

Article

« Estimation du PIB mensuel canadien : 1962 à 1985 »

Richard Guay, Ross D. Milbourne, Glenn Otto et Gregor W. Smith
L'Actualité économique, vol. 66, n° 1, 1990, p. 14-30.

Pour citer cet article, utiliser l'information suivante :

URI: <http://id.erudit.org/iderudit/601517ar>

DOI: 10.7202/601517ar

Note : les règles d'écriture des références bibliographiques peuvent varier selon les différents domaines du savoir.

Ce document est protégé par la loi sur le droit d'auteur. L'utilisation des services d'Érudit (y compris la reproduction) est assujettie à sa politique d'utilisation que vous pouvez consulter à l'URI <https://apropos.erudit.org/fr/usagers/politique-dutilisation/>

Érudit est un consortium interuniversitaire sans but lucratif composé de l'Université de Montréal, l'Université Laval et l'Université du Québec à Montréal. Il a pour mission la promotion et la valorisation de la recherche. Érudit offre des services d'édition numérique de documents scientifiques depuis 1998.

Pour communiquer avec les responsables d'Érudit : info@erudit.org

ESTIMATION DU PIB MENSUEL CANADIEN: 1962 À 1985

Richard GUAY, Ross D. MILBOURNE,
Glenn OTTO et Gregor W. SMITH*
*Département de science économique
Université Queen*

RÉSUMÉ – Cet article estime une série mensuelle du Produit Intérieur Brut au prix du marché pour le Canada et un indice de prix correspondant pour la période 1962 à 1985. Ces estimés sont compatibles avec l'estimé trimestriel à la base de la nouvelle mesure du revenu national de Statistique Canada. Nous combinons les estimés trimestriels de Statistique Canada avec des données mensuelles en utilisant un filtre de Kalman. En plus de fournir un estimé mensuel du PIB réel, nous calculons aussi le seul indice de prix mensuel disponible associé à toute mesure de revenu au Canada.

ABSTRACT – *Estimates of Monthly Canadian GDP, 1962-1985.* In this paper, we estimate a monthly series for Gross Domestic Product at market prices for Canada and a price deflator for the period 1962 to 1985. These estimates are consistent with the quarterly estimates which form the basis of the new national income measures of Statistics Canada. We combine the quarterly estimates from Statistics Canada with monthly data in a Kalman filter framework. In addition to presenting estimates of real GDP which can be used in monthly models, we present the only monthly price deflator or any income measure in Canada.

1. INTRODUCTION

Ce rapport présente un estimé mensuel du produit intérieur brut au prix du marché (PIB_{pm} ci-après) et d'un indice de prix associé approprié¹. Les chercheurs auront accès à une série temporelle utile pour tester plusieurs hypothèses macroéconomiques qui ne peuvent être testées adéquatement avec des données trimestrielles. Par exemple, plusieurs modèles de taux d'intérêt et de taux de change ont été testés trimestriellement puisque la mesure appropriée de revenu agrégé est trimestrielle. Malheureusement, agréger le taux de change et le taux d'intérêt élimine une partie de la volatilité de la série qu'il est important d'expliquer. Une estimation mensuelle aurait été plus appropriée. De plus, les chercheurs étudiant la consommation agrégée, la demande de monnaie et les inventaires affirment que l'agrégation des données peut très bien être la source du casse-tête apparent concernant la dynami-

* Nous remercions les deux évaluateurs anonymes, Sharon Kozicki et Serena Ng de la Banque du Canada et Karen Wilson de Statistique Canada pour leurs commentaires.

1. Voir Corrado (1986) pour un estimé mensuel du PNB des États-Unis.

que de ces séries (voir Christiano, Eichenbaum et Marshall, 1987). Comme les données mensuelles donnent lieu à un plus grand nombre d'observations elles sont spécialement utiles pour l'investigation d'un changement de régime.

Les études empiriques nécessitant des données mensuelles doivent omettre le revenu (et ainsi affaiblir l'hypothèse de recherche) ou trouver une variable approximative: par exemple, les chercheurs peuvent utiliser le PIB au coût des facteurs² (PIB_{cf} ci-après) ou alternativement ils peuvent interpoler le PIB_{pm} mensuel à partir des données trimestrielles. Les deux approches ont des lacunes importantes. En premier lieu, le PIB_{cf} est une série temporelle bien différente du PIB_{pm} comme la figure 1 l'illustre. La différence entre le PIB_{pm} et le PIB_{cf} en proportion du PIB_{pm} est importante et fortement saisonnière. Conséquemment, une étude traitant de la croissance ou de la conjoncture risque de produire des résultats substantiellement biaisés par l'utilisation du PIB_{cf} .

De son côté, l'interpolation est inappropriée puisqu'elle ne contient aucune information nouvelle par rapport aux données trimestrielles correspondantes. De plus, puisque la plupart des séries agrégées ont une racine unitaire, l'information se concentre habituellement dans l'innovation. Une simple interpolation est une très pauvre approximation de la vraie innovation.

Cet article s'appuie sur des données supplémentaires de Statistique Canada afin d'obtenir un estimé mensuel du PIB_{pm} réel et un indice de prix approprié. Notre procédure estime la seule composante du PIB_{pm} non disponible mensuellement à l'aide d'un filtre de Kalman. Ce dernier intègre l'information disponible aux mises à jour et impose les conditions d'agrégation et de cohérence entre le PIB_{pm} et l'indice de prix.

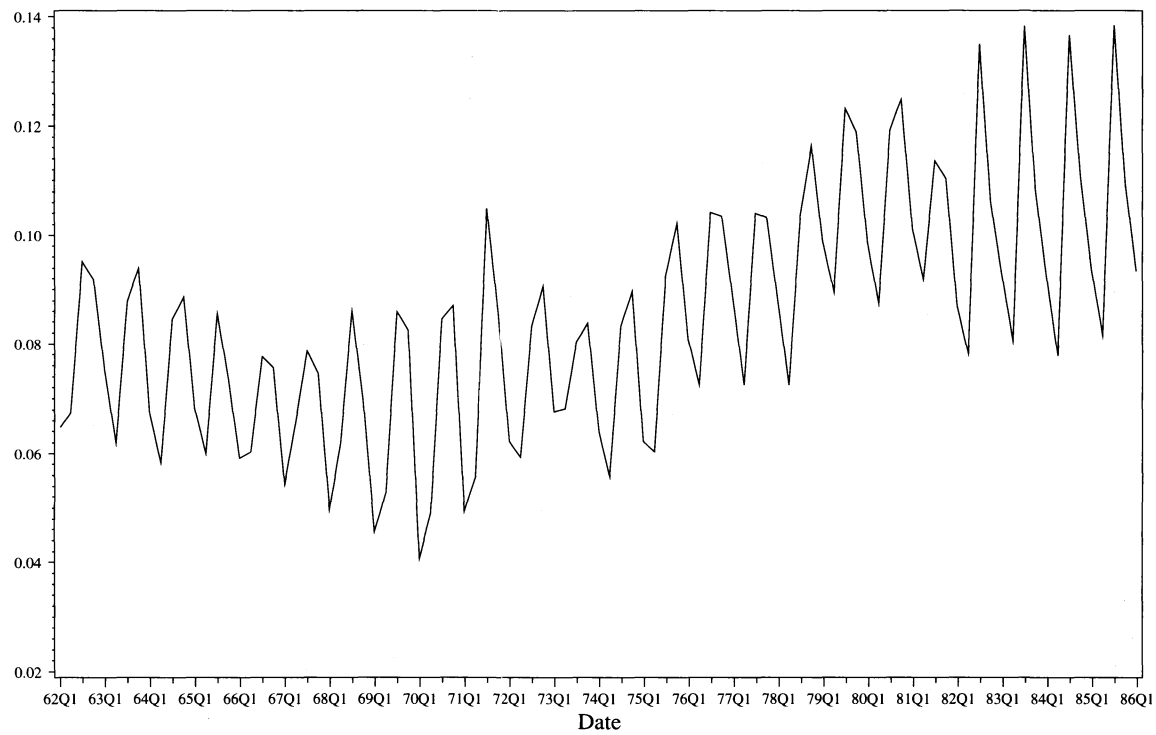
La section 2 aborde les méthodes de la comptabilité nationale du revenu et souligne comment la série mensuelle du PIB_{pm} réel peut être construite. La section 3 décrit les conditions de cohérence à satisfaire entre les données trimestrielles et mensuelles. La section 4 caractérise la nature de l'erreur de mesure des données publiées. La section 5 décrit la procédure d'estimation du filtre de Kalman. On y discute également des équations estimées et on présente la série mensuelle du PIB_{pm} réel et l'indice de prix. La conclusion suit.

2. ESTIMÉS DU REVENU

Statistique Canada publie présentement un estimé du PIB_{pm} trimestriel et de ses composantes en dollars courants et constants (de 1981). Auparavant, Statistique Canada publiait le Produit National Brut (PNB) et ses composantes (PIB_{pm} et PNB différent du revenu net reçu de l'étranger). De plus, une série mensuelle du PIB_{cf} réel est disponible. Cette série est tirée des estimations de la production physique par

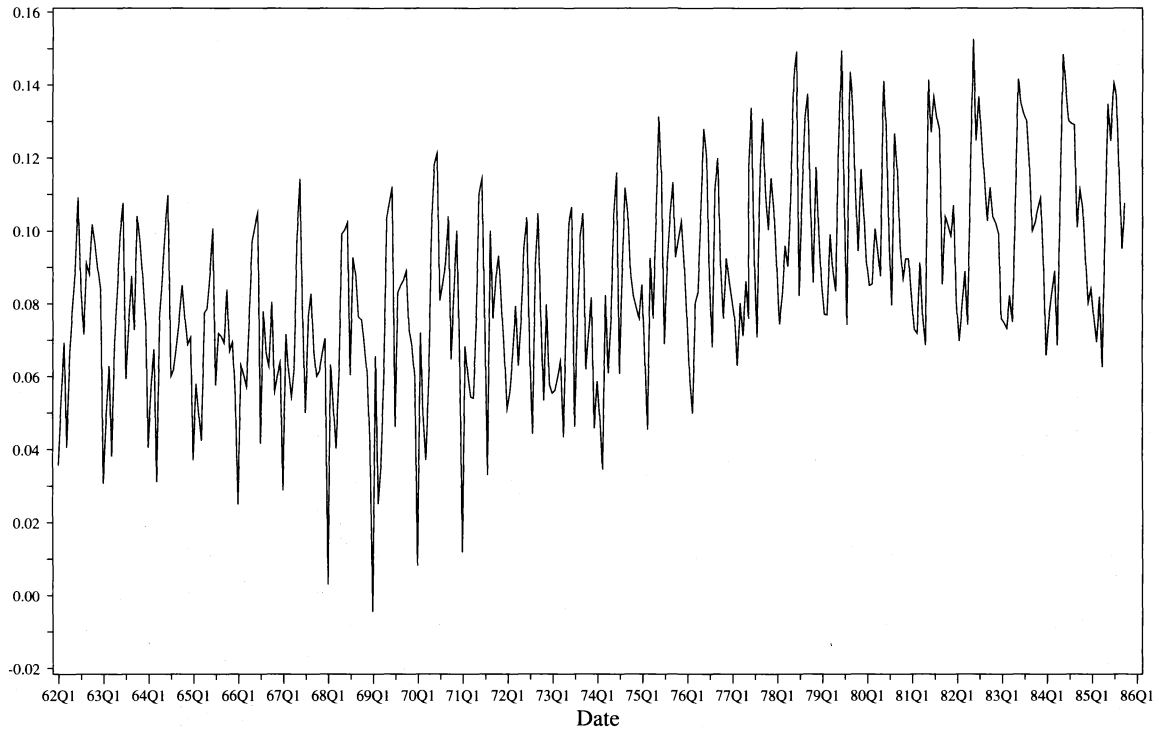
2. Récemment, Statistique Canada a bâti une série mensuelle du PIB_{cf} réel débutant en 1961. Avant 1961, les données étaient recueillies différemment de telle sorte que la série du PIB_{cf} n'est pas homogène par rapport aux données d'après 1961. La section 2 aborde la distinction à faire entre le PIB_{pm} et le PIB_{cf} .

FIGURE 1
 $(\text{PIB}_{\text{PM}} - \text{PIB}_{\text{CF}}) / \text{PIB}_{\text{PM}}$, 1962-85
(TRIMESTRIEL, NON-DÉSAISONNALISÉ, RÉEL)



SOURCE: CANSIM 87 pour le PIB_{CF} et tableau 4 pour le PIB_{PM}

FIGURE 2
 $(\text{PIB}_{\text{PM}} - \text{PIB}_{\text{CF}}) / \text{PIB}_{\text{PM}}, 1962-85$
(MENSUEL, NON-DÉSAISONNALISÉ, RÉEL)



SOURCE: CANSIM 88 (voir tableau 1)

industrie à partir desquelles un indice de valeur ajoutée est construit. Toutefois, il n'existe pas d'indice de prix mensuel associé.

Un résumé des mesures disponibles est présenté au Tableau 1. La différence entre le PIB_{cf} et le PIB_{pm} est que des estimés des taxes indirectes nettes (TIN ci-après)³ et d'écart statistique doivent être ajoutés au premier pour obtenir le second. L'écart statistique apparaît puisqu'il y a deux méthodes d'estimation du PIB: l'approche revenu et l'approche dépense. Puisque le changement d'inventaire est inclus dans les dépenses, les deux approches donnent la même mesure en théorie. En pratique, les mesures diffèrent et la moitié de cette différence est appelée «l'écart statistique».

TABLEAU 1
DONNÉES EXISTANTES ET MÉTHODES ALTERNATIVES D'ESTIMATION

	PIB _{cf}	Taxes indirectes	Écart	PIB _{pm}
réel Trimestriel nominal	10031026	D0010031-I0031026	D0010052	D0010031
	D0010057-D0010059 -D0010061	-D0010052 DD0010059	D0010061	D0010057
réel Mensuel nominal	I0033026	étape 1	étape 2	étape 3/d
	étape a	étape b	étape c	

SOURCE: Statistique Canada, CANSIM 1987.

Comme l'indique le Tableau 1, le PIB_{cf} réel est la seule série mensuelle disponible. Il y a deux façons de procéder afin d'obtenir une série mensuelle des PIB_{pm} réel et nominal (ou l'une de ces mesures et l'indice de prix mensuel). Une première méthode (étapes 1 - 3) consiste à compléter la rangée des mesures réelles. La deuxième méthode (étapes a - d) estime un indice de prix mensuel du PIB_{cf} réel pour estimer le PIB_{cf} nominal pour ensuite compléter la rangée des mesures nominales. Finalement, il faut calculer l'indice de prix du PIB_{pm} pour obtenir le PIB_{pm} réel. Les différentes étapes sont présentées au Tableau 1. Avant de discuter de la précision relative de chaque méthode, nous traitons trois aspects de l'estimation: les conditions de cohérence entre les estimés mensuels et trimestriels; le traitement de l'écart statistique; et l'utilisation du filtre de Kalman afin d'estimer les valeurs mensuelles.

3. COHÉRENCE ENTRE LES DONNÉES MENSUELLES ET TRIMESTRIELLES

Cette section aborde les conditions de cohérence des indices de prix mensuel et trimestriel, du PIB_{cf} réel et du PIB_{pm} réel. La mesure trimestrielle du PIB_{cf} réel est

3. Les TIN sont les taxes indirectes moins les subventions.

dénotée y et y_1 , y_2 et y_3 représentent les mesures mensuelles des trois mois qui forment le trimestre. La production physique du bien i au cours du mois j ($j = 1, 2, 3$) est dénotée x_j^i ; q_j^i représente le prix du bien i au coût des facteurs au mois j et q_0^i est le prix du bien i au coût des facteurs à la période de référence. Le PIB_{cf} réel est la valeur de la production au prix de la période de référence. Ainsi,

$$y \equiv \sum_i q_0^i \sum_j x_j^i \equiv \sum_i q_0^i x_1^i + \sum_i q_0^i x_2^i + \sum_i q_0^i x_3^i \quad (1)$$

$$\equiv \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{x}_2 + \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{x}_3 \quad (2)$$

$$\equiv y_1 + y_2 + y_3 \quad (3)$$

où \mathbf{q}_0 est le vecteur prix du coût des facteurs, \mathbf{x}_j est le vecteur colonne des quantités x_j^i et $y_j = \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{x}_j$ est le PIB_{cf} réel du mois j . L'indice de prix mensuel (Q_j) est le ratio de la production mesurée en dollars courants et de la production mesurée aux prix de la période de référence. La production en dollars courants est

$$y_j \equiv \sum_i q_j^i x_j^i \equiv \mathbf{q}_j \cdot \mathbf{x}_j, \quad j = 1, 2, 3; \quad Y = \sum_i \sum_j q_j^i x_j^i \equiv \sum_j \mathbf{q}_j \cdot \mathbf{x}_j \quad (4)$$

pour chaque mois et trimestre respectivement. Ainsi, on peut écrire pour l'indice de prix mensuel Q_j et pour l'indice trimestriel correspondant Q :

$$Q_j \equiv \mathbf{q}_j \cdot \mathbf{x}_j / \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{x}_j, \quad j = 1, 2, 3 \quad (5)$$

et

$$Q = \sum_j \mathbf{q}_j \cdot \mathbf{x}_j / \sum_j \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{x}_j \quad (6)$$

Alternativement, les valeurs trimestrielles et mensuelles du PIB_{cf} nominal peuvent s'écrire Qy et Q_1y_1 , Q_2y_2 et Q_3y_3 respectivement.

De (4), on note que la somme des valeurs nominales mensuelles de la production doit correspondre à la valeur nominale du trimestre de telle sorte que:

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$$

ou

$$Qy = Q_1y_1 + Q_2y_2 + Q_3y_3 \quad (7)$$

Les équations (3) et (7) fournissent les conditions de cohérence pour la valeur de la production mensuelle réelle et nominale. Ces dernières impliquent une condition équivalente pour l'indice de prix. De (6) on obtient

$$Q = \frac{Q_1y_1 + Q_2y_2 + Q_3y_3}{y_1 + y_2 + y_3} \quad (8)$$

Ainsi, l'indice de prix trimestriel doit être une moyenne pondérée de l'indice de prix mensuel.

L'analyse du PIB_{pm} est similaire. En dénotant le vecteur de prix du marché $\mathbf{p}_0 \equiv (p_0^j)$, le PIB_{pm} réel z et le PIB_{pm} nominal Z , on obtient:

$$z = \mathbf{p}_0 \cdot (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3) = z_1 + z_2 + z_3$$

$$Z = \mathbf{p}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{p}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{p}_3 \mathbf{x}_3 = Z_1 + Z_2 + Z_3$$

Notons que z peut être réécrit

$$z = \mathbf{q}_0 \cdot (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3) + (\mathbf{p}_0 - \mathbf{q}_0) \cdot (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3)$$

où le premier terme est le PIB_{cf} et le deuxième terme ajoute les TIN⁴. Il s'en suit que l'indice de prix du PIB_{pm} est

$$P_j = \mathbf{p}_j \cdot \mathbf{x}_j / \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{x}_j; \quad P = \sum_j \mathbf{p}_j \cdot \mathbf{x}_j / \sum_j \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{x}_j$$

Conséquemment, la condition qui relie l'indice de prix trimestriel aux mesures mensuelles est

$$P = \frac{P_1 z_1 + P_2 z_2 + P_3 z_3}{z_1 + z_2 + z_3} \quad (9)$$

L'équation (9) servira à la construction de l'indice de prix du PIB_{pm}.

4. TRAITEMENT DE L'ERREUR DE MESURE

L'approche revenu des comptes nationaux tout comme l'approche dépense n'est pas exempte d'erreurs de mesure. Les deux approches sont réconciliées via l'erreur statistique. Avant de procéder, il faut savoir si ces erreurs apparaissent lors du passage du PIB_{cf} au PIB_{pm} (i.e. dans les TIN) comme il est suggéré par la façon dont les comptes sont construits présentement ou si elles se produisent plutôt dans la compilation des données du PIB_{cf}. Il nous semble vraisemblable que les TIN sont rapportées relativement sans erreur. Ainsi, nous croyons que l'erreur de mesure provient plutôt du calcul du PIB_{cf}. Si tel est le cas, la valeur la plus appropriée des comptes nationaux pour le PIB_{cf} réel serait le PIB_{cf} rapporté additionné de l'erreur statistique. C'est la procédure que nous adoptons.

Alternativement, une partie de l'écart entre la série mensuelle et trimestrielle provient sans doute de l'écart statistique. Laquelle des deux séries est la plus précise? La série mensuelle est calculée à partir d'un indice quantité basé sur les estimés de production: la précision de cette série ne peut pas être vérifiée à partir d'une source indépendante, ce qui est un désavantage. Par contre, la série trimestrielle est une réconciliation du revenu calculé selon l'approche dépense. Ainsi, la mesure trimestrielle des comptes nationaux, une fois ajustée pour l'écart statistique,

4. Cette équation indique bien que la série du PIB_{cf} n'existe pas pour une raison économique (il n'est pas justifié de distinguer les TIN des autres taxes) mais pour une raison de procédure de la comptabilité nationale. Conséquemment, l'utilisation du PIB_{cf} est douteuse et les chercheurs pourraient préférer le PIB_{pm}.

nous apparaît l'estimé le plus précis du PIB_{cf} réel. Conséquemment, l'estimé basé sur la série mensuelle est considéré imprécis et est ajusté de façon à obéir à la condition d'agrégation de l'équation (3) ci-haut. La prochaine section aborde l'estimation de la série mensuelle des TIN et l'indice de prix mensuel.

5. L'ESTIMATION

Les estimés que nous avons construits ne sont pas désaisonnalisés. Ceci respecte la nature de la plupart des séries utilisées. De plus, une série non désaisonnalisée est plus appropriée pour étudier les questions macroéconomiques.

Comme l'indique le Tableau 1, il y a deux approches pour estimer le PIB_{pm} mensuel. La première est de compléter les mesures réelles pour ensuite estimer un indice de prix (étapes 1 - 3); la deuxième consiste à estimer les mesures nominales et l'indice de prix (étapes a - d). Chaque méthode implique l'estimation de valeurs mensuelles et de l'indice de prix.

5.1 Notre méthode d'estimation de l'indice de prix mensuel du PIB_{pm} peut être interprétée comme une application du filtre de Kalman. (Pour une introduction au filtre de Kalman voir Harvey (1982) et Meinhold et Singpurwalla (1983)). L'équation (9) est l'indice de prix trimestriel (équation d'observation) et (10) est l'indice de prix mensuel (équation de transition).

$$P_j = \lambda_0 + \lambda_1 I_j + \lambda_2 P_{j-1} + \varepsilon_j \quad j = 1, 2, 3 \quad (10)$$

où P_j est l'indice de prix non-observable, I_j est un vecteur d'indice de prix mensuel et ε_j est le terme d'erreur. Pour construire nos estimés nous avons utilisé quatre indices de prix mensuels: l'indice de prix à la consommation (IPC), l'indice du prix de vente industriel, l'indice de prix de la construction résidentielle et celui de la construction non résidentielle. Les indices de prix des importations et des exportations n'ont pas été utilisés puisque leur méthode de calcul a été modifiée durant la période que nous avons retenue. Ces séries ne sont pas cohérentes. Afin d'estimer λ_0 , λ_1 et λ_2 , nous avons régressé l'indice de prix trimestriel P sur une moyenne arithmétique trimestrielle de ces indices et sur une tendance linéaire⁵. Pour chaque trimestre, nous construisons P_1 et P_2 en utilisant les estimés de (10) et P_3 en utilisant (9). De façon générale, nous pouvons représenter nos estimés par l'équation suivante:

$$\hat{P}_j = \hat{\lambda}_0 + \hat{\lambda}_1 I_j + G_j ((P(z_1 + z_2 + z_3) - P_1 z_1 - P_2 z_2) / z_3 - \hat{\lambda}_0 - \hat{\lambda}_1 I_j) \quad (11)$$

où $j = 1, 2, 3$, et G_j représente le gain de Kalman et prend respectivement les valeurs 0, 0, 1, pour le premier, deuxième, et troisième mois du trimestre. Cette asymétrie apparente du gain de Kalman peut sembler bizarre au lecteur familier à Chow et Lin (1971). Ces auteurs attribuent un tiers du résidu trimestriel ε à chaque estimé

5. Les résultats empiriques avec les données trimestrielles indiquent que nous pouvons simplifier (10) en imposant $\lambda_2 = 0$. Nous ignorons λ_2 dans ce qui suit.

mensuel de telle sorte que la somme des mesures mensuelles correspond à la valeur trimestrielle. Une procédure analogue pour notre étude serait de construire la mesure mensuelle:

$$\hat{P}_j = \hat{\lambda}_0 + \hat{\lambda}_1 I_j + (z_j / (z_1 + z_2 + z_3)) \hat{\varepsilon} \quad (12)$$

où $\hat{\lambda}_0$, $\hat{\lambda}_1$ et $\hat{\varepsilon}$ sont les coefficients et résidus provenant de la projection trimestrielle. Le gain de Kalman correspondant à (12) est $z_j / (z_1 + z_2 + z_3)$. L'indice de prix mensuel ainsi élaboré satisfait la condition de cohérence (9) seulement si les indices de prix mensuels inclus dans I sont agrégés dans le temps avec une pondération du PIB_{pm} réel, $z_j / (z_1 + z_2 + z_3)$, pour fin d'utilisation dans un modèle économétrique trimestriel. Par contre, (11) est cohérent avec notre utilisation d'une agrégation temporelle simple des indices mensuels. De plus, nous avons obtenu un modèle trimestriel sans autocorrélation résiduelle. Puisque cette condition est nécessaire pour que le terme d'erreur mensuel non-observable ε_j soit non-autocorrélé, on peut trancher entre ces modèles seulement sur la base de la qualité de projection du modèle trimestriel. Toutefois, les deux modèles trimestriels sont très similaires (ceci n'est pas surprenant étant donné la nature très lisse de z_j). Il n'y a donc pas d'évidence très concluante quant à la meilleure méthode pour distribuer le résidu trimestriel.

5.2. Afin d'estimer la série réelle mensuelle des revenus de TIN, on régresse les données trimestrielles sur une matrice W d'observations trimestrielles de données qui y sont reliées et qui sont aussi observées mensuellement:

$$(p_0 - q_0) \cdot (x_1 + x_2 + x_3) = W\beta + \varepsilon. \quad (13)$$

Les estimateurs β sont obtenus par la méthode des moindres carrés et ε représente les résidus. On a post-multiplié la matrice d'observations mensuelle des variables incluses dans W par β . Ensuite, en appliquant un tiers du résidu trimestriel à chaque mois, on s'assure de satisfaire la condition de cohérence (3) pour chaque trimestre.

Les TIN sont composées des taxes indirectes fédérales, provinciales et municipales desquelles on a soustrait les subventions. Au niveau municipal, il s'agit essentiellement des taxes foncières (environ 90%) qui sont distribuées également dans le trimestre. Ainsi, W inclut uniquement les variables utiles pour prévoir les taxes indirectes et les subventions aux niveaux fédéral et provincial. Afin d'approximer les taxes indirectes fédérales nous utilisons les revenus mensuels des taxes indirectes publiés dans la Gazette du Canada. Cette dernière publie également une approximation mensuelle des subventions fédérales. Les taxes indirectes provinciales sont des taxes de vente (environ 70%). Ainsi, les ventes mensuelles au détail seront utiles pour fins de prévision. Finalement, les recettes monétaires agricoles nous servent d'approximation des subventions de tous les niveaux de gouvernements⁶. Cette série est disponible depuis 1968 et est utilisée dans la deuxième partie de notre échantillon qui débute en 1972.

6. Nous remercions Karen Wilson pour nous avoir indiqué que la fluctuation des subventions totales provient largement des subventions agricoles.

Les quatre variables mentionnées ci-haut sont nominales. Afin d'estimer les TIN réelles, ces variables doivent être dégonflées par un indice de prix mensuel des TIN, qui n'est malheureusement pas disponible. Toutefois, puisque ces variables sont des mesures imprécises, on perd peu de précision en dégonflant les revenus de taxe par un indice de prix mensuel tel que l'IPC pour obtenir des valeurs réelles⁷.

Les TIN sont aussi reliées à diverses productions agricoles et manufacturières. En plus des quatre séries mentionnées ci-haut, nous avons inclus les séries réelles suivantes: vente de véhicules automobiles neufs, production agricole, production manufacturière, construction, commerce de gros, commerce de détail et services.

5.3 Nous avons également estimé les TIN nominales. Nous avons utilisé la même matrice W que pour la version réelle sauf que nous avons gonflé toutes les variables réelles en utilisant l'IPC. De plus, il y a un autre volet à l'estimation des TIN nominales. Les données désagrégées⁸ sont disponibles pour la version nominale. Ainsi, il est possible d'estimer chaque composante séparément et d'obtenir un estimé agrégé en combinant ces estimations. Alternativement, on peut estimer la valeur agrégée en incorporant tous les régresseurs dans une équation. L'expérience a montré que l'estimation agrégée était légèrement meilleure que l'estimation de chaque composante même si tous les régresseurs sont utilisés pour estimer chaque composante séparément. De plus, l'estimation agrégée est plus simple.

5.4 L'estimation des séries nominales implique une étape de plus (étape a du tableau 1) que l'estimation des séries réelles. Le PIB_{cf} réel mensuel est disponible mais, un indice de prix doit être estimé afin d'obtenir le PIB_{cf} nominal mensuel auquel les TIN nominales doivent être ajoutées. Ainsi, il y a une source d'erreur additionnelle en utilisant l'approche nominale (étape a). On a comparé l'écart type en pourcentage ($\sigma_{\%}$) des deux méthodes. On a trouvé que l'estimation du PIB_{pm} réel est plus précise que l'estimation du PIB_{pm} nominal même si l'équation des TIN nominales a une projection légèrement plus précise que celle des TIN réelles. Ceci peut être illustré pour le mois j de la façon suivante:

$$z_j = y_j + (p_0 - q_0)x_j \equiv y_j + t_j$$

où z_j est le PIB_{pm} réel et t_j les TIN réelles. Puisque y_j est observé et que nous notons les projections de z_j et t_j , \hat{z}_j et \hat{t}_j , on peut écrire.

$$\hat{z}_j = y_j + \hat{t}_j$$

7. Notons que de dégonfler via l'IPC ou via l'indice prix du PIB_{pm} (calculé plus loin) sont des approximations puisqu'aucun des indices n'est approprié. L'indice prix du PIB_{pm} est $p_j \cdot x_j / p_0 \cdot x_j$, alors que l'indice prix approprié des TIN est $(p_j - q_j) \cdot x_j / (p_0 - q_0) \cdot x_j$. Ces indices sont égaux seulement si $p_j \cdot x_j / p_0 \cdot x_j = q_j \cdot x_j / q_0 \cdot x_j$ ce qui est invraisemblable. L'IPC étant plus accessible, nous avons retenus ce dernier.

8. Les numéros CANSIM 1987 des données désagrégées sont:

	Fédéral	Provincial	Local
Taxes indirectes:	D0010177	D0010198	D0010217
Subventions:	D0010184	D0010206	D0010225

Supposons que le ratio $\text{PIB}_{\text{cf}} / \text{PIB}_{\text{pm}}$ est constant à travers l'échantillon et dénoté α , il s'en suit que:

$$\sigma_{\% \zeta}^2 \equiv E \left(\frac{z_j - \hat{z}_j}{z_j} \right)^2 = E \left(\frac{t_j - \hat{t}_j}{t_j} \cdot (1 - \alpha) \right)^2 = (1 - \alpha)^2 \sigma_{\% t}^2 \quad (14)$$

De façon similaire, le PIB_{pm} nominal peut s'écrire

$$Z_j = Q_j y_j + (p_j - q_j) x_j \equiv Q_j y_j + T_j$$

Dans ce cas, les séries mensuelles Q_j et T_j doivent être estimées. Il s'en suit que

$$\sigma_{\% z}^2 \equiv E \left(\frac{Z_j - \hat{Z}_j}{Z_j} \right)^2 = \alpha^2 \sigma_{\% Q}^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_{\% T}^2 \quad (15)$$

où la covariance des résidus de l'équation Q et ceux de l'équation T est supposée nulle. La covariance nulle et α constant ne sont pas des hypothèses nécessaires à notre discussion.

Les résultats indiquent que $\alpha = .88$ et en combinant cela avec les estimés des écarts types dans (14) et (15), nous trouvons que $\sigma_{\% \zeta}$ est environ 10% supérieur à $\sigma_{\% t}$. Par conséquent, nous présentons les estimés des composantes réelles.

5.5 Nous avons estimé (13) sur la période 1961:4 à 1985:4 à l'aide des OLS en utilisant pour régresseur la valeur courante et un retard (trimestriel) des variables ci-haut mentionnées, une tendance linéaire et des variables dichotomiques saisonnières. Afin de vérifier la stabilité des paramètres estimés, l'échantillon a été divisé en deux sous-périodes à partir de 1971:4. Les résultats suggèrent que les paramètres diffèrent entre les deux sous-périodes. Puisque notre but est d'obtenir des prévisions précises, nous avons retenu les résultats de l'échantillon divisé. Les tests statistiques sont fournis au Tableau 2; les coefficients ne sont pas présentés. Bien que plusieurs des variables ne soient pas significatives individuellement, elles sont retenues afin d'améliorer la prévision. Le nombre de variables significatives et la projection étaient plus élevés dans la deuxième période. Le choix de 1971 pour diviser l'échantillon provient de la façon dont la série du PIB_{cf} mensuel était calculée. Cette série était construite à partir d'indices qui ont été redéfinis en 1971 avec une nouvelles pondération. Cela justifie le choix de 1971 pour diviser l'échantillon et l'écart de valeur des coefficients estimés souligne ce point.

Le tableau 2 décrit notre modélisation de (13). Un ensemble de tests ne révèle aucune autocorrélation des résidus trimestriels dans chacune des sous-périodes. Conséquemment, le filtre utilisé pour construire la série mensuelle des TIN réelles est donné par la solution de Chow-Lin (1971)⁹.

9. Il n'était pas approprié de retenir les techniques de Denton (1971), Fernandez (1981), et Litterman (1983) puisque nous n'avons pas identifié d'autocorrélation.

TABLEAU 2

ÉQUATION (13); TAXES INDIRECTES NETTES RÉELLES TRIMESTRIELLES

1961:4 - 1971:4	1972:1 - 1985:4
$\bar{R}^2 = 0.956$ DW = 2.59	$\bar{R}^2 = 0.978$ DW = 1.79
LM*(5) = 2.82	LM*(5) = 7.50
Q(18) = 25.2	Q(21) = 23.02

LM* est le test de Kiviet (1986) pour autocorrélation d'ordre 5. Q est le test standard Ljung-Box. Chaque test est distribué asymptotiquement selon une χ^2 , avec les degrés de liberté entre parenthèses, avec l'hypothèse nulle d'absence d'autocorrélation résiduelle.

Variables mensuelles: W	Source ou numéro CANSIM 1987
PIB _{cf} réel	I0033026
Ventes de véhicules automobiles neufs	D0002363
Revenu de taxes indirectes fédérales	<i>État des opérations financières publié dans la Gazette du Canada</i> Partie 1.
Subventions fédérales et paiement de transfert fixe	<i>État des opérations financières publié dans la Gazette du Canada</i> Partie 1.
Production agricole	I0033001
Production manufacturière	I0033005
Construction	I0033006
Commerce de gros	I0033010
Commerce de détail	I0033011
Services	I0033034
Recettes monétaires agricoles	<i>Canadian Statistical Review</i> 11-003, Section 9, Table 1, 1968:1 - 1985:12
Vente de détail (1960 SIC)	<i>Canadian Statistical Review</i> 11-003, Section 10, Table 1, «Value of Retail Trade» pour 1961:1 - 1971:12 et CANSIM D0650058 pour 1972:1 - 1985:12

W inclut la valeur courante et retardée (une période) de ces variables, une tendance linéaire et trois variables dichotomiques saisonnières multipliées par la tendance linéaire. Pour 1961:4 - 1971:4, W n'inclut pas les recettes monétaires agricoles. Par manque d'espace, le résultat de l'estimation des coefficients n'est pas présenté.

Le tableau 3 présente les résultats de l'estimation de l'équation de prix. Aucune autocorrélation résiduelle n'est significative. Ainsi, les coefficients estimés peuvent être utilisés dans la version mensuelle de (10) et de (11) afin de construire l'indice de prix mensuel.

TABLEAU 3
ÉQUATION (10); INDICE DE PRIX TRIMESTRIEL DU PIB_{PM}

1961:4 – 1971: 4	1972: 1 – 1985:4
$\bar{R}^2 = 0.997$ DW = 1.94	$\bar{R}^2 = 0.999$ DW = 1.55
Q (18) = 25.32	Q (21) = 32.16
Indices de Prix mensuels: I	CANSIM 1987 (1981 = 100)
IPC	D0484000
Prix de vente industriel	D0613420
Construction résidentielle	D0649830
Construction non-résidentielle	D0649835

La définition des indices de prix de la construction a changé dans l'échantillon. Les détails de la composition des indices sont disponibles sur demande. La matrice *I* inclut la valeur courante et retardée (une période) de ces indices, une tendance linéaire, une variable dichotomique saisonnière au 3^e trimestre et le produit de la tendance avec la variable dichotomique.

Les estimés mensuels du PIB_{pm} réel, de l'indice de prix et du PIB_{pm} nominal sont présentés au Tableau 4. Le PIB_{pm} est une série considérablement saisonnière avec une valeur très élevée en septembre de chaque année. Cette propriété concorde avec la série trimestrielle et d'autres séries mensuelles reliées¹⁰. La figure 2 présente l'évolution de l'écart entre notre série mensuelle de PIB_{pm} et la série mensuelle du PIB_{cf} publiée par Statistique Canada. L'évolution et la taille de cet écart indiquent que les deux séries évoluent différemment. Puisque notre procédure est une application du filtre de Kalman notre estimé minimise le carré de l'erreur moyenne (parmi les estimations linéaires). De plus, l'équation (11) souligne que l'agrégation de notre série du PIB_{pm} à travers le trimestre a pour propriété de correspondre étroitement au PIB_{pm} trimestriel publié par Statistique Canada.

10. Nous soulignons que la série mensuelle de l'indice de prix partage avec l'indice de prix trimestriel une tendance à la baisse plus fréquente qu'un observateur pourrait anticiper: ceci s'explique car l'indice de prix du PIB_{pm} est un ratio de deux estimations: PIB_{pm} nominal/PIB_{pm} réel. Ainsi, l'indice de prix contient deux sources d'erreurs et n'a pas nécessairement les mêmes propriétés qu'un indice comme l'IPC.

TABLEAU 4

ÉSTIMÉ DU PIB_{PM} MENSUEL ET DE SON INDICE DE PRIX

Année	PIB _{PM} Réel	Indice Prix	PIB _{PM} Nominal	Année	PIB _{PM} Réel	Indice Prix	PIB _{PM} Nominal
1962.01	10999.64	29.80	3277.64	1966.01	14035.10	33.36	4682.14
1962.02	11440.20	29.74	3402.30	1966.02	14601.74	33.58	4902.69
1962.03	11014.05	29.79	3281.02	1966.03	14221.13	33.60	4778.16
1962.04	11738.14	30.12	3535.33	1966.04	15260.16	34.13	5208.34
1962.05	11621.77	30.12	3500.61	1966.05	15215.12	34.19	5202.03
1962.06	12193.06	30.20	3682.05	1966.06	15552.80	34.24	5325.65
1962.07	12116.33	30.63	3711.59	1966.07	15472.51	34.74	5374.57
1962.08	12385.23	30.76	3810.07	1966.08	15669.12	34.92	5472.00
1962.09	15663.41	30.69	4806.32	1966.09	19818.33	34.92	6920.42
1962.10	12547.37	30.38	3812.46	1966.10	15898.81	34.82	5535.18
1962.11	12604.02	30.47	3840.35	1966.11	15852.89	34.81	5517.90
1962.12	12290.57	30.50	3748.18	1966.12	15665.26	34.91	5468.91
1963.01	11519.14	30.30	3490.26	1967.01	14526.31	34.99	5083.08
1963.02	11881.54	30.36	3607.32	1967.02	14956.27	35.01	5236.49
1963.03	11446.30	30.36	3475.42	1967.03	14680.31	35.09	5151.40
1963.04	12230.96	30.79	3766.02	1967.04	15947.49	35.62	5680.76
1963.05	12131.60	30.76	3731.16	1967.05	15849.02	35.75	5666.51
1963.06	12810.32	30.84	3950.78	1967.06	16018.48	35.91	5752.73
1963.07	12556.93	31.12	3907.66	1967.07	16304.84	36.08	5883.07
1963.08	12901.06	31.21	4026.54	1967.08	16145.42	36.23	5849.84
1963.09	16919.98	31.19	5277.78	1967.09	19217.71	36.14	6946.08
1963.10	13236.86	31.20	4130.22	1967.10	16496.90	36.17	5967.67
1963.11	13201.71	31.21	4120.63	1967.11	16584.98	36.23	6008.05
1963.12	13387.31	31.33	4194.11	1967.12	16024.00	36.43	5838.23
1964.01	12519.73	31.02	3883.49	1968.01	15173.46	36.41	5524.29
1964.02	12787.05	31.03	3967.26	1968.02	15793.93	36.39	5746.91
1964.03	12613.08	31.06	3918.20	1968.03	14886.60	36.48	5430.80
1964.04	13305.22	31.54	4196.03	1968.04	16650.93	36.80	6127.78
1964.05	13007.28	31.56	4105.46	1968.05	16520.24	36.87	6090.95
1964.06	13785.48	31.54	4348.50	1968.06	16680.80	37.03	6176.27
1964.07	13565.00	32.21	4368.98	1968.07	16782.48	37.59	6368.06
1964.08	13931.14	32.23	4489.34	1968.08	16907.62	37.67	6369.37
1964.09	16988.95	32.15	5461.70	1968.09	20883.88	37.74	7882.56
1964.10	13758.33	31.92	4391.63	1968.10	17664.12	37.29	6587.15
1964.11	14207.95	32.01	4547.51	1968.11	17962.39	37.45	6727.24
1964.12	14034.69	32.15	4512.85	1968.12	17165.48	37.56	6446.60
1965.01	13123.89	32.01	4200.44	1969.01	16233.25	37.83	6141.30
1965.02	13513.85	31.98	4321.11	1969.02	16745.71	37.87	6341.23
1965.03	13317.23	31.94	4253.43	1969.03	16046.02	38.07	6109.47
1965.04	14161.13	32.37	4584.18	1969.04	17827.79	38.73	6904.35
1965.05	13883.31	32.51	4513.09	1969.05	17026.85	38.86	6616.87
1965.06	14577.54	32.73	4770.73	1969.06	17529.35	39.10	6854.78
1965.07	14217.25	33.38	4746.07	1969.07	17525.81	38.86	6810.66
1965.08	14756.37	33.33	4919.00	1969.08	17828.85	38.98	6950.11
1965.09	18369.35	33.35	6125.92	1969.09	22055.32	38.97	8594.22
1965.10	15016.14	33.04	4960.62	1969.10	18236.52	39.18	7144.75
1965.11	15264.09	33.22	5071.28	1969.11	15689.30	39.35	7354.96
1965.12	15158.65	33.36	5057.05	1969.12	18201.14	39.58	7203.26

TABLEAU 4 (suite)

Année	PIB _{pm} Réel	Indice Prix	PIB _{pm} Nominal	Année	PIB _{pm} Réel	Indice Prix	PIB _{pm} Nominal
1970.01	16956.37	39.94	6772.54	1974.01	21256.35	50.56	10747.88
1970.02	17511.34	40.02	7007.40	1974.02	21579.69	51.29	11067.33
1970.03	16554.37	40.20	6655.09	1974.03	22105.95	52.17	11533.78
1970.04	18246.16	40.71	7427.38	1974.04	22056.28	52.12	11494.95
1970.05	17708.18	40.76	7218.40	1974.05	23583.65	53.68	12659.27
1970.06	17965.55	40.88	7344.17	1974.06	23025.04	54.24	12489.75
1970.07	18147.45	40.59	7365.24	1974.07	22683.55	57.86	13125.16
1970.08	18411.61	40.60	7475.16	1974.08	23406.75	58.38	13664.43
1970.09	21824.93	40.47	8831.59	1974.09	25390.68	58.99	14978.39
1970.10	18693.95	40.99	7663.40	1974.10	24222.20	56.70	13733.51
1970.11	19457.31	40.99	7975.83	1974.11	24018.44	57.27	13755.55
1970.12	18020.70	40.95	7379.75	1974.12	22677.24	56.71	12860.86
1971.01	17603.45	40.66	7157.56	1975.01	21217.96	56.59	12006.19
1971.02	17880.46	40.83	7300.84	1975.02	22276.59	57.39	12784.12
1971.03	16983.07	40.93	6950.59	1975.03	22341.43	57.60	12867.68
1971.04	18933.07	41.58	7873.04	1975.04	22511.18	57.45	12933.61
1971.05	19051.68	41.80	7962.68	1975.05	23838.45	58.73	14001.41
1971.06	19228.20	41.91	8058.26	1975.06	23480.35	59.43	13953.96
1971.07	19218.82	42.18	8105.63	1975.07	23783.20	63.07	14999.81
1971.08	20104.02	42.38	8519.91	1975.08	23767.21	63.53	15100.31
1971.09	22749.12	42.32	9626.44	1975.09	26910.55	64.29	17301.85
1971.10	20639.31	42.48	8768.61	1975.10	24314.61	62.05	15086.35
1971.11	20106.80	42.54	8554.35	1975.11	24937.29	62.60	15610.85
1971.12	19638.77	42.83	8411.99	1975.12	23808.06	62.56	14893.77
1972.01	18428.91	42.93	7911.82	1976.01	22734.57	62.81	14279.50
1972.02	18893.12	42.90	8104.74	1976.02	23724.45	62.94	14932.16
1972.03	18820.95	43.03	8099.43	1976.03	23389.95	63.01	14738.31
1972.04	20031.70	43.40	8693.23	1976.04	24200.00	63.34	15327.38
1972.05	20701.56	44.17	9143.52	1976.05	25300.04	65.29	16518.22
1972.06	20632.72	44.19	9117.24	1976.06	25335.07	65.37	16561.46
1972.07	20014.68	44.92	8991.06	1976.07	25016.93	67.91	16987.93
1972.08	20726.70	45.00	9327.26	1976.08	25506.76	68.11	17371.74
1972.09	23336.58	44.96	10492.66	1976.09	28841.32	68.30	19697.33
1972.10	21609.78	44.72	9664.79	1976.10	25872.14	66.85	17295.68
1972.11	22146.68	45.08	9983.98	1976.11	26564.36	67.33	17885.13
1972.12	20097.51	45.28	9099.22	1976.12	24152.51	67.61	16329.19
1973.01	19755.90	45.51	8990.80	1977.01	23693.61	67.60	16017.94
1973.02	20547.03	45.54	9357.47	1977.02	24751.72	67.80	16780.87
1973.03	20865.06	45.69	9533.72	1977.03	24709.69	67.97	16795.19
1973.04	21785.36	46.62	10156.87	1977.04	25135.86	67.25	16902.66
1973.05	22039.37	47.38	10441.17	1977.05	25817.18	69.42	17923.47
1973.06	21582.23	47.50	10251.94	1977.06	25759.09	69.75	17966.95
1973.07	21862.27	49.45	10809.88	1977.07	25430.65	71.99	18307.94
1973.08	22079.45	49.62	10955.96	1977.08	26720.97	72.14	19276.17
1973.09	25043.36	49.84	12481.19	1977.09	29449.36	72.33	21300.87
1973.10	23303.13	49.36	11503.43	1977.10	26952.56	70.53	19009.25
1973.11	23688.18	49.98	11839.93	1977.11	27606.82	70.82	19550.75
1973.12	21817.76	50.65	11049.67	1977.12	25476.61	70.54	18046.99

TABLEAU 4 (suite)

Année	PIB _{pm} Réel	Indice Prix	PIB _{pm} Nominal	Année	PIB _{pm} Réel	Indice Prix	PIB _{pm} Nominal
1978.01	24706.91	71.17	17583.85	1982.01	27073.90	104.70	28346.26
1978.02	26056.59	71.49	18629.15	1982.02	28626.33	105.64	30241.67
1978.03	25173.48	72.08	18143.98	1982.03	27464.75	105.95	29100.04
1978.04	26449.34	71.99	19040.39	1982.04	27680.39	107.43	29737.76
1978.05	26835.21	73.24	19654.14	1982.05	28347.19	108.37	30718.61
1978.06	27075.45	73.84	19992.46	1982.06	27884.41	108.85	30351.63
1978.07	26898.09	75.61	20338.61	1982.07	28628.14	108.58	31084.13
1978.08	27898.52	75.89	21172.46	1982.08	31139.11	109.50	34096.61
1978.09	31169.41	76.64	23888.93	1982.09	32846.77	110.15	36182.28
1978.10	28374.86	75.77	21498.93	1982.10	28811.33	111.26	32054.25
1978.11	28892.64	75.69	21867.71	1982.11	28366.89	111.43	31609.51
1978.12	26220.63	75.49	19793.45	1982.12	27673.80	111.73	30919.26
1979.01	26026.05	76.85	19999.78	1983.01	26756.76	112.34	30057.76
1979.02	27014.66	77.24	20867.02	1983.02	27725.31	112.83	31282.47
1979.03	26618.26	77.74	20692.17	1983.03	27586.92	112.82	31123.76
1979.04	27120.68	80.02	21701.02	1983.04	27983.37	113.46	31749.87
1979.05	28132.62	81.40	22899.61	1983.05	28795.06	113.99	32823.78
1979.06	28028.70	81.91	22959.37	1983.06	29261.55	114.41	33477.31
1979.07	28109.34	83.53	23479.49	1983.07	29622.18	113.88	33732.90
1979.08	29211.21	83.77	24471.04	1983.08	32899.33	113.76	37425.77
1979.09	31475.45	84.25	26519.47	1983.09	34240.51	113.95	39016.33
1979.10	30025.05	83.24	24992.01	1983.10	31096.23	115.21	35825.69
1979.11	29528.98	83.80	24743.95	1983.11	30165.63	116.09	35020.18
1979.12	27070.89	84.12	22770.97	1983.12	29312.14	116.61	34181.12
1980.01	26730.63	85.25	22787.43	1984.01	28829.63	117.12	33766.41
1980.02	27595.00	86.32	23820.52	1984.02	29656.96	117.48	34841.73
1980.03	27480.47	86.74	23836.14	1984.03	29067.41	117.85	34255.86
1980.04	27928.67	86.82	24247.83	1984.04	30142.04	117.80	35507.28
1980.05	28420.80	88.76	25226.25	1984.05	30925.49	117.88	36454.95
1980.06	28171.45	90.02	25360.85	1984.06	30721.47	118.04	36262.77
1980.07	28537.12	92.59	26421.75	1984.07	31802.11	117.46	37355.86
1980.08	28628.45	93.19	26679.71	1984.08	34461.98	117.72	40570.09
1980.09	31966.32	93.69	29948.43	1984.09	35351.93	117.87	41670.07
1980.10	30236.96	92.38	27931.65	1984.10	33349.55	118.65	39568.78
1980.11	29902.91	92.76	27736.63	1984.11	32232.96	118.59	38224.37
1980.12	27785.21	93.19	25893.78	1984.12	31213.46	118.94	37125.81
1981.01	27144.09	94.84	25743.33	1985.01	30138.95	119.55	36031.30
1981.02	28677.95	95.24	27311.87	1985.02	30893.88	120.21	37136.97
1981.03	28274.94	96.00	27144.78	1985.03	31353.14	120.35	37732.70
1981.04	28929.50	97.72	28269.11	1985.04	30965.37	121.31	37564.33
1981.05	29626.66	98.91	29303.21	1985.05	31960.87	121.71	38898.08
1981.06	29188.80	99.71	29104.64	1985.06	31748.73	121.94	38713.85
1981.07	29750.29	101.31	30139.31	1985.07	32539.25	122.34	39808.08
1981.08	31992.80	101.58	32499.17	1985.08	35418.39	121.97	43198.30
1981.09	34023.89	102.61	34912.50	1985.09	37692.33	122.50	46173.29
1981.10	30840.16	102.78	31698.78	1985.10	34918.36	122.90	42914.13
1981.11	29040.24	103.51	30060.72	1985.11	33483.89	123.82	41459.28
1981.12	28504.61	104.57	29806.49	1985.12	32703.74	123.87	40510.65

6. CONCLUSION

Nous considérons que les données produites dans cette recherche sont des estimés précis: la qualité de la projection des équations estimées est très élevée et les estimés sont insensibles à la spécification. Nous souhaitons que d'autres chercheurs puissent trouver ces données utiles à la construction de modèles mensuels.

BIBLIOGRAPHIE

- CHOW, G.C. et A.-L. LIN, «Best linear unbiased interpolation, distribution, and extrapolation of time series by related series», *Review of Economics and Statistics*, vol. 53, 1971, 372-375.
- CHRISTIANO, L.J., M. EICHENBAUM, et D. MARSHALL, «The permanent income hypothesis revisited», Federal Reserve Bank of Minneapolis, Research Department Working Paper 335, 1987.
- CORRADO, C., «Reducing uncertainty in current analysis: the estimation of monthly GNP», Special Studies Paper 207, Division of Research and Statistics, Federal Reserve Board, 1986.
- DENTON, F.T., «Adjustment of monthly or quarterly series to annual totals: an approach based on quadratic minimization», *Journal of the American Statistical Association*, vol. 66, 1971, 99-102.
- FERNANDEZ, R.B., «A methodological note on the estimation of time series», *Review of Economics and Statistics*, vol. 63, 1981, 471-476.
- Government of Canada, Department of Supply and Services, *The Canada Gazette*, diverses émissions.
- HARVEY, A.C., «The Kalman filter and its application in econometrics and time series analysis», *Methods of Operations Research*, vol. 44, 1982, 3-18.
- KIVIET, J.F., «On the rigour of some misspecification tests for modelling dynamic relationships», *Review of Economic Studies*, vol.53, 1986, 241-261.
- LITTERMAN, R.B., «A random walk, Markov model for the distribution of time series», *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 1, 1983, 169-173.
- MEINHOLD, R.J. et N.D. SINGPURWALLA, «Understanding the Kalman filter», *The American Statistician*, vol. 37, 1983, 123-127.