« Duopole et percées technologiques : un modèle de jeu différentiel déterministe par morceaux »

Alain Haurie

L'Actualité économique, vol. 65, n° 1, 1989, p. 105-118.

DOI: 10.7202/601482ar

L'Actualité Économique. Revue d'analyse économique, vol. 65, n° 1, mars 1989

DUOPOLE ET PERCÉES TECHNOLOGIQUES : UN MODÈLE DE JEU DIFFÉRENTIEL DÉTERMINISTE PAR MORCEAUX*

Alain HAURIE
*École des Hautes Études Commerciales et Université de Genève***

RÉSUMÉ. — Cet article concerne la modélisation d'une situation de concurrence imparfaite, face à une possibilité de percée technologique induisant des modifications importantes des coûts de production et, par le fait même, déclenchant une phase de domination de la firme détenant l'avantage technologique. Ce modèle utilise le formalisme de la théorie des jeux différentiels déterministes par morceaux. Entre deux instants aléatoires correspondant aux périodes d'occurence de percées technologiques le jeu est totalement déterministe. Au moment d'un percée technologique, le comportement des firmes en présence peut être modifié, le mode de jeu passant de l'équilibre de Cournot à la solution de Stackelberg et vice versa. Les conditions d'équilibre sont établies et une première interprétation économique de ces conditions est donnée. Quelques possibilités de prolongement de ce modèle sont aussi discutées.

ABSTRACT. — This paper deals with a duopoly model in a situation where technological breakthroughs are possible. The innovation process is described as a continuous-time Markov chain with jump depending on level of *R&D* capital accumulated through investment by each firm. When a firm is the first to have access to the innovation it gains a market advantage and becomes a leader à la Stackelberg, until the competing firm gains itself access to its own improved production process. In this paper we show how the recently developed theory of piecewise deterministic differential games permits the analysis of this economic situation. Equilibrium conditions are formulated in the frameworks of dynamic programming and control theory. An economic interpretation of these conditions is provided.

1. INTRODUCTION

Cet article traite d'une situation de concurrence où un duopole est engagé dans une activité de production pour laquelle une percée technologique est envisagée. L'occurence de cette percée est un événement aléatoire. La loi de probabilité de la variable aléatoire qui donne la date d'occurence de cette percée technologique est influencée par le niveau d'investissement des firmes dans une activité de recherche et développement (*R&D*). Lorsque cette percée aura lieu les

* Cette recherche a été subventionnée par le fonds FCAR (#88EQ3528, 89CE130), le programme d'Actions Structurante du MESS et le CRSNG (#A4952).

**GERAD, École des Hautes Études Commerciales, Montréal et département d'économie commerciale et industrielle, Université de Genève, Suisse.

conditions de production seront considérablement modifiées. Selon son degré de préparation, représenté aussi par la taille de son capital de *R&D*, l'entreprise pourra plus ou moins bénéficier des avantages de production associés à cette percée.

Cette situation schématique de concurrence dans un domaine susceptible de connaître des bouleversements technologiques, est modélisée comme un jeu différentiel avec des temps d'arrêt aléatoires où se produisent les percées technologiques. Ce type de jeu appartient donc à la classe des jeux différentiels déterministes par morceaux, étudiée d'un point de vue théorique et général par Haurie 1988. Ce modèle est aussi une extension, au cadre d'une concurrence de duopole, du modèle de choix des dépenses de *R&D* d'un monopole, esquissé dans Boukas, Haurie, Michel 1988.

Le modèle proposé dans cet article comporte un mode de jeu variable dans le sens de l'analyse développée par Basar et Haurie 1984. En effet, nous supposerons que la firme qui réalise la première sa percée technologique devient un « leader » au sens de Stackelberg, c'est-à-dire qu'elle acquiert ainsi une position dominante sur le marché qui se maintiendra tant que son avantage technologique perdurera. Comme nous le verrons, en exploitant cette position dominante, le leader technologique améliorera sa situation en comparaison de la solution d'équilibre de Nash-Cournot.

L'analyse économique des activités de *R&D* et de l'impact d'innovations technologiques sur la situation concurrentielle des firmes a récemment retenu l'attention de nombreux économistes dans le domaine de l'organisation industrielle. Le livre récent de J. Tirole 1988 permet de faire une revue assez complète de la littérature concernant ce sujet. Le modèle développé dans cet article peut être rapproché de ceux proposés par Dasgupta et Stiglitz 1981, Lee et Wilde 1980, Loury 1979 et Reinganum 1982, 1984, qui ont représenté la percée technologique comme un processus markovien dont les taux de saut dépendent du niveau courant de dépenses de *R&D*. En considérant explicitement l'activité d'investissement dans la *R&D*, cet article prend en compte les effets d'apprentissage à la manière de Harris et Vickers 1985, 1987. Dans cet article nous utilisons le formalisme de la théorie des jeux différentiels déterministes par morceaux. Nous nous attacherons essentiellement à montrer qu'il offre un cadre théorique bien adapté à l'analyse dynamique des choix de production d'entreprises en situation de concurrence imparfaite, quand des possiblités d'innovations technologiques sont susceptibles de déclencher une domination (situation de « leadership ») pour la firme détenant l'avantage technologique.

Cet article est agencé de la façon suivante: en section 2 on propose un modèle, dynamique et en temps continu, d'un duopole faisant face à une possibilité de percée technologique pouvant déclencher un épisode de « leadership » de la firme dominante; en section 3 on établit les conditions d'optimum pour un équilibre (de Cournot ou de Stackelberg), sous une hypothèse particulière concernant la structure d'information (boucle ouverte adaptée à chaque instant de saut du système); en section 4 une interprétation économique de ces conditions est développée; finalement, en section 5, quelques possibilités de prolongement du modèle à la représentation d'une situation plus complexe sont discutées.

2. UN MODÈLE DYNAMIQUE DE CONCURRENCE FACE À UNE PERCÉE TECHNOLOGIQUE

Considérons deux firmes, notées $j = 1,2$, se faisant concurrence sur un marché décrit, à chaque instant t, par une loi de demande $p = f(Q)$, où p est le prix de marché et $Q = q_1 + q_2$ est la quantité totale de biens offerte, à un instant donné, par les deux firmes sur le marché. La firme j est caractérisée par une fonction de coût de production

$$C_j(q_j,\xi_j) = q_j c_j(q_j,\xi_j),$$

où q_j est le niveau de production et ξ_j est une variable indicatrice de la technologie utilisée. $\xi_j = 0$ indique l'utilisation de la technologie actuelle, $\xi_j = 1$ indique l'utilisation d'une technologie nouvelle, qui n'est pas disponible au début de l'horizon de planification, mais qui peut apparaître comme une conséquence des investissements des firmes en *R&D*. On notera x_j le niveau de *capital de R&D* accumulé à un instant donné par la firme j.

Le passage de la technologie 0 à la technologie 1 entraîne, pour la firme j, un coût de transition, noté $\Gamma_j(x_j)$, dû à la nécessité de modifier en profondeur l'organisation du système de production; on suppose que le niveau de capital de *R&D* a un effet sur ce coût, car il traduit le niveau de préparation de l'entreprise à s'engager dans les nouvelles voies ouvertes par le progrès technologique. Si la firme j est la première à réaliser la percée technologique, du fait de ses activités de *R&D*, elle obtiendra une situation dominante sur le marché, c'est-à-dire qu'elle deviendra un « leader » au sens de Stackelberg, cependant que la firme concurrente devra se comporter en « suiveur », au sens de Stackelberg, jusqu'à ce que sa propre adaptation de la nouvelle technologie soit disponible, ce qui nécessitera de sa part des dépenses additionnelles de *R&D*. Cette hypothèse de domination de la firme ayant gagné la course technologique peut paraître quelque peu arbitraire ; elle est cependant acceptable si l'on peut montrer que le « leader » acquiert un avantage en annonçant ses actions et en tenant compte des réactions rationnelles de l'autre joueur. L'avantage technologique fournirait alors une perspective de profits encore plus substantiels.

Un élément essentiel de la dynamique de cette situation de concurrence est donc le processus d'investissement dans la *R&D*. L'équation d'évolution du capital de *R&D* de la firme j est

$$\frac{d}{dt} x_j(t) = u_j(t) - \mu x_j(t) \tag{1}$$

où $u_j(t)$ est le niveau d'investissement, à l'instant t, dans la *R&D*, et μ est un taux de dépréciation du capital de *R&D*. Le coût de cet investissement est alors donné par la fonction $r_j(x_j,u_j)$.

Le second élément essentiel de la dynamique de ce système de concurrence est le processus stochastique qui décrit l'occurence de percées technologiques. Le processus $\xi_j = \{\xi_j(t), t \in [0,\infty)\}$ est un processus de saut, que nous supposerons markovien, stationnaire et caractérisé par des taux de saut

$$\lambda_j(\xi_k, x_j) = \lim_{dt \to 0} \frac{1}{dt} P[\xi_j(t+dt)=1 \,|\, \xi_j(t)=0, x_j(t)=x_j, \xi_k(t)=\xi_k],$$
$$x_j \in \mathbb{R}^+, \xi_k \in \{0,1\}. \tag{2}$$

Ces taux dépendent du niveau de capital de *R&D* accumulé, mais aussi du fait que la firme concurrente a ou n'a pas encore réalisé sa propre percée technologique (variable $\xi_k(t)$ où $k \in \{1,2\}, k \neq j$). Cette dépendance peut illustrer le fait que, si une firme a déjà réalisé sa propre percée technologique, l'autre pourra s'inspirer des succès de la première, ou bien que, à l'inverse, le succès de la première peut rendre encore plus ardue la recherche d'une innovation originale par la seconde firme.

Comme le système est soumis à des perturbations aléatoires définies par les processus de saut décrivant les percées technologiques, les firmes devront utiliser des stratégies adaptées à l'histoire de ces processus. De ce fait les évolutions des variables d'état (stocks de capital de *R&D*) et des variables de décision (niveaux de production et d'investissement en *R&D*) seront aussi des processus stochastiques. Pour une réalisation particulière de tous ces processus la somme actualisée des profits de la firme j sera donnée par la somme de deux termes :

(i) la somme actualisée des revenus des ventes moins les coûts de production et les coûts d'investissement et de maintien de l'activité de *R&D*

$$\int_0^\infty e^{-\rho t}\{(f(Q(t)) - c_j(q_j(t), \xi_j(t)))q_j(t) - r_j(x_j(t), u_j(t))\}dt \tag{3}$$

(ii) Le coût de transition, si la percée technologique se produit au temps T^j pour cette firme

$$e^{-\rho T^j}\Gamma(x_j(T^j)) \tag{4}$$

Enfin on supposera que le capital de *R&D* peut être ramené immédiatement à une nouvelle valeur x_j^* qui sera maintenue après la percée technologique, c'est-à-dire lorsque ξ_j saute de 0 à 1. Ce niveau de capital de *R&D* est celui qui est nécessaire au bon fonctionnement de l'organisation, avec la nouvelle technologie. Ce saut dans la valeur de la variable d'état peut être une des causes du coût d'installation Γ_j.

3. ÉQUILIBRES

Dans cette section on définira un équilibre pour un jeu différentiel déterministe par morceaux, avec mode de jeu (« leadership ») variable, construit à partir de la dynamique d'investissement et d'innovation technologique décrite en section 2. Ce jeu est stochastique, puisqu'un élément essentiel de sa dynamique est un processus de saut décrivant l'occurence de percées technologiques. Le jeu peut s'interpréter comme un jeu séquentiel markovien, du type de ceux étudiés par

Whitt 1980, Breton 1987 et Alj, Breton, Haurie 1988, si on ne permet une adaptation des politiques qu'aux moments où interviennent ces sauts. C'est à dire que le système sera piloté en *boucle ouverte* entre deux sauts successifs du processus ξ. On présentera donc d'abord la structure d'information retenue et les différentes étapes du jeu où vont intervenir les choix de politique. En second lieu on reformulera le jeu dans le cadre de la théorie des jeux séquentiels markoviens et on énoncera des conditions nécessaires et suffisantes d'équilibre.

3.1 *Structure d'information et jeu séquentiel associé*

La structure d'information que l'on supposera est la suivante : chaque joueur observe le niveau initial de capital de *R&D*, $\mathbf{x}^0 = (x_1(0),x_2(0))$ et l'indicatrice de la situation technologique $\xi^0 = (0,0)$, pour les deux firmes, puis choisit une politique d'investissement en *R&D* définie comme une commande en boucle ouverte sur un horizon de temps infini. Cette commande du système restera en vigueur tant qu'aucune percée technologique n'intervient. Si une percée intervient, pour la première fois, au temps T^1, et concerne la firme j, alors les deux joueurs observent le nouvel état du système qui sera le stock courant de capital de *R&D* accumulé, $\mathbf{x}^1 = (x_1(T_1),x_2(T_1))$ et l'état courant de la situation technologique $\xi^1 = (\xi_1(T_1),\xi_2(T_1))$ pour les deux firmes. Remarquons que l'on aura à ce moment $\xi_j(T_1) = 1$ et $\xi_k(T_1) = 0$, puisque c'est la firme j qui aura *gagné la course de l'innovation*. Dans la transition qui suivra, la firme j est un « leader » qui annoncera un niveau de production $q_j(t)$, $t \geq T_1$, en tenant compte de la réaction rationnelle de la firme k qui devra s'adapter à la situation dominante de la firme concurrente, devenue « leader » technologique ; de plus, la firme k doit continuer à investir dans sa propre activité de *R&D*, jusqu'à ce qu'elle fasse sa propre percée. Cet investissement sera décrit comme une commande, définie sur un horizon infini, qui restera valide tant que l'innovation technologique ne se sera pas concrétisée. A l'instant de ce saut, noté T^2, l'état sera $(\mathbf{x}^2,\xi^2)$, où $\mathbf{x}^2 = (x_1(T^2),x_2(T^2))$ et $\xi^2 = (1,1)$ et le jeu se poursuivra désormais sous une forme quasi statique. En effet, à partir du moment où les deux firmes sont en possession d'une technologie avancée, dans le cadre de ce modèle, il n'y a plus d'évolution attendue, ni du niveau de *R&D*, ni de l'état technologique.

Nous voyons que ce jeu se joue donc en trois étapes, notées respectivement $\tau = 0,1,2$, correspondant à l'instant initial (T^0), à l'instant de la première percée technologique (T^1) et à l'instant de la seconde percée technologique (T^2). Ces étapes sont franchies à des instants aléatoires, mais, entre ces étapes, le jeu est déterministe.

3.2 *Reformulation comme un jeu séquentiel markovien*

Appelons $\mathbf{s}^\tau$ l'état du système à l'étape τ. Cet état est défini comme le triplet $(\tau,\mathrm{x}^\tau,\xi^\tau)$. C'est la suite de ces trois états, pour $\tau = 0,1,2$, que les deux joueurs cherchent à piloter.

Pour réaliser ce pilotage les joueurs disposent d'actions qui sont choisies dans un ensemble admissible qui dépend de l'état atteint. Ainsi, en $\mathbf{s}^0$, les actions admissibles du joueur j sont les quantités produites et les investissements en $R\&D$, définis sur un horizon non borné (car on ne sait pas quand interviendra le prochain saut) ; ces actions seront représentées par des fonctions continues par morceaux

$$q_j(\cdot):[0,\infty)\to\mathbb{R}^+ \tag{5a}$$

$$u_j(\cdot):[0,\infty)\to\mathbb{R}^+. \tag{5b}$$

Au cours de cette première transition, si chaque firme j a choisi un plan de production $q_j(\cdot)$ et un programme d'investissement $u_j(\cdot)$ qui engendre une accumulation de capital $x_j(\cdot)$ à partir du niveau initial x^0, alors les gains de transition anticipés sont, pour $j = 1,2$

$$g_j(\mathbf{s}^0,q_1(\cdot),q_2(\cdot),u_1(\cdot),u_2(\cdot)) = E_{\mathbf{x}(\cdot),\mathbf{s}^0}\Big[\int_0^{T^1} e^{-\rho t}\{(f(Q(t))-c_j(q_j(t),\xi_j(t)))q_j(t) \\ -r_j(x_j(t),u_j(t))\}dt\Big] \tag{6}$$

où T^1 est la date aléatoire de la première percée technologique. Dans cette expression, l'espérance mathématique est prise par rapport à la loi de probabilité induite par les trajectoires $(x_1(\cdot),x_2(\cdot))$ qui, rappelons-le, influencent les taux de saut.

Après le premier saut, l'état atteint est $\mathbf{s}^1$. Si $\xi_j^1 = \xi_j(T^1) = 1$, ceci indique que la percée s'est produite dans l'entreprise j. Les actions admissibles du joueur j se réduisent alors au choix d'un plan de production $q_j(\cdot):[0,\infty)\to\mathbb{R}^+$; par contre, pour le concurrent k, les actions sont le choix d'un nouveau plan de production ainsi que d'une nouvelle politique d'investissement en $R\&D$

$$q_k(\cdot):[T^1,\infty)\to\mathbb{R}^+ \tag{7}$$

$$u_k(\cdot):[T^1,\infty)\to\mathbb{R}^+. \tag{8}$$

Au cours de la seconde transition partant de l'état $\mathbf{s}^1$, les gains de transition anticipés seront

$$g_j(\mathbf{s}^1,q_1(\cdot),q_2(\cdot),u_k(\cdot)) = E_{x_k(\cdot),\mathbf{s}^1}\Big[\int_{T^1}^{T^2} e^{-\rho t}\{(f(Q(t))-c_j(q_j(t),\xi_j(t)))q_j(t)\}dt \\ -e^{-\rho T^1}\Gamma_j(x_j(T^1))\Big] \tag{9}$$

$$g_k(\mathbf{s}^1,q_1(\cdot),q_2(\cdot),u_k(\cdot)) = E_{x_k(\cdot),\mathbf{s}^1}\Big[\int_{T^1}^{T^2} e^{-\rho t}\{(f(Q(t))-c_j(q_j(t),\xi_j(t)))q_k(t) \\ -r_j\,(x_j(t),u_j(t))\}dt-e^{-\rho T^2}\Gamma_j(x_k(T^2))\Big], \tag{10}$$

et un nouvel état $\mathbf{s}^2$ sera atteint au temps aléatoire $T^2 > T^1$. Remarquons que la loi de probabilité de la variable aléatoire T^2 ne dépend que de la trajectoire $x_k(\cdot)$ puisque seule la firme k poursuit encore une activité de $R\&D$. On remarquera aussi que la firme j, qui a gagné la course technologique, paye son coût d'adaptation dès l'instant T^1, cependant que la firme k n'encourra ce coût qu'au temps T^2.

Au cours de la troisième transition, partant de $\mathbf{s}^2$, les deux joueurs ont acquis la maîtrise de la nouvelle technologie, les actions admissibles se réduisent aux choix des plans de production $q_j(\cdot), j=1,2$. Les gains respectifs sont alors

$$g_j(\mathbf{s}^2, u_1(\cdot), u_2(\cdot)) = \int_{T^2}^{\infty} e^{-\rho t}(f(Q(t)) - c_j(q_j(t), \xi_j(t)))q_j(t)dt \tag{12}$$

$$g_k(\mathbf{s}^2, u_1(\cdot), u_2(\cdot)) = \int_{T^2}^{\infty} e^{-\rho t}(f(Q(t)) - c_k(q_k(t), \xi_k(t)))q_k(t)dt \tag{13}$$

En résumé, nous avons défini un jeu séquentiel markovien, avec trois étapes, repérées par $\tau=0,1,2$. À l'étape τ, l'état du système est $\mathbf{s}^\tau$; chaque joueur j peut alors choisir une action, notée a_j, dans un ensemble admissible, noté $A_j(\mathbf{s}^\tau)$. Il résulte, dans la transition qui s'ensuit, un gain pour chaque joueur j donné par $g_j(\mathbf{s}^\tau, a_1^\tau, a_2^\tau)$.

Il est important de noter la structure de « leadership » variable qui caractérise ce jeu. Quand le mode de jeu est celui de l'équilibre de Cournot, une stratégie du joueur j, notée γ_j, est définie comme une application $\gamma_j(\cdot)$ qui transforme l'état observé $\mathbf{s}^\tau$ en action admissible $a_j^\tau = \gamma_j^\tau(\mathbf{s}^\tau) \in A_j(\mathbf{s}^\tau), \tau=0,2$.

Quand le mode de jeu est celui de l'équilibre de Stackelberg, à l'étape $\tau=1$, la définition d'une stratégie pour le « leader » reste semblable à l'expression précédente, cependant que pour le « suiveur », par exemple le joueur k, une stratégie, notée $\tilde{\gamma}_k^1$, est une fonction de réaction, définie comme une application $\tilde{\gamma}_k^1(\cdot,\cdot)$ qui transforme l'état observé $\mathbf{s}^1$ et l'action annoncée par le « leader » (joueur j), en action admissible $a_k^1 = \tilde{\gamma}_k^1(\mathbf{s}^1, a_j^1) \in A_k(\mathbf{s}^1)$.

Pour fixer les idées posons $j=1, k=2$. Au couple $(\gamma_1^1, \tilde{\gamma}_2^1)$, ont peut associer le couple (γ_1^1, γ_2^1) où

$$\gamma_2^1(\mathbf{s}^1) = \tilde{\gamma}_2^1(\mathbf{s}^1, \gamma_2^1(\mathbf{s}^1)).$$

Ceci a une importance technique, car, à une suite de couples stratégiques

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) = (\gamma_1^\tau, \gamma_2^\tau)_{\tau=0,1,2}$$

et à un état initial $\mathbf{s}^0$ donnés, correspond une loi de probabilité bien définie sur l'espace des évolutions possibles du système. Ceci permet donc de définir le gain du joueur j par

$$V_j(\mathbf{s}^0, \gamma_1, \gamma_2) = E_\gamma[\sum_{\tau=0}^{2} g_j(\mathbf{s}^\tau, \gamma_1^\tau(\mathbf{s}^\tau), \gamma_2^\tau(\mathbf{s}^\tau))]. \tag{14}$$

On définirait alors de la même façon les fonctions de gain

$$V_j(\mathbf{s}^1, \gamma_1, \gamma_2) = E_\gamma[\sum_{\tau=1}^{2} g_j(\mathbf{s}^\tau, \gamma_1^\tau(\mathbf{s}^\tau), \gamma_2^\tau(\mathbf{s}^\tau))] \tag{15}$$

et

$$V_j(\mathbf{s}^2, \gamma_1, \gamma_2) = g_j(\mathbf{s}^2, \gamma_1^\tau(\mathbf{s}^2), \gamma_2^\tau(\mathbf{s}^2))]. \tag{16}$$

On remarque que la fonction définie en (16) n'est pas une espérance mathématique, puisque, pour la troisième transition, $(t > T^2)$, le système est devenu complètement déterministe.

Afin de se ramener à une forme normale nous devons étendre la définition du jeu en considérant que l'étape $\tau=1$ se décompose en deux étapes intermédiaires : l'étape $l=1.1$, où seul le « leader » joue, annonçant son action a_j^1, ce qui définit une transition de l'état s^1 vers un état intermédiaire $s^{1.1}=(s^1,a_j^1)$; l'étape $l=1.2$, où seul le « suiveur » joue et peut choisir son action a_k^1 après avoir observé l'état $s^{1.1}$. C'est seulement en considérant cette forme étendue du jeu qu'il est possible de définir le concept de solution de Stackelberg d'une façon satisfaisante. Pour plus de détails sur cette manière d'aborder la solution de Stackelberg on pourra consulter Basar et Haurie 1984, Basar, Haurie et Ricci 1985 ainsi que Breton 1987 et Alj, Breton, Haurie 1988.

Le couple de stratégies $\gamma^*=\{(\gamma_1^{\tau*},\gamma_2^{\tau*}):\tau=0,1.1,1.2,2\}$ est un *équilibre* si, pour tout état $\mathbf{s}^\tau$, on a, pour toute autre stratégie γ_j admissible,

$$V_1^*(\mathbf{s}^\tau)= V_1(\mathbf{s}^\tau,\gamma_1^*,\gamma_2^*)\geq V_1(\mathbf{s}^\tau,\gamma_1,\gamma_2^*) \tag{17}$$

$$V_2^*(\mathbf{s}^\tau)= V_2(\mathbf{s}^\tau,\gamma_1^*,\gamma_2^*)\geq V_2(\mathbf{s}^\tau,\gamma_1^*,\gamma_2) \tag{18}$$

En appliquant les résultats de Breton 1987 ou de Alj, Breton, Haurie 1988, on peut caractériser un tel équilibre par les équations de programmation dynamique suivantes :

À l'étape $\tau=0$ les deux joueurs ont un comportement à la Cournot et

$$V_1^*(\mathbf{s}^0)= \max_{a_1\in A_1(\mathbf{s}^0)} g_1(\mathbf{s}^0,a_1,\gamma_2(\mathbf{s}^0))+E_{[a_1,\gamma_2(\mathbf{s}^0)]}[e^{-\rho T^1}V_1^*(\mathbf{s}^1)] \tag{19}$$

$$V_2^*(\mathbf{s}^0)= \max_{a_2\in A_2(\mathbf{s}^0)} g_2(\mathbf{s}^0,\gamma_1(\mathbf{s}^0),a_2)+E_{[\gamma_1(\mathbf{s}^0),a_2]}[e^{-\rho T^1}V_2^*(\mathbf{s}^1)] \tag{20}$$

À l'étape $\tau=1$, si $\xi_1^1=1$, le joueur 1 est le « leader » et

$$V_1^*(\mathbf{s}^1)= \max_{a_1\in A_1(\mathbf{s}^1)} g_1(\mathbf{s}^1,a_1,\tilde{\gamma}_2(\mathbf{s}^1,a_1))+E_{[a_1,\tilde{\gamma}_2(\mathbf{s}^1,a_1)]}[e^{-\rho T^2}V_1^*(\mathbf{s}^2)] \tag{21}$$

$$V_2^*(\mathbf{s}^1)= \max_{a_2\in A_2(\mathbf{s}^1)} g_2(\mathbf{s}^1,\gamma_1(\mathbf{s}^1),a_2)+E_{[\gamma_1(\mathbf{s}^1),a_2]}[e^{-\rho T^2}V_1^*(\mathbf{s}^2)] \tag{22}$$

$$\tilde{\gamma}_2(\mathbf{s}^1,a_1)=\arg\max_{a_2\in A_2(\mathbf{s}^1)} \{g_2(\mathbf{s}^1,a_1,a_2)+ E_{[a_1,a_2]}[e^{-\rho T^2}V_2^*(\mathbf{s}^2)]\}\,; \tag{23}$$

si $\xi_2^1=1$, le joueur 2 est le « leader » et

$$V_1^*(\mathbf{s}^1)= \max_{a_1\in A_1(\mathbf{s}^1)} g_1(\mathbf{s}^1,a_2,\gamma_2(\mathbf{s}^1))+E_{[a_2,\gamma_2(\mathbf{s}^1)]}[e^{-\rho T^2}V_1^*(\mathbf{s}^2)] \tag{24}$$

$$\tilde{\gamma}_1(\mathbf{s}^1,a_2)=\arg\max_{a_1\in A_1(\mathbf{s}^1)} \{g_1(\mathbf{s}^1,a_1,a_2)+ E_{[a_1,a_2]}[e^{-\rho T^2}V_1^*(\mathbf{s}^2)]\} \tag{25}$$

$$V_2^*(\mathbf{s}^1)= \max_{a_2\in A_2(\mathbf{s}^1)} g_2(\mathbf{s}^1,\tilde{\gamma}_1(\mathbf{s}^1,a_2),a_2)+E_{[\tilde{\gamma}_1(\mathbf{s}^1,a_2),a_2]}[e^{-\rho T^2}V_2^*(\mathbf{s}^2)] \tag{26}$$

Finalement, à l'étape $\tau=2$, les deux joueurs ont de nouveau un comportement à la Cournot et

$$V_1^*(\mathbf{s}^2),= \max_{a_1\in A_1(\mathbf{s}^2)} g_1(\mathbf{s}^2,a_1,\gamma_2(\mathbf{s}^2)) \tag{27}$$

$$V_2^*(\mathbf{s}^2),= \max_{a_2\in A_2(\mathbf{s}^2)} g_2(\mathbf{s}^2,\gamma_1(\mathbf{s}^2),a_2). \tag{28}$$

Ces équations, si elles sont satisfaites par des fonctions valeurs V^*j, fournissent des conditions nécessaires et suffisantes d'équilibre. Dans la prochaine section nous nous attacherons à donner une interprétation économique de ces conditions pour la situation de concurrence qui nous occupe.

4. INTERPRÉTATION ÉCONOMIQUE DES CONDITIONS D'ÉQUILIBRE

Dans cette section nous explicitons les conditions d'équilibre fournies par les équations de la programmation dynamique (19)-(28). Nous nous attacherons aussi à donner une interprétation économique de ces conditions.

En accord avec le principe d'induction de la programmation dynamique qui procède par une remontée du temps, nous devons considérer en premier lieu les conditions (27) et (28). Il s'agit de la troisième transition, effectuée au moment où les deux firmes ont acquis la maîtrise de la nouvelle technologie. La situation est alors celle du duopole classique, avec des fonctions de coût correspondant à la valeur $\xi_j=1$ de l'indicatrice de l'état technologique. Comme le système ne présente plus de caractéristiques réellement dynamiques, la solution d'équilibre est la solution classique de Cournot, caractérisée par les conditions du premier ordre :

$$(f(Q)-c_j(q_j,1))+q_j(f'(Q)-c_j'(q_j,1))=0,\ j=1,2. \tag{29}$$

Appelons $\hat{q}_j$, $j=1,2$ la solution de Cournot définie par (23), nous supposerons pour cela que ce système admet une solution unique. Nous noterons aussi $\hat{C}_j$ le flux de gains actualisé associé à cette solution d'équilibre pour la firme j, c'est-à-dire

$$\hat{C}_j= \frac{1}{\rho}\,(f\,(\hat{Q})-c_j(\hat{q}_j,1))\hat{q}_j. \tag{30}$$

Nous pouvons maintenant considérer les conditions (21)-(26), qui correspondent à la situation en $\tau=1$ où, rappelons-le, une des deux firmes (disons le joueur 1) est en position de « leader », l'autre (le joueur 2) se comportant en « suiveur ». La *fonction de réaction* du suiveur est la stratégie définie en (23). En explicitant les choix d'actions possibles des deux joueurs (un plan de production $q_1(\cdot)$ pour le « leader » et un couple $(q_2(\cdot),u_2(\cdot))$, définissant un plan de production et un plan de dépenses en *R&D* pour le « suiveur », on voit que ce dernier construit cette stratégie en résolvant le problème de commande optimale suivant :

$$\max_{(q_2(\cdot),u_2(\cdot))} E_{x_2(\cdot)}[\int_{T^1}^{T^2} e^{-\rho t}\{(f(Q(t))-\ c_2(q_2(t),\xi_2(t)))q_2(t)$$
$$-r_2(x_2(t),u_2(t)\}dt+e^{-\rho T^2}(\hat{C}_2-\Gamma_2(x_2(T^2)))], \tag{31}$$

où $Q(t)=q_1(t)+q_2(t)$. Il s'agit ici d'un problème de commande optimale avec temps d'arrêt aléatoire. Ce type de problème a été récemment étudié par Boukas, Haurie et Michel 1988, qui on montré que, sous des conditions de régularité classiques, la commande optimale $(\bar{q}_2(\cdot),\bar{u}_2(\cdot))$ devait maximiser l'hamiltonien

$$\begin{aligned} H_2(q_2(t),u_2(t),x_2(t),y_2(t),L_2) = {} & f(Q(t))-c_2(q_2(t),0))q_2(t)-r_2(x_2(t),u_2(t)) \\ & +(\hat{C}_2-\Gamma_2(x_2(t))-L_2(t))\lambda_2(x_2(t),1)\} \\ & +y_2(t)(u_2(t)-\mu x_2(t)) \end{aligned} \tag{32}$$

où le terme $L_2(t)$ correspond à l'espérance mathématique du gain attendu à partir de l'état courant observé par le joueur, et où la variable adjointe $y_2(t)$ correspond à la valeur marginale (en valeur courante) du stock de capital de *R&D*

$$y_2(t)= \frac{\partial}{\partial x_2}\ \tilde{V}_2(1,\bar{x}_2(t),(1,0)). \tag{33}$$

Rappelons que le terme (1,0) indique que la firme 1 a effectué sa propre percée technologique cependant que la firme 2 est encore en phase de développement. Cette variable adjointe satisfait alors l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{dt}y_2(t)=-\ \frac{\partial}{\partial x_2}H_2+(\rho+\lambda_2(x_2(t),1))y_2(t). \tag{34}$$

On peut constater que, dans l'optimisation de l'hamiltonien (32), il y a un découplage entre les variables de commande q_2 et u_2. Dès lors, en ce qui a trait aux niveaux de production choisis, le joueur 2 se comportera de façon similaire à un « suiveur » dans un jeu de duopole statique et produira au niveau $\bar{q}_2=\tilde{\delta}(q_1)$ tel que

$$\begin{aligned} & (f(q_1+\bar{q}_2)-c_2(\bar{q}_2,0)) \\ & +\bar{q}_2(f'(q_1+\bar{q}_2)-c_2'(\bar{q}_2,0))=0,\ j=1,2. \end{aligned} \tag{35}$$

Le « leader » par contre choisira q_1 tel que

$$\begin{aligned} & (f(q_1+\tilde{\delta}(q_1))-c_1(q_1,1)) \\ & +\bar{q}_1(f'(q_1+\tilde{\delta}(q_1))(1+\tilde{\delta}'(q_1))-c_1'(q_1,1))=0,\ j=1,2. \end{aligned} \tag{36}$$

En ce qui concerne l'investissement en *R&D*, le niveau optimal devra satisfaire la condition du premier ordre (en supposant que la fonction de coût r impose une solution intérieure),

$$0= \frac{\partial}{\partial u_2}\ H_2= \frac{\partial}{\partial u_2}\ r_2+y_2. \tag{37}$$

La firme rend donc égaux le coût marginal de l'investissement et la valeur marginale du capital de *R&D*.

Considérons enfin la situation en $\tau=0$. Au début du processus aucune des deux firmes n'a d'avantage technologique. Elles choisissent donc leurs niveaux de production et leurs investissements en *R&D* en cherchant à réaliser l'équilibre (20a)-(20b). Ainsi chaque firme j, prenant pour acquis le comportement de sa concurrente, cherchera à résoudre le problème suivant:

$$\max_{(q_j(\cdot),u_j(\cdot))} E_{\mathbf{x}(\cdot),s^0}\Big[\int_0^{T^1} e^{-\rho t}\{(f(Q(t))-c_j(q_j(t),\xi_j(t)))q_j(t)-r_j(x_j(t),u_j(t))\}dt$$
$$+e^{-\rho T^1}(V_j^*(\mathbf{x}(T^1),\xi(T^1))-\xi_j(T^1)\Gamma_j(x_2(T^1)))\Big], \tag{38}$$

où $Q(t)=q_1(t)+q_2(t)$. Remarquons que le temps d'arrêt T^1 peut correspondre à un saut de ξ_1 ou de ξ_2. La firme qui gagne la course technologique doit défrayer le coût de modification de son système de production, ce qui explique le terme $\xi_j(T^1)\Gamma_j(x_2(T^1))$. En adaptant les résultats de Boukas, Haurie, Michel 1988 on voit que l'action optimale de la firme j est une commande qui, à chaque instant t, maximise par rapport à $u_j(t)$ l'hamiltonien

$$H_j(q_j(t),u_1(t),u_2(t),x_2(t),y_2(t),L_j(t))=f(Q(t))-c_j(q_j(t),\xi_j(t)))-r_j(x_j(t),u_j(t))$$
$$+(V_j^*(\mathbf{x}(T^1),(1,0)-\xi_j(T^1)\Gamma_j(x_j(t))-L_j(t))\lambda_1(x_1(t),0)\}$$
$$+(V_j^*(\mathbf{x}(T^1),(0,1)-\xi_j(T^1)\Gamma_j(x_j(t))-L_j(t))\lambda_2(x_1(t),0)\}$$
$$+y_2(t)(u_2(t)-\mu x_2(t)). \tag{39}$$

Dans cette expression on voit apparaître les deux possibilités de saut du processus décrivant la situation technologique des deux firmes, de (0,0) vers (1,0) (la firme 1 gagne la course) ou bien vers (0,1) (la firme 2 gagne). La maximisation de cette expression par rapport aux variables de commande (q_j,u_j) conduit à un découplage des choix des niveaux de production et d'investissement. Le niveau de production s'établira, comme dans le duopole statique, à des valeurs $(\bar{q}_1,\bar{q}_2)$ qui satisfont les équations:

$$(f(\bar{q}_1+\bar{q}_2)-c_j(\bar{q}_j,0))$$
$$+\bar{q}_j(f'(\bar{q}_1+\bar{q}_j)-c_j'(\bar{q}_j,0))=0,\ j=1,2. \tag{40}$$

En ce qui concerne l'investissement en *R&D*, le niveau optimal devra satisfaire la condition du premier ordre (en supposant que la fonction de coût r impose une solution intérieure),

$$0=\frac{\partial}{\partial u_j}H_j=-\frac{\partial}{\partial u_j}r_j+y_j. \tag{41}$$

Le facteur déterminant, dans ce choix, est donc la valeur de la variable adjointe $y_j(t)$ qui représente la valeur marginale du capital de *R&D*. L'équation d'évolution de cette valeur marginale est donnée par l'équation différentielle suivante:

$$\frac{d}{dt}y_j(t)=-\frac{\partial}{\partial x_j}H_j+(\rho+(\lambda_1(x_1(t),0)+\lambda_2(x_2(t),0))y_j(t). \tag{41}$$

On voit, dans cette équation comme dans l'équation (33) que les taux de saut agissent à la façon d'un taux d'actualisation.

Nous nous attacherons finalement à montrer que la position de « leader » conduit à des gains espérés supérieurs à ceux que la firme obtiendrait selon une solution d'équilibre de Nash-Cournot. Ce résultat est bien connu dans le cas d'un jeu statique ou d'un jeu différentiel avec solutions en boucles ouvertes. Cependant, dans le cas d'un jeu dynamique avec solution de Stackelberg en « feedback », cette propriété n'est plus forcément vérifiée (cf. Simaan et Cruz 1973 a et b.). Dans le jeu séquentiel que nous venons de définir, le comportement à la Stackelberg n'intervient qu'au cours de la seconde transition. Les conditions (31)-(37) définissent une solution de Stackelberg en boucle ouverte pour un jeu différentiel avec temps d'arrêt aléatoire. Cette solution de Stackelberg est plus favorable pour le « leader » que ne le serait la solution de Nash-Cournot. Donc, une fois que la percée technologique a eu lieu, le détenteur de l'avantage technologique a intérêt à exercer son « leadership ».

5. CONCLUSION

L'objet de cet article était essentiellement de proposer un formalisme dynamique adapté à la modélisation d'une concurrence face à une possibilité de modifications importantes de la technologie de production dues à des percées technologiques. Les jeux différentiels déterministes par morceaux se prêtent à ce développement. Nous avons montré comment on pouvait caractériser des équilibres comportant des modes de jeu variables. En gardant une formulation relativement simpliste, dans laquelle les niveaux de production n'ont pas d'effet sur les possibilités de dépenses en *R&D*, nous avons obtenu un découplage des conditions d'optimum pour ces variables de décision. Il est clair que, pour atteindre un plus haut niveau de réalisme, il serait nécessaire de représenter les possibilités d'entrée et de sortie des firmes sur ce marché. La modélisation de ces phénomènes pourrait encore se faire par le biais de processus de saut. Il serait certainement difficile, dans ce cadre étendu de conserver cette propriété de découplage entre les variables de décision. Ces modèles sont assez complexes et ne se prêtent pas facilement à un analyse qualitative. Il sera important de développer des méthodes numériques efficaces pour pouvoir simuler des solutions de tels jeux afin d'apprécier l'impact de différentes fonctions de coût et de taux de saut sur les stratégies d'investissement en *R&D* des firmes.

BIBLIOGRAPHIE

A. ALJ, M. BRETON et A. HAURIE, « Sequential Stackelberg ε-equilibria in Two-Person Games », *Journal of Optimization Theory and Application*, Vol. 59, no. 1, pp. 71-97.

T. BASAR et A. HAURIE, 1984, « Feedback Equilibra in Differential Games with Structural and Modal Uncertainties », *Advances in large scale systems*, Editor: Jose B. Gruz Jr., Vol. 1, pp. 163-201.

T. BASAR, A. HAURIE et G. RICCI, 1985, « On the Dominance of Capitalists Leadership in a Feedback Stackelberg Solution of a Differential Game Model of Capitalism », *Journal of Economic Dynamics and Control* Vol. 9, No. 1, pp. 101-125.

E.K. BOUKAS et A. HAURIE, 1987, « Optimality Conditions For Continuous Time Systems With Controlled Jump Markov Disturbances: Application To Production And Maintenance Scheduling », in, A. Bensoussan, J.L. Lions edit., Proceeding INRIA 8th International Conference Springer Verlag on *Analysis and Optimization of systems*, Antibes, June 1988.

E.K. BOUKAS, A. HAURIE et P. MICHEL, 1988, « An Optimal Control Problem with a Random Stopping Time », *Cahier du GERAD*, à paraître, *Journal of Optimization Theory and Applications*.

M. BRETON, 1987, *Équilibres pour des jeux séquentiels*, thèse de PhD. IRO, Université de Montréal.

P. DASGUPTA et J. STIGLITZ, 1981, « Entry, Innovation, Exit: Towards a Dynamic Theory of Oligopolistic Industrial Structure », *European Economic Review*, Vol. 15, No. 75, p. 137-158.

M. H. A. DAVIS, 1985, « Control of Piecewise-Deterministic Processes Via Discrete-Time Dynamic Programming », in *Proceedings of 3rd Bad Honnef Symposium on Stochastic Differential Systems*, Lectures Notes on Control and Inf-Sciences, vol. 78.

H. HALKIN, 1974, « Necessary Conditions For Optimal Control Problems With Infinite Horizons », *Econometrica*, Vol. 42, no. 2, pp. 267-272.

C. HARRIS et J. VICKERS, 1985, « Perfect Equilibrium in a Model of a Race », *Review of Economic Studies*, Vol. 54, p. 1-22.

C. HARRIS et J. VICKERS, 1987, « Racing with Uncestainty », *Review of Economic Studies*, Vol. 52, p. 193-209.

A. HAURIE, 1988, « Piecewise Deterministic Differential Games », in T. Basar Edit, *Proceeding International Symposium on Differential Games and Applications*, INRIA, Antibes, Juillet 1988.

T. LEE et L. WILDE, 1980, « Market Structure and Innovation », *Quaterly Journal of Economics*, Vol. 94, p. 429-436

G.C. LOURY, 1979, « Market Structure and Innovation », *Quaterly Journal of Economics*, Vol. 93, p. 395-410.

J. REINGANUM, 1982, « A Dynamic Game of *R&D*: Patent Protection and Competitive Behavior », *Econometrica*, Vol. 50, p. 671-688.

J. REINGANUM, 1984, « Practical Implications of Game Theoretic Models of *R&D* », *American Economic Review, Papers and Proceedings*, Vol. 74, p. 61-66.

H.D. SHERALDI, 1983, A. Soyster et F.H. Murphy, « Stackelberg-Nash Cournot Equilibria: Characterizations and Computations », *Operations Research*, Vol. 31, No. 2, Mars-Avril, p. 253-276.

M. SIMAAN et J.B. CRUZ, JR, 1973 a, « On the Stackelberg Strategy in Nonzero-sum Games », *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 11, pp. 533-555.

M. SIMAAN et J.B. CRUZ, JR, 1973 b, « Additional aspects of the Stackelberg Strategy in Nonzero-sum Games », *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 11, pp. 613-626.

J. TIROLE, 1988, *The Theory of Industrial Organization*, The MIT Press.

W. WHITT, 1980, « Representation and Approximation of Noncooperative Sequential Games », *SIAM J. Control*, Vol. 18, no. 1, pp. 33-48.