_{t+1} = B_t F_{t+1} + u_{t+1} \\ E\left[u_{it+1} \middle| I_t\right] = 0 \\ Cov\left[u_{t+1}, F_{t+1} \middle| I_t\right] = 0 \end{cases} \tag{66}$$

où $Y_{t+1}, B_t, F_{t+1}, u_{t+1}$ sont des matrices de tailles respectives $n \times 1$, $n \times K$, $K \times 1$, et $n \times 1$. Un tel modèle décompose le risque (conditionnel) total $Var[Y_{t+1} \mid It]$ en somme de deux termes :

$$\Sigma_t = Var[Y_{t+1} \mid I_t] = B_t Var[F_{t+1} \mid I_t] B'_t + Var[u_{t+1} \mid I_t] \tag{67}$$

qui font apparaître :

- d'une part le risque $Var[F_{t+1} \mid I_t]$ propre aux facteurs, pondéré par les coefficients bêtas correspondants.
- d'autre part le risque résiduel $Var[u_{t+1} \mid I_t]$.

Dans l'optique de **couverture du risque** des facteurs (ou de **gestion indicielle** dont les indices de référence sont les facteurs) il est intéressant de se demander dans quelle mesure les facteurs peuvent être «dupliqués» (notion anglo-saxonne de *mimicking portfolio*, voir Huberman, Kandel et Stambaugh (1987)) par des rendements excédentaires ou gains nets de portefeuille au sens où (voir (35)) :

$$F_{kt+1} = \sum_{i=1}^{n} a_{ikt} y_{it+1}$$

soit matriciellement :

$$F_{t+1} = a'_t Y_{t+1} \tag{68}$$

où a_t est une matrice $n \times K$ dont chaque colonne caractérise la composition d'un portefeuille «duplicateur» :

- Soit Y_{t+1} est un vecteur de gains nets et alors $(a_{ikt})_{1 \le i \le n}$ désignant les **quantités** de chacun des actifs $i = 1,2,\ldots,n$ qui composent le portefeuille numéro k, F_{kt+1} est le gain net de ce portefeuille.

– Soit Y_{t+1} est un vecteur de rendements excédentaires et alors $(a_{ikt})_{1 \leq i \leq n}$ désignant les **parts** de richesse investie dans les différents actifs risqués $i = 1,2,...,n$, F_{kt+1} est le rendement excédentaire du portefeuille k.

Si les facteurs sont définis par (68), la matrice des coefficients bêtas est donnée par :

$$B_t = Cov[Y_{t+1}, F_{t+1}](Var(F_{t+1} \mid I_t))^{-1}$$

soit :

$$B_t = \Sigma_t a_t (a_t' \Sigma_t a_t)^{-1} \qquad (69)$$

Dire que (68) est un système valide de facteurs (au sens de la valorisation factorielle exacte (63)) c'est donc dire que l'«intercept» dans la régression de Y_{t+1} sur F_{t+1} conditionnelle à I_t est nul, soit :

$$m_t - \Sigma_t a_t (a_t' \Sigma_t a_t)^{-1} a_t' m_t = 0$$

où

$$m_t = E[Y_{t+1} \mid I_t].$$

En écrivant cette équation sous la forme :

$$\Sigma_t^{-1} m_t - a_t (a_t' \Sigma_t a_t)^{-1} a_t' \Sigma_t \Sigma_t^{-1} m_t = 0$$

on fait apparaître la matrice $a_t (a_t' \Sigma_t a_t)^{-1} a_t' \Sigma_t$ de projection orthogonale sur l'espace vectoriel Ima_t engendré par les colonnes de a_t (pour le produit scalaire défini par Σ_t) et on peut donc conclure que cette propriété est équivalente à :

$$\Sigma_t^{-1} m_t \in Ima_t.$$

On a donc démontré :

Proposition 5 : *Pour a_t matrice $n \times K$ donnée élément de I_t, $F_{t+1} = a_t' Y_{t+1}$ est un système de* ***facteurs endogènes*** *valide (c'est-à-dire conforme à (63)) si et seulement si :*

$$\Sigma_t^{-1} m_t \in I_m a_t,$$

en notant :

$$m_t = E[Y_{t+1} \mid I_t] \text{ et } \Sigma_t = Var[Y_{t+1} \mid I_t].$$

Remarquons que la proposition 5 n'est autre qu'une réécriture en termes conditionnels de la proposition 4 ou du résultat (42). La relation de valorisation factorielle exacte (63) signifie qu'un portefeuille *MV*-efficace (proportionnel à $\left(\Sigma_t^{-1} m_t\right)' Y_{t+1}$ d'après (41)) peut être composé comme portefeuille des K portefeuilles correspondants aux colonnes de a_t :

$$\exists \lambda_t \;\; \Sigma_t^{-1} m_t = a_t \lambda_t \Leftrightarrow \left(\Sigma_t^{-1} m_t\right)' Y_{t+1} = \lambda_t'\left(a_t' Y_{t+1}\right).$$

Les facteurs F_{t+1} sont dans ce cas dit **endogènes** parce qu'eux-mêmes générés comme rendements de portefeuilles.

Une telle propriété peut être particulièrement utile en gestion dynamique de portefeuille si les K portefeuilles définis par a_t sont «stratégiquement» intéressants au sens où il est pertinent d'envisager de les composer à chaque date. On retrouve (comme annoncé en section 2) qu'une valorisation factorielle à plusieurs facteurs n'a d'intérêt que si les dits facteurs ont une interprétation macroéconomique et/ou fournissent des stratégies dynamiques de portefeuille.

Gouriéroux, Monfort et Renault (1991) se sont plus particulièrement intéressés au cas où les K portefeuilles de référence peuvent être définis par une matrice a_t fixe. On notera $a_t = a$. Cette hypothèse n'a évidemment pas le même contenu selon que l'on interprète les coefficients de a_t comme des quantités d'actifs (Y_{t+1} étant un vecteur de gains nets) ou comme des parts de la richesse investie (Y_{t+1} étant un vecteur de rendements excédentaires). Bien plus, les deux types d'hypothèses sont clairement en général incompatibles quand les prix relatifs des actifs varient.

On est en fait probablement plus intéressés par K portefeuilles de base fixes en termes de quantités investies, à la fois pour une raison théorique et pour une motivation pratique :

- La raison théorique est la référence au CAPM de Sharpe-Lintner-Mossin, dans lequel le portefeuille de référence est celui du marché. Pour une offre d'actifs approximativement invariante dans le temps, on préférera donc le point de vue des quantités fixes.
- La motivation pratique est celle de la mise à jour du portefeuille optimal à partir des portefeuilles de base ; ce que l'on peut obtenir sans transactions nouvelles est effectivement un portefeuille à quantités fixes dans le temps même si les coûts relatifs varient du fait de la variation des prix relatifs des différents actifs.

Ce point de vue purement **financier** donne en outre des fondements à une modélisation **statistique** de la dynamique multivariée de l'hétéroscédasticité conditionnelle : la notion de **modèles ARCH à facteurs** (voir Engle, Ng et Rotschild, 1989; Gouriéroux, Monfort et Renault, 1991; Gouriéroux, 1992; Monfort, 1994).

4.2 *Modèles ARCH à facteurs*

On s'intéresse donc ici au cas particulier de modèles à facteurs qui s'interprètent comme issus de facteurs endogènes à coefficients fixes $a'Y_{t+1}$. La matrice des coefficients bêtas admet alors elle-même une pseudo-inverse fixe :

$a'Bt = Id_K$ d'après (69) .

Un cas de référence intéressant est alors celui de coefficients bêtas eux-mêmes fixes, c'est-à-dire d'une dynamique de la variance conditionnelle Σ_t telle que :

$$B_t = \Sigma_t a\,(a' \Sigma_t a)^{-1}$$

ne dépende pas de I_t; on notera $B_t = B$.

Compte tenu de la décomposition (67) du risque conditionnel, l'hypothèse de **bêtas constants** s'interprète comme une limitation *a priori* de la dimension de la dynamique des facteurs au sens où :

$$\Sigma_t = Var[Y_{t+1}|I_t] = BVar[F_{t+1}|I_t]B' + Var[u_{t+1}|I_t]$$

si bien que, si par exemple les facteurs sont K processus GARCH indépendants, $BVar[F_{t+1}|I_t]\,B'$ fournit une représentation parcimonieuse (dans la mesure où le nombre K de facteurs sera petit devant le nombre n d'actifs) de la matrice de variance conditionnelle d'un grand nombre n d'actifs.

Bien sûr, cela suppose que l'on limite aussi le nombre de paramètres qui caractérisent la variance résiduelle $Var[u_{t+1}|I_t]$. Alors que la tradition issue de l'APT statique était en général de supposer cette matrice diagonale, la tradition moderne de la modélisation ARCH à facteurs est plutôt de la supposer **constante** mais pas nécessairement diagonale, pour ne pas écarter l'éventualité de relations de causalités instantanées entre les risques idiosyncratiques des actifs. D'une certaine façon, en posant :

$$Var[u_{t+1}|I_t] = \Omega$$

constante indépendante de I_t, on limite les dimensions de l'incertitude dans ses aspects longitudinaux (dynamiques) et non pas en coupe transversale comme dans la tradition de l'APT.

En complétant (66) par ces spécifications de la dynamique de l'hétéroscédasticité conditionnelle on aboutit ainsi à une structure statistique appellée **représentation factorielle linéaire** :

$$\begin{cases} Y_{t+1} = BF_{t+1} + u_{t+1} \\ E\left[u_{t+1}|I_t\right] = 0 \\ Cov\left[u_{t+1}, F_{t+1}|I_t\right] = 0 \\ Var\left[u_{t+1}|I_t\right] = \Omega \end{cases} \tag{70}$$

La question naturelle est alors de se demander dans quelle mesure cette structure statistique est nécessaire et suffisante pour les deux motivations que nous en avons données ci-dessus :

– d'une part, l'interprétation en termes de facteurs endogènes à coefficients fixes, c'est-à-dire la possibilité de choisir des facteurs sous la forme $F_{t+1} = a'Y_{t+1}$.

– d'autre part, la représentation parcimonieuse de la dynamique des deux premiers moments conditionnels en :

$$\begin{cases} m_t = B\mu_t \\ \Sigma_t = B\Lambda_t B' + \Omega \end{cases} \tag{71}$$

où μ_t et Λ_t sont des matrices données, éléments de I_t, de taille respective $K \times 1$ et $K \times K$. La proposition 6 ci-dessous dont nous empruntons la démonstration à Gouriéroux, Monfort et Renault (1991) (voir Annexe 2) répond par l'affirmative à ces deux questions sous l'hypothèse que la structure (70) est «**minimale**» au sens où B est supposée de plein rang colonne.

On parlera alors de **représentation factorielle linéaire d'ordre** K (où K est le nombre des facteurs).

Proposition 6 : *les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) Y_t admet une représentation factorielle linéaire d'ordre K conforme à (70)

(ii) Y_t admet une représentation factorielle linéaire d'ordre K avec K ***facteurs endogènes***

(iii) Y_t admet une représentation de type «ARCH à facteurs» conforme à (71).

De plus la matrice B des coefficients bêtas est la même dans les trois représentations. La matrice constante de variance résiduelle peut en revanche dépendre de la représentation.

On se trouve donc bien encore dans un cas où des motivations de nature financière sont convergentes avec les besoins de la modélisation statistique. La section suivante donne un exemple d'application de la structure statistique ainsi construite.

4.3 *Performances conditionnelles et historiques*

On peut reconsidérer dans ce cadre la question de savoir si un sous-ensemble donné des actifs (K actifs parmi les n) est «efficace» au sens où un portefeuille MV-efficace peut toujours être construit en utilisant uniquement ces K actifs (et l'actif sans risque). Quitte à renuméroter les actifs, on peut toujours supposer que les actifs d'intérêt sont les K premiers. On partitionnera donc le vecteur des gains nets en :

$$Y_t = (Y'_{1t}, Y'_{2t})'$$

où Y_{1t} vecteur aléatoire de taille K représente les gains nets des K actifs candidats à l'efficacité et Y_{2t} le vecteur des gains nets des $n - K$ actifs qu'on voudrait ne pas utiliser. Compte tenu de la proposition 5, il s'agit de se demander si $[Var_t Y_{t+1}]^{-1} E_t\, Y_{t+1} \in Im(a)$, où a est la matrice qui définit les K «portefeuilles» d'intérêt à partir des n actifs, c'est-à-dire :

$$Y_{1t} = a'Y_t$$

ce qui correspond évidemment à :

$a' = [Id_K, 0]$.

La propriété d'efficacité considérée pour les K premiers actifs se caractérise donc par le fait que les $n - K$ dernières lignes de la matrice $[Var_t Y_{t+1}]^{-1} E_t Y_{t+1}$ sont nulles, ou encore que $E_t Y_{t+1}$ est une combinaison linéaire des K premières colonnes de $Var_t Y_{t+1}$, c'est-à-dire appartient à l'espace image de $Cov_t(Y_{t+1}, Y_{1t+1})$. Compte tenu de notre parti pris de supposer les bêtas constants, on aura donc :

$$Cov_t\left[Y_{t+1}, Y_{1t+1}\right]\left[Var_t Y_{1t+1}\right]^{-1} = B_{.1} = \begin{bmatrix} Id_K \\ B_{21} \end{bmatrix}$$

où B_{21} est la matrice des coefficients bêtas (conditionnels à I_t) de Y_{2t+1} par rapport à Y_{1t+1}. Autrement dit, l'efficacité des K premiers actifs signifie que $E_t Y_{t+1}$ appartient à l'espace image de $B_{.1}$, ce qui se caractérise par :

$$E_t Y_{2t1} = B_{21} E_t Y_{1t+1} \tag{72}$$

Cette relation **multibêta conditionnelle** a souvent été considérée dans la littérature sous sa forme affaiblie (impliquée par (72)), forme dite **inconditionnelle**[9] :

$$EY_{2t+1} = B_{21} EY_{1t+1}. \tag{73}$$

Pour faire le lien entre ces deux approches, on se contentera ici, pour caractériser l'efficacité, de vérifier la nullité d'un «intercept» d_2 dans la régression conditionnelle de Y_{2t+1} sur Y_{1t+1} :

$$\begin{cases} Y_{2t+1} = d_2 + B_{21} Y_{1t+1} + u_{2t+1} \\ E_t u_{2t+1} = 0 \\ Cov_t\left(u_{2t+1}, Y_{1t+1}\right) = 0 \end{cases} \tag{74}$$

au lieu de considérer une alternative plus générale à l'hypothèse d'efficience dans laquelle d_2 serait une fonction de l'information disponible à la date t. Il faut cependant bien noter que l'on s'intéresse toujours à l'**efficacité conditionnelle** de l'ensemble des K premiers actifs (minimisation de la variance à espérance donnée dans la loi conditionnelle à I_t) et non à l'**efficacité inconditionnelle** (approche moyenne-variance dans la loi marginale). Il est néanmoins surprenant de constater que si l'on suppose que (74) est un modèle dynamique à facteurs au sens de (70) ($Var_t u_{2t+1} = \Omega_{22}$ indépendante de I_t), la constante $d_t' \Omega_{22}^{-1} d_2$ représente à la fois la différence des (carrés des) performances conditionnelles et marginales de Y_t et Y_{1t}. C'est l'objet de la proposition 7 suivante dont nous empruntons la démonstration à Gouriéroux, Monfort et Renault (1991) (voir annexe 3) :

9. Voir la discussion sur ce sujet de Gibbons et Ferson (1985).

Proposition 7 :

Si

$$Y_{2t+1} = d_2 + B_{21} Y_{1t+1} + u_{2t+1},$$

avec :

$$\begin{aligned} E_t u_{2t+1} &= 0, \\ Cov_t(u_{2t+1}, Y_{1t+1}) &= 0, \\ Var_t u_{2t+1} &= \Omega_{22} \end{aligned}$$

alors

$$S_1^2 - S_{1t}^2 = S^2 - S_1^2 = d_2' \Omega_{22}^{-1} d_2$$

où :

$$S_{1t}^2 = \left(E_t Y_{1t+1}\right)' \left[Var_t Y_{1t+1}\right]^{-1} \left(E_t Y_{1t+1}\right)$$

$$S_t^2 = \left(E_t Y_{t+1}\right)' \left[Var_t Y_{t+1}\right]^{-1} \left(E_t Y_{t+1}\right)$$

$$S_1^2 = \left(EY_{1t}\right)' \left[Var Y_{1t}\right]^{-1} \left(EY_{1t}\right)$$

$$S^2 = \left(EY_t\right)' \left[Var Y_t\right]^{-1} \left(EY_t\right).$$

Ainsi, la nullité de d_2 caractérise à la fois l'efficacité conditionnelle et l'efficacité inconditionnelle de l'ensemble des K premiers actifs.

On peut donc se demander si le calcul usuel des performances «historiques» $\hat{S}^2$ et $\hat{S}_1^2$, contreparties empiriques des performances marginales S^2 et S_1^2, ne suffirait pas pour le test statistique non seulement de l'efficacité inconditionnelle, mais aussi de l'efficacité conditionnelle, propriété beaucoup plus intéressante en pratique.

Le test de l'efficacité des *K* premiers actifs a été étudié par Jobson et Korkie (1982) dans le contexte de rendements *iid* gaussiens. Dans ce cas il est évidemment équivalent de tester l'efficacité conditionnelle ou inconditionnelle. Gouriéroux, Monfort et Renault (1991) ont montré que dans le cadre plus général du modèle dynamique à facteurs de la proposition 7 une approche du pseudo maximum de vraisemblance permet de retrouver un test de l'efficacité conditionnelle qui prend exactement la même forme que celui proposé par Jobson et Korkie. Ce résultat est résumé par la proposition 8 suivante :

Proposition 8 : *Dans le cadre du modèle à facteurs défini dans la Proposition 7, un équivalent asymptotique de la statistique de test de Wald de l'hypothèse $d_2 = 0$, c'est-à-dire de l'efficacité conditionnelle de l'ensemble des K premiers actifs, est défini par :*

$$\xi_T = T(1 + \hat{S}_1^2)^{-1} (\hat{S}^2 - \hat{S}_1^2).$$

La loi asymptotique sous l'hypothèse nulle de cette statistique est une loi χ^2 à $n - K$ degrés de liberté.

L'expression de ξ_T est bien celle fournie par Jobson et Korkie (1982). À un facteur multiplicatif près, la différence des carrés des performances historiques des deux ensembles d'actifs suffit donc bien à apprécier l'efficacité conditionnelle du sous-ensemble des K premiers actifs. Le facteur correctif $(1 + \hat{S}_1^2)^{-1}$ généralise celui que nous avions déjà exhibé dans (59).

ANNEXE 1

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 4

Nous allons monter successivement les deux équivalences (i) $\Leftrightarrow$ (ii) et (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

- (i) $\Leftrightarrow$ (ii) : Comme $r_F \in S_n$, les droites de marché de S_n et $S + S_n$ passent toutes deux par le point $(0,r_F)$. Ces deux droites coïncident si et seulement si leurs pentes $I(S_n)$ et $I(S + S_n)$ sont égales.
- (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) : On se ramène sans perte de généralité au cas où S est de dimension finie. On peut alors choisir une base de $S + S_n$ de la forme $\{r_0,...,r_n\} \cup \{r_{n+1},...,r_m\}$ (avec $m = n + p$). On note $r^{(n)}$ le vecteur aléatoire $\{r_1,...,r_n\}$, r^p le vecteur aléatoire $\{r_{n+1},...,r_m\}$ et $r^{(m)}$ le vecteur $\{r_1,...,r_m\}$ Si Σ_m désigne la matrice $m \times m$ de terme général $cov(r_i,r_j)$ $(i,j = 1,...,m)$, le vecteur de coordonnées $\theta = \Sigma_m^{-1} (Er^{(m)} - r_0)$ est MV-efficace dans $S + S_n$ (voir (41)). Dire que la droite de marché de $S + S_n$ coïncide avec celle de S_n équivaut alors à dire que $\theta \in S_n$, c'est-à-dire que ses p dernières coordonnées sont nulles.

Écrivons la matrice Σ_m par blocs, sous la forme :

$$\Sigma_m = \begin{pmatrix} \Sigma_n & \Sigma_{p,n} \\ \Sigma_{n,p} & \Sigma_p \end{pmatrix},$$

où Σ_n est de taille $n \times n$. D'après ce qui précède, on peut écrire :

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta^{(n)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

où $\theta^{(n)}$ est de dimension n, et donc

$$Er^{(m)} = r_0 + \begin{pmatrix} \Sigma_n \theta^{(n)} \\ \Sigma_{n,p} \theta^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Calculons maintenant la régression affine de $r^{(p)} - r_0$ sur $r^{(n)} - r_0$:

$$r^{(p)} - r_0 = \mu + \Sigma_{n,p}\Sigma_n^{-1}(r^{(n)} - r_0) + u,$$

où u est orthogonal à S_n. La propriété (17) équivaut à $\mu = 0$. Mais, d'après ce qui précède :

$$Er^{(n)} - r_0 = \Sigma_n\theta^{(n)} \text{ et } E\, r^{(p)} - r_0 = \Sigma_{n,p}\theta^{(n)}.$$

Par conséquent

$$\mu = (Er^{(p)} - r_0) - \Sigma_{n,p}\Sigma_n^{-1}(Er^{(n)} - r_0) = Eu = 0,$$

ce qui montre bien (17). La réciproque est immédiate, si l'on remarque que (17) implique que l'espérance de rendement de tout portefeuille y de $S + S_n$ est égale à celle de sa projection sur S_n.

ANNEXE 2

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 6

La seule implication non-triviale est $(iii) \Rightarrow (ii)$.

En considérant la matrice de projection orthogonale sur ImB associée au produit scalaire défini par Ω^{-1} :

$$P_B = B(B'\Omega^{-1}B)^{-1}B'\Omega^{-1}$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned} Y_{t+1} &= P_B Y_{t+1} + (Id_n - P_B)\, Y_{t+1} \\ &= Ba'Y_{t+1} + u_{t+1} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} a' = (B'\Omega^{-1}B)^{-1}B'\Omega^{-1} \\ u_{t+1} = (Id_n - P_B)\, Y_{t+1}. \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} E[u_{t+1}|I_t] &= (Id_n - P_B)\, B\mu_t = 0. \\ Var[u_{t+1}|I_t] &= (Id_n - P_B)\, \Sigma_t(Id_n - P_B) \\ &= (Id_n - P_B)\, \Omega(Id_n - P_B), \text{ matrice constante.} \\ Cov[u_{t+1}, a'Y_{t+1}|I_t] &= (Id_n - P_B)\, \Sigma_t a \\ &\quad (Id_n - P_B)\, \Omega a = 0. \end{aligned}$$

ANNEXE 3

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 7

Avec des notations évidentes, les espérances et variances de Y_{t+1} conditionnelles à I_t s'écrivent :

$$m_t = \begin{bmatrix} m_{1t} \\ d_2 + B_{21} m_{1t} \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_t = \begin{bmatrix} \Sigma_{11t} & \Sigma_{11t} B'_{21} \\ B_{21} \Sigma_{11t} & B_{12} \Sigma_{11t} B'_{21} + \Omega_{22} \end{bmatrix};$$

la performance potentielle de l'ensemble des actifs de base vaut :

$$\begin{aligned} S_t^2 &= m'_t \Sigma_t^{-1} m_t \\ &= \left[m'_{1t}, d'_2 + m'_{1t} B'_{21} \right] \cdot \begin{bmatrix} \Sigma_{11t}^{-1} + B'_{22} \Omega_{22}^{-1} B_{21} & -B'_{21} \Omega_{22}^{-1} \\ \Omega_{22}^{-1} B_{21} & \Omega_{22}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{1t} \\ d_2 + B_{21} m_{1t} \end{bmatrix} \\ &= m'_{1t} \Sigma_{11t}^{-1} m_{1t} + d'_2 \Omega_{22}^{-1} d_2 \\ &= S_{1t}^2 + d'_2 \Omega_{22}^{-1} d_2 \end{aligned}$$

où S_{1t} est la performance potentielle de l'ensemble des K actifs facteurs. Ainsi bien que chacune des mesures de performance S_t et S_{1t} dépende généralement du temps, le modèle est tel que l'écart entre les carrés de ces deux mesures soit stable dans le temps. En particulier les K premiers actifs engendrent des portefeuilles efficients si et seulement si $S_t = S_{1t}, \quad \forall t \Leftrightarrow d_2 = 0$.

Le même type de calcul peut-être développé de façon non conditionnelle. Nous notons :

$$\begin{aligned} m &= Em_t, \\ \Sigma &= E(\Sigma_t) + Var(m_t). \end{aligned}$$

Nous voyons que :

$$m = \begin{bmatrix} m_1 \\ d_2 + B_{21} m_1 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{11} B'_{21} \\ B_{21} \Sigma_{11} & B_{12} \Sigma_{11} B'_{21} + \Omega_{22} \end{bmatrix};$$

Nous en déduisons que les performances marginales satisfont aussi :

$$S^2 = S_1^2 + d'_2 \Omega_{22}^{-1} d_2.$$

BIBLIOGRAPHIE

BARTEN A.P., et L. SALVAS-BRONSARD (1970), «Note on Two Stages Least-Square Estimation with Shifts in the Structural Form», *Econometrica*, Vol. 38 : 138-141.

BLACK, F. (1972), «Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing», *Journal of Business*, Vol. 45 : 444-454.

BLATTBERG, R., et N. GONEDES (1974), «A Comparison of the Stable and Student Distributions as Statisticals Models of Stock Prices», *Journal of Business*, 47, 244-280.

BRAY, M. (1994), «The Arbitrage Pricing Theory is not Robust», discussion paper, FMG, London School of Economics.

BRONSARD C., et L. SALVAS-BRONSARD (1993), «De la variété de Patinkin-Malinvaud à l'optimum macroéconomique de court terme» dans MALGRANGE et SALVAS-BRONSARD (eds), *Macroéconomie, Développements récents*, Economica, Paris.

CHAMBERLAIN, G., et M. ROTHSCHILD (1983), «Arbitrage, Factor Structure, and Mean-Variance Analysis on Large Asset Markets», *Econometrica*, Vol. 51 : 1281-1304.

CHOQUET, G. (1973), *Cours d'Analyse*, tome 2, Masson, Paris.

COCHRANE, J.H. (1981), «Production-Based Asset Pricing and the Link Between Stock Returns and Economic Fluctuations», *Journal of Finance*, Vol. 46 : 207-234.

COCHRANE, J.H., et L.P. HANSEN (1992), «Asset Pricing Lessons for Macro-economics», NBER Working Paper.

DYBVIG, P., et S. ROSS (1985), «The Analytics of Performance Measurement Using a Security Market Line», *Journal of Finance*, Vol. XL : 401-416.

ENGLE, R.F (1982), «Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, *Econometrica*, 50 : 975-986.

ENGLE, R., V. NG, et M. ROTHSCHILD (1990), «Asset Pricing with a Factor ARCH Covariance Structure: Empirical Estimates for Treasury Bills», *Journal of Econometrics*, Vol. 45 : 213-237.

EPSTEIN, L.G., et S.E. ZIN (1989), «Substitution, Risk Aversion and the Temporal Behavior of Asset Returns: A Theoretical Approach» *Econometrica*, 57 : 937-970.

GIBBONS, M., (1982), «Multivariate Tests of Financial Models: A New Approach», *Journal of Financial Economics,* Vol. 14 : 217-236.

GIBBONS, M., S. ROSS, et J. SHANKEN (1989), «A Test of the Efficiency of a Given Portfolio», *Econometrica*, 57 : 1121 1152.

GIBBONS, M., et W. FERSON (1985), «Testing Asset Pricing Models with Changing Expectations and an Unobservable Market Portfolio», *Journal of Financial Economics*, Vol. 14 : 217-236.

GOURIÉROUX, C. (1992), *Modèles ARCH et applications financières*, Ed. Economica, Paris.

GOURIÉROUX, C., et A. MONFORT (1980), «Sufficient Linear Structures: Econometric Applications», *Econometrica*, Vol. 48 : 1083-1097.

GOURIÉROUX, C., A. MONFORT, et E. RENAULT (1988), «Contraintes bilinéaires : estimation et test», dans *Mélanges économiques - Essais en l'honneur de Edmond Malinvaud,* Editions Economica, Paris.

GOURIÉROUX, C., A. MONFORT, et E. RENAULT (1991), «Dynamic Factor Models», Document de Travail GREMAQ, n° 91.e.

GOURIÉROUX, C., A. MONFORT A,. et E. RENAULT (1995), «Inference in Factor Models» dans *Advances in Econometrics and Quantitative Economics,* MADDALA, PHILLIPS et SRINIVASAN Eds, Blackwell.

HANSEN, L.P. (1982), «Large sample properties of the generalized method of moments estimators», *Econometrica*, 50 : 1029-1054.

HANSEN L.P., et R. JAGANNATHAN (1991), «Implications of Security Market Data for Models of Dynamic Economies», *Journal of Political Economy*, Vol. 99 : 225-262.

HANSEN, L.P., J. HEATON, et A. YARON (1996), «Finite Sample Properties of Some Alternative GMM Estimators» *Journal of Business & Economic Statistics*, 19 : 262-280.

HANSEN, L.P., et K. SINGLETON (1982), «Generalized Instrumental Variables Estimation of Nonlinear Rational Expectations Models», *Econometrica*, 50 : 1269-1285.

HARRISON, J.M., et D. KREPS (1979), «Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets», *Journal of Economic Theory*, Vol. 20 : 381-408.

HUBERMAN, G. (1982), «A Simple Approach to Arbitrage Pricing Theory», *Journal of Economic Theory*, : 183-191.

HUBERMAN, G., S.A. KANDEL, et R.F. STAMBAUGH (1987), «Mimicking Portfolios and Exact Arbitrage Pricing» *Journal of Finance,* 42 : 1-10.

INGERSOLL, J.E. (1987), *Theory of Financial Decision Making*, Rowman and Littlefield, Savage, Md, USA.

JOBSON, J., et B. KORKIE (1982), «Potential Performance and Tests of Portfolio Efficiency», *Journal of Financial Economics,* Vol. 10 : 433-466.

LINTNER, J. (1965), «The Valuation of Risk Assets and the Delection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets», *Review of Economics and Statistics*, Vol. 47 : 13-37.

LUCAS R. Jr (1976), «Economic Policy Evaluation : A Critique» In Karl BRUNNER et Allen H. MELTZER (eds), *The Phillips Curve and Labor Markets.* Carnegie-Rochester Conference Series and Public Policy, Vol. 1, Amsterdam, North-Holland.

LUCAS, R.E. Jr. (1978), «Asset Prices in an Exchange Economy», *Econometrica,* 46 : 1429-1445.

MACKINLAY, A.C., et M.P. RICHARDSON (1991), «Using the Generalized Method of Moments to Test Mean-Variance Efficiency» *Journal of Finance,* 46 : 511-528.

MALGRANGE, P., et L. SALVAS-BRONSARD, éditeurs, (1993), *Macroéconomie, Développements Récents*, Editions Economica, Paris.

MALINVAUD E. (1982), *Théorie macroéconomique*, Dunod, Paris.

MARKOWITZ, H. (1970), *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments,* Yale University Press.

MONFORT, A. (1982), *Cours de Statistique Mathématique*, Economica, Paris.

MONFORT, A. (1994), «Généralisations et alternatives de la modélisation ARCH», dans *Modélisation ARCH*, DROESBEKE, FICHET, et TASSI Eds, Editions Ellipses, Paris.

PASTORELLO S., et E. RENAULT (1994), «Modèles à Facteurs en Finance», dans *Modélisation ARCH*, DROESBEKE, FICHET, et TASSI Eds, Editions Ellipses. Paris.

RENAULT, E. (1988), «Moindres Carrés et Performance de Portefeuille», Document de travail, Delta n° 88-01.

RENAULT E. (1996), «Économétrie de la Finance : La Méthode des Moments Généralisés», dans *Encyclopédie des Marchés Financiers*, Y. SIMON éditeur, Economica, Paris.

ROLL, R. (1977), «A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests. Part I: On Past and Potential Testability of the Theory», *Journal of Financial Economics*, Vol. 4 : 129-176.

ROSS, S.A. (1976), «The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing», *Journal of Economic Theory,* Vol. 13 : 341-360.

SHARPE, W. (1964), «Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk», *Journal of Finance*, Vol. 19 : 425-442.

TAYLOR, S. (1986), «Modelling Financial Time Series», New-York : Wiley.