« Budget et systèmes mixtes de demande »

Edouard Wagneur

*L'Actualité économique*, vol. 61, n° 4, 1985, p. 489-506.



DOI: 10.7202/601349ar

L'Actualité Économique, Revue d'analyse économique, vol. 61 no. 4 décembre 1985

# BUDGET ET SYSTÈMES MIXTES DE DEMANDE

Edouard WAGNEUR,
*GERAD*
*École des Hautes Études Commerciales (Montréal)*

Dans le cadre de l'étude des systèmes mixtes introduits par Samuelson (1960), on est amené à établir une relation de conjugaison entre chaque variable primale et une variable duale. On se demande alors si, par exemple dans le cas des systèmes de demande, il existe un système mixte où les $k$ premières variables primales et les $n$-$k$ dernières variables duales du système peuvent être exprimées en fonction des variables complémentaires. Cependant, pour la contrainte de budget, considérée comme variable duale, la seule variable primale candidate au rôle de variable primale conjuguée est le numéraire.

Nous étudions ici cette conjugaison à partir des préférences et de la fonction inverse de demande intrinsèque au consommateur (i.e. sans aucune référence à un contexte institutionnel) définie par les utilités marginales normalisées (et la fonction budget que l'on peut leur associer) et examinons le problème d'existence des systèmes mixtes relevant de cette conjugaison. En particulier, notre proposition 3 établit que si les préférences sont définies et deux fois continument différentiables sur l'orthant $R^n{}_+$, il existe un sous-ensemble ouvert non borné de $R^n{}_+$ sur lequel le numéraire peut être substitué au budget comme variable (exogène) d'un système mixte de demande. Plusieurs contre-exemples montrent que cette propriété n'est en général pas vraie sur tout l'ensemble de définition des préférences (ni même sur un sous-ensemble ouvert dense). Cependant, nos contre-exemples faisant appel à des préférences qui, soit exhibent des saturations, soit ne sont pas définies sur $R^n{}_+$ tout entier, la question de substituer « ouvert dense » (donc un ensemble dont le complémentaire est de mesure nulle) à « ouvert non borné » dans la proposition 3 reste ouverte.

Cette recherche a été subventionnée par le Fonds FCAR (84-AR-90) et le C.R.S.H. (410-81-0722-R2).

Plusieurs discussions avec C. Bronsard (Département de sciences économiques, Université de Montréal) et G. Zaccour (GERAD, H.E.C.), m'ont permis de clarifier plusieurs aspects de ce travail. La présente version a également bénéficié des commentaires d'un lecteur anonyme, ainsi que de ceux de M. Truchon (Laboratoire d'Économétrie, Université Laval) commentateur d'une première version présentée au Congrès de la Société canadienne de science économique (Chicoutimi, mai 1985).

*Budget and mixed demand systems.* — P.A. Samuelson (1960) has pointed out that, in equilibrium systems, $n$ (primal) variables $(x^1, ..., x^n)$ and $n$ (dual) variables $(y^1, ..., y^n)$ are pairwise conjugate. If, with each pair of conjugate variables, we select one and only one of the elements of the pair, we get $2^n$ equivalent equilibrium systems. This approach to "mixed equilibrium systems" does not extend mutatis mutandis to consumer theory, where mixed demand is derived through maximization of a mixed utility function (cf. Samuelson, 1965, or Chavas, 1984) or by partially inverting the local demand system (cf. Salvas, Bronsard et Leblanc, 1977). In this paper, we study the existence problem of such mixed demand systems, defined intrinsically, wth particular focus on the, yet unexplored, potential conjugacy relation between numeraire and budget constraint. In particular our proposition 3 states that, if preferences are defined and twice continuously differentiable over the strictly positive orthant $R^n{}_+$, then there exists an open unbounded subset of $R^n{}_+$, on which the numeraire can be substituted to the budget as exogenous variable of a mixed demand system. We also provide counterexamples, which show this is generally not true over the whole set on which preferences are defined (or even on an open dense subset of it). However, since our counterexamples deal with preferences which either exhibit satiation or are not defined over the whole of $R^n{}_+$, the question to replace "open unbounded" in proposition 3 by "open dense" (so that the complementary set would be a null set) remains open.

## 1. INTRODUCTION

Un système mixte de demande est un système intermédiaire entre un système de demande et un système inverse de demande. Dans un tel système, le panier de biens est décomposé en deux catégories, ainsi que le vecteur de prix correspondant. Les quantités de biens de la première catégorie et les prix de ceux de la seconde sont alors exprimés en fonction des quantités de biens de la seconde catégorie et des prix de ceux de la première. Dans cette formulation, si nous n'avons pas mentionné le budget, c'est que, a priori, la question du choix des variables avec lesquelles il convient de l'assimiler se pose.

L'intérêt des systèmes mixtes de demande est d'étudier la réponse du consommateur à un environnement (contexte institutionnel) qui n'est pas nécessairement celui de la concurrence parfaite. En outre, ils interviennent de manière naturelle dans un modèle à deux périodes, où chaque catégorie est associée à une période. Ainsi, par exemple, la consommation de la première période et les prix souhaités pour la seconde période (et le budget total pour les deux périodes) seront exprimés en fonction des prix présents et des consommations anticipées.

Dans la plupart des travaux portant sur les systèmes mixtes (cf. Samuelson [1965], Salvas, Bronsard et Leblanc [1977], Chavas [1984], Wagneur [1984]), le problème de la conjugaison du budget avec une variable primale est éludé en partant du postulat implicite que, puisque la quantité demandée de chaque bien non numéraire est conjuguée à son prix, il est naturel de considérer que la quantité de numéraire est conjuguée au budget. On peut toutefois se demander si une telle extrapolation est légitime. En effet, si, par exemple, le consommateur a choisi le blé pour numéraire, son budget représente la valeur de sa consommation totale exprimée en blé et vaut la somme de sa consommation de blé et de la valeur (exprimée en blé) de sa consommation des autres biens. La recette marginale (expression que nous substituerons à celle, plus conforme mais inusitée, de budget marginal) par rapport au numéraire est égale à 1 plus la valeur marginale de sa consommation des autres biens. Si cette expression est toujours positive, la situation est analogue (au signe près) à celle où le prix d'un bien est fonction décroissante de la quantité consommée. En revanche, que peut-on dire lorsqu'elle s'annule ? Inversement, on peut se demander si la demande de numéraire est toujours fonction croissante du budget ?

Le but de cette étude est d'une part de promouvoir l'analyse intrinsèque du comportement du consommateur, qui permet une compréhension renouvelée de la théorie du consommateur, trop souvent cantonnée au contexte d'une économie de marchés et, d'autre part, dans le cadre de cette analyse, d'examiner si les postulats néoclassiques de la théorie du consommateur permettent de répondre de manière décisive aux quelques questions mentionnées.

Plus précisément, nous étudierons les problèmes suivants :

1. À part le cas du système inverse de demande, existe-t-il toujours un système mixte où le budget est exprimé en fonction de la quantité de numéraire (et d'autres variables du système) ?

2. De même, à part le cas du système de demande, existe-t-il toujours un système mixte pour lequel la demande de numéraire est exprimée en fonction du budget (et d'autres variables du système) ?

3. Les réponses aux deux questions précédentes sont-elles nécessairement reliées (i.e. un système mixte vérifiant la condition de la première question est-il nécessairement inversible) ?

4. Existe-t-il des systèmes mixtes où quantité de numéraire et budget sont simultanément exprimés en fonction d'autres variables du système ?

Il n'est pas sans intérêt de signaler que la réponse à ces questions en soulève d'autres, qui ne seront pas abordées ici, par exemple :

- Que se passe-t-il si l'effet revenu sur le numéraire est nul ou négatif ?
- Un bien inférieur peut-il être choisi pour numéraire ?

— Si c'est le cas, cela a-t-il des conséquences sur la dynamique de l'équilibre général ?

Le lien entre le problème 1 et l'existence d'un effet revenu non nul sur la demande de numéraire ainsi que le problème 2 et le cas où la recette marginale par rapport au numéraire est non nulle sera explicité au paragraphe 4 ci-dessous.

Dans le paragraphe 2 ci-dessous, nous présentons l'approche intrinsèque de la théorie du consommateur et explicitons les raisons qui nous la rendent préférable à la théorie traditionnelle.

Afin de limiter le plus possible les développements mathématiques abstraits, à l'exception de la proposition 3, les concepts sont introduits à partir d'exemples. Dans le paragraphe 3 ci-dessous, nous reprenons un exemple bien connu et poussons son analyse d'un point de vue intrinsèque. Ceci permettra au lecteur de se familiariser avec ce point de vue et d'établir constamment le lien avec la théorie du consommateur en situation concurrentielle. Enfin, cet exemple permet d'illustrer de manière élémentaire les problèmes 1 à 4 ci-dessus.

Le paragraphe 4 propose une définition rigoureuse des systèmes mixtes et rappelle les principaux résultats concernant ces systèmes. Le lien entre le comportement du budget en fonction de la quantité de numéraire et la question 1 ci-dessus est établi au paragraphe 5. En particulier, notre proposition 3 énonce que, si le consommateur n'est jamais saturé sur l'orthant strictement positif de $R^n$, il existe un ouvert non borné à l'intérieur duquel cette question admet toujours (localement) une réponse positive. Ceci est un peu faible en ce sens qu'un ouvert, même non borné, peut être « petit » par rapport à l'ensemble sur lequel s'exercent les préférences. On voudrait plutôt avoir un ensemble ouvert partout dense, c'est-à-dire un ensemble ayant pleine mesure. Le premier des deux exemples qui suivent illustre ce cas, alors que le second montre qu'il n'en est pas toujours ainsi.

## 2. LA THÉORIE DU CONSOMMATEUR D'UN POINT DE VUE INTRINSÈQUE

Le consommateur est caractérisé par des préférences s'exerçant sur un sous-ensemble (que nous supposerons ouvert pour simplifier) de l'espace numérique à $n$ dimensions $R^n$ et données par une fonction d'utilité deux fois continuement différentiable et fortement quasi-concave sur cet ensemble.

Cette fonction d'utilité permet alors de définir :

— un système de prix personnel intrinsèque, donné en tout point par le vecteur des utilités marginales et

— une fonction numérique, que nous appelons budget, donnée en tout point par le produit scalaire du vecteur de prix intrinsèque avec le vecteur de biens auquel il s'applique,

qui sont rendus indépendants du choix particulier de la fonction d'utilité représentant les préférences en se donnant une règle de normalisation.

Le consommateur ainsi spécifié, n'a ni revenu, ni *contrainte* budgétaire, c'est pourquoi nous appellons budget (ou fonction budget du consommateur) la fonction numérique intrinsèque définie ci-dessus.

La relation reliant les variables de quantité aux variables de prix et au budget est complètement déterminée par les préférences du consommateur, ainsi que sa règle de normalisation. Elle est donc intrinsèque (au consommateur), c'est-à-dire, totalement indépendante de tout contexte institutionnel. On pourra donc étudier les propriétés de cette relation et caractériser le comportement du consommateur, indépendamment de tout contexte institutionnel. Le fait que cette relation soit inversible permet ainsi de placer le consommateur dans le contexte d'une économie de marchés où tous les prix et le budget (sous forme de contrainte) sont donnés, ou inversement d'une économie de rationnements où toutes les quantités sont données. En dehors de ces deux cas polaires, les systèmes mixtes de demande décrivent les réactions du consommateur placé dans un contexte où une partie des prix et une partie des quantités (la partie complémentaire) sont données.

Cette analyse intrinsèque peut paraître un peu artificielle en économie de marchés, cependant, en plus de fournir un outil intéressant pour l'étude des modèles à plusieurs périodes, elle s'avère essentielle dès que l'on introduit biens publics et externalités dans l'analyse. En outre, elle permet d'envisager l'étude de l'équilibre général dynamique dans le cas où le contexte institutionnel tient en partie de l'équilibre concurrentiel (procédures d'ajustement par les prix) et en partie de l'équilibre sous rationnements (procédures d'ajustement par les quantités), dès lors que l'on sait agréger convenablement tant les systèmes mixtes de demande que les systèmes mixtes d'offre.

## 3. ÉTUDE D'UN EXEMPLE FAMILIER

Considérons le cas d'un consommateur dont les préférences s'exercent sur deux biens et sont données par :

$$u(x, y) = x\,y, \quad x > 0, y > 0.$$

Si le bien $y$ est choisi pour numéraire, sa fonction de demande est définie par :

$$1. \begin{cases} x = r\,(2p)^{-1} \\ y = r\,2^{-1} \end{cases}$$

et sa fonction inverse de demande par :

$$2.\ \begin{cases} p = y\,x^{-1} \\ r = \ 2\,y \end{cases}$$

Ces deux fonctions sont définies globalement sur $R^2{}_+$.

Au-delà de la forme particulière qu'il revêt ici, ainsi que le remarque Hicks [1956], le système 2) détermine le prix (et le budget) maximum que le consommateur est prêt à affecter à l'acquisition du panier $(x, y)$. Cette interprétation, formulée dans un contexte où les relations sont supposées linéaires, nous conviennent encore si l'on prend soin de leur donner un sens local. Ainsi, en tout point $(x, y)$ le rapport $y/x$ est un nombre qui représente le prix maximum (mesuré en termes de numéraire) auquel le consommateur est prêt à échanger du bien $x$ pour du numéraire. De même, le nombre $2y$ est le budget maximum (mesuré en numéraire) qu'il est prêt à consacrer à l'acquisition du panier $(x, y)$ (dans une optique plus traditionnelle, on dirait plutôt le revenu minimum lui permettant cette consommation). Remarquons encore que le système 2 fournit au consommateur un système d'évaluation direct sur l'espace des prix (i.e. le recours à l'utilité indirecte, concept dérivé, est superflu).

Ce système (sous sa forme locale ou globale) a suscité un regain d'intérêt au cours des quinze dernières années ; citons par exemple Katzner [1970], Salvas, Bronsard et Leblanc [1977], Bronsard et Leblanc [1980], Christensen et Manser [1977], Laitinen et Theil [1979], Anderson [1980]. Il est caractérisé par la propriété importante d'être défini de manière intrinsèque en posant :

$$3.\ \begin{cases} p(x,y) = u_x\,u_y{}^{-1} \\ r(x,y) = x\,p(x,y) + y \end{cases}$$

On sait que, si $u$ est de classe $C^2$, monotone et fortement quasi-concave, ce système est inversible et son inverse définit la fonction de demande.

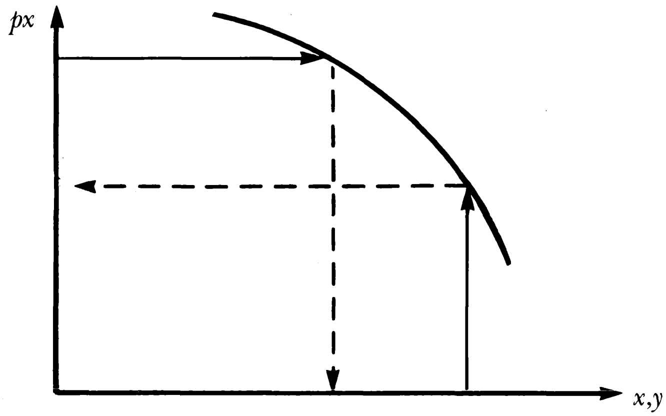
Examinons les aspects géométriques de l'inversibilité de l'application $(x,y) <\!\!-\!\!-\!\!> (p,r)$.

Dans $R^4{}_+$, le graphe de cette fonction est une surface $G$. Pour $p$ et $r$ fixés, le 2-plan parallèle à l'espace primal passant par $(0,0,p,r)$ rencontre $G$ en un point unique $(x,y,p,r)$.

Inversement, le 2-plan parallèle à l'espace dual passant par $(x,y,0,0)$ rencontre $G$ en $(x,y,p,r)$.

Géométriquement, on dit que chacun des deux 2-plans est transverse à $G$.

FIGURE 1
FONCTION DE DEMANDE ET TRANSVERSALITÉ




Cette double transversalité se traduit algébriquement par la condition de régularité de la matrice jacobienne du système de demande.

Supposons que notre consommateur, au lieu d'être placé dans un contexte institutionnel d'économie de marchés où prix et revenus sont donnés ou dans un contexte où il fait face à un planificateur qui fixe les quantités, soit placé dans une situation mixte où la quantité $y$ de numéraire et le prix de l'autre bien sont donnés.

Le système peut encore être résolu et l'on a un cas particulier répondant aux exigences du problème 1 :

$$4.\ \begin{cases} x = y\,p^{-1} \\ r = 2y \end{cases}$$

Géométriquement, le 2-plan parallèle aux axes $y = 0, p = 0$ passant par $(0,y,p,0)$ est transverse à $G$.

La jacobienne de cette transformation s'écrit $\begin{bmatrix} -yp^{-2} & p^{-1} \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, elle est régulière, le système s'inverse et le 2-plan parallèle aux axes $x = 0$ et $r = 0$ passant par $(x,0,0,r)$ est encore transverse à $G$. Ainsi, pour cet exemple, on a l'inversibilité mentionnée au problème 3 et le système inverse illustre le cas soulevé dans le problème 2.

La question posée dans le problème 4 peut être abordée en supposant que notre consommateur fait face à la quantité $x$ du bien non numéraire ainsi qu'à son prix $p$. Sa réponse sera :

$$5.\ \begin{cases} y = px, \\ r = 2px. \end{cases}$$

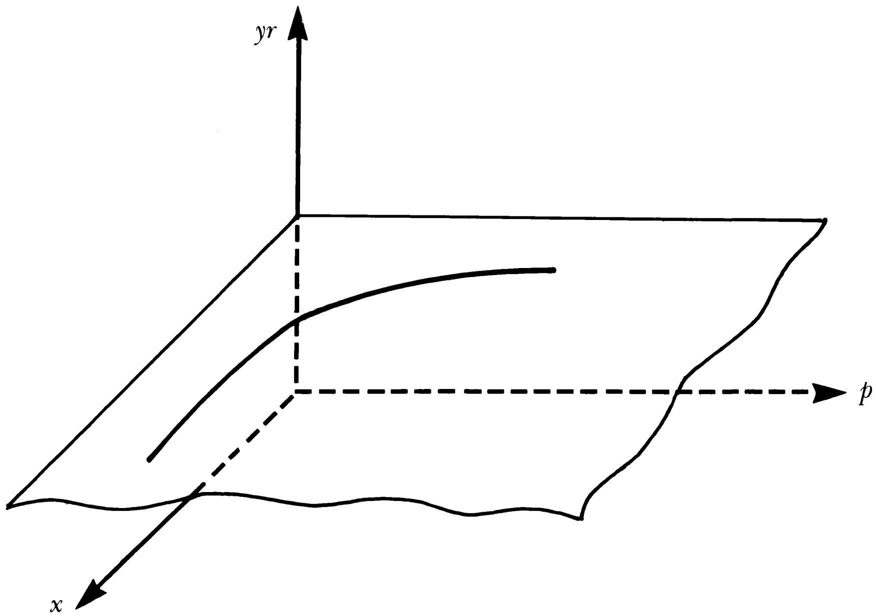
La jacobienne du système: $\begin{bmatrix} p & x \\ 2p & 2x \end{bmatrix}$ est singulière.

Le plan parallèle à $y = p = 0$ passant par $(x,0,p,0)$ est transverse à $G$. En revanche, le plan $\pi$ parallèle à $y = r = 0$ passant par $(0,y,0,r)$ ne l'est pas. Lorsque $y$ et $r$ sont choisis de telle manière que $\pi$ rencontre $G$ (Il faut et il suffit pour cela que $r = 2y$), l'intersection est une courbe d'équation $p \cdot x =$ cte dans $\pi$ (fig. 2).

Le système 5 est bien défini. Confronté au prix du bien non numéraire (exprimé en termes de numéraire) et forcé d'en consommer une quantité donnée, le consommateur détermine le budget total (exprimé en numéraire) et la quantité de numéraire qu'il désire consommer.

FIGURE 2

POSITION NON TRANSVERSE DU SYSTÈME MIXTE 5




La non-transversalité du système 5 entraîne sa non-inversibilité. Ainsi, si l'on impose le budget $r$ et la quantité de numéraire $y$, le consommateur est incapable de déterminer sa consommation de bien $x$. Ainsi, pour $r = 6$ et $y = 2$, il ne peut choisir (par exemple) entre une consommation $x = 2$ au prix $p = 2$ et une consommation $x = 1$ au prix $p = 4$, pas plus qu'entre toute autre combinaison prix-quantité donnant la valeur 4.

*Remarques*

1. Afin de simplifier l'exposé, nous avons escamoté un aspect du problème, à savoir que les systèmes décrits sont tous normalisés. Si cette simplification est sans conséquence en concurrence parfaite, il n'en est plus ainsi dès lors que le consommateur fait face à un autre contexte institutionnel. Ce phénomène est connu (voir par exemple Bronsard et Leblanc, [1980], pour un aperçu assez complet de la littérature à ce sujet), mais croyons-nous, pas suffisamment pour faire l'économie de l'illustration suivante :

Le système 4 étant inversible, si le consommateur qui a choisi $y$ pour numéraire est placé dans un contexte institutionnel où $x$ est rationné et $r$ donné, il choisira $y = r/2$ et sera prêt à échanger une unité de $x$ contre $r/2x$ unités de numéraire, i.e. $p = r/2x$. Prenons pour fixer les idées $x = 10$ et $r = 20$. Son équilibre est atteint pour $y = 10$ et $p = 1$. Cependant, si le consommateur avait choisi $x$ pour numéraire, on devrait écrire le système 4 sous la forme :

$$4'.\ \begin{cases} x = qy, \\ r = 2qy, \end{cases} \quad \text{où } q\ (= u_y/u_x) \text{ est le prix de } y \text{ en termes de } x.$$

Placé dans le même contexte que précédemment, il se trouve exactement dans la même situation que le consommateur du système 5 : il devient complètement incapable de déterminer son équilibre. De plus, lorsque $r \neq 2x$, l'équilibre du consommateur qui a choisi $y$ pour numéraire est bien déterminé. En revanche, s'il choisit $x$ pour numéraire, il ne pourrait jamais être à l'équilibre, puisque, d'après le système 4′, celui-ci n'existe pas.

On se gardera donc de tirer des conclusions hâtives de l'examen des systèmes 1 à 5 ci-dessus. Une façon commode d'étudier les systèmes inverses de demande à partir de l'utilité est fournie dans (Bronsard-Leblanc, 1980) et consiste, dans un premier temps, à ajouter un paramètre $s > 0$ (que l'on peut interpréter comme l'unité de compte du consommateur) à l'espace des biens et à définir ensuite le système :

$$6.\ \begin{cases} p = su_x/u_y, \\ q = s \\ r = su_x/u_y + ys. \end{cases}$$

D'après les auteurs cités, ce système est globalement inversible (cas particulier de la proposition 1 ci-dessous).

Il en résulte alors que la jacobienne du système 6 est régulière. Sa matrice jacobienne, évaluée pour $s = 1$, fournit le système local :

$$7.\quad \begin{bmatrix} dp \\ dq \\ dr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x & p_y & p \\ 0 & 0 & 1 \\ r_x & r_y & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ ds \end{bmatrix}$$

et son inverse :

$$8.\quad \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_p & x_q & x_r \\ y_p & y_q & y_r \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp \\ dq \\ dr \end{bmatrix}$$

qui seuls sont significatifs.

Ainsi, dans le cas de la fonction d'utilité proposée, la matrice du système 8 devient :

$$\begin{bmatrix} -x^2/y & 0 & x/2y \\ 0 & -y & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et l'on a :

$dy = -y\, dq + 1/2\, dr$. Pour $dq = 0$, cette expression est identique à celle donnée par la différentielle (ou forme locale) du système 4.

2. On peut encore conclure de la remarque précédente qu'il est extrêmement dangereux, en théorie du consommateur sous rationnements, de choisir un bien rationné pour numéraire.

## 4. LA FONCTION BUDGET ET LES SYSTÈMES MIXTES

L'étude locale des systèmes mixtes a été abordée par Samuelson [1965], où il maximise une fonction d'utilité mixte de la forme $u(x) - v(p,r)$ par rapport à un vecteur mixte de variables $(x_2,p_1)$ correspondant à une décomposition $x = (x_1,x_2)$ de l'espace primal et $(p,r) = (p_1,p_2,r)$ de l'espace dual. Ces systèmes ont également été étudiés par Salvas, Bronsard et Leblanc [1977]. D'autre part, ainsi que l'ont fait remarquer ces derniers, un système de demande sous rationnements apparaît toujours comme un système mixte tronqué (de ses équations exprimant les variations du vecteur partiel de prix, considérés comme fixes dans le cadre de cette théorie). Chavas [1983] étudie également ces fonctions en maximisant une fonction d'utilité mixte à la Samuelson. Toutefois, cette approche n'est pas très satisfaisante. En effet, on maximise (partiellement) une fonction d'utilité indirecte, dérivant d'un programme d'optimisation d'une fonction d'utilité directe... L'approche intrinsèque permet d'éviter cet écueil (cf. Wagneur [1984]).

Dans la suite, nous supposerons toujours les préférences données par une fonction d'utilité $u: \Omega \rightarrow R$, (où $\Omega$ est un ouvert convexe de $R^n$) vérifiant les propriétés de monotonie et de quasi-concavité forte suivantes :

i) $u$ est de classe de différentiabilité $C^2$

ii) $Du(x) \gg 0$.

iii) $Du(x)(h) = 0 \Rightarrow D^2u(x)(h,h) < 0$,

où $Du(x)(h)$ est donné par le produit scalaire usuel et $D^2u(x)(h,h)$ représente la forme bilinéaire symétrique obtenue en évaluant la matrice hessienne de $u$ (en $x$) sur le vecteur $h$.

On a la proposition suivante :

*Proposition 1* (Bronsard-Leblanc [1980])

Le système intrinsèque :

$$9. \quad \begin{cases} p^i(x,s) = su_i(x,s)\,(u^n)^{-1}(x,s), & i = 1,\dots,n-1 \\ p_n \quad = s & \\ r(x,s) = p(x,s)\cdot x & \end{cases}$$

est globalement inversible.

En particulier, cela signifie que, si $P$ désigne la jacobienne des fonctions $p^i(x,s)$ par rapport à $x$ pour $i = 1,\dots,n-1$, et $r_x$ le vecteur des recettes marginales, la matrice :

$$\begin{bmatrix} P & p \\ 0 & 1 \\ r_x & r \end{bmatrix}$$

caractérisant le système local (évaluée pour $s = 1$) est inversible.

On peut décomposer la matrice $P$ en 4 sous-matrices $P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}$ et le vecteur ligne $r_x$ en deux parties : $r_{x1}$ et $r_{x2}$ correspondant à la décomposition du panier en deux catégories de biens $x_1$ et $x_2$. Suivant cette décomposition, la matrice du système local devient (où $(p_2, 1)$ est le vecteur prix des biens 2) :

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & p_1 \\ P_{21} & P_{22} & p_2 \\ 0 & 0 & 1 \\ r_{x1} & r_{x2} & r \end{bmatrix}$$

Désignons par **M** la matrice $\begin{bmatrix} P_{22} & p_2 \\ 0 & 1 \\ r_{x2} & r \end{bmatrix}$. On a :

*Proposition 2* (Wagneur [1984])

Il existe un système mixte local de la forme $(x_1,p_2,r) = \underline{\xi}(p_1,x_2)$ si la matrice **M** est régulière. De plus, cette condition est équivalente à la transversalité du n-plan passant par $(0,x_2,p_1,0,0)$ au graphe du système 9 dans $R^{2n}$.

Nous nous contenterons ici de montrer que la régularité de **M** suffit à garantir l'existence du système mixte annoncé.

Avec les notations introduites, le système local s'écrit :

$$\begin{bmatrix} dp_1 \\ dp_2 \\ 0 \\ dr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & p_1 \\ P_{21} & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{M}} \\ r_{x1} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ \\ dx_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ i.e.}$$

$$10.1) \quad dp_1 = P_{11}\,dx_1 + P_{12}\,dx_2,$$

$$10.2) \quad \begin{bmatrix} dp_2 \\ 0 \\ dr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{21} \\ 0 \\ r_{x1} \end{bmatrix} dx_1 + \mathbf{M} \begin{bmatrix} dx_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**M** étant inversible par hypothèse, on a :

$$\begin{bmatrix} dx_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} dp_2 \\ 0 \\ dr \end{bmatrix} - \mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} P_{21} \\ 0 \\ r_{x1} \end{bmatrix} dx_1,$$

(qui ne dépend que de $dx_1$, $dp_2$ et $dr$). La substitution de $dx_2$ dans 10.1) fournit également l'expression locale de $dp_1$, en fonction des variables $dx_1$, $dp_2$ et $dr$.

*Remarque*

Le vecteur $\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ci-dessus correspond au vecteur $\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ ds \end{bmatrix}$ de Bronsard et Leblanc [1980], où $s$ est ici supposée constante ($ds = 0$).

*Corollaire 1*

Il existe un système mixte local (inverse) de demande où le budget est substitué au numéraire comme variable explicative partout où la dérivée du budget par rapport au numéraire est non nulle.

Le corollaire 1 fournit une réponse partielle au problème 1. Le corollaire 2a) ainsi que l'exemple 2 ci-dessous la complètent.

*Corollaire 2*

a) Il existe toujours un système mixte local dans lequel l'un des biens se substitue au budget comme variable explicative.

b) Il existe toujours un système mixte local dans lequel le budget se substitue à l'un des biens comme variable explicative.

*Démonstration*

Dans un cas comme dans l'autre, on utilise le fait que le système de demande (ou le système inverse de demande) étant inversible, chacun des lignes de sa matrice jacobienne est régulière (i.e. comporte au moins un terme non nul).

*Remarques*

1. Le corollaire 2 a) établit que, si la recette marginale par rapport à $x^i$ est non nulle, cette variable peut être substituée à $r$ comme variable exogène. C'est-à-dire que, placé dans un contexte institutionnel où les prix des biens et la quantité de $i^e$ bien sont exogènes, le consommateur va déterminer les autres quantités et le budget qu'il affectera à l'acquisition de son panier.

2. C'est l'inversibilité de la matrice jacobienne du système qui permet d'établir a) et b) du corollaire 2. Cependant, il ne faudrait pas en conclure que le système dérivé dans b) est nécessairement l'inverse de l'un des systèmes dérivés dans a). En effet, les deux conditions $r_i \neq 0$ et $x^i_r \neq 0$ sont complètement indépendantes (voir les exemples 2 et 3 ci-dessous).

3. La proposition 2 peut être reformulée en considérant le système de demande (inverse de 9) et en le décomposant de manière analogue. D'où une formulation « duale » du corollaire 1 et une réponse partielle au problème 2, complétée par le corollaire 2 b) et l'exemple 3 ci-dessous.

4. Il peut très bien se faire qu'aucun des systèmes mixtes fournis par le corollaire 2 ne soit inversible.

5. Contrairement au système de demande et au système inverse de demande les systèmes mixtes dont il est question ici sont définis localement seulement. Une définition globale requiert une condition globale

(l'injectivité de la projection du graphe du système de demande sur le n-plan formé par les axes des coordonnées « explicatives » par exemple). On peut alors se demander s'il existe des conditions sur l'utilité permettant de garantir l'existence globale de certains systèmes mixtes et tenter de préciser ces conditions.

6. Le corollaire 2 a) ne permet pas de contrôler la variable qui sera substituée au budget dans le système mixte obtenu.

Dans la suite, nous nous intéressons essentiellement au cas du budget vs le numéraire, qui sera toujours identifié à $x^n$. On a :

*Proposition 3*

Si $\Omega = R^n{}_+$, il existe un sous-ensemble ouvert non borné de $\Omega$ dans lequel le numéraire peut être substitué au budget comme variable exogène d'un système mixte de demande.

*Démonstration*

Il s'agit de montrer l'existence d'un ouvert non borné sur lequel $r_n \neq 0$. Soit $F = \{x \in \Omega \mid r_n = 0\}$. Par continuité, $F$ est fermé, donc $CF$ est ouvert. Montrons qu'il n'est pas borné. Si $F$ est sans point intérieur, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que $F$ contienne au moins un point intérieur $x$. On peut écrire $x = (x_1, x^n)$, où $x_1 = x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}$ et il existe un ouvert $V$ contenu dans $F$ à l'intérieur duquel :

$$r(x) = p(x)\, x_1 + x^n = f(x_1) \text{ donc } 0 < p(x)\, x_1 = f(x_1) - x^n.$$

Fixons $x \in V$ et posons :

Soit $\tilde{x} = (x_1, f(x_1))$. On a $\tilde{x} \in \Omega$,

$r(\tilde{x}) = p(\tilde{x})\, x_1 + f(x_1)$ et

$\tilde{x} \notin V$ car $\tilde{x} \in V \Rightarrow r(\tilde{x}) = f(x_1) \Rightarrow p(\tilde{x})\, x_1 = 0.$

Considérons alors le segment « vertical » $T = [x, \tilde{x}]$ et posons :

$x_t = (1-t)x + t\tilde{x},\ t \in [0,1]$. On a :

$T \cap CF \neq \emptyset$. En effet, si ce n'était pas le cas, la fonction $R(t) = r(x_t)$ serait constante sur $[0.1]$, car $R'(t) = r_n(x_t)\dfrac{\delta x_t}{\delta t} = 0$. D'où :

$R(0) = f(x_1) = R(1) = r(\tilde{x})$ et, par suite, la contradiction $p(\tilde{x}) \cdot x_1 = 0$.

*Remarques*

1. La proposition précédente est un peu décevante en ce sens que l'on voudrait que, à défaut de l'être partout, numéraire et budget soient au

moins substituables sur un ouvert partout dense dans $\Omega$, c'est-à-dire sur un ensemble dont le complémentaire est de mesure nulle. L'exemple 1 ci-dessous, dû à Wold et Juréen (1953, p. 102) construit dans le contexte du paradoxe de Giffen, a cette propriété (bien que l'ouvert $\Omega$ ne soit pas le même que dans la proposition).

2. L'hypothèse que l'ensemble $\Omega$ soit égal au quadrant positif joue un rôle crucial dans la démonstration de l'existence de l'ouvert non borné dont il est question. L'exemple 2 ci-dessous montre qu'elle est nécessaire.

3. Le problème de l'existence d'un ouvert partout dense dans $R^n_+$ soulevé dans la remarque 1 reste ouvert.

*Exemple 1*

Soit $u(x,y) = (x - 1) / (y - M)^2, x > 1, 0 < y < M$.

On a:

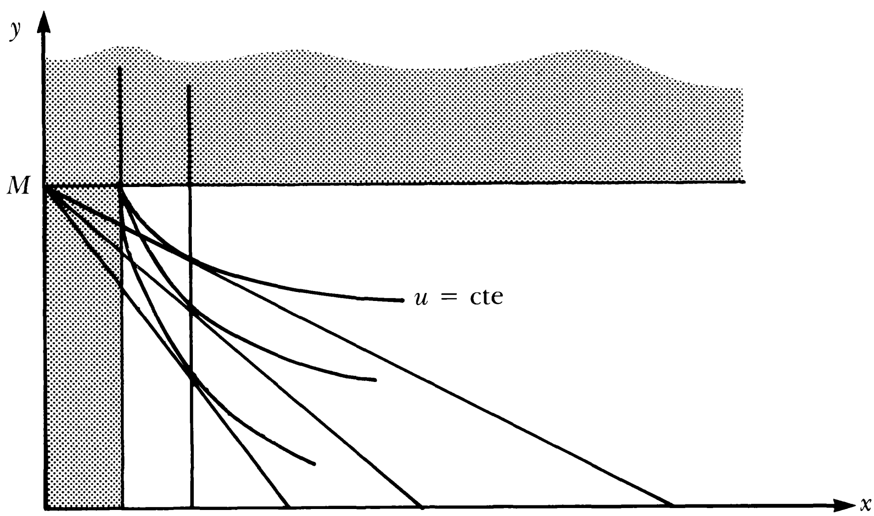
$$11. \quad \begin{cases} p(x,y) = (M - y)/2(x - 1) \\ r(x,y) = y + x(M - y)/2(x - 1) \end{cases}$$

et $\quad r_y = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

$F = \{(x,y) \in \Omega \mid x = 2\}$. $CF$ est un ouvert partout dans $\Omega$.

FIGURE 3

L'EXEMPLE DE WOLD ET JURÉEN



L'exemple suivant montre que la condition posée sur $\Omega$ dans l'énoncé de la proposition 3 ci-dessus est nécessaire.

*Exemple 2*

$u(x,y) = y\,x^{-1} + f(x)$, où $f'(x) > 0$, $2f'(x) + xf''(x) < 0$ et $\Omega = \{(x,y) \in R^2 \mid x > 0, y < x^2 f'(x)\}$. Alors:

$$12. \quad \begin{cases} p(x,y) = x\,f'(x) - y\,x^{-1} \\ r(x,y) = x^2\,f'(x). \end{cases}$$

Il est clair que $r_y = 0 \; \forall \; (x,y) \in \Omega$. Même si la condition $r_y \neq 0$ n'est pas nécessaire, ceci fournit un exemple de système mixte où le budget ne peut être substitué au numéraire (comme variable explicative dans un système inverse de demande).

Il existe une infinité de fonctions satisfaisant aux conditions ci-dessus, par exemple:

i) $f(x) = -Ax^{-\alpha}$, $A > 0$, $\alpha > 1$.

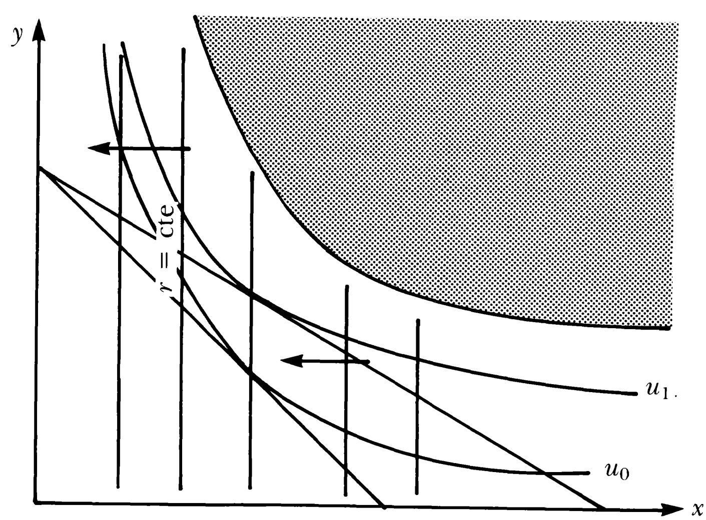
ii) $f(x) = \exp(-x^{-1}) - x^{-2}$.

Reprenons l'interprétation de Hicks en prenant, pour fixer les idées: $f(x) = 50\,x^{-2}$, alors:

$$13. \quad \begin{cases} p = 100\,x^{-2} - y\,x^{-1} \\ r = 100\,x^{-1} \end{cases}$$

FIGURE 4

COURBES DE NIVEAU DE LA FONCTION BUDGET



Lorsqu'il possède le panier (5,15), le consommateur est prêt à échanger toute (petite) quantité de numéraire contre une égale quantité de bien $x$. La « valeur » qu'il attribue à son panier est de 20 unités de numéraire.

Possédant le panier (5,10), il est prêt à échanger toute petite quantité de bien $x$ contre la quantité double de numéraire. Il attribue toujours la valeur 20 à ce panier.

Localisé au panier (5,5), le même échange pourra se faire pourvu qu'on lui propose trois fois plus de numéraire que de bien $x$. La valeur du panier est encore 20.

Plus la quantité de numéraire diminue dans le panier (5,$y$), plus il est prêt à en donner davantage pour acquérir du bien $x$... tout en attribuant toujours la même valeur au panier.

Remarquons enfin que, dans cet exemple, la demande s'exprime par :

$$14.\quad \begin{cases} x = 100/r, \\ y = r/100 - 100\,p/r. \end{cases}$$

L'élasticité de la demande (par rapport à son prix) pour le bien non numéraire est nulle et la demande pour le numéraire diminue lorsque le prix de l'autre bien augmente. On peut dire que plus le prix du bien $x$ augmente en termes de numéraire, plus la part du budget consacrée à l'acquisition de $x$ augmente, par conséquent, plus la part consacrée au numéraire diminue.

Enfin, l'élasticité du numéraire par rapport au budget n'est pas nulle, i.e. $y_r \neq 0$, alors que $r_y \equiv 0$.

L'exemple 3 illustre précisément la situation symétrique.

*Exemple 3*

Considérons $u(x,y) = y\,e^x$. On a :

$$15.\quad \begin{cases} p = y, \\ r = y(1 + x). \end{cases} \qquad \text{et,}$$

$$16.\quad \begin{cases} x = r/p - 1, \\ y = p. \end{cases}$$

*Remarques*

1. Les exemples 2 et 3 illustrent (de manière « duale ») l'existence d'un seul des deux systèmes mixtes désirés.

2. Dans l'exemple 2, le consommateur est saturé de bien $x$ sur la courbe $y = x^2 f'(x)$. En prenant $A$ et $\alpha$ très grands, on peut déplacer cette

courbe aussi loin que l'on veut. D'autre part, en modifiant un peu l'exemple de Wold et Juréen en posant :

$$u(x,y) = x/(y-N)^2,$$

on a toutes les propriétés de l'exemple 2 sans saturation, le niveau de vie du consommateur tend vers l'infini lorsque $y$ tend vers $N$ (qui peut être choisi arbitrairement grand).

3. Le lecteur vérifiera facilement comment les propriétés de nos exemples dépendent de la normalisation choisie.

## BIBLIOGRAPHIE

ANDERSON, R.W., 1980, « Some Theory of Inverse Demand for Applied Demand Analysis », *European Economic Review*, 14, 281-290.

BRONSARD, C. et LEBLANC, D. 1980, « Théorie générale du consommateur et applications », *Cahiers du groupe de mathématiques économiques*, 3, Université de Paris IV, juin.

CHAVAS, J.P., 1984, « The theory of Mixed Demand Functions », *European Economic Review*, 24, 321-344, North-Holland.

CHRISTENSEN, L.R. et MANSER, M.E., 1977, « Estimating U.S. Consumer Preferences for Meat with a Flexible Utility Function », *Journal of Econometrics*, 5, 37-53.

HICKS, J.R., 1956, *A Revision of Demand Theory*, Oxford University Press, London.

KATZNER, D.W., 1970, « Static Demand Theory ». Macmillan, London.

LAITINEN, K. et THEIL, H., 1979, « The Antonnelli Matrix is the Reciprocal Slustsky Matrix », *Economic Letters*, 3, 153-157.

SALVAS-BRONSARD, L., BRONSARD, C., LEBLANC, D., 1977, « Estimating Demand Functions : the Converse Approach », *European Economic Review*, 13, 25-42.

SAMUELSON, P.A., 1948, *Foundations of Economic Analysis*, Harvard, Cambridge.

———, 1960, « Structure of a Minimum Equilibium System », in Pfouts, *Essays in Economics and Econometrics*, University of North Carolina Press, Chapel Hill, N. C.

———, 1965, « Using full Duality to Show that Simultaneously Additive Direct and Indirect Utilities Implies Unitary Price Elasticity of Demand », *Econometrica*, 33, 781-796.

WAGNEUR, E., 1984, « Exogeneous vs Endogeneous Variables, A General Approach to Mixed Systems », Cahier du GERAD # G-84-08.

WOLD, H. et JURÉEN, 1973, *Demand Analysis*, Wiley, New York.