PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Escuela de Posgrado

Situaciones problema sobre sistemas de ecuaciones lineales para desarrollar el Razonamiento Algebraico Elemental en la Educación Básica Regular

Tesis para obtener el grado académico de Maestra en Enseñanza de las Matemáticas que presenta:

Vivian Bertha Andía Suárez

Asesor:
Dra. Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre

Lima, 2023

Informe de Similitud

Yo, Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor(a) de la tesis/el trabajo de investigación titulado “Situaciones problema sobre sistemas de ecuaciones lineales para desarrollar el Razonamiento Algebraico Elemental en la Educación Básica Regular”, de la autora Vivian Bertha Andía Suarez,dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 28%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 02/05/2023.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- Los porcentajes de similitud con casi todas las fuentes son menores a 1% y estas se deben a que es necesario emplear términos que son propios del área en la que se ubica el trabajo; en el caso en el que se reporte un porcentaje de similitud menor a 2% esto se debe a que se han hecho citas textuales tomadas de documentos oficiales como el Currículo Nacional.
- En todos los casos, las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha:

Lima, 25 de mayo del 2023.

Apellidos y nombres del asesor / de la asesora: Gaita Iparraguirre, Rosa Cecilia	
DNI: 07757120	Firma
ORCID: 0000-0002-7827-9262	

A mis hijos Ximena y Joaquín, quienes siempre serán mi motor y motivo para seguir adelante.

A mi esposo Juan Carlos por apoyarme incondicionalmente y alentarme a recorrer este gran camino vital para mi desarrollo profesional.

A mis padres, Bertha y Guido, por inculcarme valores y virtudes que contribuyeron en la formación de la persona que soy en la actualidad.

A mi hermana Geraldine por su constante apoyo y motivación sin condición para lograr mis objetivos.

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a mi asesora Cecilia Gaita por acompañarme y compartirme sus conocimientos para ejercer esta investigación. Gracias maestra, por su paciencia, comprensión y por la motivación que me brindó durante todo el trayecto para lograr culminarlo.

A Dr. Francisco Ugarte y Mg. Cintya Gonzales por dedicar su preciado tiempo para la revisión de esta investigación. Valoro cada uno de sus aportes y sus sugerencias, pues han sido ´de mucha utilidad para mejorar la presente tesis.

A mis profesores de la maestría por sus enseñanzas que han trascendido en mí para seguir desarrollándome profesionalmente.

A la universidad por abrirme las puertas de sus instalaciones para hacer posible mi desarrollo profesional con las enseñanzas adquiridas.

A Úrsula Asmad por su tolerancia y comprensión durante este camino de la maestría. Así como la constante motivación que me ofreció desinteresadamente y la confianza que puso en mí para lograrlo.

A la institución Innova Schools por ser parte de mi crecimiento profesional, por motivarme constantemente a trabajar y brindar una educación de calidad a todos nuestros niños y adolescentes.

Resumen

Esta tesis tiene como eje central justificar por qué las situaciones problemas sobre sistemas de ecuaciones lineales contribuyen a desarrollar el razonamiento algebraico elemental en estudiantes de la educación básica regular. De aquí se desprenden dos objetivos específicos que se pretenden alcanzar: identificar situaciones problemas sobre los sistemas de ecuaciones lineales que se abordan en la educación básica regular peruana y relacionar las prácticas matemáticas que estas demandan con los niveles de algebrización del modelo de razonamiento algebraico.

Para ello, se toman como base algunas herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción Matemática, tales como, las configuraciones epistémicas para construir el significado de referencia de los sistemas de ecuaciones lineales en la educación básica regular, así como, los niveles de razonamiento algebraico elemental los cuales son adaptados a la noción de sistemas de ecuaciones lineales.

Se concluye que, a lo largo de la educación básica, se presentan diversas situaciones problema en donde el objetivo es encontrar una cantidad desconocida, siendo el modelo matemático en que estas se apoyan el de una ecuación o un sistema de ecuaciones lineales. Dichas situaciones son abordadas a través de diferentes procedimientos tales como el ensayo y error, utilizando diferentes lenguajes como las representaciones icónicas, de barras, numéricas y algebraicas, así como diversas justificaciones apoyadas en definiciones y propiedades de las operaciones aritméticas y las ecuaciones equivalentes.

A partir de esos hallazgos, se establece una relación entre configuraciones epistémicas correspondientes a los sistemas de ecuaciones lineales y rasgos de diferentes niveles de razonamiento algebraico. De esta manera, se espera contribuir con la formación de profesores de matemáticas brindándoles ejemplos que puedan ser empleados en su quehacer docente para desarrollar el razonamiento algebraico en sus estudiantes a través de los distintos grados de la escolaridad.

Abstract

The present study aims to justify why problem situations on systems of linear equations contribute to the development of elementary algebraic reasoning in students of regular basic education. Two specific objectives that are intended to be achieved follow from here: identify problem situations on systems of linear equations that are addressed in regular Peruvian basic education and relate the mathematical practices that these demand to the algebraization levels of the algebraic reasoning model.

For this purpose, some theoretical tools of the Onto-semiotic Approach to Mathematics Instruction are taken as a basis, such as epistemic configurations to build the reference meaning of systems of linear equations in regular basic education, as well as levels of elemental algebraic reasoning which are adapted to the notion of systems of linear equations.

It is concluded that, throughout basic education, there are various problem situations where the objective is to find an unknown quantity, the mathematical model on which these are based being that of an equation or a system of linear equations. These situations are addressed through different procedures such as trial and error, using different languages such as iconic, bar, numerical and algebraic representations, as well as various justifications based on definitions and properties of arithmetic operations and equivalent equations.

These findings suggest that a relationship is established between epistemic configurations corresponding to systems of linear equations and features of different levels of algebraic reasoning. In this way, it is expected to contribute to the training of mathematics teachers by providing them with examples that can be used in their teaching performance to develop algebraic reasoning of their students in the different school grades.

Índice

Lista de tablas

Lista de figuras

Introducción

Nuestro interés por identificar cuáles son las situaciones problema que se proponen en la Educación Básica Regular (EBR) sobre sistemas de ecuaciones lineales, nace porque desde nuestra experiencia hemos podido evidenciar que, en las sesiones de aprendizajes y en diversos textos escolares oficiales y no oficiales de la educación secundaria peruana, al abordar el tema de los sistemas de ecuaciones lineales se plantean situaciones problemas que deben ser resueltos aplicando los métodos formales de resolución (igualación, sustitución y reducción), basándose solo en la representación simbólica y gráfica y que para los estudiantes resultan procedimientos difíciles de comprender.

Sin embargo, las situaciones planteadas también pueden ser resueltas utilizando otras estrategias propias del nivel educativo de la primaria, tales como el ensayo y error, así como, diferentes lenguajes como las representaciones icónicas, de barras, numéricas y algebraicas; y diversas justificaciones apoyadas en definiciones y propiedades de las operaciones aritméticas.

Por otro lado, nos interesamos también por determinar cómo se desarrolla el razonamiento algebraico a lo largo de la EBR peruana. Este razonamiento es entendido como una forma de pensar y actuar en matemáticas que pasa por los procesos de generalizar, simbolizar y operar con los símbolos, y que puede ser aplicado de manera transversal en áreas de la matemática, tales como la aritmética, la medida, geometría y análisis de datos (Godino, Castro, Aké, Wilhelmi, 2012). Para ello, tenemos que reconocer las prácticas algebraicas que se ponen en juego al resolver las diversas situaciones problemas, que se proponen a los estudiantes, a lo largo de la escolaridad referidos a un objeto algebraico en específico.

En ese sentido, al ser los sistemas de ecuaciones lineales considerados como objetos algebraicos, según el Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012), podemos afirmar que, en las prácticas matemáticas de los estudiantes al resolver problemas sobre los sistemas de ecuaciones lineales, podremos reconocer los rasgos del razonamiento algebraico tomando en cuenta las descripciones de los niveles del RAE.

A partir de todo lo mencionado, consideramos que los sistemas de ecuaciones lineales son un tema transversal que se puede abordar a lo largo de la escolaridad, e incluso puede servir como herramienta para trabajar situaciones problemas en otros contextos intramatemáticos y extramatemáticos, y que, a su vez, propicia el desarrollo del RAE. Por ello, es indispensable que el docente de matemática de primaria y secundaria tenga una mirada global y específica de cómo se aborda y progresa el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales en la EBR, de modo que le permita comprender qué tipos de situaciones problemas y estrategias de solución sobre

dicho objeto matemático acordes a cada grado debe ir planteando para contribuir al desarrollo del RAE en sus estudiantes desde edades tempranas.
Este trabajo tiene como objetivo identificar situaciones problemas sobre sistemas de ecuaciones lineales que contribuyan a desarrollar el razonamiento algebraico elemental en estudiantes de la educación básica regular. Para ello tomaremos como base los elementos teóricos y las herramientas que nos proporciona el Enfoque Ontosemiótico de la cognición y la instrucción matemática (EOS), tales como, las configuraciones epistémicas y los niveles de algrebrización del RAE.
La metodología que aplicamos para el presente trabajo es el de análisis de contenido de documentos como el Currículo Nacional (2016) y textos oficiales y no oficiales de la Educación Básica Regular para caracterizar el significado de referencia global de los sistemas de ecuaciones lineales en la Educación Básica Regular.

Este trabajo ha sido organizado del siguiente modo:

En el primer capítulo, se presentan en las antecedentes investigaciones sobre las concepciones del álgebra escolar a lo largo de los años hasta la actualidad, sobre el razonamiento algebraico elemental y las diferentes adaptaciones de los niveles de algebrización a distintos objetos algebraicos e investigaciones relacionadas a los sistemas de ecuaciones lineales. Asimismo, se presenta la justificación, los objetivos generales y específicos y los aspectos metodológicos que se consideraron en nuestro trabajo.

En el segundo capítulo, se define qué se entiende por sistemas de ecuaciones lineales, considerando los supuestos teóricos del EOS. Luego, se realiza un análisis de los libros de textos oficiales y no oficiales de la educación básica regular peruana, así como el currículo para identificar los tipos de situaciones problemas sobre sistemas de ecuaciones lineales. A partir de ello, se construyen las configuraciones epistémicas con las situaciones problema encontradas anteriormente, describiendo los objetos primarios que se ponen en juego al resolver dichas situaciones. De esta manera se construye el significado de referencia sobre los sistemas de ecuaciones lineales en la Educación básica regular.

En el tercer capítulo, se realiza la adaptación de los niveles de algebrización a los sistemas de ecuaciones lineales a partir del análisis de las configuraciones epistémicas propuestas en el capítulo anterior. Por último, se realiza un análisis de los estándares del Currículo Nacional Peruano, identificando y reconociendo cómo se abordan y progresan los aprendizajes sobre los sistemas de ecuaciones lineales en los distintos ciclos de la educación básica regular. Esto nos permitirá asociar a cada ciclo de la escolaridad con los niveles de algebrización y las configuraciones epistémicas sobre los sistemas de ecuaciones lineales.

Por último, se proponen algunas consideraciones finales en referencia a los antecedentes, a los objetivos planteados, a los elementos teóricos y metodológicos que hemos empleado en esta investigación. Asimismo, se proponen las perspectivas para futuros trabajos de investigación.

CAPÍTULO 1: DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN:

En este capítulo se presenta la problemática de la investigación, teniendo en cuenta los antecedentes que brindarán el soporte científico y permitirán justificar la importancia de este trabajo para la comunidad de investigadores en Educación Matemática. Finalmente, se propone la pregunta de investigación y se definen el objetivo general y los objetivos específicos de este trabajo.

1.1 Antecedentes

Esta investigación tiene como hipótesis el que los sistemas de ecuaciones lineales se pueden abordar de manera transversal a lo largo de la EBR y que, en ese proceso, se podría contribuir al desarrollo del razonamiento algebraico siendo indispensable para conseguir ese fin adoptar una postura al respecto, a lo que significa razonar algebraicamente y al rol que cumple el profesor en todo ese proceso. Por ello, en lo que sigue se presentarán resultados de investigaciones que han sido organizadas considerando cuatro aspectos importantes para nuestro objetivo. El primer grupo corresponde a trabajos en los que se discute qué se entiende por álgebra en la escuela. El segundo grupo de investigaciones se centra en la construcción de un modelo teórico que permite caracterizar el razonamiento algebraico en la escuela según el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS). El tercer grupo está conformado por aquellos trabajos en los que se han propuesto adaptaciones de los niveles de algebrización a diferentes objetos algebraicos, propuesto por el EOS. Por último, se presentan investigaciones relacionadas a nuestro objeto de estudio.

Investigaciones referidas a la concepción del álgebra escolar

Si bien en el campo matemático no hay discusión sobre lo que se entiende por álgebra, no sucede lo mismo cuando se emplea ese término en el nivel escolar. Desde la Didáctica de la Matemática no hay una única postura, pues esto se evidencia en las diversas investigaciones que se han desarrollado con el objetivo de definir qué se entiende por álgebra en el nivel escolar.

En la comunidad de Educación Matemática el problema del álgebra escolar ha sido un tema de interés, así lo demuestra el trabajo de Kieran (2006), en el que se organizan las diversas investigaciones realizadas entre 1997 y 2006 por los investigadores del “International Group of the Psychology of Mathematics Education” (PME), en relación con el aprendizaje y enseñanza del álgebra. Kieran (2006) explica en su trabajo cuáles han sido los focos de interés que se abordan en dichas investigaciones, organizándolas en tres grupos.

En un primer grupo se encuentran investigaciones cuyo énfasis estuvo en identificar las dificultades y errores que los estudiantes presentan en la transición de la aritmética al álgebra, al trabajar con variables, incógnitas, ecuaciones, en la resolución de ecuaciones y al resolver problemas de álgebra. Entre ellos se reconoce que un número significativo de investigaciones se enfocan en los procedimientos que los estudiantes realizan para resolver ecuaciones, sistemas de ecuaciones y desigualdades, utilizando diversos métodos y en los errores que ellos cometen. Encontraron que las dificultades que presentan los estudiantes de secundaria al transitar de la aritmética al álgebra se centran en la necesidad de manipular letras y dotar a esta actividad de significado, lo que supone un cambio notable con las convenciones usadas en la aritmética.

En la misma investigación se menciona a un segundo grupo de investigaciones que presentan un modelo alternativo en contraposición al de la aritmética generalizada y en el que se reconoce al álgebra como una actividad de generalización. Además, se focalizan en los objetos algebraicos tales como las funciones, así como en las múltiples representaciones y el uso de herramientas tecnológicas para la enseñanza del álgebra.

Kieran (2006) describe que un tercer grupo de trabajos de mediados de los años noventa tomaron la postura de que el álgebra podía ser accesible para los estudiantes desde los primeros niveles de la escolaridad, por ello, se centraron en el desarrollo del pensamiento algebraico en el nivel primaria (Early Algebra). En torno a esto, la autora propone que el pensamiento algebraico en los primeros grados involucra el desarrollo de formas de pensar al resolver actividades matemáticas que implican el análisis de relaciones entre cantidades, el estudio del cambio, la generalización, la resolución de problemas, el modelado, la justificación la demostración y la predicción, para las que el álgebra puede ser utilizada como una herramienta, mas no de manera formal.

En la misma línea, Kaput (2000) plantea la algebrización del currículo, lo que implica integrar el razonamiento algebraico en todos los grados y en todos los temas de matemáticas en la escuela. La propuesta busca insertar la enseñanza del álgebra desde la Educación Primaria, con el fin de promover el rol facilitador del álgebra en el quehacer matemático.

En el trabajo de Aké (2013) se menciona que autores como Carpenter y Levi y en documentos como los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares del NCTM se propusieron la introducción de modos de pensamiento algebraico desde los primeros cursos de la escuela elemental (Early Algebra) y se relaciona con la Algebrización del Currículo propuesta por Kaput.

La investigadora aborda las relaciones entre la aritmética y álgebra, describe cómo diversos autores consideran que el paso importante para que el estudiante aprenda álgebra es de la generalización de la aritmética al razonamiento algebraico, entendiendo que el álgebra es una aritmética generalizada.

Aké (2013) también afirma que otras investigaciones consideran que la generalización está en el centro del razonamiento algebraico. Además, la generalización a través de patrones y la modelización de funciones son una herramienta útil para introducir aspectos algebraicos en la educación elemental.

En la misma investigación se concluye que, ante la existencia de diversas posturas sobre el razonamiento o el pensamiento algebraico en la escuela primaria es necesario una propuesta que permita caracterizarlos. Asimismo, menciona que para algunas de estas posturas las descripciones del pensamiento algebraico y de la actividad algebraica pueden ser evidentes cuando se realizan actividades que impliquen la formación y manipulación de expresiones simbólicas, pero no cuando se tratan de actividades como modelización, resolución de problemas o con actividades típicas del “early algebra”. Por ello, es indispensable contar con un modelo comprensivo que permita articular coherentemente el currículo matemático escolar con los diferentes niveles escolares, de modo que faciliten el diseño de actividades instruccionales que favorezcan el surgimiento y el desarrollo del razonamiento algebraico.

La autora resalta la concepción del razonamiento algebraico propuesta desde la perspectiva del EOS, denominado Razonamiento Algebraico Elemental (RAE), como un modelo que aporta herramientas que permiten caracterizar el álgebra en términos de objetos y procesos algebraicos que intervienen en la práctica matemática.

Como vemos son diferentes las posturas que se han tomado en cuenta en las diversas investigaciones con respecto al álgebra escolar, asimismo, surge la necesidad por parte de la comunidad de investigadores en educación matemática de caracterizar y potenciar formas pensamiento algebraico en los primeros años de escolaridad, lo que requiere del desarrollo de una perspectiva más amplia sobre la naturaleza del álgebra escolar y del pensamiento algebraico en edades tempranas. En relación con esto, el EOS toma y adopta las posturas antes mencionadas, para plantear el modelo del RAE y posteriormente caracterizarlo en niveles de algebrización.

Investigaciones referidas al Razonamiento algebraico elemental según el Enfoque Ontosemiótico

Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012) describen las prácticas matemáticas que son consideradas algebraicas considerando las herramientas del Enfoque Ontosemiótico, propuesto por Godino (2002) y desarrollado por Godino et al. (2007), es decir, describiendo los tipos de objetos y procesos que intervienen en la actividad considerada como algebraica. Los autores nos brindan como una primera aproximación de tipos de objetos algebraicos primarios los siguientes:

1) Relaciones binarias – de equivalencia o de orden – y sus respectivas propiedades (reflexiva, simétrica, transitiva, antisimétrica, etc.)

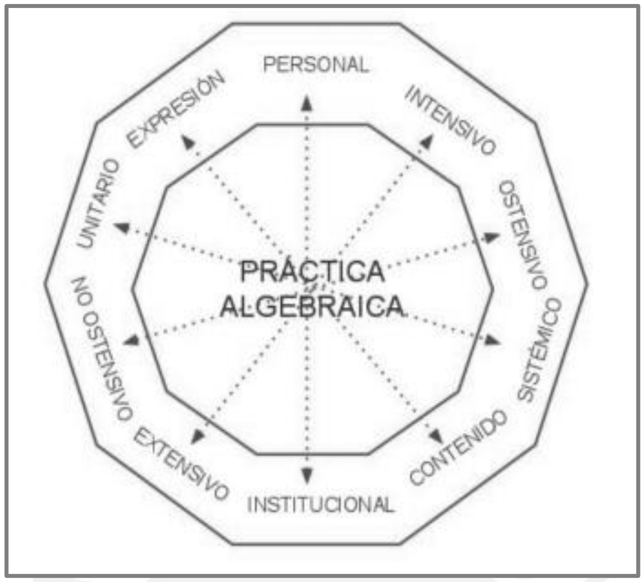
2) Operaciones y sus propiedades, realizadas sobre los elementos de conjuntos de objetos diversos (números, transformaciones geométricas, etc.). El denominado cálculo algebraico se caracteriza por la aplicación de propiedades tales como la asociativa, conmutativa, distributiva, existencia de elemento neutro y de un inverso. Pueden intervenir, también, otros conceptos tales como ecuación, inecuación, incógnita, así como procedimientos tales como eliminación, trasposición de términos, factorización, desarrollo de términos, entre otros.

3) Funciones, sus tipos, operaciones con funciones, y propiedades; funciones proposicionales (verdadero/falso); variables, fórmulas, parámetros.

4) Estructuras y sus tipos (semigrupo, monoide, semimódulo, grupo, módulo, anillo, cuerpo, espacio vectorial, etc.) propias del álgebra superior o abstracta. (Godino et. al, 2012, p.493)

Asimismo, las prácticas algebraicas se caracterizan por la presencia de dualidades, tal como se muestran en la Figura 1:

Figura 1. Dualidades de la práctica algebraica



Fuente. Tomado de Godino, Castro et al. (2012, p. 494)

Cabe señalar que, si bien estas dualidades intervienen en toda práctica matemática y dependen del contexto, para que una práctica matemática sea considerada como algebraica debe concederle una mayor importancia a la dualidad extensivo - intensivo (particular - general), y a los procesos asociados de particularización-generalización, pues el papel de la generalización es considerado como uno de los rasgos característicos del álgebra.

Así, se intenta definir el álgebra como una forma de pensar y actuar en matemáticas caracterizada esencialmente por la dialéctica entre los procesos de generalización–particularización, y por la intervención y emergencia de objetos intensivos de niveles progresivos de generalidad (Godino, Castor, Aké y Wilhelmi, 2012). El álgebra más que un instrumento de modelización y que un lenguaje simbólico, es una forma de pensar y actuar en matemáticas, una actitud a generalizar, y que recién en un nivel avanzado requiere de simbolizar y operar con símbolos, por lo que se puede trabajar de manera transversal en las diversas áreas de las matemáticas, incluso desde la primaria.

Posteriormente, en el trabajo de Godino, Aké y Gonzalo (2014) se menciona que es importante que el profesor de Educación Primaria conozca cómo se desarrolla el razonamiento algebraico de sus estudiantes, con la finalidad de que sea capaz de diseñar y seleccionar tareas matemáticas que permitan, progresivamente, el desarrollo de este razonamiento en la escuela primaria.

Es así que los investigadores tienen como objetivo plantear un modelo que ayude a reconocer las características algebraicas en la actividad matemática desarrollada por un estudiante ante una tarea. Para ello, proponen un modelo que consta de cuatro niveles iniciales de razonamiento algebraico, desde uno en el que no se reconocen rasgos del mismo (nivel 0) hasta un nivel en el que ya se identifican claramente los rasgos de un razonamiento algebraico (nivel 3). Dado que la adquisición de este razonamiento es gradual, consideran dos niveles intermedios, el nivel 1 donde se empiezan a identificar rasgos del RAE y el nivel 2 donde los rasgos son más evidentes. Dicho modelo permite identificar formas de razonamiento algebraico en las prácticas operativas y discursivas desarrolladas en la Educación Primaria.

Los autores mencionan que cuando los futuros maestros distinguen estos niveles desarrollan un sentido algebraico, lo que les permite reconocer rasgos en las prácticas matemáticas que realizan sus alumnos, sobre las cuales pueden intervenir para aumentar progresivamente el nivel de algebrización.

Godino, Aké y Gonzalo (2014), definen el sentido algebraico como la capacidad que tiene el sujeto para usar sistemáticamente símbolos para expresar cantidades indeterminadas y generalizaciones; reconocer y aplicar estructuras de los sistemas matemáticos, reconocer patrones, regularidades y funciones; y modelizar situaciones con expresiones simbólicas y operarlas. Este sentido se puede desarrollar en los niños por medio de actividades que parten de diferentes bloques de contenido (aritmética, geometría, etc), siempre que apunten a la generalización.

Posteriormente Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa (2015) articulan y extienden el modelo de los niveles de algebrización hacia el desarrollo del razonamiento algebraico en estudiantes de Educación Secundaria, reconociendo tres niveles adicionales propios de esta etapa educativa. El criterio que se toma en cuenta para estos tres niveles superiores es el uso de parámetros y su tratamiento, de manera que el primer encuentro con los parámetros lo vamos a relacionar a un cuarto nivel de algebrización, mientras que la realización de cálculos o tratamientos conjuntos con parámetros y variables a un quinto nivel. El estudio de estructuras algebraicas específicas lleva a reconocer un sexto nivel de algebrización de la actividad matemática.

Como es nuestro interés trabajar con los sistemas de ecuaciones lineales, considerados como objetos algebraicos (Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012), ya que se ubican en el grupo de estructuras, en donde además se estudian las operaciones y propiedades que estos poseen. Esto nos indica que en las prácticas de los estudiantes que se enfrentan al resolver situaciones problemas que implican sistemas de ecuaciones lineales se pueden reconocer rasgos del razonamiento algebraico, lo que permitirá identificar niveles de algebrización en el que se encuentran los estudiantes cuando aborden problemas con distintos procedimientos, algunos de ellos en lenguaje natural, numérico, icónico o simbólico.

Además, si bien es cierto que en el Diseño Curricular de la Educación Básica (MINEDU, 2016) no es explícito el trabajo con parámetros en el nivel secundaria, en muchas de las situaciones planteadas sobre sistemas de ecuaciones lineales se evidencian su uso, por lo que consideramos actividades sobre sistemas de ecuaciones lineales hasta el nivel 4, caracterizado por el empleo de parámetros.

Investigaciones sobre niveles de algebrización desde otra perspectiva.

Por otro lado, en el trabajo de Bolea (2002) se realiza un recuento de las investigaciones sobre el álgebra escolar y su evolución, considerando perspectivas conceptualistas, psicolingüísticas y el problema del significado. Asimismo, explica la postura desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) sobre qué es el álgebra escolar, el cual identifica un modelo epistemológico dominante en el que el álgebra se entiende como un instrumento aritmético generalizado. Frente a ello, proponen un modelo donde el álgebra es entendida como un instrumento de modelización. Tomando en cuenta ello, considera que el proceso de algebrización de una organización matemática se puede describir en tres etapas o niveles.

Así, en su trabajo de investigación la autora manifiesta la necesidad de adoptar un modelo del álgebra escolar, que se centre en los procesos de algebrización de organizaciones matemáticas escolares. Se proponen cuatro indicadores que permitirán analizar el grado de algebrización de una organización matemática, estos son:

- **Manipulación de la estructura global de los problemas.**

  Una organización matemática nace siempre como respuesta a cuestiones que dan lugar, progresivamente, a diferentes tipos de problemas. Un primer indicador del grado de algebrización de una organización está relacionado con la posibilidad de tomar en cuenta, describir y hasta manipular la estructura global de estos problemas (Bolea, 2002, p.86).

Esto quiere decir que a medida en que una organización matemática esté más algebrizada se tiende a tratar con tipos generales de problemas, en vez de tratar solo con problemas aislados.

En este primer indicador la autora manifiesta que para poder manipular la estructura global de los diferentes tipos de problemas es importante considerar, de manera progresiva, el uso sistemático de parámetros entendidos como objetos matemáticos conocidos, e incógnitas, entendidas como objetos matemáticos desconocidos.

- **Tematización de las técnicas y nueva problemática a nivel tecnológico.**

  Un segundo indicador del grado de algebrización de una organización matemática viene dado por la posibilidad de plantear y estudiar problemas relacionados con la descripción, la interpretación, la justificación, la producción y el alcance (o dominio de validez) de las técnicas que la integran. En particular, una organización matemática algebrizada debe permitir describir los tipos de problemas resolubles con determinadas técnicas, estudiar en qué condiciones un determinado tipo de problemas tendrá o no tendrá solución, en qué casos la solución será única, etc. (Bolea, 2002, pp.86-87).

Según la autora, una organización matemática algebrizada debe permitir caracterizar la estructura de soluciones de un tipo de problemas. Esto quiere decir que cuanto más algebrizada esté una organización será más sencillo plantear las condiciones de existencia de soluciones y no solo la determinación de una solución de un cierto tipo de problemas.

- **Unificación y reducción de los tipos de problemas, técnicas y tecnologías. Reducción de los elementos ostensivos.**

  El tercer indicador del grado de algebrización de una organización matemática viene dado por la mayor o menor unificación de los diferentes tipos de problemas que forman parte de la organización, así como por la mayor o menor integración de las técnicas correspondientes y de los elementos tecnológicos asociados. (Bolea, 2002, p. 87).

Además, Bolea (2002) argumenta que para que este indicador se considere significativo, la condición requerida es que la organización matemática evaluada sea suficientemente rica en el sentido de que incluya todo tipo de problemas y técnicas que hayan sido diferenciados desde un inicio. Cabe señalar que en términos de TAD, la autora manifiesta que este indicador no se puede aplicar a organizaciones matemáticas puntuales, sino que mínimamente deben tratarse de ser organizaciones matemáticas locales, debido a que surgen de la integración de un conjunto de tareas y técnicas que utilizan una tecnología en común.

- **Emergencia de tipos de problemas independientes del sistema modelizado.**

  El cuarto y último indicador del grado de algebrización de una organización matemática viene dado por la posibilidad de generar tipos de problemas cada vez más alejados del contexto del sistema cuyo modelo es la organización que estamos analizando. Cuanto más algebrizada está una organización matemática, más posibilidades tiene de independizarse del sistema que modeliza. (Bolea, 2002, p. 87).

Cabe aclarar que estos indicadores servirán para proponer niveles de algebrización que otorgan mayor o menor grado de algebrización a las organizaciones matemáticas, mientras que los niveles del razonamiento algebraico elemental, propuestos por el EOS, se asignan a la actividad matemática desarrollada por un estudiante entorno a los objetos y procesos propios de este campo. Dado que nuestra investigación se basará en el modelo del RAE propuesto por el EOS, con el fin de caracterizar los objetos y procesos algebraicos que intervienen en la actividad matemática, el término “nivel” que adoptaremos en nuestro trabajo será empleado en el sentido que se ha descrito desde el EOS, y no desde la TAD.

Si bien en los trabajos iniciales sobre el razonamiento algebraico elemental se definen de manera general los niveles de algebrización, hay intentos por ejemplificarlos con objetos particulares.

Investigaciones que adaptan el RAE para un determinado objeto matemático.

A continuación, presentaremos trabajos donde se adaptan el RAE y los niveles de algebrización para algunos objetos algebraicos.

Un aporte importante nos da el trabajo de Gaita y Wilhelmi (2019), quienes proponen indicadores que permiten analizar y valorar las prácticas matemáticas sobre tareas de construcción y análisis de patrones, clasificándolas según los niveles de algebrización, según se muestra en la tabla de la figura 2:

***Figura 2**. Niveles de algebrización en el desarrollo de tareas de construcción y análisis de patrones*

Nivel	Descripción del nivel en tareas de construcción y análisis de patrones
0	La determinación de casos particulares se realiza a partir de representaciones concretas y la descripción extensiva de las mismas. Los recuentos son explícitos, basados en cálculos numéricos o figuras. El análisis y discusión se realiza en lenguaje natural, numérico, icónico o gestual. Eventualmente, intervienen símbolos, que se refieren a objetos extensivos y suponen, en general, una forma abreviada de comunicar información, pero en ningún caso involucran la manipulación simbólica, abstracta o general.
1	La determinación de casos particulares se realiza a partir de representaciones concretas y la descripción extensiva de las mismas. A partir de recuentos explícitos, basados en cálculos numéricos o figuras, es posible determinar el valor de patrones específicos en función del lugar que ocupan en la serie, sin recurrir, nuevamente, al recuento efectivo ni a la representación del patrón completo (generalización cercana). El análisis y discusión se realizan en lenguaje natural, numérico, icónico o gestual, que incluye expresiones que se refieren a objetos generales y representan el caso general con un lenguaje no simbólico ni formal, pero necesariamente explícito. Eventualmente, se establecen relaciones entre figuras en la serie o propiedades del patrón.
2	La determinación de casos particulares se realiza a partir de representaciones concretas y descripción extensiva de las mismas. A partir de recuentos, basados en cálculos numéricos y representaciones gráficas, se determina el valor de patrones específicos en función del lugar que ocupan en la serie, representando el patrón completo. El análisis y discusión se realizan, en primer lugar, en lenguaje natural, numérico, icónico o gestual, y, en segundo lugar, se formaliza mediante símbolos, variables o parámetros, que refieren objetos generales y representan el caso general, que puede ser utilizado para la descripción del método de construcción del patrón. Se establecen relaciones entre figuras en la serie o propiedades del patrón, pero no se manipula para ello la escritura formal, si no que se interpreta ésta mediante lenguaje natural o numérico.
3	Se determina de la regla general y se expresa formalmente. Los casos particulares, a partir de representaciones concretas y descripción extensiva de las mismas, pueden aparecer en un análisis previo o como ejemplificación de la regla general. En casos simples, cuando la construcción efectiva es posible, eficaz y poco costosa, se puede optar por ella, pero, en general, el análisis y discusión se realizan, en primer lugar, en lenguaje simbólico literal formalizado, mediante símbolos, variables o parámetros, que refieren objetos generales y representan el caso general. Ocasionalmente, en segundo lugar, se utiliza un lenguaje natural, numérico, icónico o gestual en la descripción del método de construcción del patrón; este uso tiene una función comunicativa (reforzar una aseveración general, explícitamente formulada) o pedagógica (mostrar al docente el conocimiento extenso de la situación propuesta). Se establecen relaciones entre figuras en la serie o propiedades del patrón. Además, si es necesario, se manipula la escritura formal para obtener expresiones más simples, sin necesariamente analizar su relación con el método de construcción, centrándose el trabajo en la manipulación simbólico-literal.

Fuente. Tomado Gaita y Wilhelmi (2019, p.6)

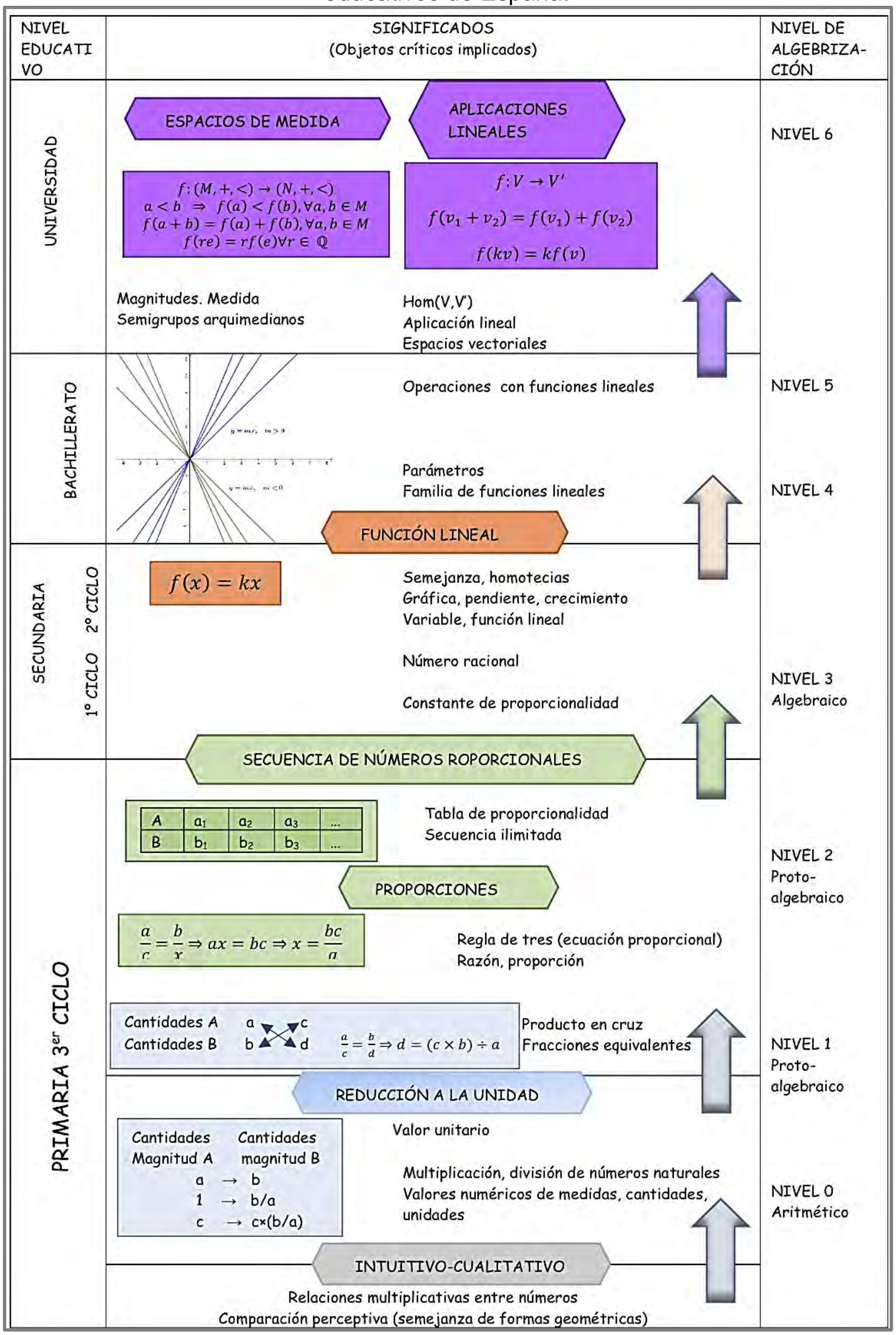
A partir de estos indicadores proponen un cuestionario con tareas de preguntas abiertas para reconocer los rasgos algebraicos que predominan en la práctica matemática de estudiantes egresados de la Educación Secundaria. Plantearon tareas que no implicaban simbolización, así como tareas que exigían identificar una regla de formación y su generalización. Esto permitiría clasificar las prácticas matemáticas en los distintos niveles de algebrización.

Gaita y Wilhelmi (2019) mencionan que cuando un sujeto es capaz de analizar y seleccionar sus procedimientos o estrategias de solución para adaptarlas y adecuarlas al resolver otras tareas de mayor demanda, muestra un pensamiento matemático flexible (PMF). En relación con el razonamiento algebraico elemental, los estudiantes que logren resolver tareas sobre patrones con métodos aritméticos y algebraicos, adecuándolos de acuerdo con la demanda de dichas tareas, demostrarán tener un PMF permitiendo evidenciar el progreso en los distintos niveles de algebrización. Por lo tanto, consideramos que es importante que el profesor de matemática sea consciente que no se trata de encasillar al estudiante en un nivel, sino que al reconocer los rasgos algebraicos de la práctica matemática de los distintos niveles puede proponer tareas que contribuyan al desarrollo del RAE en sus estudiantes.

De otro lado, Burgos y Godino (2020) realizan una extensión del trabajo sobre los niveles de algebrización en tareas de proporcionalidad elaborada por Burgos y Godino (2017). Uno de sus principales objetivos es presentar un análisis más elaborado y completo de los diversos significados de la proporcionalidad que se encontraron al revisar los diversos materiales de los distintos niveles educativos, haciendo uso de las herramientas del EOS y articularlos con los niveles de razonamiento algebraico, tal como se muestra en la figura 3:

Significados de la proporcionalidad según niveles de algebrización y niveles educativos de España.

Figura 3. Significados de la proporcionalidad según niveles de algebrización y niveles educativos de España.



Fuente. Tomado Burgos y Godino (2020, p.95)

Burgos y Godino (2020) mencionan que la visión global del significado de proporcionalidad propuesta por ellos puede ayudar a que el docente en formación de matemática supere la limitada comprensión que pueda tener en cuanto a la enseñanza de la proporcionalidad, la cual se puede basar en conocimientos procedimentales sin considerar su componente conceptual. Asimismo, el conocimiento y la comprensión del significado de referencia institucional de un objeto matemático por parte del docente de matemática, le permitirá no solo conocer el nivel que enseña, sino que también pueda articularlos con los niveles posteriores, de modo que comprenda cómo progresa el conocimiento de sus estudiantes con respecto a dicho objeto matemático en los diferentes niveles educativos.

En la misma investigación, los autores señalan que los niveles de algebrización permiten modelizar el conocimiento institucional en función de las prácticas operativas y discursivas que emergen al resolver problemas de proporcionalidad, describiendo la actividad matemática bajo la perspectiva de objetos y procesos característicos del álgebra, evidenciando que un mismo problema se puede abordar de diferentes maneras en un momento dado con niveles de algebrización diferentes en los distintos grados de la escolaridad.

Supo (2021), realiza una valoración de la propuesta educativa de los colegios peruanos Innova Schools en términos del Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) y su relación con la noción de linealidad. Para ello, teniendo en cuenta los elementos primarios de la configuración Ontosemiótica del EOS, adaptan el significado de referencia de la noción de linealidad para el nivel primario y secundario. Posteriormente, realiza una adaptación de los niveles de algebrización propuestos por Godino, Aké y Gonzalo (2014) en relación con los significados de la noción de linealidad, con la finalidad de contar con un instrumento de análisis y valoración de la actividad algebraica de los estudiantes al resolver tareas asociadas a dichos significados.

Con ambos elementos teóricos mencionados en el párrafo anterior, el autor analiza e identifica el significado pretendido por la institución sobre la linealidad a través de las situaciones-problemas que se plantean en las sesiones propuestas, materiales de trabajos y libros de textos desde el nivel primaria hasta secundaria. Por último, analiza las prácticas matemáticas que se ponen en juego al resolver dichas situaciones para determinar los niveles de del razonamiento algebraico teniendo como foco de atención la noción de linealidad y sus significados.

Para nuestra investigación, creemos que construir un significado de referencia institucional de los sistemas de ecuaciones lineales y luego organizar su aparición en los diferentes niveles educativos de la Educación Básica Regular, permitirá al docente de matemática tener una mirada más amplia sobre la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales, así como comprender los diversos significados que se pueden dar al resolver las situaciones problema que involucran dicho objeto matemático y no solo abordarlo desde su significado formal. Asimismo, adaptar los niveles de algebrización a los sistemas de ecuaciones lineales, supondrá al docente contar con una herramienta que le permitirá reconocer rasgos de un determinado nivel del RAE en las prácticas matemáticas que llevan a cabo sus estudiantes al resolver tareas sobre sistemas de ecuaciones lineales. Como consecuencia, podrá proponer actividades que ayuden a desarrollar el razonamiento algebraico elemental de sus estudiantes hacia niveles superiores.

Investigaciones sobre los sistemas de ecuaciones lineales

A continuación, presentaremos trabajos relacionados a con los sistemas de ecuaciones lineales desde perspectivas epistemológicas.

Campos (2017) propone un modelo epistemológico de referencia (MER) sobre los sistemas de ecuaciones lineales con la finalidad de que estos se conviertan en un instrumento de modelización algebraica en la educación secundaria peruana, teniendo en cuenta el modelo epistemológico de referencia adoptado en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) respecto al álgebra como instrumento de modelización.

Para lograr su objetivo la autora realiza una revisión de los libros de textos oficiales teniendo en cuenta el Currículo Nacional (2016) con la finalidad de proponer un MER que guarde relación con lo que efectivamente se trabaja en la Educación Secundaria. Concluye que los sistemas de ecuaciones lineales es un instrumento de modelización, pues permiten modelizar los diferentes tipos de tareas en diversos contextos de la matemática del nivel secundario, tales como: en la geometría analítica, en los problemas relacionados a las funciones, etc.

Para la construcción del MER propone un sistema inicial que puede ser modelizado a partir de una determinada situación problema, para el cual se describen las técnicas, tecnologías y teorías que se ponen en juego para su solución. Este sistema actuará como el sistema a modelizar; sin embargo, a través de la aparición de un problema nuevo que no puede ser resuelto con la técnica del sistema inicial, se propondrán otros modelos de sistemas con sus respectivas técnicas, tecnologías y teorías. De esa manera, se logrará ampliar la praxeología inicial por medio del proceso de modelización a través de los sistemas de ecuaciones lineales.

De este trabajo de investigación resaltamos la importancia de identificar el modelo o la estructura subyacente de un sistema de ecuaciones lineales en una determinada situación problema, ya que permite agrupar los tipos de situaciones problemas según el modelo o estructura que se pueda modelizar, así como, identificar qué lenguajes, conceptos, proposiciones o propiedades, procedimientos y argumentos se necesitan que se ponga en juego para su solución.

Desde otra perspectiva, en el trabajo de Cárdenas (2018) se buscó identificar el conocimiento didáctico matemático (CDM) que debería poseer el profesor de matemática de educación secundaria peruana, en relación con los sistemas de ecuaciones lineales. Para ello, construyó un significado de referencia institucional sobre los sistemas de ecuaciones lineales, el cual sirvió como insumo para la construcción de indicadores que permitan identificar cuáles son los conocimientos del profesor de matemática en las dimensiones matemática y didáctica, asociadas a dicho objeto en estudio.

Para la construcción del significado de referencia institucional, el autor se basa en el análisis de contenido de los textos escolares y no escolares, identificando los diversos objetos primarios que emergen de las prácticas matemáticas: situaciones - problemas, lenguajes, definiciones, procedimientos, propiedades y argumentos.

En cuanto a las situaciones-problema, el autor las clasifica en sistema de ecuaciones lineales como objeto y como herramienta. Con respecto a las situaciones como objeto realiza dos subclasificaciones, una referida a aquellas que requieren de un aprendizaje de las técnicas y la otra considera a las situaciones orientadas a analizar tipos de sistemas de ecuaciones lineales. Asimismo, las situaciones como herramienta se organizan según el contexto de la situación, las cuales pueden ser Intramatemáticos o Extramatemáticos, entendiendo que cuando hablamos de Intramatemático se refiere a aquellas situaciones relacionadas a la matemática que aparece en el Currículo Nacional (Perú, 2016) y que se encuentran en el ámbito aritmético, algebraico y geométrico; mientras que, cuando nos referimos al contexto Extramatemático se entiende por aquellas situaciones que aparecen el currículo peruano, pero pertenecen a otras áreas, tales como a la Física y Química.

Es de nuestro interés para esta investigación identificar las situaciones problema que involucran los sistemas de ecuaciones lineales, para ello nos apoyaremos del trabajo de Cárdenas (2018), pues tomaremos en cuenta algunas de las situaciones problema planteadas, así como los otros objetos primarios para construir un significado de referencia sobre sistemas de ecuaciones lineales en la educación básica regular peruana. Asimismo, nos apoyamos de esta investigación para justificar que los sistemas de ecuaciones lineales son un tema que se puede abordar de manera transversal a lo largo de la escolaridad y en diferentes contextos.

1.2 Justificación

Las investigaciones realizadas hasta el momento han reportado que no es trivial para los futuros profesores desarrollar y reconocer actividades que generan el razonamiento algebraico en sus estudiantes. Una de las causas de esta situación podría ser que en el currículo de formación inicial de profesores de matemática de nivel primaria y secundaria no se contemplan cursos que le permitan desarrollar su sentido algebraico y cómo propiciar el desarrollo del razonamiento algebraico en sus estudiantes. Podemos ver que, en los programas de estudios de diversas instituciones pedagógicas o universidades con carreras de Educación Matemática, se aborda el álgebra como un curso que trabaja el aspecto formal de la disciplina; sin embargo, no se aborda cómo desarrollar el razonamiento algebraico elemental.

En ese sentido, tal como menciona Aké (2013), “el desarrollo del razonamiento algebraico y de las competencias matemáticas de los alumnos dependerá de manera esencial de la formación de sus respectivos maestros” (p.71). Una de las sugerencias que nos brinda esta investigación es la implementación del desarrollo del razonamiento algebraico elemental en los currículos de formación de profesores de matemática, de tal manera que el maestro conozca los niveles de algebrización y ello le permita juzgar el carácter algebraico de las tareas y seleccionar aquellas que proporcione un grado de algebrización adecuado, con la finalidad de promover un desarrollo gradual del razonamiento algebraico en sus estudiantes.

En la misma línea, Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014), consideran que para desarrollar el pensamiento algebraico en estudiantes de primaria y mejorar el tratamiento del álgebra en secundaria, es importante que el profesor de matemática tenga una visión más amplia sobre el álgebra como la que proponen las diversas investigaciones y experiencias didácticas, a fin de que pueda ser capaz de plantear actividades que promuevan el sentido algebraico. Además, dichas actividades pueden partir desde otros bloques de contenido (aritmética, geometría, medida, etc.), de modo que apunten a la generalización, simbolización y cálculo analítico. Asimismo, a medida que el profesor de Educación Primaria conozca cómo se desarrolla el razonamiento algebraico en sus estudiantes, podrá ser capaz de diseñar y seleccionar tareas matemáticas que permitan desarrollar este razonamiento.

En la investigación de Godino, Aké, Contreras, Estepa, Fernandez, Neto y Lasa (2015) se proponen un trabajo exploratorio para evaluar el conocimiento didáctico-matemáticos sobre el razonamiento algebraico elemental (RAE), con la finalidad de caracterizar aspectos importantes de dicho conocimiento en maestros de formación. Para ello diseñaron un cuestionario en la que propusieron tareas sobre estructuras, funciones y modelización, las cuales presentan apartados centrados en la solución de una tarea matemática y otros apartados relacionados a los aspectos del conocimiento didáctico de los contenidos planteados.

Como resultado obtuvieron que los futuros maestros presentaban carencias en cuanto al conocimiento del razonamiento algebraico elemental, específicamente en el uso de incógnitas y variables, así como en la formulación de tareas sobre funciones.

Los autores consideran que la aplicación de este cuestionario puede servir como diagnóstico de los conocimientos didácticos de maestros en formación y, a partir de ello, diseñar acciones formativas de acuerdo con los resultados.

Como se evidencian en estas últimas investigaciones, los profesores de matemática en formación de educación primaria y secundaria requieren ampliar su visión sobre el álgebra y sobre cómo se desarrolla el razonamiento algebraico, ya que las evidencias muestran que solo la relacionan con la manipulación de expresiones simbólicas y la aplicación de técnicas o fórmulas, sin considerar el desarrollo el razonamiento algebraico elemental en sus estudiantes desde edades tempranas.

Frente a esta necesidad, es importante que el docente de matemática cuente con herramientas que le permitan reconocer los rasgos algebraicos en las prácticas matemáticas que se ponen en juego al resolver situaciones problemas que involucren distintos objetos algebraicos, de modo que le permita reconocer la progresividad de cómo se abordan dichos objetos y cómo estos pueden ir desarrollando el RAE a lo largo de las distintas etapas o niveles de la escolaridad.

En relación con el párrafo anterior, han surgido trabajos de investigación interesados por realizar la adaptación de los niveles de algebrización propuestos por el EOS a ciertos objetos algebraicos. Tal es el caso del trabajo de Gaita y Wilhelmi (2019), quienes hicieron la adaptación de los niveles del RAE referidos a los patrones, así como, Burgos y Godino (2020) quienes adaptaron los niveles de algebrización para la proporcionalidad y que se va desarrollando progresivamente a lo largo de la escolaridad. Por ello, consideramos pertinente que también se pueda realizar una adaptación de los niveles de algebrización a los sistemas de ecuaciones lineales, considerados como uno de los objetos algebraicos (Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012), de modo que permita al profesor en formación continua, a los futuros profesores y a los formadores de profesores de matemática identificar los rasgos y procesos algebraicos que intervienen en las prácticas matemáticas al resolver problemas sobre sistemas de ecuaciones lineales y distinguirlas considerando las características de los niveles de algebrización.

Además, consideramos importante que el docente comprenda cómo se desarrolla del RAE a lo largo de la escolaridad, dado que las diversas competencias propuestas en el Currículo Nacional (Perú, 2016) y, en particular, la competencia resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio se asocia al RAE. Cabe señalar que dicha competencia consiste en que el estudiante logre caracterizar equivalencias y generalizar regularidades y el cambio de una magnitud con respecto de otra, a través de reglas generales que le permitan encontrar valores desconocidos, determinar restricciones y hacer predicciones sobre el comportamiento de un fenómeno.

En relación a la pertinencia del tema en nuestro contexto educativo, los sistemas de ecuaciones lineales es un tema al que el Currículo Nacional hace referencia en el nivel 7 de los estándares de aprendizaje, así se describe en Perú (2016):

> Resuelve problemas referidos a analizar cambios continuos o periódicos, o regularidades entre magnitudes, valores o expresiones, traduciéndolas a sistema de ecuaciones lineales, ecuaciones y funciones cuadráticas y exponenciales. Evalúa si la expresión algebraica reproduce las condiciones del problema. Expresa su comprensión sobre la solución o conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales e inecuaciones; la diferencia entre una función lineal y una función cuadrática y exponencial y sus parámetros; las usa para interpretar enunciados o textos o fuentes de información usando lenguaje matemático y gráficos. Selecciona, combina y adapta variados recursos, estrategias y procedimientos matemáticos para solucionar ecuaciones lineales o cuadráticas, evalúa y opta por aquellos más idóneos según las condiciones del problema. Plantea afirmaciones sobre enunciados opuestos o casos especiales que se cumplen entre expresiones algebraicas; así como predecir el comportamiento de variables; comprueba o descarta la validez de la afirmación mediante contraejemplos y propiedades matemáticas (PERÚ, 2016, p.139).

Además, tal como lo menciona Cárdenas (2018) los sistemas de ecuaciones lineales son empleados en diversos contextos propios de las matemáticas y fuera de ella, lo que nos permite afirmar que es un tema transversal que se puede abordar en el ámbito aritmético, algebraico y geométrico, así como en otras áreas, tales como a la Física y Química.

En el trabajo de Ugarte, Da Silva y Gaita (2019) se evidencia que un grupo de profesores de Perú y Brasil utilizan diferentes técnicas (métodos; gráfico, igualación, sustitución y reducción, así como el ensayo y error, uso de determinantes, falsa suposición, etc.) para resolver un mismo problema sobre sistemas de ecuaciones; sin embargo, no logran justificar tales técnicas a través de un discurso tecnológico-teórico, ni encontrar una relación entre estas. Al revisar los textos escolares también encontraron que los problemas que se plantean sobre sistemas de ecuaciones están enmarcados en el uso de métodos de solución para resolver problemas sobre sistemas de ecuaciones lineales; sin embargo, carecen de actividades que propicien la justificación del porqué se utilizan cada uno de estos métodos de solución, así como actividades que requieran ser justificadas utilizando las propiedades de los sistemas de ecuaciones lineales.

A partir de la investigación de Ugarte, Da Silva y Gaita (2019), consideramos que el profesor de matemática de Educación Secundaria no solo debe conocer los métodos de resolución de los sistemas de ecuaciones lineales, sino que debe ser capaz de comprender que hay situaciones problema que se abordan en grados previos en las cuales se resuelven sistemas de ecuaciones lineales con otros procedimientos como la falsa suposición, el ensayo y error, etc., y empleando otras representaciones como las numéricas. Esto le permitirá al docente seleccionar los tipos de situaciones problemas que deberá plantearles a sus estudiantes de secundaria si quiere generar un razonamiento algebraico de un mayor nivel con respecto a los sistemas de ecuaciones lineales.

1.3 Pregunta y objetivos de la investigación

De lo anterior, se hace evidente la necesidad de brindar herramientas a los profesores de matemática en formación inicial y continua del nivel primario y secundario en la medida que les permitan reconocer y proponer tareas que involucran con el fin de promover el desarrollo del razonamiento algebraico en sus estudiantes a lo largo de la escolaridad.

Atendiendo a esa necesidad, nos formulamos la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué situaciones problemas, abordadas en diferentes grados de la educación básica, se resuelven empleando sistemas de ecuaciones lineales en algunos de sus diferentes significados y cómo se relaciona dicha práctica matemática con los rasgos descritos en el modelo de niveles del RAE?

En ese sentido, el objetivo general de nuestra investigación es:

Reconocer las potencialidades que tienen los problemas sobre sistemas de ecuaciones lineales para desarrollar el RAE a lo largo de la Educación Básica Regular.

Los objetivos específicos que se desprenden son los siguientes:

- Identificar y organizar situaciones problemas sobre los sistemas de ecuaciones lineales que se abordan en la educación básica regular peruana.
- Relacionar los niveles de algebrización del RAE en las prácticas matemáticas desarrolladas para resolver las situaciones problemas sobre sistemas de ecuaciones lineales.

1.4 Procedimientos metodológicos a emplear en la investigación

En esta investigación se pretende elaborar una herramienta que permita al profesor de matemática reconocer cómo trabajar de manera transversal los sistemas de ecuaciones lineales a lo largo de la educación básica regular y, a partir de ello, contribuir al desarrollo de razonamiento algebraico de sus estudiantes.

En este sentido, pasamos a detallar los pasos que seguiremos para alcanzar nuestro objetivo de investigación:

Paso 1: Definiremos qué se entiende sobre los sistemas de ecuaciones lineales apoyándonos de los supuestos teóricos que nos aporta desde el EOS. A partir de ello, pasaremos a identificar las situaciones – problemas en torno a la noción de los sistemas de ecuaciones lineales. Para ello, analizaremos el Currículo Nacional Peruano (2016), los cuadernos de trabajo y los textos escolares no oficiales que se utilizan desde el primer grado de primaria hasta el quinto grado de secundaria. Asimismo, se revisarán las distintas investigaciones producidas en la comunidad de investigadores en la didáctica de la matemática sobre el objeto matemático en estudio.

Paso 2: Se propondrá un significado de referencia para los sistemas de ecuaciones lineales. Para esto, utilizaremos la herramienta de las configuraciones epistémicas propuestas por el EOS, pues pasaremos a describir los objetos primarios, tales como, lenguajes, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos que se ponen en juego al resolver dichas situaciones problema. Para ello también nos basaremos en investigaciones como el de Cárdenas (2018), así como en otras en las que se haya estudiado los sistemas de ecuaciones lineales y su papel para desarrollar el RAE o la modelización algebraica.

Paso 3: Adaptaremos los niveles de algebrización propuestos por Godino, Aké et al. (2014) a las tareas relacionadas a los sistemas de ecuaciones lineales que se identificarán en la etapa anterior. Esta adaptación nos permitirá reconocer los rasgos algebraicos en aquellas tareas que estén relacionadas a los sistemas de ecuaciones lineales.

Paso 4: Articularemos las configuraciones epistémicas que construimos en el paso 2 con los niveles del RAE. Para esto lograremos identificar los rasgos algebraicos que emergen en las configuraciones epistémicas y lo asignaremos al nivel correspondiente.

Paso 5: Realizaremos un análisis de cómo se abordan los sistemas de ecuaciones lineales en el Educación Básica Regular al analizar los estándares de la competencia resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio en los distintos ciclos de la escolaridad.

A partir de ello, asociaremos cada ciclo con los niveles de algebrización y con las configuraciones epistémicas propuestas en nuestro significado de referencia sobre los sistemas de ecuaciones lineales.

En el siguiente capítulo se desarrolla el Paso 1 y Paso 2 de nuestro trabajo, es así que definiremos lo que se entiende sobre los sistemas de ecuaciones lineales apoyándonos de los supuestos teóricos que nos aporta desde el EOS. A partir de ello, propondremos un significado de referencia para los sistemas de ecuaciones lineales haciendo uso de la herramienta de las configuraciones epistémicas propuestas por el EOS.

CAPÍTULO 2: IDENTIFICACIÓN DE SITUACIONES PROBLEMA QUE INVOLUCRAN A LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

En el presente capítulo construiremos el significado de referencia de los sistemas de ecuaciones lineales en la educación básica regular, considerando los elementos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS). Para esto describiremos previamente los elementos teóricos y metodológicos que permitan alcanzar nuestro objetivo.

2.1 Los sistemas de ecuaciones lineales vistos desde el EOS

Se suele pensar que los sistemas de ecuaciones lineales aparecen como un tema que se aborda solo en la secundaria, esto es así si nos limitamos a su estructura formal, a la notación alfanumérica y a los métodos de solución que conocemos: sustitución, reducción, igualación, etc. Sin embargo, al posicionarnos en el enfoque del EOS, este nos permite entender a los sistemas de ecuaciones lineales desde una perspectiva más amplia, ya que el significado de dicho objeto trasciende del significado formal y se asocia a las prácticas matemáticas que emergen en la resolución de situaciones problema que implican sistemas de ecuaciones lineales. En base a ello, es posible determinar diversos significados que existen sobre este objeto. Con esta idea partimos de la hipótesis de que los sistemas de ecuaciones lineales se pueden abordar desde la educación primaria y para sustentarlo mencionaremos algunos de los supuestos teóricos que propone el EOS.

Según Godino, Batanero, Font (2019) la actividad de las personas para la resolución de problemas se considera el elemento central en la construcción del conocimiento matemático. Cuando una persona resuelve una situación problema pone en juego un sistema de prácticas que dan solución a la situación planteada. El EOS considera como práctica matemática a "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1998, p. 182). En cuanto al objeto matemático, el EOS lo determina como cualquier entidad material o inmaterial que interviene en la práctica matemática, apoyando y regulando su realización.

El significado es el sistema de prácticas, el que realiza una persona (significado personal), o compartidas en el seno de una institución (significado institucional) para resolver un tipo de situaciones problema en las cuales interviene el objeto matemático. En la figura 4 se muestra la tipología básica de significados propuesta por el EOS:

Figura 4. Tipos de significados institucionales y personales.

Fuente. Tomado Godino et al (2007, p.6)

Los significados personales propuestos son:

- Global: Se refiere a la totalidad del sistema de prácticas personales del sujeto con respecto a un objeto matemático.
- Declarado: Se refiere al sistema de prácticas respecto a una evaluación propuestas por la institución, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.
- Logrado: Corresponde a las prácticas expresadas de acuerdo con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales es interesante tener en cuenta los significados previos de la persona.

Los significados institucionales propuestos son:

- Referencial: Sistema de prácticas que sirve como referencia a la institución para elaborar el significado pretendido. Este significado exige de un estudio histórico y epistemológico sobre el origen y evolución del objeto considerado, así como la consideración de los diversos contextos en las que está inmerso dicho objeto.
- Pretendido: Sistema de prácticas que planifica la institución en un proceso de estudio.

- Implementado: Sistema de prácticas implementadas efectivamente por el docente en un proceso de estudio específico.
- Evaluado: Sistema de prácticas utilizado por el docente para evaluar los aprendizajes.

Considerando estas definiciones, el significado de un objeto matemático queda determinado por el sistema de prácticas asociadas a este.

En relación con nuestra investigación, revisaremos diversos materiales educativos (libros de textos, sesiones de aprendizaje, etc.) y el currículo Nacional de la Educación Básica Regular para analizar los significados institucionales pretendidos sobre los sistemas de ecuaciones lineales; asimismo, consideraremos otros trabajos de investigación en torno a dicho objeto matemático en estudio. A partir de los hallazgos encontrados, realizaremos la propuesta de un significado de referencia sobre los sistemas de ecuaciones lineales en la EBR peruana. Esto implica que la definición sobre los sistemas de ecuaciones lineales no solo se limita al concepto formal, sino que dependerá de los diferentes tipos de prácticas operativas y discursivas que se evidencian en la resolución de problemas para determinar los diferentes significados de dicho objeto matemático.

Para realizar el análisis del sistema de prácticas que emergen al resolver las situaciones problemas sobre los sistemas de ecuaciones lineales y determinar los diversos significados mediante el significado institucional sobre dicho objeto matemático en la EBR, tomaremos en cuenta los elementos primarios de la Configuración Ontosemiótica del EOS:

- Situaciones – problemas (aplicaciones extra o intramatemáticos, ejemplos, ejercicios, tareas, …)
- Lenguajes (términos, expresiones, notaciones, gráficos, …) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, simbólico…) para referirse al objeto matemático.
- Conceptos (que son introducidos mediante definiciones o descripciones)
- Proposiciones (enunciados sobre conceptos)
- Procedimientos (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, …)
- Argumentos (enunciados usados para validar un procedimiento o proposición)

Estos elementos primarios permitirán construir configuraciones para analizar las prácticas matemáticas que pone en juego un sujeto al resolver situaciones problemas sobre sistemas de ecuaciones lineales.

Para construir el significado de referencia sobre los sistemas de ecuaciones lineales en la EBR peruana y sus diferentes configuraciones, plantearemos qué se entiende por los sistemas de ecuaciones lineales desde el EOS:

Cualquier práctica que realiza una persona (significado personal), o compartidas en el seno de una institución (significado institucional) para resolver un tipo de situaciones-problemas, la cual tiene como característica brindar información sobre valores o datos conocidos, valores desconocidos (incógnitas). La situación plantea la necesidad de determinar valores desconocidos (incógnitas) y contiene suficiente información para establecer relaciones de igualdad (implícitas o explícitas) lineales entre los datos e incógnitas. Por otro lado, sobre las incógnitas y los datos se debe cumplir lo siguiente:

- Entre los datos conocidos pueden realizarse operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división.
- Entre las incógnitas pueden realizarse operaciones de adición y sustracción. Sin embargo; no se pueden realizar multiplicaciones ni divisiones entre ellas.
- Las incógnitas pueden multiplicarse por una constante o un determinado valor.
- Una vez que se encuentren las incógnitas estas toman valores numéricos particulares o se expresan en términos de parámetros.

Considerando esta definición sobre los sistemas de ecuaciones lineales, realizaremos una búsqueda de situaciones problema cuyo objetivo sea hallar un valor desconocido y que en las prácticas operativas y discursivas que emerjan al resolverlas cumplan con los requisitos descritos.

Dado que el significado del objeto matemático en los sistemas de ecuaciones lineales puede variar según la institución, la construcción del significado de referencia institucional se hará a partir del análisis de textos escolares empleados en la EBR peruana en instituciones educativas públicas y privadas.

2.2 Identificación y organización de situaciones problema sobre sistemas de ecuaciones lineales

Para realizar la identificación de las situaciones problema sobre los sistemas de ecuaciones lineales se van a analizar los cuadernos de trabajo de la EBR, así como los textos escolares no oficiales. Asimismo, se realizará una revisión exhaustiva de las sesiones de aprendizaje de los Colegios de Innova Schools y libros de matemática propios de la propuesta Singapur para el docente.

En la siguiente tabla se muestran los textos a analizar para la identificación de las situaciones problema sobre sistemas de ecuaciones lineales:

Tabla 1

Material bibliográfico para identificar situaciones problema que involucran sistemas de ecuaciones lineales

N°	TÍTULO	AUTOR	TIPO	EDITORIAL	AÑO
1	Cuaderno de trabajo para primer grado de Educación Primaria 2020	Ríos Ortega, Blanca Patricia Fabiola Sánchez Pérez	Texto escolar oficial de nivel primario	MINEDU	2019
2	Cuaderno de trabajo para segundo grado de Educación Primaria 2020	Ríos Ortega, Blanca Patricia Fabiola Sánchez Pérez	Texto escolar oficial de nivel primario	MINEDU	2019
3	Cuaderno de trabajo para tercer grado de Educación Primaria 2020	Ríos Ortega, Blanca Patricia Fabiola Sánchez Pérez	Texto escolar oficial de nivel primario	MINEDU	2019
4	Resolvamos problemas 1, Secundaria: cuaderno de trabajo de Matemática 2020.	Larisa Mansilla Olber Muñoz Juan Carlos Chávez Hugo Támara Hubner Cristóbal Enrique García	Texto escolar oficial de nivel secundario	MINEDU	2019
5	Resolvamos problemas 4, Secundaria: cuaderno de trabajo de Matemática 2020.	Larisa Mansilla Olber Muñoz Juan Carlos Chávez Hugo Támara Hubner Cristóbal Enrique García	Texto escolar oficial de nivel secundario	MINEDU	2019
6	Resolvamos problemas 5, Secundaria: cuaderno de trabajo de Matemática 2020.	Larisa Mansilla Olber Muñoz Juan Carlos Chávez Hugo Támara Hubner Cristóbal	Texto escolar oficial de nivel secundario.	MINEDU	2019

		Enrique García			
7	Piensa Infinito 1º. Matemáticas Metodología Singapur	Ban, Har Yeap	Texto escolar no oficial de nivel primario.	SM	2021
8	Piensa Infinito 2º. Matemáticas Metodología Singapur	Ban, Har Yeap	Texto escolar no oficial de nivel primario.	SM	2021
9	Piensa Infinito 3°. Matemáticas Metodología Singapur	Ban, Har Yeap	Texto escolar no oficial de nivel primario	SM	2021
10	Piensa Infinito 4°. Matemáticas Metodología Singapur	Ban, Har Yeap	Texto escolar no oficial de nivel primario	SM	2021
11	Matemática 5 Proyecto Savia	SM	Texto escolar no oficial de nivel primario	SM	2021
12	Matemática 6 Proyecto Savia	SM	Texto escolar no oficial de nivel primario	SM	2021
13	Sesiones de aprendizaje Primaria y Secundaria	Teacher Resource Center Innova Schools (TRC)	Fichas de trabajo	TRC Innova Schools	2021
14	Matemática 2	Santillana	Texto escolar no oficial de nivel secundario	Santillana	2013
15	Matemática 4	Santillana	Texto escolar no oficial de nivel secundario	Santillana	2013
16	Matemática 5	Santillana	Texto escolar no oficial de nivel secundario	Santillana	2013
17	Currículo Nacional de la Educación Básica regular	MINEDU	Documento oficial de educación primaria y secundaria	MINEDU	2016
18	Bar Modeling; A problem-solving Tool.	Ban, Har	Texto para el docente	Marshall Cavendish Education	2010

Nota/Fuente. Elaboración propia.

A continuación, detallamos las consideraciones sobre la elección de los libros para la búsqueda de situaciones problema que involucran sistemas de ecuaciones lineales:

- Los textos escolares del 1 al 6, son textos oficiales de la educación básica regular peruana, los cuales se encuentran en la web y son de libre acceso. Las actividades de aprendizaje planteadas en estos cuadernos de trabajo están enmarcadas en los lineamientos del Currículo Nacional (PERÚ, 2016) para el área de Matemática.
- Del 7 al 10 (Piensa Infinito 1,2, 3 4) son textos escolares no oficiales, los cuales son utilizados por los colegios Innova Schools. Son elaborados por editoriales privadas que responden a la propuesta de dicha institución educativa para los cuatro primeros grados de primaria, pues en estos grados se trabaja con la metodología Singapur, pero sin dejar de lado las exigencias del Currículo Nacional (PERÚ, 2016) para el área de Matemática.
- Los libros de Matemática de los puntos 11 y 12, son para quinto y sexto grado de primaria del proyecto Savia, también son textos escolares no oficiales utilizados por los colegios Innova Schools, las cuales responden a las exigencias del currículo de dicha institución, así como las del Currículo Nacional (PERÚ, 2016).
- En la posición 13 se presentan las sesiones de aprendizaje de los colegios Innova Schools, las cuales son parte de una herramienta para el docente, exclusiva de dicha institución. En dichas sesiones podemos encontrar las diversas situaciones que se proponen a los estudiantes para la clase. Debido a que en los colegios Innova Schools no se utilizan libros para el nivel secundario, se realizará una revisión de las actividades que se proponen en las sesiones de clases sobre los sistemas de ecuaciones lineales. Cabe mencionar que el Currículo de dicha Institución Educativa está articulada a las competencias y capacidades que el Currículo Nacional (PERÚ, 2016) propone para el área de Matemática.
- Del 14 al 16 se mencionan los libros de Matemática de la editorial Santillana, los cuales son textos escolares no oficiales empleados en diversas instituciones educativas privadas en el nivel secundario. Dichos textos también responden a las exigencias del Currículo Nacional, e incluso incorporan más temas de los que se espera para cada grado.
- El Currículo Nacional es un documento oficial que sirve como guía para el docente, pues muestra las competencias que se abordan en el área de matemática y cómo progresan a lo largo de la escolaridad mediante la descripción de los estándares

que se plantean por cada ciclo escolar. Este recurso permitirá reconocer, implícita y explícitamente, cómo se trabajan los sistemas de ecuaciones en la educación básica regular.

- El último texto presentado en la tabla es un recurso para el docente de matemática, en el cual se presentan diversas situaciones problemas sobre estructuras aditivas y multiplicativas que se pueden resolver utilizando la estrategia del modelo de barras del método Singapur, por lo que el maestro puede decidir cuál de estas puede plantear a sus estudiantes según el grado y el objetivo que desea alcanzar. Este texto ha sido elaborado por una editorial extranjera, por lo que es usado en diferentes países.

Para proceder a identificar las situaciones problemas que involucran a los sistemas de ecuaciones lineales en la EBR, tomaremos como referencia el trabajo de Campos (2017), quien propuso un modelo epistemológico de referencia sobre los sistemas de ecuaciones lineales como instrumento de modelización en la educación secundaria. A fin de alcanzar su objetivo, realiza una breve revisión de los libros de textos oficiales e identifica diversas situaciones problemas relacionadas directa e indirectamente a los sistemas de ecuaciones lineales. Luego, agrupa dichos problemas considerando el modelo general de sistemas de ecuaciones con el que se representan y las técnicas que se utilizan para resolverlas, formando así diferentes organizaciones matemáticas. Con esto concluye que dicho objeto matemático funciona como instrumento para modelizar los diferentes tipos de tareas en los diversos ámbitos de la matemática del nivel secundario.

Para efectos de nuestra investigación, hemos incluido parte del proceso que realizó Campos (2017) para identificar las situaciones problemas sobre sistemas de ecuaciones lineales, pero en nuestro caso será considerando los textos elegidos de la EBR. Además, tomamos en cuenta que dichas situaciones problema cumplan con las características de la definición que propusimos sobre los sistemas de ecuaciones lineales desde el EOS.

Al analizar cada uno de los textos mencionados logramos reconocer los diferentes temas en los que aparecen, de manera implícita o explícita, un sistema de ecuaciones lineales. Con respecto a la revisión de los textos que corresponden a la educación secundaria, la identificación de situaciones problema sobre sistemas de ecuaciones lineales fue más inmediato, pues estas no solo presentaban las características que definimos para este tipo de situaciones, sino que de manera explícita se evidenciaba el uso de los sistemas de ecuaciones lineales.

En cambio, tuvimos dificultades para identificar las situaciones problema sobre los sistemas de ecuaciones lineales en los libros de educación primaria, pues no aparece un título explícito o una sección en la que se aborden los sistemas de ecuaciones lineales. Por ello, tuvimos que revisar todas las situaciones relacionadas a otros temas, que no necesariamente estén vinculadas a la competencia de regularidad, equivalencia y cambio, pero que sí cumplan con las características propuestas de acuerdo con la definición que tomamos en cuenta sobre el objeto matemático. Al seguir este proceso, logramos identificar situaciones problema que involucran los sistemas de ecuaciones lineales en los libros de nivel primaria y en las fichas de trabajo que se proponen en las sesiones de aprendizaje de 3° a 6° de primaria en los colegios Innova Schools, así como en el libro de Ban (2010). Sin embargo, no logramos identificar dichas situaciones en los cuadernos de trabajo de matemática propuestos por el Ministerio de Educación.

Dado que el término "sistema de ecuaciones lineales" no está explícito en la mayoría de las situaciones problemas que identificamos en los diversos textos de los distintos grados de la EBR, es necesario hacer evidente el planteamiento del sistema de ecuaciones que subyace del modelamiento de dichas situaciones, al cual denominaremos sistema subyacente.

Siguiendo el trabajo de Campos (2017), al determinar los sistemas que emergen de cada situación problema se puede evidenciar que algunas estas tienen un sistema subyacente con la misma estructura, lo cual nos servirá como criterio para organizar dichas situaciones. En la tabla 2, se muestra la organización de los ejemplos de situaciones problema que se identificaron, de acuerdo con el sistema subyacente que se pueden modelar:

Tabla 2

Organización de las situaciones problema que involucran sistemas de ecuaciones lineales en la educación básica regular, según el sistema subyacente:

Estructura subyacente	Grados en el que se encuentran	Temas en el que se aborda

<table>
<tr>
<td>

1. Las estructuras subyacentes a este tipo de situaciones problema son:

$$\begin{cases} AX + Y + C = 0 \\ Y + F = 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} AX + Y + C = 0 \\ X + F = 0 \end{cases}$$

Donde $A, C\ y\ F \in \mathbb{N}$ y son valores conocidos, $A \neq 0$.

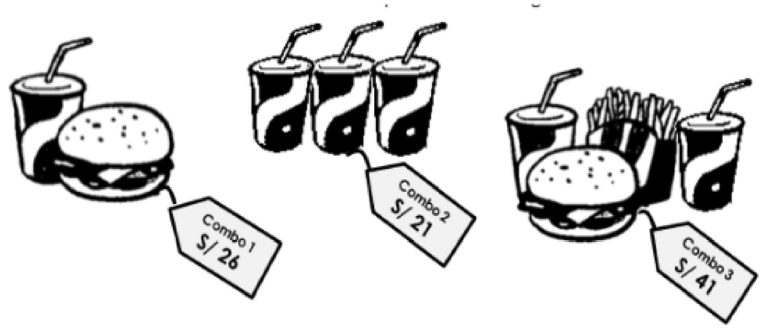
$$\begin{cases} AX = B \\ X + Y = C \\ DX + Y + EZ = F \end{cases}$$

Donde $A, B, C, D, E\ y\ F \in \mathbb{N}$ y son valores conocidos. Además, $A, D\ y\ E$ son distintos a cero.

Ejemplo de situación problema:

Figura 5. *Situación problema 1*

Carolina es la dueña de un restaurante que ofrece los siguientes combos:



Si Carolina quiere armar el combo 4 con solo una hamburguesa y dos paquetes de papas fritas, ¿cuánto más cobraría en el combo 4 que en el combo 1?

Fuente. Tomado de Teacher Resource Center, s.f.
https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

</td>
<td>Esta situación se plantea para estudiantes de 2° y 3° de primaria.</td>
<td>Se propone para trabajar el tema de Problemas aditivos y multiplicativos con números naturales.</td>
</tr>
</table>

2. Esta situación problema permite establecer un sistema de ecuaciones con la siguiente estructura: $\begin{cases} X + Y = A \\ BX + CY = D \end{cases}$ Donde $A, B, C \ y \ D \in \mathbb{N}$ y son valores conocidos , $B \neq 0 \ y \ C \neq 0$ **Ejemplo de situación problema:** **Figura 6.** *Situación problema 2* Romina visitó el zoológico y le cuenta a su mamá lo siguiente: "Mamá en el zoológico he contado 20 pares de ojos y 56 patas entre leones y pingüinos. ¿Me puedes decir cuántos pingüinos vi?" *Fuente.* Tomado de SM (2021, p.35)	Esta situación se plantea para estudiantes de 2° y 3° de primaria.	Se propone para trabajar el tema de Problemas aditivos y multiplicativos con números naturales.
3. La estructura subyacente a este tipo de situaciones es: $\begin{cases} X + Y = A \\ X + Z = B \\ Y + Z = C \end{cases}$ Donde $A, B \ y \ C \in Q^{+}$ y son valores conocidos **Ejemplo de situación problema:** **Figura 7.** Situación problema 3 Cuatro pueblos están conectados por tres caminos como se muestra en la figura: La distancia entre el Pueblo A y el Pueblo C es de 46 km en la imagen. La distancia entre el Pueblo B y el Pueblo C es de 64 km en la imagen. La distancia entre el Pueblo A y el Pueblo B es de 40 km en la imagen. Encuentra la distancia entre: a) el Pueblo D y el Pueblo A b) el Pueblo D y el Pueblo B c) el Pueblo D y el Pueblo C  *Fuente.* Adaptado de Ban (2010, p.26)	Se aborda en 6° de primaria. En 1° de secundaria. En 2° de secundaria,	Problemas aditivos y multiplicativos. Problemas aditivos y multiplicativos sobre distancias. Sistemas de ecuaciones lineales.

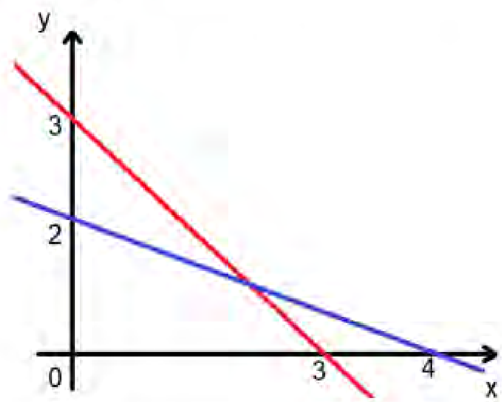
4. Las estructuras subyacentes de esta familia de situaciones problema son: $$\begin{cases} AX + BY = C \\ DX + EY = F \end{cases}$$ Donde: $C, F \in R$ y son valores conocidos. Además, $A, B, D \ y \ E \in R - \{0\}$ $$\begin{cases} AX + BY + CZ = D \\ EX + FY + GZ = H \\ IX + JY + KZ = L \end{cases}$$ Donde $D, H, L \in R$ y son valores conocidos. Además, $A, B, C, E, F, G \in R - \{0\}$ **Ejemplo de situación problema:** **Figura 8.** *Situación problema 4* **Resuelve el siguiente sistema** $\begin{cases} 2x - 5y = -12 & ① \\ 4x + 3y = 2 & ② \end{cases}$ *Fuente*: Tomado de Santillana (2013, p.218)	Para estudiantes de 2°, 3°, 4° y 5° de secundaria.	Sistemas de ecuaciones lineales.
5. Este tipo de situaciones problema permite establecer un sistema de ecuaciones con la siguiente estructura: $$\begin{cases} AX + BY = C \\ DX + EY = F \end{cases}$$ Donde: C, F $\in R$ y son valores conocidos. Además, $A, B, D \ y \ E \in R - \{0\}$ **Ejemplo de situación problema:**	Para estudiantes de 2°, 3°, 4° y 5° de secundaria.	Porcentajes y sistemas de ecuaciones lineales.

Figura 9. *Situación problema 5* Un técnico laboratorista requiere preparar 100ml de solución azucarada al 50% utilizando soluciones al 35% y 60%. ¿Qué cantidad de cada una de estas soluciones deberán mezclarse para obtener la concentración deseada? *Fuente*: Tomado de Mansilla (2019, p.31)		
6. Esta situación problema permite establecer un sistema de ecuaciones con la siguiente estructura: $\begin{cases} AX + BY = C \\ DX + EY = F \end{cases}$ Donde: $C, F \in Z$ y son valores conocidos. Además, $A, B, D\ y\ E \in \mathbb{Q} - \{0\}$ **Ejemplo de situación problema:** **Figura 10.** *Situación problema 6* Grafica los siguientes sistemas de ecuaciones lineales e identifica a qué tipo pertenecen. a. $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + 2y = 20 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x + y = 7 \\ -x - y = 9 \end{cases}$ *Fuente*: Adaptado de Santillana (2013, p.214)	Para 2°, 3°, 4° y 5° de secundaria.	Problemas analíticos sobre sistemas de ecuaciones lineales
7. Esta situación problema permite establecer un sistema de ecuaciones con la siguiente estructura: $\begin{cases} AX + BY = C \\ DX + EY = F \end{cases}$ Donde $X, Y, C\ y\ F \in R$. Además, $A, B, D\ y\ E \in R - \{0\}$ **Ejemplo de situación problema:**	Para 2°, 3°, 4° y 5° de secundaria.	Sistemas de ecuaciones y funciones lineales.

<table>
<tr>
<td>

Figura 11. *Situación problema 7*

Ayuda a María a determinar el sistema de ecuaciones que se representa en la siguiente gráfica y a encontrar el conjunto solución:



Fuente. Tomado de Teacher Resource Center, s.f. https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>

8. La estructura subyacente a esta situación es:

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ DX + EY = F \end{cases}$$

Donde: $X, Y, C, F \epsilon R$. Además, $\mathrm{A, B, D\ y\ E}\ \epsilon\ R - \{0\}$ y no todos sus coeficientes son conocidos.

Ejemplo de situación problema:

Figura 12. *Situación problema 8*

¿Para qué valores a y b el sistema tiene infinitas soluciones?

$$\begin{cases} ax + y = 8 \\ x + by = 9 \end{cases}$$

Da como respuesta la suma de valores encontrados.

Fuente. Tomado de Teacher Resource Center, s.f. https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/perfil

</td>
<td>Para estudiantes 5° de secundaria</td>
<td>Sistemas de ecuaciones lineales.</td>
</tr>
</table>

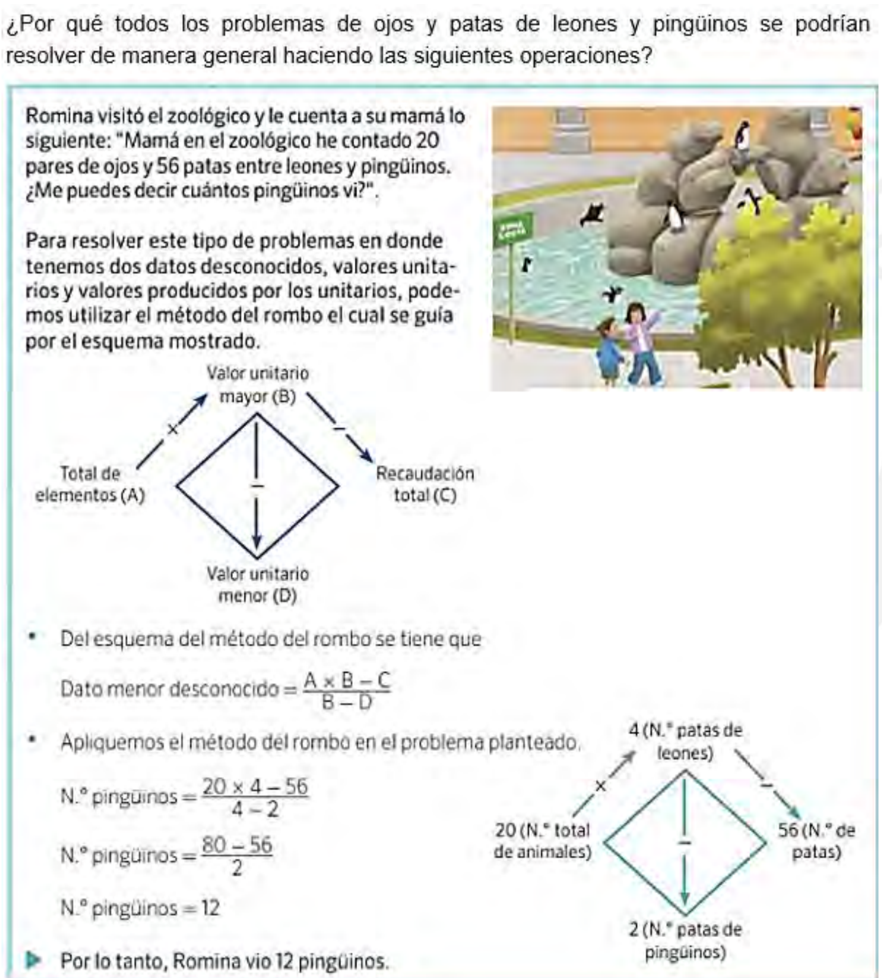
<table>
<tr>
<td>9. La estructura subyacente a esta situación es:

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ DX + EY = F \end{cases}$$
Donde: $X, Y \epsilon R$. Además, $A, B, D\ y\ E\ \epsilon\ R - \{0\}$ y son constantes conocidas.

C y F son valores desconocidos que actúan como parámetros.

Ejemplo de situación problema:

Figura 13. Situación problema 9



Fuente. Adaptado de SM (2021, p.68)</td>
<td>Se plantea para estudiantes 5° de secundaria.</td>
<td>Resolución de problemas sobre sistemas de ecuaciones lineales</td>
</tr>
</table>

Nota/Fuente. Elaboración propia.

Esta organización nos permite reconocer que los sistemas de ecuaciones lineales aparecen explícita o implícitamente desde la educación primaria y en diversos contextos. Asimismo, se ha logrado agrupar las situaciones problemas sobre sistemas de ecuaciones lineales de acuerdo con la estructura subyacente que lo representa, determinando así familias de situaciones problemas.

Esto nos servirá para identificar los tipos de objetos primarios (lenguajes, conceptos, proposiciones y propiedades, procedimientos y argumentos) que se evidencian en las prácticas matemáticas que se ponen en juego al resolver cada tipo de situaciones problema. Para ello, construimos una propuesta de configuraciones epistémicas sobre los sistemas de ecuaciones lineales en la educación básica regular, las cuales asociaremos a distintos significados del objeto en estudio.

2.3 Propuesta de las configuraciones epistémicas sobre los sistemas de ecuaciones

A continuación, se pasa a describir las configuraciones epistémicas en torno a las resoluciones que se pueden realizar por cada familia de situaciones problema que involucran los sistemas de ecuaciones lineales, identificados en el punto anterior. Para ello, se describirán los objetos primarios (lenguajes, conceptos, proposiciones y propiedades, procedimientos y argumentos) que se evidencian en cada una de las soluciones presentadas. Cabe mencionar que todas las situaciones problema propuestas se podrían resolver utilizando técnicas formales para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales; sin embargo, es posible que puedan utilizarse otros métodos más sencillos y elementales para resolverlas.

Para fines de los objetivos de nuestra investigación, en algunas de las configuraciones epistémicas iremos priorizando las soluciones más sencillas y elementales que nos permitan, posteriormente, asociarlas con los niveles incipientes del RAE; mientras que las otras formas de resolver las describiremos como sub configuraciones.

2.3.1 Configuración epistémica 1:

Situación- problema

Este tipo de problemas tiene un contexto relacionado a situaciones de contexto real, en la cual se presentan datos conocidos, datos desconocidos o incógnitas y relaciones entre estos para establecer igualdades. Se pueden encontrar de dos a tres relaciones de igualdad, donde las estructuras subyacentes son:

$$\begin{cases} AX + Y + C = 0 \\ Y + F = 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} AX + Y + C = 0 \\ X + F = 0 \end{cases}$$

Donde $A, C \ y \ F \in \mathbb{N}$ y son valores conocidos, $A \neq 0$.

$$\begin{cases} AX = B \\ X + Y = C \\ DX + Y + EZ = F \end{cases}$$

Donde $A, B, C, D, E \ y \ F \in \mathbb{N}$ y son valores conocidos. Además, $A, D \ y \ E$ son distintos a cero.

De modo que es posible dar solución empleando operaciones aritméticas y se determina una a una las incógnitas para hallar la respuesta.

Lenguajes:

El lenguaje usado es natural y numérico, los cuales deben ser familiares para el estudiante.

Conceptos:

Los conceptos que se toman en cuenta son: adición, sustracción, multiplicación y división.

Proposiciones y propiedades:

Asociadas a las nociones propias del estudiante:

- Utiliza propiedades de la adición y multiplicación.
- Utiliza la descomposición de números naturales para sumar y restar números.

Procedimientos:

Encuentra las relaciones entre los datos del problema y las traduce a expresiones que implican las operaciones aritméticas, tales como: adición, sustracción, multiplicación y división, para ir hallando cada dato desconocido hasta encontrar la respuesta.

Argumentos:

Los argumentos que se utilizan están estrechamente ligados al contexto del problema y se apoyan implícitamente en el empleo de operaciones aritméticas para resolver un problema particular, por lo que se sigue un razonamiento deductivo.

Para este grupo de situaciones problemas se han encontrado al menos dos formas diferentes de resolverlas. A continuación, presentamos la descripción de la forma en la que se suele abordar en los primeros grados de la EBR.

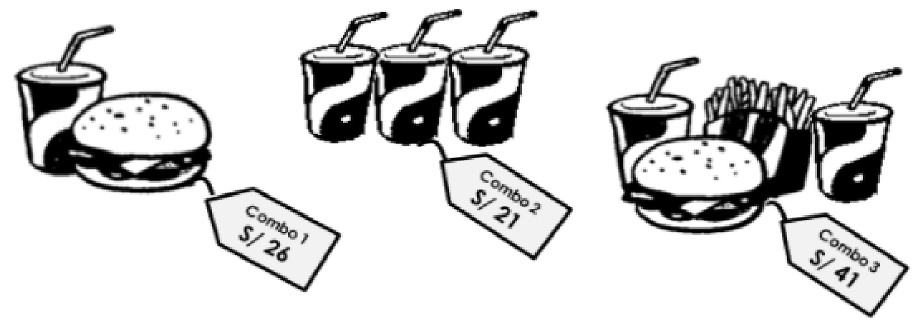
Ejemplo de una situación de la configuración 1:

Tabla 3

Ejemplo de situación correspondiente a la configuración 1.

Situación problema:

Carolina es la dueña de un restaurante que ofrece los siguientes combos:



Si Carolina quiere armar el combo 4 con solo una hamburguesa y dos paquetes de papas fritas, ¿cuánto más cobraría en el combo 4 que en el combo 1?

Lenguajes:

Utiliza un lenguaje natural: “agregar para que se mantenga el precio…”, “quitar para…”, “lo que falta para…”, “cuánto debo agregar para...”. También hace uso de un lenguaje numérico.

Utiliza los símbolos de las operaciones aritméticas (adición, sustracción y división).

Conceptos:

Los conceptos que toma en cuenta son de la adición, sustracción y división de números naturales.

Proposiciones y propiedades:

- Aplica las propiedades conmutativa y asociativa de la adición de números naturales.
- Aplica la descomposición de números naturales para sumar o restar números naturales.

Procedimientos:

Me piden cuanto más cobraría el combo 4 que el combo 1, entonces necesito saber el costo del combo 4. El combo 4 trae una hamburguesa y dos paquetes de papa frita.

Del combo 2, para encontrar el costo de una gaseosa: 21÷ 3= 7, por lo tanto, cada gaseosa cuesta 7 soles.

Por el combo 1 te dan 1 gaseosa y una hamburguesa y cuesta 26 soles. Si la gaseosa cuesta 7 soles, entonces: 26 - 7= 19; la hamburguesa cuesta 19 soles.

El combo 3 trae 2 gaseosas, 1 paquete de papa frita y una hamburguesa, y cuesta 41 soles. Como 2 gaseosas más una hamburguesa cuestan: 7+7+19=33, entonces el paquete de papas cuesta: 41-33=8; 8 soles.

El combo 4 cuesta: 19+8+8= 35 soles.

El combo 4 cuesta más que el combo 1 por: 35-26= 9 soles

Argumentos:

Los argumentos que se utilizan están estrechamente ligados al contexto del problema y se apoyan implícitamente en el empleo de operaciones aritméticas para resolver un problema particular, por lo que se sigue un razonamiento deductivo

Observación: Si bien en esta configuración se describen lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos básicos, la situación también se puede resolver empleando un lenguaje con representaciones icónicas o gráficas y utilizando otros procedimientos. Para describir los objetos primarios que emergen en esta otra forma de resolución de la misma situación problema, presentaremos la subconfiguración 1.1:

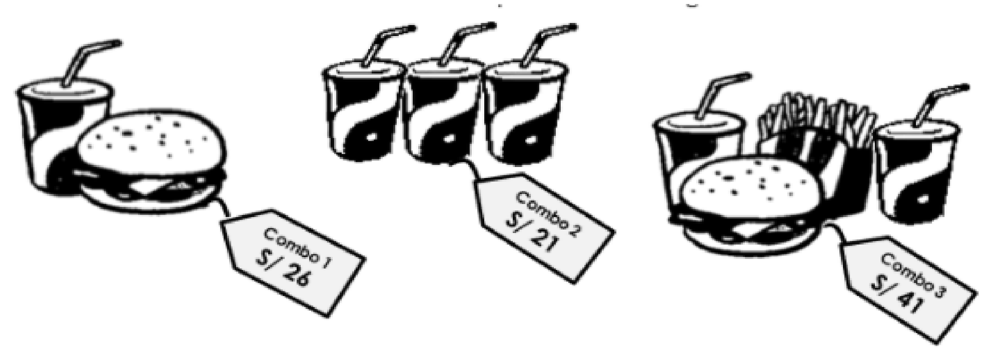
<u>Sub configuración 1.2</u>

Tabla 4

Ejemplo de situación correspondiente a la subconfiguración 1.1:

Situación problema:

Carolina es la dueña de un restaurante que ofrece los siguientes combos:



Si Carolina quiere armar el combo 4 con solo una hamburguesa y dos paquetes de papas fritas, ¿cuánto más cobraría en el combo 4 que en el combo 1?

Lenguajes:

Utiliza un lenguaje natural: “agregar”, “quitar”, “lo que falta para…”, “cuánto debo agregar para ...”. También hace uso de un lenguaje numérico.

Representa los datos del problema gráficamente mediante un modelo de barras.

Utiliza los símbolos de las operaciones aritméticas (adición, sustracción y división).

Utiliza el símbolo “?” para representar la cantidad desconocida.

Conceptos:

Los conceptos que toma en cuenta son de la adición, sustracción y división.

Proposiciones y propiedades:

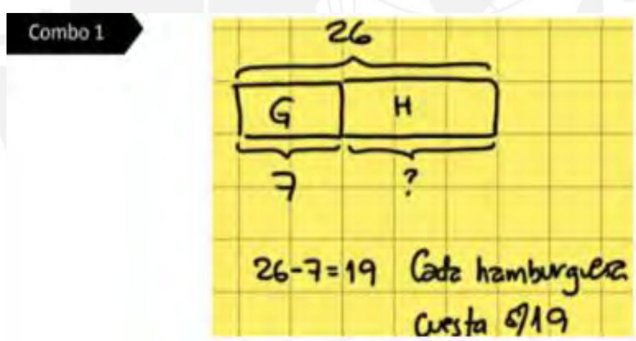
- Aplica las propiedades conmutativa y asociativa de la adición de números naturales.
- Aplica la descomposición de números naturales para sumar o restar números naturales.
- En cuanto al uso del modelo de barras, toma en cuenta lo siguiente:
  Las longitudes de las barras representan los datos conocidos y los desconocidos.
  Las barras que tienen el mismo grosor y longitud representan la misma cantidad o incógnita.
  Las longitudes de las barras deben ser proporcionales a las cantidades que se va a representar.

Procedimientos:

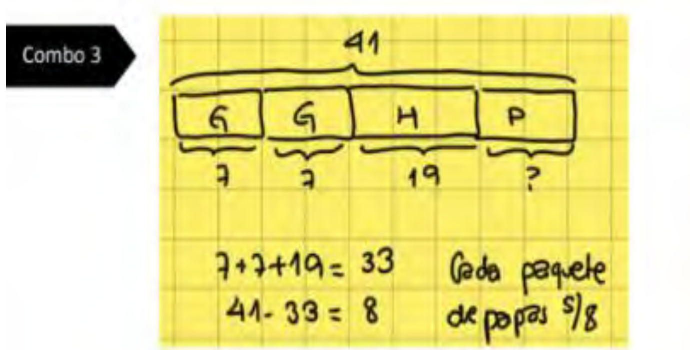
A partir de los datos del combo 2 puede encontrar el costo de una gaseosa: 21÷ 3= 7, cada gaseosa cuesta 7 soles.

En la barra se representa el valor total que es 26 y el valor de uno de los datos conocidos, en este caso el de las gaseosas el cual es 7. El valor del dato desconocido, que representa el valor de la hamburguesa, se representa mediante “?”.

Para hallar el valor desconocido se realiza una sustracción entre el valor total y el valor conocido, pudiendo aplicar estrategias de cálculo como la descomposición de números para restar 26-7.



La cantidad total es 41 y está representado por la unión de cuatro barras del mismo grosor, pero con longitudes diferentes.

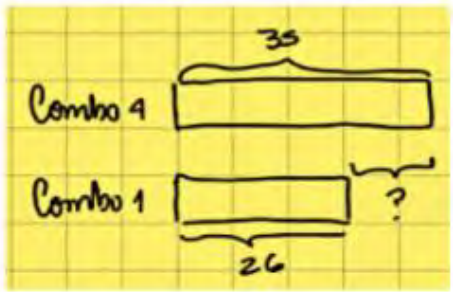


Para representar el precio de las gaseosas se grafican dos barras iguales acompañados de la letra G y las cantidades que representan, en este caso cada gaseosa vale 7.

Suma los valores conocidos aplicando la propiedad asociativa de la adición de números naturales.

Para hallar el valor desconocido, el cual representa con P y se refiere al costo del paquete de papas, se realiza una sustracción entre el valor total y los valores conocidos, pudiendo aplicar estrategias de cálculo como la descomposición de números para restar 44-33 =8.

Halla el precio del combo 4, aplicando implícitamente las propiedades de la adición de números naturales: 19+8+8=35.



Finalmente, encuentra la diferencia entre el combo 4 y con combo 1:

35 - 26 = 9

Llegando a la respuesta final: Cobraría 9 soles más que el combo 1.

Argumentos:

Se apoyan en el empleo las operaciones de adición, sustracción y división y sus propiedades para resolver el problema. Utiliza un razonamiento deductivo.

Nota/Fuente. Elaboración propia.

2.3.2 Configuración epistémica 2:

Situación- problema

Este tipo de problemas se enmarca en un contexto real generalmente cotidiano, en donde se presentan datos conocidos, se mencionan datos desconocidos o incógnitas y relaciones entre estos para establecer igualdades. Se pueden encontrar dos relaciones de igualdad las cuales, mediante el método de falsa suposición, el uso de tablas y de operaciones aritméticas se van encontrando cada una de las incógnitas para hallar la respuesta.

El modelo de sistemas de ecuaciones que está detrás de este tipo de situaciones tiene la siguiente estructura:

$$\begin{cases} X + Y = A \\ BX + CY = D \end{cases}$$

Donde $A, B, C\ y\ D\ \epsilon\ \mathbb{N}$ y son valores conocidos , $B \neq 0\ y\ C \neq 0$

Para esta familia de situaciones problemas se han encontrado al menos tres formas diferentes de resolverlas. A continuación, presentaremos la descripción de la forma en la que se suele abordar en el nivel educativo.

Lenguajes:

El lenguaje usado es natural y numérico, los cuales deben ser familiares para el estudiante. Las representaciones que se usan pueden ser icónicas o gráficas.

Conceptos:

Los conceptos que se toman en cuenta son: adición, sustracción, multiplicación y división.

Proposiciones y propiedades:

Asociadas a las nociones propias del estudiante:

- Utiliza propiedades de la adición: conmutativa, asociativa
- Utiliza la descomposición de números naturales para sumar y restar números.

Procedimientos:

Utiliza el método de falsa suposición para encontrar relaciones entre los datos. Para ello, se consideran los datos del problema suponiendo que la respuesta sea una determinada cantidad. Luego se realizan operaciones aritméticas como adición, sustracción, multiplicación o división y, según la respuesta que se obtiene no vuelve a probar al azar, sino que realiza un ajuste a su propuesta original teniendo en cuenta esa relación que había identificado entre los datos.

Argumentos:

Los argumentos que se utilizan están estrechamente ligados al contexto del problema y se apoyan implícitamente en el empleo de operaciones aritméticas para resolver un problema particular, por lo que se sigue un razonamiento deductivo.

Para esta familia de situaciones problemas se han encontrado al menos tres formas diferentes de resolverlas. A continuación, presentaremos la descripción de las prácticas operativas y discursivas de la solución que corresponde al nivel educativo.

Ejemplo de una situación de la configuración 2:

Tabla 5

Ejemplo de situación correspondiente a la configuración 2:

Situación problema: Romina visitó el zoológico y le cuenta a su mamá lo siguiente: "Mamá en el zoológico he contado 20 pares de ojos y 56 patas entre leones y pingüinos. ¿Me puedes decir cuántos pingüinos vi?"
Lenguajes: Utiliza un lenguaje natural para ir explicando el procedimiento que realiza. Asimismo, emplea un lenguaje numérico.
Conceptos: Los conceptos que toma en cuenta son de la adición, sustracción, multiplicación y división de los números naturales.
Proposiciones y propiedades: - Aplica las propiedades conmutativa y asociativa de la adición de números naturales. - Aplica la descomposición de números naturales para sumar, restar, multiplicar o dividir números naturales.
Procedimientos: De acuerdo con los datos del problema, mencionan que hay 20 pares de ojos, por lo tanto, en total son 20 animales entre pingüinos y leones. Hay 56 patas, pero sabemos que los leones tienen 4 patas y los pingüinos tienen 2 patas. Entonces, suponiendo que todos sean pingüinos entonces habría: 20 x 2=40 patas Esto no corresponde con los datos del problema, pues en total hay 56 patas y estarían sobrando 16 patas. Si esas 16 patas las dividimos entre 2, podemos obtener que 8 animales podrían tener dos patas más, es decir, en total 8 animales tendrían 4 patas. Por lo tanto, estos 8 animales tendrían que ser los leones porque tienen 4 patas. Entonces, Romina vio 12 pingüinos y 8 leones.
Argumentos: Se apoyan en el empleo las operaciones de adición, sustracción, multiplicación división y sus propiedades para resolver el problema. Utiliza un razonamiento deductivo.

Nota/Fuente. Elaboración propia.

Observación: Tal como se mencionó, hemos encontrado otras dos formas de resolver la situación problema, a continuación, describiremos los objetos primarios que emergen en estas otras prácticas operativas y discursivas mediante dos subconfiguraciones:

Subconfiguración 2.1:

Lenguajes:

El lenguaje usado es natural y numérico, los cuales deben ser familiares para el estudiante. Realiza representaciones tabulares para relacionar las magnitudes que intervienen en el problema.

Conceptos:

Los conceptos que se toman en cuenta son: adición, sustracción, multiplicación y división. Así como, múltiplos y divisores de un número.

Proposiciones y propiedades:

- Utiliza propiedades de las operaciones aritméticas con números naturales.
- Propiedades de la divisibilidad.
- Establece relaciones entre la posición de un término y el término de la secuencia.

Procedimientos:

Se utiliza una tabla para encontrar relaciones entre los datos del problema. Se establece una regla al construir la tabla, pues la cantidad de columnas que utiliza al construir la tabla depende del número de animales y las combinaciones posibles que determinan el número exacto de patas.

Se coloca el número total de objetos en la tabla, y la cantidad de alguna característica de los objetos que se toma en cuenta para el problema.

La tabla que se propone es exhaustiva, ya que se presentan todos los casos posibles y luego se tiene en cuenta cuáles cumplen con las condiciones del problema, encontrando así, relaciones entre los datos y realizando operaciones de adición, multiplicación y división de números naturales puede hallar la respuesta del problema.

Argumentos:

Los argumentos que se utilizan son de forma inductiva, pues se plantean distintas soluciones y se van restringiendo según las condiciones del problema, así como van identificando ciertas regularidades o condiciones necesarias que ayudan a reducir las posibilidades.

Ejemplo de una situación de la subconfiguración 2.1:

Tabla 6

Ejemplo de situación correspondiente a la subconfiguración 2.1:

Situación problema:

> Romina visitó el zoológico y le cuenta a su mamá lo siguiente: "Mamá en el zoológico he contado 20 pares de ojos y 56 patas entre leones y pingüinos. ¿Me puedes decir cuántos pingüinos vi?"

Lenguajes:

Se utiliza un lenguaje natural y numérico.

Se realiza una representación tabular con las magnitudes que intervienen en el problema.

Conceptos:

Los conceptos que toma en cuenta son:

- Adición, sustracción, multiplicación y división de los números naturales
- Múltiplos de un número natural.

Proposiciones y propiedades:

- Aplica las propiedades de la conmutatividad y asociatividad de la adición de números naturales.
- Aplica la descomposición de números naturales para sumar, restar, multiplicar o dividir números naturales.
- Emplea los criterios de divisibilidad del 2 y 4.

Procedimientos:

Considerando que el número de pares de ojos es 20, por lo que hay 20 animales en total; además, que cada león tiene 4 patas y que cada pingüino tiene 2 patas, entonces puedo representar los datos en la siguiente tabla:

Número	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Patas de leones	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
Patas de pingüinos	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24

Además, podemos observar que:

- El número de patas de los leones es un múltiplo de 4.
- Si el número de leones es par o impar, la cantidad de patas que tiene siempre será par porque el múltiplo de 4.
- El número de patas de los pingüinos siempre es múltiplo de 2.

Para que se cumpla con los datos del problema, debería haber 8 leones y 12 pingüinos para que en total haya 20 animales y 56 patas (32+24=56)

Argumentos:
Los argumentos que se utilizan son de forma inductiva, ya que se van encontrando diferentes casos que cumplan con la cantidad de patas que tiene cada animal, pero de las cuales solo responde a la condición del problema.

Nota/Fuente. Elaboración propia.

Subconfiguración 2.2:

Lenguajes:

El lenguaje usado es natural, numérico y algebraico.

Conceptos:

Los conceptos que se toman en cuenta son;

- Ecuaciones lineales
- Sistema de ecuaciones lineales y conjunto solución.
- Sistema de ecuaciones equivalentes.

Proposiciones y propiedades:

Las propiedades que se consideran en la resolución de este tipo de situación problema son las siguientes:

- Propiedades de las operaciones aritméticas (conmutativa, asociativa, distributiva, etc.)
- Propiedades de las igualdades.
- Propiedades de los sistemas de ecuaciones equivalentes.

Procedimientos:

Se utilizan los métodos formales para resolver sistemas de ecuaciones lineales, tales como: la sustitución, igualación y reducción, entre otros.

Argumentos:

Los argumentos que se utilizan son se fundamentan en las proposiciones del álgebra lineal.

Ejemplo de una situación de la subconfiguración 2.2:

Tabla 7

Ejemplo de situación correspondiente a la subconfiguración 2.2:

Situación problema: Romina visitó el zoológico y le cuenta a su mamá lo siguiente: "Mamá en el zoológico he contado 20 pares de ojos y 56 patas entre leones y pingüinos. ¿Me puedes decir cuántos pingüinos vi?"
Lenguajes: Se utiliza un lenguaje natural para ir explicando cada procedimiento. Además, utiliza lenguaje algebraico al plantear el sistema de ecuaciones, usa las letras como incógnitas con las que se operan para hallar la solución.
Conceptos: Los conceptos que toma en cuenta son: - Adición, sustracción, multiplicación y división de los números naturales - Ecuaciones lineales. - Sistema de ecuaciones lineales y el conjunto solución.
Proposiciones y propiedades: - Propiedades de las operaciones aritméticas (conmutativa, asociativa, distributiva, etc.). - Propiedades de los sistemas de ecuaciones equivalentes.
Procedimientos: Sea L el número de leones y P el número de pingüinos. Se tiene en cuenta que en total hay 20 pares de ojos, por lo tanto, hay 20 animales en total: L+ P= 20 (ecuación 1) Por otro lado, nos mencionan que hay un total de 56 patas entre leones y pingüinos, esto lo representamos así: 4L+2P=56 (ecuación 2) Con la ecuación 1 y 2 se forma el siguiente sistema de ecuaciones: $$\begin{cases} L + P = 20 & \ldots(1) \\ 4L + 2P = 56 & \ldots(2) \end{cases}$$ ● De la ecuación 1 despejamos el valor de L: $\mathrm{L{+}P{=}20} \rightarrow \mathrm{L{=}\ 20{-}P}$ ● Reemplazamos L en la ecuación 2: $4\mathrm{L} + 2\mathrm{P}{=}56 \rightarrow 4(20 - \mathrm{P}) + 2\mathrm{P} = 56$ Resolvemos la ecuación: $4(20 - \mathrm{P}) + 2\mathrm{P} = 56$ $80 - 4\mathrm{P} + 2\mathrm{P} = 56$ $24 = 2\mathrm{P}$ $\mathrm{P} = 12$ ● Reemplazamos el valor de P en $\mathrm{L} = 20 - \mathrm{P}$ Si $\mathrm{P}{=}12$, entonces L=20-12=8

Por lo tanto, vio 12 pingüinos y 8 leones en el zoológico.
Argumentos: Los argumentos se fundamentan en las proposiciones del álgebra lineal.

Nota/Fuente. Elaboración propia.

2.3.3 Configuración epistémica 3:

Situación- problema

Este tipo de situaciones problemas está relacionado a un contexto real, en donde se presentan datos conocidos, datos desconocidos o incógnitas y relaciones entre estos para establecer igualdades. Se pueden encontrar tres relaciones de igualdad, las cuales forman la siguiente estructura subyacente:

$$\begin{cases} X + Y \ = A \\ X + Z = B \\ Y + Z = C \end{cases}$$

Donde $A, B\ y\ C \epsilon\ Q^{+}$ y son valores conocidos

Para esta familia de situaciones problemas se han encontrado dos formas distintas de resolverlas, pero pasaremos a describir las prácticas operativas y discursivas de la solución que corresponde al nivel educativo.

Lenguajes:

El lenguaje usado es natural y alfanumérico, pues los datos y las relaciones que se dan entre estos pueden representarse con letras y formar ecuaciones de primer grado, de la forma: mx+n=p, donde m y n $\epsilon\ Q^{+}$.

También se hace uso de representaciones icónicas o gráficas.

Conceptos:

Los conceptos que se toman en cuenta son: adición, sustracción, multiplicación y división.

Proposiciones y propiedades:

- Utiliza propiedades de las operaciones aritméticas con números racionales positivos y las propiedades de las igualdades.

Procedimientos:

- Representa los datos conocidos y desconocidos mediante el modelo de barras a las que se les puede colocar letras para distinguir a cada dato.

- El total está representado por la unión de dos o más barras que tienen el mismo grosor, pero que su longitud representa proporcionalmente a la cantidad conocida y desconocida.
- Se van encontrando equivalencias entre las relaciones de igualdad representadas gráficamente por las barras.
- Para encontrar los valores desconocidos se puede realizar operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división entre los datos conocidos. Asimismo, se pueden aplicar propiedades de la adición, tales como la asociatividad o la conmutatividad.

Argumentos:

Los argumentos que se utilizan están estrechamente ligados al contexto del problema y se apoyan implícitamente en el empleo de operaciones aritméticas para resolver un problema particular, por lo que se sigue un razonamiento deductivo.

Ejemplo de una situación de la configuración 3:

Ejemplo de situación correspondiente a la configuración 3.

Situación problema:

Cuatro pueblos están conectados por tres caminos como se muestra en la figura:

La distancia entre el Pueblo A y el Pueblo C es de 46 km en la imagen.
La distancia entre el Pueblo B y el Pueblo C es de 64 km en la imagen.
La distancia entre el Pueblo A y el Pueblo B es de 40 km en la imagen.
Encuentra la distancia entre:

a) **el Pueblo D y el Pueblo A**
b) **el Pueblo D y el Pueblo B**
c) **el Pueblo D y el Pueblo C**

Lenguajes:

Se utiliza un lenguaje natural para explicar el procedimiento de solución.
Se realizan representaciones gráficas mediante el modelo de barras.

Además, utiliza un lenguaje algebraico para representar las relaciones de igualdad. Se usan letras como unas incógnitas, pero algunas sirven solo para nombrar y otras sí se pueden manipular.

Conceptos:

Los conceptos que toma en cuenta son:

- Adición, sustracción, multiplicación y división de los números naturales
- Ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Proposiciones y propiedades:

- Aplica las propiedades de la conmutatividad y asociatividad de la adición de números naturales.
- En cuanto al uso del modelo de barras, toma en cuenta lo siguiente:
    - Las longitudes de las barras representan los datos conocidos y los desconocidos.
    - Las barras que tienen el mismo grosor y longitud representan la misma cantidad o incógnita.
    - Las longitudes de las barras deben ser proporcionales a las cantidades que se va a representar.

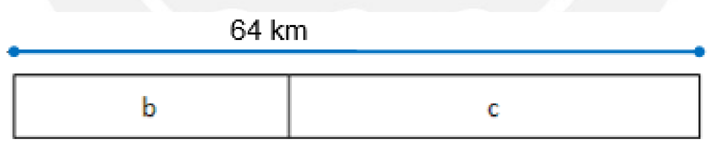
Procedimientos:

Represento las distancias con las siguientes letras:

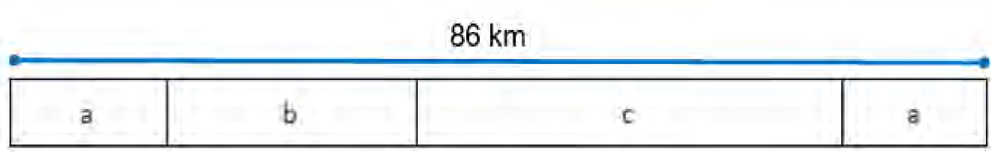
- Distancia de D hacia A: a
- Distancia de D hacia B: b
- Distancia de C hacia C: c

Utilizo el modelo de barras para representar los datos del problema:

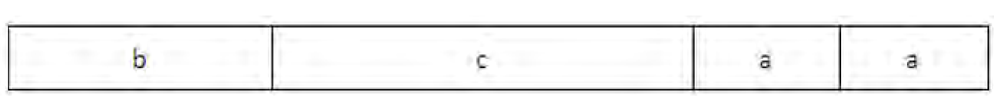
Distancia del pueblo B hacia C es 64



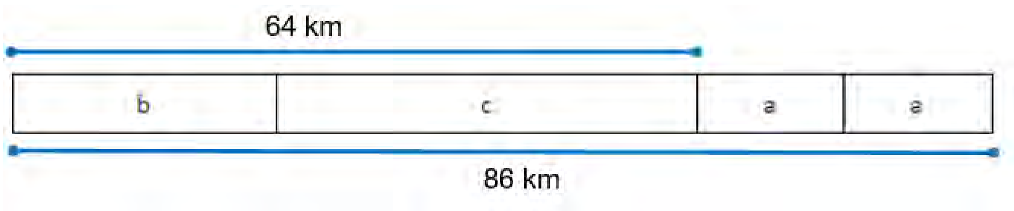
Distancia del pueblo A hacia B y de A hacia C es 46+40=86



Reordenamos el orden de las barras representando el mismo total:



Reemplazamos los valores en las barras:



64 +a +a=86

64 +2a=86

2a=22

a=11

De allí reemplazo en las demás igualdades:

a+b= 40; b= 40-11= 29

b+c=64; c=64-29= 35

Por lo tanto:

- Distancia de D hacia A es 11Km
- Distancia de D hacia B es 29 Km
- Distancia de D hacia C es 35 km

Argumentos:

Los argumentos que se utilizan son de forma deductiva, a partir de los datos y el contexto del problema.

Nota/Fuente. Elaboración propia.

Observación: Para esta situación problema también hemos encontrado otra forma de resolver que podrían aplicar los estudiantes de un nivel educativo posterior, en la secundaria. A continuación, pasamos a describir los objetos primarios que se evidencian en esta otra forma de resolver mediante la subconfiguración 3.1:

<u>Subconfiguración 3.1:</u>

Lenguajes:

El lenguaje usado es natural, numérico y algebraico considerando la letra como incógnita que se manipula.

Conceptos:

Los conceptos que se toman en cuenta son sobre: operaciones aritméticas, ecuación lineal, sistema de ecuaciones lineales, sistema de ecuaciones equivalentes y conjunto solución.

Proposiciones y propiedades:

- Utiliza propiedades de las operaciones aritméticas.
- Propiedades de los sistemas de ecuaciones equivalentes.

Procedimientos:

- Identificar cuáles son las incógnitas y plantear las ecuaciones lineales.
- Determinar el sistema de ecuaciones lineales.
- Aplicar un método para resolver el sistema de ecuaciones lineales, el cual puede ser: igualación, sustitución o reducción.
- Expresa el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales.

Argumentos:

Los argumentos que se utilizan se basan en los fundamentos de las proposiciones del álgebra lineal.

Ejemplo de una situación de la subconfiguración 3.1:

Tabla 8

Ejemplo de situación correspondiente a la subconfiguración 3.1

Situación problema: Cuatro pueblos están conectados por tres caminos como se muestra en la figura: La distancia entre el Pueblo A y el Pueblo C es de 46 km en la imagen. La distancia entre el Pueblo B y el Pueblo C es de 64 km en la imagen. La distancia entre el Pueblo A y el Pueblo B es de 40 km en la imagen. Encuentra la distancia entre: a) el Pueblo D y el Pueblo A b) el Pueblo D y el Pueblo B c) el Pueblo D y el Pueblo C  *Fuente: Adaptado de Ban (2010)*
Lenguajes: Se utiliza el lenguaje natural al ir explicando el procedimiento y redactar la respuesta.

También se utiliza el lenguaje algebraico para representar las incógnitas y plantear el sistema de ecuaciones.

Conceptos:

Los conceptos que toma en cuenta son: operaciones aritméticas, ecuación lineal, sistema de ecuaciones lineales.

Proposiciones y propiedades:

- Propiedades de las operaciones aritméticas (conmutativa, asociativa, distributiva, etc.)
- Propiedades de las igualdades.
- Sistema de ecuaciones equivalentes.

Procedimientos:

Representamos las distancias con las siguientes letras:

- Distancia de D hacia A: x
- Distancia de D hacia B: y
- Distancia de C hacia C: z

Representamos las relaciones de igualdad mediante un sistema de ecuaciones:

- Distancia de A hacia B: $x + y = 40$
- Distancia de B hacia C: $y + z = 64$
- Distancia de A hacia C: $x + z = 46$

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} x + y = 40 \ldots (1) \\ y + z = 64 \ldots (2) \\ x + z = 46 \ldots (3) \end{cases}$$

Aplicamos el método de reducción y sustitución para resolver el sistema de ecuaciones:

1° Sumamos las ecuaciones (1) y (3):

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ \underline{x + z = 46} \\ 2x + y + z = 86 \ldots (4) \end{cases}$$

2° Reemplazamos la ecuación (2) en la ecuación (4):

$$2x + y + z = 86 \rightarrow 2x + 64 = 86$$

Resolviendo la ecuación se obtiene que: $x = 11$

3° Reemplazamos el valor de "x" en las ecuaciones (1) y (3):

$$\begin{aligned} x + y &= 40 \\ 11 + y &= 40 \\ y &= 40 - 11 \\ y &= 29 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + z &= 46 \\ 11 + z &= 46 \\ z &= 46 - 11 \\ z &= 35 \end{aligned}$$

Por lo tanto: - Distancia de D hacia A es 11Km - Distancia de D hacia B es 29 Km - Distancia de D hacia C es 35 km
Argumentos: Los argumentos que se utilizan basan en la elección de los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales que se usan.

Nota/Fuente. Elaboración propia.

2.3.4. Configuración epistémica 4:

Situación- problema

Este tipo de problemas se enmarca en un contexto intramatemático, las cuales se centran en la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales aplicando diversas técnicas de solución. Estas tareas plantean sistemas de ecuaciones lineales con las siguientes estructuras:

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ DX + EY = F \end{cases}$$

Donde: $C, F \epsilon R$ y son valores conocidos.

Además, $A, B, D\ y\ E \epsilon R - \{0\}$

$$\begin{cases} AX + BY + CZ = D \\ EX + FY + GZ = H \\ IX + JY + KZ = L \end{cases}$$

Donde $D, H, L \epsilon R$ y son valores conocidos.

Además, $A, B, C, E, F, G \epsilon R - \{0\}$

Como la finalidad de este tipo de tareas es que se aplique algún método formal de resolución para los sistemas de ecuaciones lineales, tales como el de sustitución, igualación y reducción, se considera que los coeficientes sean diferentes de 1, de tal manera que ninguno de los procedimientos aritméticos antes vistos sea suficiente para resolver este tipo se situaciones.

Lenguajes:

Los lenguajes que se van a utilizar para resolver este tipo de situaciones se darán en lenguaje natural, numérico y algebraico.

Conceptos

Los conceptos que se toman en cuenta son: ecuación lineal, sistema de ecuaciones lineales, sistema de ecuaciones equivalentes, conjunto solución y sobre los métodos de resolución: igualación, sustitución y reducción.

Proposiciones y propiedades

Las propiedades que se toman en cuenta para estas situaciones son:

- Propiedades de las operaciones aritméticas (conmutativa, asociativa, distributiva, etc.)
- Propiedades de las igualdades.
- Referidos a las operaciones que generan sistemas de ecuaciones equivalentes, por ejemplo: multiplicar una ecuación por una constante no nula.

Procedimientos:

Para resolver esta situación se pueden realizar los siguientes métodos:

- Método de igualación: Sigue la siguiente secuencia de pasos para resolver un sistema de ecuaciones lineales:
    1. Elegir una incógnita del sistema y despejarla en todas las ecuaciones del sistema.
    2. Igualar las expresiones encontradas y formar otro sistema de ecuaciones lineales. Se continúa con este mismo proceso hasta obtener una ecuación lineal con una sola incógnita, y se halla su valor.
    3. Reemplazar el valor hallado en las demás ecuaciones hasta hallar el valor de todas las incógnitas.
    4. Indicar el conjunto solución.

- Método de sustitución: Se sigue la siguiente secuencia de pasos:
    1. Despejar una de las incógnitas en una ecuación.
    2. Reemplazar la expresión que se obtuvo en las otras ecuaciones del sistema. Continuar este proceso hasta formar una ecuación lineal con una incógnita y hallar su valor.
    3. Reemplazar el valor obtenido en las otras ecuaciones del sistema hasta encontrar el valor de las otras incógnitas.
    4. Indicar el conjunto solución.

- Método de reducción o eliminación: Se sigue la siguiente secuencia de pasos para resolver el sistema de ecuaciones lineales.
    1. Elegir la incógnita que será eliminada en todas las ecuaciones del sistema.
    2. Verificar que dicha incógnita presente coeficientes opuestos en todas las ecuaciones. En caso no sea así, se debe obtener ecuaciones equivalentes, multiplicando factores convenientes por aquellas ecuaciones en las que se desea tener coeficientes opuestos.
    3. Sumar las ecuaciones equivalentes formadas en el paso anterior, con el fin de eliminar la incógnita con coeficientes opuestos. Repetir este procedimiento cuantas veces sea necesario hasta obtener una ecuación lineal con una incógnita y encontrar su valor.
    4. Reemplazar el valor obtenido en las otras ecuaciones lineales hasta obtener el valor de las demás incógnitas.
    5. Indicar el conjunto solución.

Argumentos:

Los argumentos que se utilizan se fundamentan en las proposiciones del álgebra lineal.

Ejemplo de una situación de la configuración 4:

Tabla 9

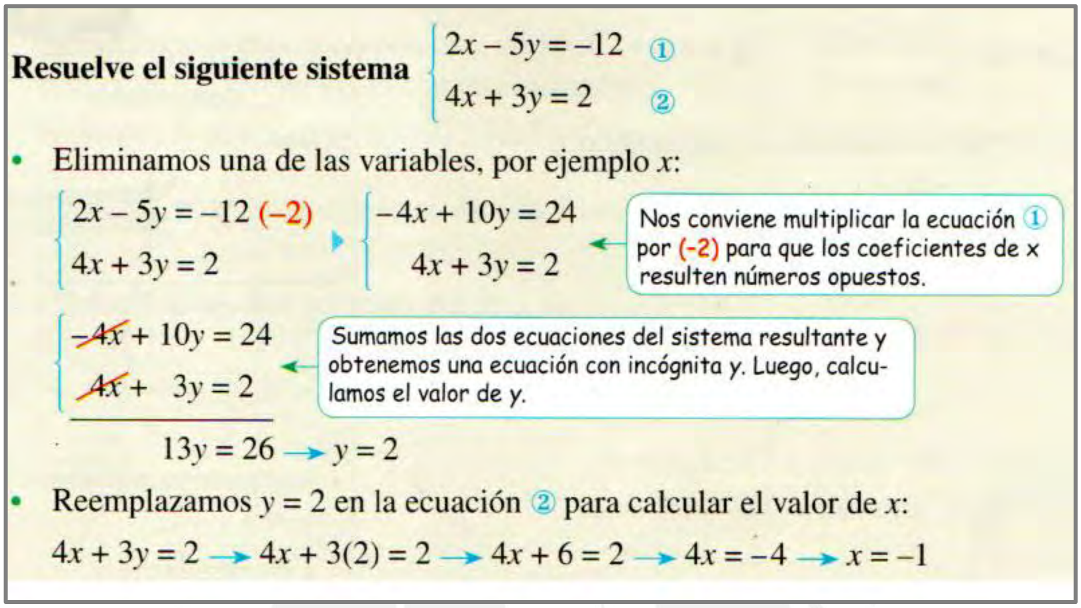
Ejemplo de situación correspondiente a la configuración 4

Situación problema: **Resuelve el siguiente sistema** $\begin{cases} 2x - 5y = -12 & ① \\ 4x + 3y = 2 & ② \end{cases}$
Lenguajes: Se utiliza el lenguaje natural al ir explicando el procedimiento y redactar la respuesta. También se utiliza el lenguaje algebraico para realizar los procedimientos de solución y representar el conjunto solución del sistema mediante un par ordenado. Las letras son incógnitas que se pueden manipular.
Conceptos: Los conceptos que toma en cuenta son: Ecuación lineal, sistema de ecuaciones lineales, conjunto solución, sistema de ecuaciones equivalentes, operaciones aritméticas.
Proposiciones y propiedades: - Propiedades de las operaciones aritméticas (conmutativa, asociativa, distributiva, etc.) - Propiedades de los sistemas de ecuaciones equivalentes.

- Proposiciones del método de reducción o eliminación.

Procedimientos:

Figura 14. *Solución de la situación problema 4*



Resuelve el siguiente sistema $\begin{cases} 2x - 5y = -12 & ① \\ 4x + 3y = 2 & ② \end{cases}$

- Eliminamos una de las variables, por ejemplo x:

$$\begin{cases} 2x - 5y = -12\ (-2) \\ 4x + 3y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x + 10y = 24 \\ 4x + 3y = 2 \end{cases}$$

Nos conviene multiplicar la ecuación ① por (-2) para que los coeficientes de x resulten números opuestos.

$$\begin{cases} \cancel{-4x} + 10y = 24 \\ \cancel{4x} + 3y = 2 \end{cases}$$

Sumamos las dos ecuaciones del sistema resultante y obtenemos una ecuación con incógnita y. Luego, calculamos el valor de y.

$$13y = 26 \rightarrow y = 2$$

- Reemplazamos $y = 2$ en la ecuación ② para calcular el valor de x:

$$4x + 3y = 2 \rightarrow 4x + 3(2) = 2 \rightarrow 4x + 6 = 2 \rightarrow 4x = -4 \rightarrow x = -1$$

Fuente: Tomado de Santillana (2013, p.218)

Argumentos:

Los argumentos que se utilizan se basan en las proposiciones que surgen del método de eliminación para resolver el sistema de ecuaciones lineales.

Nota/Fuente. Elaboración propia.

2.3.5 Configuración epistémica 5:

Situación- problema

Para describir este tipo de situaciones problema, nos basaremos en una de las clasificaciones que Cárdenas (2018) realizó en su trabajo, en el que identificó situaciones en la que los sistemas de ecuaciones lineales se utilizan como herramientas para resolver situaciones de contexto intramatemático y extramatemático.

Las situaciones problema de contexto intramatemático se relacionan con los otros temas de la matemática que se presentan en el currículo Nacional (2016), por ejemplo: en el ámbito aritmético, algebraico, geométrico y estadístico. Mientras que, las situaciones del ámbito contexto extramatemático está relacionado a temas de otras áreas del currículo peruano ajenas a matemática, tales como a la Física, Química o temas de carácter social o situaciones cotidianas.

El sistema de ecuaciones que se puede plantear en este tipo de situación problema tiene la siguiente estructura:

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ DX + EY = F \end{cases}$$

Donde: C, F $\epsilon\ R$ y son valores conocidos.

Además, $A, B, D\ y\ E\ \epsilon\ R - \{0\}$

Para resolver este tipo de problemas se plantea el sistema de ecuaciones lineales, y se aplica algún método formal de resolución de sistemas (igualación, sustitución y reducción) o gráficamente en el plano cartesiano. Sin embargo, no es posible dar solución empleando procedimientos aritméticos, tales como: la falsa suposición, operaciones aritméticas, modelo de barras, uso de tablas, etc.; ya que los coeficientes son números reales positivos

Lenguajes:

Los lenguajes que se van a utilizar para resolver este tipo de situaciones se darán en lenguaje natural, numérico, tabular, gráfico y algebraico.

Conceptos

Los conceptos que se toman en cuenta son: ecuación lineal, sistema de ecuaciones lineales, sistema de ecuaciones equivalentes, conjunto solución y sobre los métodos de resolución: igualación, sustitución y reducción. Asimismo, se hará uso de los conceptos de los temas aritméticos relacionados con la situación problema, tales como: porcentajes, proporcionalidad, conjuntos, divisibilidad, etc.

Proposiciones y propiedades

Las propiedades que se toman en cuenta para estas situaciones son:

- Propiedades de las operaciones aritméticas (conmutativa, asociativa, distributiva, etc.)
- Propiedades o proposiciones referidos al tema aritmético que está relacionado a la situación problema.
- Propiedades de las igualdades.
- Proposiciones referidas a las operaciones que generan sistemas de ecuaciones equivalentes, por ejemplo: multiplicar una ecuación por una constante no nula.

Procedimientos:

Los procedimientos que se toman en cuenta para resolver este tipo de situaciones problemas son:

- Identificar cuáles son las incógnitas y plantear las ecuaciones lineales, considerando las condiciones del problema relacionado a un tema aritmético.
- Determinar el sistema de ecuaciones lineales.
- Aplicar un método para resolver el sistema de ecuaciones lineales, el cual puede ser: igualación, sustitución o reducción, o inclusive de manera gráfica utilizando el plano cartesiano.
- Expresa el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales.

Argumentos:

Los argumentos que se utilizan están estrechamente ligados al contexto del problema y se apoyan de los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales que se usan. Se utiliza un razonamiento deductivo.

Ejemplo de una situación de la configuración 5:

Tabla 10

Ejemplo de situación correspondiente a la configuración 5:

Situación problema: Un técnico laboratorista requiere preparar 100ml de solución azucarada al 50% utilizando soluciones al 35% y 60%. ¿Qué cantidad de cada una de estas soluciones deberán mezclarse para obtener la concentración deseada?
Lenguajes: Utiliza un lenguaje natural, numérico, tabular y algebraico.
Conceptos: Los conceptos que toma en cuenta son: porcentajes, operaciones aritméticas, ecuación lineal, sistema de ecuaciones lineales, sistema de ecuaciones lineales equivalentes, conjunto solución.
Proposiciones y propiedades: - Propiedades de las operaciones aritméticas (conmutativa, asociativa, distributiva, etc.) - Proposiciones con respecto a porcentajes (representación de un porcentaje a un decimal). - Propiedades de los sistemas de ecuaciones equivalentes: Para formar un sistema de ecuaciones equivalente a otro, se puede multiplicar una ecuación por una constante no nula.

- Proposiciones del método de reducción.

Procedimientos:

Figura 15. *Solución de la situación problema 5*

- Organizamos los datos en una tabla:

	Solución al 35 %	Solución al 60 %	Se desea obtener al 50 %
Volumen	x	y	100 ml
Concentración	0,35	0,60	0,50

- Planteamos ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 100 \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ 0{,}35x + 0{,}60y = 0{,}50(100) \ldots\ldots(2) \end{cases}$$

- Multiplicamos la ecuación (1) por (–0,35):

$$\begin{cases} -0{,}35x - 0{,}35y = -35 \\ 0{,}35x + 0{,}60y = 50 \end{cases}$$

- Reducimos y obtenemos: $0{,}25y = 15$, entonces $y = 60$
- Reemplazamos en la ecuación (1): $x + 60 = 100$, entonces $x = 40$

Respuesta: Se necesita mezclar 40 ml de la solución al 35 % y 60 ml de la solución al 60 %.

Fuente: Tomado de Mansilla (2019, p.31)

Argumentos:

Los argumentos que se utilizan se basan en los fundamentos en el álgebra lineal sobre sistemas de ecuaciones equivalentes, en torno a las propiedades y proposiciones que se consideran para la solución del problema, por lo que se sigue un razonamiento deductivo.

Nota/Fuente. Elaboración propia.

2.3.6 Configuración epistémica 6:

Situación- problema

Esta familia de situaciones problemas se enmarca en un contexto intramatemático, en donde se exige la representación gráfica de un sistema de ecuaciones lineales, para analizarlas y determinar el tipo de sistema al que corresponde, según el tipo de conjunto solución que admite y su interpretación gráfica.

El sistema de ecuaciones que se puede plantear en este tipo de situación problema tiene la siguiente estructura:

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ DX + EY = F \end{cases}$$

Donde: $C, F \epsilon Z$ y son valores conocidos.

Además, $A, B, D\ y\ E \epsilon \mathbb{Q} - \{0\}$

Lenguajes:

Los lenguajes que se van a utilizar para resolver este tipo de situaciones se darán en lenguaje natural, numérico, gráfico, tabular y algebraico.

Conceptos

Los conceptos que se toman en cuenta son: rectas: paralelas, coincidentes y secantes, plano cartesiano, sistema de coordenadas, par ordenado, intercepto con los ejes, incógnitas, sistemas de ecuaciones lineales: compatible determinado, compatible indeterminado, incompatible y conjunto solución.

Proposiciones y propiedades

Las propiedades que se toman en cuenta para estas situaciones son:

- Propiedades de las operaciones aritméticas (conmutativa, asociativa, distributiva, etc.)
- Proposiciones referidas a la representación gráfica de un sistema de ecuaciones lineales: La representación gráfica de un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas son dos rectas en el plano cartesiano. Para graficar una recta es suficiente con determinar dos puntos de ella.
- Propiedades sobre las posiciones de las rectas que representan un sistema de ecuaciones lineales para determinar a qué tipo de sistema corresponde: sistema compatible determinado (si las dos rectas se cortan en un punto), sistema compatible indeterminado (si las rectas son coincidentes o se superponen) y sistema incompatible (si las rectas son paralelas. El punto de intersección de las dos rectas es la solución del sistema.

Procedimientos:

Los procedimientos que se toman en cuenta para resolver este tipo de situaciones problemas son:

- Despeja una de las incógnitas en ambas ecuaciones del sistema, con la finalidad de asignarles valores.

- Se construyen dos tablas de valores o pares ordenados los mismos que serán graficados en el plano cartesiano.
- Se identifica a qué tipo de sistema de ecuaciones pertenece el sistema representado gráficamente, considerando la posición de las rectas en el plano.

Argumentos:

Los argumentos que se utilizan están estrechamente ligados a las propiedades y proposiciones que se consideran en la resolución de este tipo de situaciones problemas. Se utiliza un razonamiento deductivo.

Ejemplo de una situación de la configuración 6:

Tabla 11

Ejemplo de situación correspondiente a la configuración 6:

Situación problema: Grafica los siguientes sistemas de ecuaciones lineales e identifica a qué tipo pertenecen. a. $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + 2y = 20 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x + y = 7 \\ -x - y = 9 \end{cases}$
Lenguajes: Utiliza un lenguaje natural, numérico, algebraico, tabular y gráfico. También se harán uso de representaciones tabulares.
Conceptos: Los conceptos que toma en cuenta son: rectas: paralelas, coincidentes y secantes, plano cartesiano, sistema de coordenadas, par ordenado, intercepto con los ejes, sistemas de ecuaciones lineales: compatible determinado, compatible indeterminado, incompatible; y la solución o soluciones de un sistema.
Proposiciones y propiedades: - Propiedades de las operaciones aritméticas (conmutativa, asociativa, distributiva, etc) - Proposiciones sobre la representación gráfica de tipos de sistema de ecuaciones lineales: ● Una ecuación lineal puede representarse gráficamente como una recta en el plano cartesiano. ● Si las rectas se intersectan, el sistema es compatible determinado. ● Si las rectas se superponen o coinciden, el sistema es compatible indeterminado. ● Si las rectas son paralelas y diferentes, el sistema será incompatible.

Procedimientos:

Figura 16. *Solución de la situación problema 6a*

Sistema compatible indeterminado

Tiene infinitas soluciones. Por ejemplo: $\begin{cases} x + y = 10 & ① \\ 2x + 2y = 20 & ② \end{cases}$

- Despejamos la variable y en las ecuaciones ① y ② para asignar valores a x:

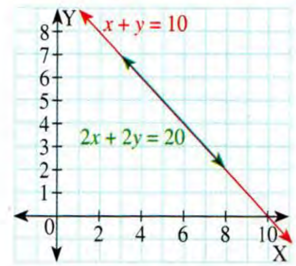
En ① $y = 10 - x$

x	1	2	3	…
y	9	8	7	…

En ② $y = \dfrac{20 - 2x}{2}$

x	1	2	3	…
y	9	8	7	…

Las soluciones comunes son infinitas. El sistema es compatible indeterminado.



Como tiene infinitas soluciones, las rectas coinciden.

Fuente: Tomado de Santillana (2013, p.214)

Figura 17. *Solución de la situación problema 6b*

Tiene una solución única. Por ejemplo: $\begin{cases} 2x + y = 7 & ① \\ 3x - y = 3 & ② \end{cases}$

- Despejamos la variable y en las ecuaciones ① y ② para asignar valores a x:

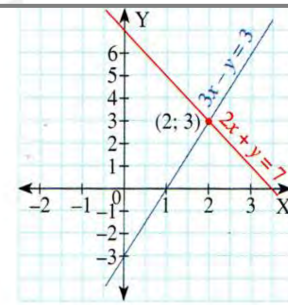
En ① $y = 7 - 2x$

x	0	2	3,5
y	7	3	0

En ② $y = 3x - 3$

x	0	1	2
y	–3	0	3

c.s. = {(2; 3)} es la única solución común. El sistema es compatible determinado.



Como tiene una única solución, las rectas se cortan en un punto.

Fuente: Tomado de Santillana (2013, p.214)

Figura 18. *Solución de la situación problema 6b*

Sistema incompatible

No tiene solución. Por ejemplo: $\begin{cases} x + y = 7 & ① \\ -x - y = 9 & ② \end{cases}$

- Despejamos la variable y en las ecuaciones ① y ② para asignar valores a x.

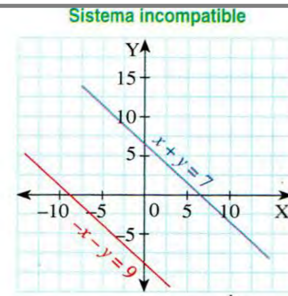
En ① $y = 7 - x$

x	–10	–5	0	5
y	17	12	7	2

En ② $y = -x - 9$

x	–10	–5	0	5
y	1	–4	–9	–14

No existe ninguna solución común. El sistema es incompatible.



Como no tiene solución común, las rectas son paralelas.

Fuente: Adaptado de Santillana (2013, p.214)

Argumentos: Los argumentos que se utilizan se basan en los fundamentos del álgebra lineal, en torno a las propiedades y proposiciones que se consideran para la solución del problema. Está en torno a un razonamiento deductivo.

Nota/Fuente. Elaboración propia.

2.3.7 Configuración epistémica 7:

Situación- problema

Esta familia de situaciones problemas se enmarca en un contexto intramatemático, en la cual presentan una gráfica de sistemas de ecuaciones lineales y exigen su interpretación para determinar el sistema que se representa y su conjunto solución.

La estructura del sistema de ecuaciones lineales que se plantean en este tipo de situación problema es la siguiente:

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ DX + EY = F \end{cases}$$

Donde $X, Y, C\ y\ F \epsilon R$. Además, $A, B, D\ y\ E \epsilon R - \{0\}$

Las gráficas de sistemas de ecuaciones lineales nos presentan como datos los puntos de intercepto de las rectas con los ejes de coordenadas, los cuales son importantes considerarlos para la solución del problema.

Lenguajes:

Los lenguajes que se van a utilizar para resolver este tipo de situaciones se darán en lenguaje natural, numérico, gráfico y algebraico.

Conceptos

Los conceptos que se toman en cuenta son: rectas: paralelas, coincidentes y secantes, plano cartesiano, sistema de coordenadas, par ordenado, intercepto con los ejes, incógnitas, pendiente, ecuación de la recta, sistemas de ecuaciones lineales: compatible determinado, compatible indeterminado, incompatible y conjunto solución.

Proposiciones y propiedades

Las propiedades que se toman en cuenta para estas situaciones son:

- Propiedades de las operaciones aritméticas (conmutativa, asociativa, distributiva, etc.)

- Proposiciones acerca de la pendiente de una recta: si la pendiente es positiva, la recta será creciente; si la pendiente es negativa entonces la recta será decreciente; si la pendiente es cero, entonces la recta es paralela al eje y.
- Proposiciones referidas a la representación gráfica de un sistema de ecuaciones lineales: La representación gráfica de un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas son dos rectas en el plano cartesiano. Para graficar una recta es suficiente con determinar dos puntos de ella.
- Propiedades sobre las posiciones de las rectas que representan un sistema de ecuaciones lineales para determinar a qué tipo de sistema corresponde: sistema compatible determinado (si las dos rectas se cortan en un punto), sistema compatible indeterminado (si las rectas son coincidentes o se superponen) y sistema incompatible (si las rectas son paralelas. El punto de intersección de las dos rectas es la solución del sistema.

Procedimientos:

Los procedimientos que se toman en cuenta para resolver este tipo de situaciones problemas son:

- Identifica en la gráfica los interceptos de cada recta.
- Utiliza la ecuación de la recta pendiente-intercepto y reemplaza los valores que tenemos como datos para hallar el valor de las pendientes de las rectas.
- Determina las ecuaciones de las rectas y plantear el sistema de ecuaciones lineales.
- Aplica cualquier método de resolución de ecuaciones para hallar el conjunto solución.

Argumentos:

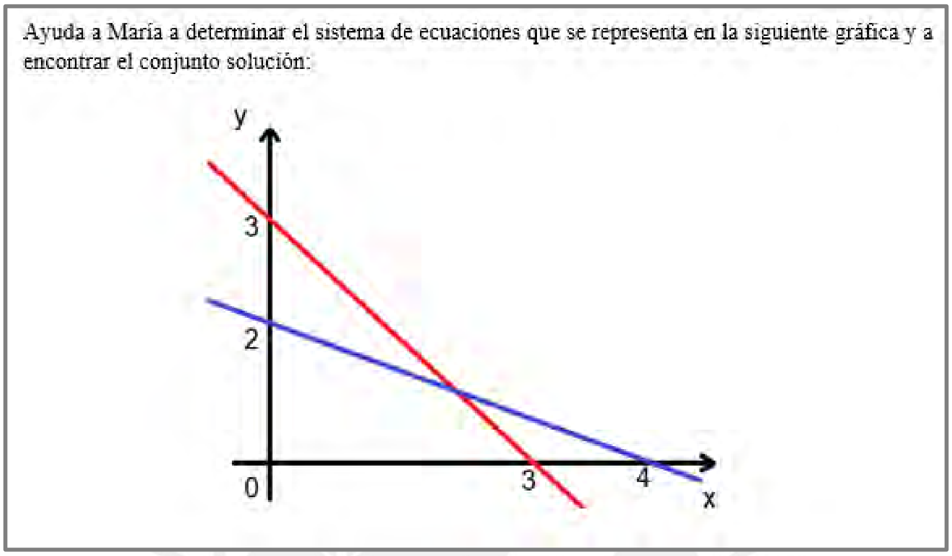
Los argumentos que se utilizan están estrechamente ligados a las propiedades y proposiciones que se consideran en la resolución de este tipo de situaciones problemas, fundamentados en el álgebra lineal. Se utiliza un razonamiento deductivo.

Ejemplo de una situación de la configuración 7:

Tabla 12

Ejemplo de situación correspondiente a la configuración 7:

Situación problema:



Lenguajes:

Utiliza un lenguaje natural, numérico, algebraico y gráfico.

Conceptos:

Los conceptos que se toman en cuenta son: plano cartesiano, sistema de coordenadas, par ordenado, intercepto con los ejes, rectas secantes, pendiente de la recta, sistemas de ecuaciones lineales y conjunto solución.

Proposiciones y propiedades:

- Propiedades de las operaciones aritméticas (conmutativa, asociativa, distributiva, etc.)
- Proposiciones sobre la representación gráfica de sistemas ecuaciones lineales:
  - Una ecuación lineal puede representarse gráficamente como una recta en el plano cartesiano.
  - Proposiciones acerca de la pendiente de una recta: si la pendiente es positiva, la recta será creciente; si la pendiente es negativa entonces la recta será decreciente; si la pendiente es cero, entonces la recta es paralela al eje y.
  - Las coordenadas del punto de intersección de dos rectas es el conjunto solución.

Procedimientos:

En la gráfica podemos ver que las rectas se intersectan en un punto, por lo tanto, el sistema de ecuaciones lineales que representan sí tiene solución.

➔ Encontramos la ecuación de la recta de color rojo:

Dado los puntos en el eje de las coordenadas: A(0;3) y B(3;0)

La ecuación de la recta sería: y=mx+b, donde m representa la pendiente

m=$\frac{3-0}{0-3} = -1$

b= 3 - 0(-1) =3 Entonces la ecuación de la recta de color rojo es: y=-x+3 ➔ Encontramos la ecuación de la recta de color azul: Dado los puntos en el eje de las coordenadas: C(0;2) y D(4;0) La ecuación de la recta sería: y=mx+b, donde m representa la pendiente m=$\frac{2-0}{0-4} = -\frac{1}{2}$ b= 2 - 0(-1/2) = 2 Entonces la ecuación de la recta roja es: y=-½ x+2 ó 2y = -x+4 ➔ Por lo tanto, el sistema de ecuaciones sería: $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ Resolviendo el sistema con el método de reducción se obtiene: x + y = 3 x + 2y = 4 -y=-1 y=1 x=3-y=3-1=2 Como conjunto solución: (2;1).
Argumentos: . Los argumentos que se utilizan se basan en los fundamentos en el álgebra lineal, en torno a las propiedades y proposiciones que se consideran para la solución del problema. Está en torno a un razonamiento deductivo.

Nota/Fuente. Elaboración propia.

2.3.8 Configuración epistémica 8:

Situación- problema

En este tipo de problemas uno de los coeficientes del sistema es un parámetro y se debe determinar qué valores puede tomar para tener solución única, infinitas soluciones o no tener soluciones.

La estructura del sistema de ecuaciones lineales que se plantean en este tipo de situación problema es la siguiente:

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ DX + EY = F \end{cases}$$

Donde: $X, Y, C, F \in R$. Además, $\mathrm{A, B, D\ y\ E} \in R - \{0\}$ y no todos sus coeficientes son conocidos.

Lenguajes:

Los lenguajes que se van a utilizar para resolver este tipo de situaciones se darán en lenguaje natural, numérico y algebraico.

Conceptos

Los conceptos que se toman en cuenta son: ecuación lineal, incógnita, parámetro, sistemas de ecuaciones lineales: compatible determinado, compatible indeterminado, incompatible y conjunto solución.

Proposiciones y propiedades

Las propiedades que se toman en cuenta para estas situaciones son:

- Sistema de ecuaciones equivalentes.
- Propiedad de los sistemas de ecuaciones lineales:

  Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ DX + EY = F \end{cases}$$

  - Si $\frac{A}{D} \neq \frac{B}{E} \neq \frac{C}{F}$, el sistema es compatible determinado.
  - Si $\frac{A}{D} = \frac{B}{E} = \frac{C}{F}$, el sistema es compatible indeterminado.
  - Si $\frac{A}{D} = \frac{B}{E} \neq \frac{C}{F}$, el sistema es incompatible.

Procedimientos:

- Identificar los datos del problema.
- Determinar las incógnitas y el parámetro en la situación problema.
- Reconocer el tipo de sistema de ecuaciones que se ha planteado para aplicar la propiedad correspondiente.
- Establecer la relación entre los datos conocidos y el parámetro del sistema de ecuaciones lineales, mediante igualdades.
- Despeja una incógnita en función de la otra.
- Encontrar el valor del parámetro y lo que finalmente pide la situación problema.

Argumentos:

Los argumentos que se utilizan están estrechamente ligados a las propiedades y proposiciones que se consideran en la resolución de este tipo de situaciones problemas, fundamentados en el álgebra lineal. Se utiliza un razonamiento deductivo.

Ejemplo de una situación de la configuración 8:

Tabla 13

Ejemplo de situación correspondiente a la configuración 8:

Situación problema:

¿Para qué valores a y b el sistema tiene infinitas soluciones?

$$\begin{cases} ax + y = 8 \\ x + by = 9 \end{cases}$$

Da como respuesta la suma de valores encontrados.

Lenguajes:

Utiliza un lenguaje natural, numérico y algebraico. Se usan letras como incógnitas que se manipulan y otras como parámetros.

Conceptos:

Los conceptos que se toman en cuenta son: ecuación lineal, incógnita, parámetro, sistemas de ecuaciones lineales: compatible determinado, compatible indeterminado, incompatible y conjunto solución: solución única, infinitas soluciones o no tiene solución.

Proposiciones y propiedades:

- Propiedades de las operaciones aritméticas (conmutativa, asociativa, distributiva, etc.)
- Propiedad de los sistemas de ecuaciones lineales:
  Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ DX + EY = F \end{cases}$$

- Si $\frac{A}{D} \neq \frac{B}{E} \neq \frac{C}{F}$, el sistema es compatible determinado.
- Si $\frac{A}{D} = \frac{B}{E} = \frac{C}{F}$, el sistema es compatible indeterminado.
- Si $\frac{A}{D} = \frac{B}{E} \neq \frac{C}{F}$, el sistema es incompatible.

Si un sistema tiene infinitas soluciones entonces debe ser incompatible.

Procedimientos:

Figura 19. *Solución de la situación problema 6b*

Como el sistema de ecuaciones lineales es compatible indeterminado, se cumple:

$$\frac{a}{1} = \frac{1}{b} = \frac{8}{9}$$

Entonces:

$$a = \frac{8}{9} \text{ y } \frac{1}{b} = \frac{8}{9} \rightarrow b = \frac{9}{8}$$

Por lo tanto:

$$a + b = \frac{8}{9} + \frac{9}{8} = \frac{145}{72}$$

Argumentos:

. Los argumentos que se utilizan se basan en los fundamentos en el álgebra lineal, en torno a las propiedades y proposiciones que se consideran para la solución del problema. Está en torno a un razonamiento deductivo.

Nota/Fuente. Elaboración propia.

2.3.9 Configuración epistémica 9:

Situación- problema

Para resolver este tipo de situaciones de problema se utilizan a los sistemas de ecuaciones lineales como herramienta que modeliza un procedimiento que se repite. Estas situaciones demandan hallar la solución de una familia de sistemas de ecuaciones lineales que tienen una determinada forma, por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + 4y = a \\ x + y = b \end{cases}$$

y a analizar las condiciones sobre los parámetros a y b para que el sistema que se forme tenga solución.

La estructura del sistema de ecuaciones lineales que se plantean en este tipo de situación problema es la siguiente:

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ DX + EY = F \end{cases}$$

Donde: $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in R$. Además, $A, B, D \ y \ E \in R - \{0\}$ y son constantes conocidas. *C y F* son valores desconocidos que actúan como parámetros.

Lenguajes:

Los lenguajes que se van a utilizar para resolver este tipo de situaciones se darán en lenguaje natural, numérico y algebraico.

Conceptos

Los conceptos que se toman en cuenta son: sistemas de ecuaciones lineales, familia de sistemas de ecuaciones lineales, incógnitas, parámetros, conjunto solución en términos de parámetros, métodos formales de solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Proposiciones y propiedades

- Propiedades de las operaciones aritméticas (conmutativa, asociativa, distributiva, etc.)
- Propiedades de los sistemas de ecuaciones equivalentes.
- Proposiciones sobre los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Procedimientos:

Los procedimientos que se toman en cuenta para resolver este tipo de situaciones problemas son:

- Identificar los valores conocidos y las incógnitas en la situación planteada.
- Reconocer qué datos del problema pueden ser representados como parámetros.
- Plantear el sistema de ecuaciones de acuerdo con el contexto del problema, igualando cada ecuación del sistema a un parámetro.
- Aplicar un método formal de resolución de problemas para hallar la solución del sistema en término de los parámetros.
- Plantear el valor de las incógnitas del sistema de ecuaciones lineales en término de parámetros.
- Comprobar que la solución del sistema de ecuaciones tenga la misma forma que la que se propone en el esquema del método del rombo.

Argumentos:

Los argumentos que se utilizan están estrechamente ligados a las propiedades y proposiciones que se consideran en la resolución de este tipo de situaciones problemas, fundamentados en el álgebra lineal. Se utiliza un razonamiento inductivo, ya que primero se encuentra el conjunto solución para un determinado sistema de ecuaciones lineales; sin embargo, al expresar el conjunto solución en términos de parámetros permite encontrar la solución de una familia de sistemas de ecuaciones.

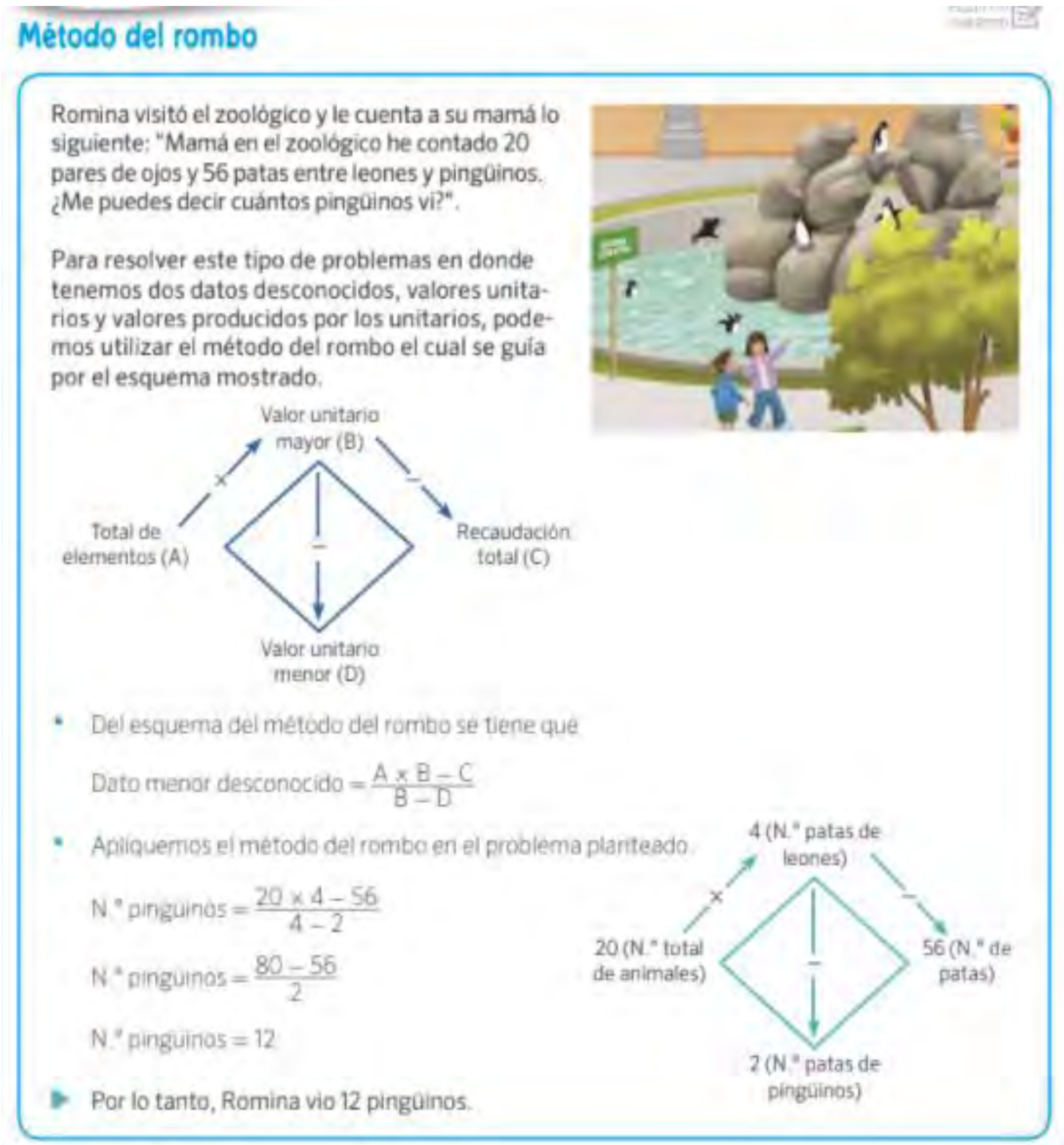
Ejemplo de una situación de la configuración 9:

Tabla 14

Ejemplo de situación correspondiente a la configuración 9:

Situación problema:

¿Por qué todos los problemas sobre patas y número total de leones y pingüinos se podrían resolver de manera general haciendo las siguientes operaciones?



Método del rombo

Romina visitó el zoológico y le cuenta a su mamá lo siguiente: "Mamá en el zoológico he contado 20 pares de ojos y 56 patas entre leones y pingüinos. ¿Me puedes decir cuántos pingüinos vi?".

Para resolver este tipo de problemas en donde tenemos dos datos desconocidos, valores unitarios y valores producidos por los unitarios, podemos utilizar el método del rombo el cual se guía por el esquema mostrado.

Valor unitario mayor (B)
Total de elementos (A)
Recaudación total (C)
Valor unitario menor (D)
×
–
÷

- Del esquema del método del rombo se tiene que

$$\text{Dato menor desconocido} = \frac{A \times B - C}{B - D}$$

- Apliquemos el método del rombo en el problema planteado

$$\text{N.° pingüinos} = \frac{20 \times 4 - 56}{4 - 2}$$

$$\text{N.° pingüinos} = \frac{80 - 56}{2}$$

$$\text{N.° pingüinos} = 12$$

4 (N.° patas de leones)
20 (N.° total de animales)
56 (N.° de patas)
2 (N.° patas de pingüinos)
×
–
÷

▶ Por lo tanto, Romina vio 12 pingüinos.

Fuente: Tomado de Libro de Matemática 5°primaria SM

Lenguajes:

Utiliza un lenguaje natural, numérico, icónico y algebraico.

Conceptos:

Los conceptos que se toman en cuenta son: sistemas de ecuaciones lineales, familia de sistemas de ecuaciones lineales, incógnitas, parámetros, conjunto solución en términos de parámetros, método de reducción o eliminación para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

Proposiciones y propiedades:

- Propiedades de las operaciones aritméticas (conmutativa, asociativa, distributiva, etc.)
- Propiedades de los sistemas de ecuaciones equivalentes: Se genera un sistema de ecuaciones equivalentes al multiplicar una de las ecuaciones por una constante.
- Proposiciones sobre los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales: Para aplicar el método de reducción tenemos que conseguir que una de las incógnitas tenga coeficientes opuestos en las dos ecuaciones.

Procedimientos:

Para resolver el problema propuesto planteamos un sistema de ecuaciones lineales.
Sean:
L: Cantidad de leones
P: Cantidad de pingüinos
El sistema de ecuaciones que se forma es:

$$\begin{cases} L + P = 20 \\ 4L + 2P = 56 \end{cases}$$

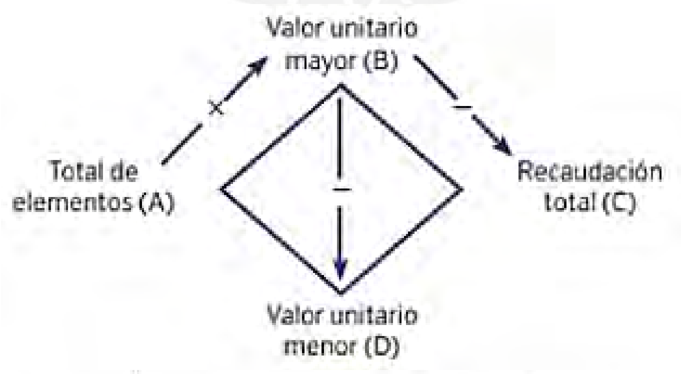
$$\begin{cases} L + P = 20 \\ 4L + 2P = 56 \end{cases}$$

$$2L = 16$$
$$L = 8$$

Por lo tanto, $P=12.$

Vemos que obtenemos la misma respuesta que en el ejemplo mostrado, hay 8 leones y 20 pingüinos. Por ello, suponemos que para demostrar que el método de solución del ejemplo es válido para cualquier problema similar al planteado, debemos plantear un sistema de ecuaciones en la que las cantidades conocidas se puedan expresar mediante parámetros.

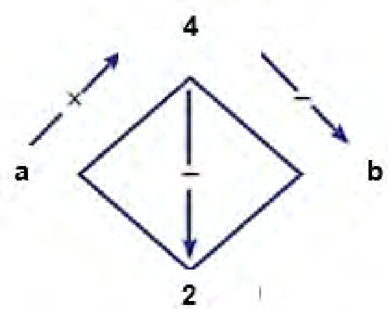
Analicemos el esquema del método mostrado:



$$\text{Dato menor desconocido} = \frac{A \times B - C}{B - D}$$

El proceso que se realiza es para encontrar la cantidad de animales con menor cantidad de patas, en este caso los pingüinos. Para explicar por qué este procedimiento funciona al resolver este problema así varíe la cantidad total de patas y animales, vamos a realizar los siguientes pasos:

- Primero, representemos los datos del problema mediante el esquema del método propuesto en el ejemplo, considerando los siguientes datos:
  L: cantidad de leones
  P: cantidad de pingüinos
  a: Total de animales
  b: Total de patas



Según el procedimiento propuesto, tenemos: P= $\frac{4a-b}{2}$

Es decir, para encontrar la cantidad de pingüinos podemos reemplazar los valores en la expresión: P= $\frac{4a-b}{2}$

- Ahora demostremos por qué funciona dicho procedimiento en este tipo de problemas, para ello representemos los datos del problema mediante un sistema de ecuaciones, en el cual el total de patas y de animales sean representados por los parámetros a y b, respectivamente:

$$\begin{cases} L + P = a \ ..._{(1)} \\ 4L + 2P = b \ ..._{(2)} \end{cases}$$

Obteniendo un sistema de ecuaciones equivalentes, tenemos:

$$\begin{cases} 2L + 2P = 2a \\ 4L + 2P = b \end{cases}$$

$$2L = b\text{-}2a$$

$$L = \frac{b-2a}{2}$$

Reemplazando el valor de L en (1) y despejando P, obtenemos:

$$P = \frac{4a-b}{2}$$

De ambos procedimientos podemos concluir que el método mostrado en el ejemplo se justifica mediante el planteamiento y la resolución de un sistema de ecuaciones en la cual se expresan algunas cantidades en parámetros.

Además, sabiendo que para la familia del sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2L + 2P = 2a \\ 4L + 2P = b \end{cases}$$

Donde a y b son parámetros

Las soluciones serían: $P = \frac{4a-b}{2}$ y $L = \frac{b-2a}{2}$

Podemos concluir que:

- $4a - b$ debe ser par,
- $b - 2a$ es par, por lo tanto, b es par y $b > 2a$

Estos resultados ayudarían a elegir diferentes valores para a y b, y así generar muchos otros problemas.

Argumentos:

Los argumentos que se utilizan están estrechamente ligados a las propiedades y proposiciones que se consideran en la resolución de este tipo de situaciones problemas, fundamentados en el álgebra lineal. Se utiliza un razonamiento inductivo, ya que primero se encuentra el conjunto solución para un determinado sistema de ecuaciones lineales; sin embargo, al expresar el conjunto solución en términos de parámetros permite encontrar la solución de una familia de sistemas de ecuaciones.

Nota/Fuente. Elaboración propia.

2.4 A modo de síntesis

Se han propuesto las configuraciones por cada familia de situaciones problemas sobre sistemas de ecuaciones lineales que hemos identificado de los diversos libros de textos oficiales y no oficiales y materiales educativos seleccionados de la EBR, esto nos ha permitido describir los objetos primarios que surgen al resolver dichas situaciones. Con esto hemos logrado proponer el significado institucional de referencia sobre sistemas de ecuaciones lineales a lo largo de la escolaridad en la Educación Básica Regular.

A partir de las configuraciones epistémicas planteadas, en el siguiente capítulo se hará una adaptación de los niveles de algebrización propuesto por el EOS a los sistemas de ecuaciones lineales. Posteriormente, dichas adaptaciones de los niveles del RAE serán articuladas con las configuraciones epistémicas de nuestro significado de referencia.

CAPÍTULO 3: SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES EN LA EDUCACIÓN BÁSICA Y EL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO

En la primera parte de este capítulo se presentarán los elementos teóricos relacionados con el razonamiento algebraico elemental desde el enfoque del EOS y posteriormente realizaremos una propuesta de adaptación de dichos niveles de algebrización a las prácticas matemáticas que involucran a los sistemas de ecuaciones lineales. El análisis en términos de objetos y procesos algebraicos que intervienen en dichas prácticas realizado en el capítulo anterior brindará insumos para cumplir dicho objetivo.

3.1 Razonamiento algebraico Elemental (RAE)

"El razonamiento algebraico es una forma de pensar y actuar en matemáticas caracterizada esencialmente por la dialéctica entre los procesos de generalización - particularización, y, en consecuencia, por la intervención y emergencia de objetos intensivos de niveles progresivos de generalidad" (Godino, Castro, Aké, Wilhelmi, 2012, p.507).

Desde el EOS se plantea caracterizar las prácticas consideradas como algebraicas en términos de los tipos de objetos y procesos que intervienen. Dichos objetos y procesos se vinculan a las prácticas para formar configuraciones (Godino et al., 2012, p.492). En el capítulo previo se identificaron diversas configuraciones que nos permitirá evidenciar los diversos tipos objetos y procesos algebraicos que se toman emergen de la práctica algébrica al resolver problemas sobre sistemas de ecuaciones lineales.

Objetos algebraicos prototípicos:

Según Godino et al (2012), el EOS plantea una serie de objetos que intervienen y emergen de las prácticas matemáticas. La figura 18 muestra los objetos primarios, los cuales nos permitirán indagar sobre los tipos de objetos algebraicos.

Figura 20. *Objetos implicados en la práctica algebraica*

Fuente: Tomado de Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012, p.492)

Considerando el trabajo de Godino et al.(2012), la práctica matemática es considerada de índole algebraica en base a la presencia de ciertos tipos de objetos considerados como algebraicos. Estos pueden ser los objetos primarios propuestos en el EOS, tales como: conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos expresados en un lenguaje alfanumérico. En una primera instancia se consideran como tipos de objetos algebraicos los siguientes:

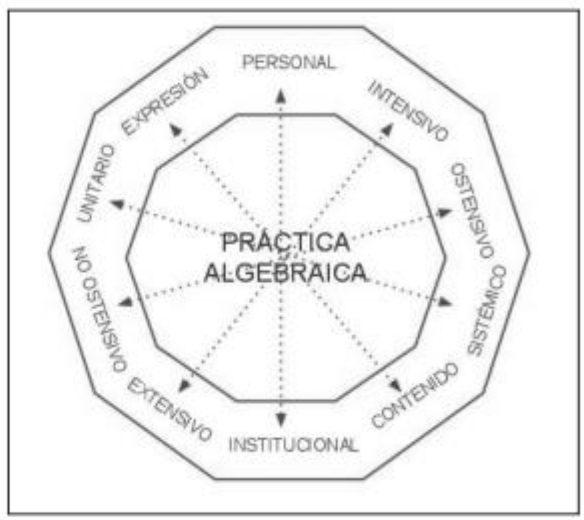
- Relaciones, las que pueden ser de equivalencias como los sistemas de ecuaciones lineales y sus transformaciones en sistemas equivalentes; así como otras relaciones binarias y de orden con sus respectivas propiedades (reflexiva, transitiva y simetría o antisimetría), las que son usadas para definir nuevos conceptos.
- Operaciones y sus propiedades, realizadas con elementos de conjuntos de diversos objetos, como números, transformaciones geométricas, etc. En el caso del cálculo algebraico se caracteriza por la aplicación de propiedades tales como: asociatividad, conmutatividad, distributividad, existencia de elemento neutro y de un inverso. Además, pueden intervenir otros conceptos como: ecuaciones, sistemas de ecuaciones, inecuaciones y su representación con el uso de incógnitas y procesos tales como: trasposición de términos, eliminación, factorización, etc.
- Funciones, sus tipos y el álgebra asociada a ellos, es decir las operaciones y propiedades de funciones. En ese mismo sentido es preciso diferenciar los diversos objetos asociados a su naturaleza como: variables, parámetros, fórmulas, etc.; al igual que sus distintas representaciones: tabular, gráfica, fórmula analítica.

● Estructuras, sus tipos y propiedades, propias del álgebra superior.

Procesos algebraicos prototípicos:

Desde el marco del EOS las prácticas matemáticas y los objetos que intervienen y emergen de ella se pueden contemplar desde diversos puntos de vista, según el contexto o el juego de lenguaje empleado en dicha práctica matemática. Estos enfoques se representan por parejas duales como se observa en la Figura 5. De tales dualidades se consideran sólo tres de ellas, por su estrecha relación con la actividad algebraica.

Figura 21. *Relatividad contextual de la práctica algebraica*



Fuente: Tomado de Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012, p.494)

Según Godino, Castro, Aké, Wilhelmi (2012) consideran las siguiente tres dualidades como parte de la actividad algebraica:

● Procesos de particularización-generalización, desde el EOS se considera generalización en términos de la identificación de objetos intensivos y objetos extensivos que intervienen en las prácticas matemáticas. Se considera un objeto extensivo cuando interviene en la práctica matemática como un ejemplo particular, mientras que un objeto intensivo interviene como un tipo, una clase o generalidad. Tales atributos de los objetos algebraicos emergentes de este proceso dual son relativos al juego de lenguaje en el que interviene y no es absoluto.

Por ejemplo, en el caso de los sistemas de ecuaciones, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2X + Y = 7 \\ 3X - Y = 3 \end{cases}$$

el cual es un objeto extensivo de la clase de sistemas de ecuaciones lineales de 2 ecuaciones y 2 incógnitas:

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ DX + EY = F \end{cases}$$

Donde $X, Y, C, F \in R$. *Además,* $A, B, D, E \neq 0$

la que correspondería a un objeto intensivo. Sin embargo, si consideramos al conjunto de sistema de ecuaciones lineales de m ecuaciones con n incógnitas, el sistema de ecuaciones lineales de 2 ecuaciones y 2 incógnitas sería un objeto extensivo. Esto nos muestra el carácter relativo y contextual que tiene este modo de abordar el proceso de generalización, así como la presencia de distintos niveles de generalización que se pueden dar en una práctica matemática.

- Proceso de reificación (unitarización), permite describir cómo una entidad compuesta o sistémica (un intensivo) pasa a ser una entidad unitaria. Luego esta entidad unitaria podrá participar en otros procesos de generalización y posteriormente pasar a ser un intensivo de grado superior empleando los atributos de unitario-sistémico.
- Proceso de simbolización, parte fundamental del razonamiento algebraico, pues permite que los objetos matemáticos sean más claros para su reflexión. Tal es así que la dualidad ostensivo-no ostensivo aporta un artefacto que tiene lugar en los procesos de generalización, puesto que los objetos matemáticos (conceptos, proposiciones, etc.) se consideran objetos ideales o mentales, es decir objetos no ostensivos. Sin embargo, su comunicación requiere que sean representados, es decir objetos perceptibles esto es objetos ostensivos.

3.2 Los niveles del RAE

En el trabajo de Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014) se presenta el modelo del RAE propuesto inicialmente en Godino et al. (2012) estructurado en niveles de algebrización, para la Educación Primaria. Estos se describen en forma progresiva características de las prácticas realizadas para resolver tareas matemáticas.

Godino et al. (2014) presenta cuatro niveles de algebrización, los cuales nos muestran que, en las prácticas consideradas como aritméticas, se podrían encontrar rasgos de un razonamiento algebraico, en particular cuando hay cierto grado de generalización y simbolización.

Cada nivel de algebrización considera los objetos y procesos que intervienen y emergen de la actividad matemática, según esto se propone distinguir dos niveles de algebrización primarios, primitivos o incipientes, los que están entre un nivel 0 de algebrización, caracterizado por ausencia de razonamiento algebraico, y un nivel 3 de algebrización, en el que la actividad es propiamente algebraica. En ese sentido, para la asignación de los niveles de algebrización se aplican tres criterios básicos:

- La presencia de “objetos algebraicos” intensivos (esto es, entidades que tienen un carácter de generalidad, o de indeterminación).
- Tipo de lenguajes usados para expresar dichos objetos.
- El tratamiento que se aplica (operaciones, transformaciones basadas en la aplicación de propiedades estructurales).

A continuación, se presentan los rasgos de los niveles de algebrización que nos proponen Godino et al. (2014):

- Ausencia de razonamiento algebraico (nivel 0): Práctica matemática en la que intervienen objetos extensivos expresados en lenguaje natural, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que representan un valor desconocido, pero como resultado de operar con objetos extensivos. En tareas de generalización, se evidencia cuando pueden encontrar el término que sigue mas no la regla de formación, indicando que no se logró la generalización.
- Nivel incipiente de algebrización (nivel 1): Práctica matemática en la que intervienen objetos intensivos expresados en lenguaje natural, numérico, icónico o gestual. En tareas estructurales se emplean propiedades, relaciones de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados con símbolos o letras, pero no se pueden operar con tales objetos. En tareas funcionales se reconoce la generalidad, aunque en un lenguaje distinto al simbólico-literal.
- Nivel intermedio de algebrización (nivel 2): Práctica matemática en la que intervienen indeterminadas o variables a través de un lenguaje simbólico-literal para representar a los intensivos reconocidos. En tareas estructurales las ecuaciones tratadas son de la forma $Ax \pm B = C$. En tareas funcionales ya se reconoce la generalidad, aunque no se opera con los objetos intensivos para obtener la forma canónica de la expresión.

- Nivel consolidado de algebrización (nivel 3): Práctica matemática en la que se producen objetos intensivos representados de forma simbólica-literal y se operan con ellos. En tareas estructurales se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones de la forma Ax ± B = Cx+D. En cuanto a tareas funcionales se formula simbólicamente la forma canónica de la expresión de funciones y patrones.
- Nivel cuatro de algebrización: Práctica matemática en la que se evidencia el uso de parámetros como registro numérico, que permiten expresar y operar con familias de ecuaciones o funciones.
- Nivel cinco de algebrización (Tratamiento de parámetros): Práctica matemática en la que se evidencia cálculos analíticos en los que intervienen uno o más parámetros con otras variables. Dichas operaciones deben ser realizadas de forma comprensiva, mas no puramente algorítmica.
- Nivel seis de algebrización: Práctica matemática en la que se introducen algunas estructuras algebraicas (como la de espacio vectorial, o la de grupo), el estudio del álgebra de funciones (adición, sustracción, división, multiplicación y composición), poniendo en juego objetos y procesos algebraicos de mayor grado de generalidad.

Debido a que nuestra investigación apunta a describir los rasgos algebraicos en las prácticas operativas y discursivas que se ponen en juego al resolver situaciones sobre sistemas de ecuaciones lineales en la Educación Básica Regular peruana, se adecuarán los niveles de algebrización hasta el nivel 4, ya que se encuentran evidencias de la referencia a familias de sistemas de ecuaciones de 2 ecuaciones con 2 incógnitas al caracterizarlos empleando parámetros.

Así, es posible considerar situaciones que involucran parámetros, tal como lo mostramos en la identificación de situaciones problemas en el capítulo anterior. En cambio, no abordaremos los niveles 5 y 6 del RAE, pues no corresponden a lo previsto en el Currículo Nacional.

3.3. Adaptación de los niveles del RAE para la noción de los sistemas de ecuaciones lineales para la Educación Básica Regular (EBR)

A continuación, presentamos una propuesta de niveles de algebrización adaptados a las tareas relacionadas a la noción de sistemas de ecuaciones lineales. Para la construcción de esta propuesta se ha tomado en cuenta el tipo de lenguaje usado, las representaciones y el grado de generalización que surge de resolver situaciones problemas sobre el objeto matemático de estudio.

En la tabla 16 describimos los rasgos algebraicos de cada nivel del RAE al resolver tareas sobre sistemas de ecuaciones lineales.

Tabla 15

Niveles de algebrización referido a los sistemas de ecuaciones lineales.

Nivel	Descripción en tareas que implican resolución de sistemas de ecuaciones lineales
0	En caso de tareas de modelización, encuentran la solución del problema a partir de casos particulares y basándose en cálculos numéricos. El análisis y discusión se realiza en lenguaje natural, numérico o icónico. En caso utilice símbolos, lo hace como una manera de abreviar lo que quiere comunicar; sin embargo, no realiza ninguna manipulación simbólica, abstracta o general. Utiliza estrategias tales como el ensayo y error, considerándolo como un método aritmético para resolver problemas, sin identificar que involucra un sistema de ecuaciones lineales.
1	En caso de tareas de modelización, utiliza el método de falsa suposición y encuentra relaciones entre los datos que le permiten reducir los casos. Además, puede recurrir al uso de tablas para encontrar los valores que cumplen con las condiciones del problema e ir encontrando relaciones entre las magnitudes que intervienen. Asimismo, utiliza representaciones gráficas (modelo de barras) para representar los valores desconocidos, o expresarlos simbólicamente, pero no realiza operaciones entre dichos símbolos. El análisis y discusión se realizan en lenguaje natural, numérico, icónico o gestual.
2	En caso de tareas de modelización, establece las relaciones de igualdad y las puede simbolizar mediante variables, ecuaciones de la forma AX+B=C, donde A, B, C. Para resolverlas se basa en aplicar una secuencia de operaciones aritméticas y en la sustitución. El análisis y discusión las realiza en lenguaje simbólico-literal, aunque ligados a la información del contexto espacial y temporal.

3	En tareas de modelización, plantea el sistema de ecuaciones que representa las relaciones de igualdad de la situación problema. Encuentra sistemas de ecuaciones lineales equivalentes para encontrar el conjunto solución. Asocia el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales a la representación gráfica. Realiza conversiones entre diferentes representaciones (algebraico, tabular, gráfico, etc.) de los sistemas de ecuaciones lineales. Asimismo, utiliza diferentes métodos de resolución (igualación, sustitución y reducción) de sistema de ecuaciones lineales. El análisis y discusión se realizan en lenguaje natural, algebraico y gráfico. Además, puede manipular los símbolos o variables sin referir a la información del contexto.
4	Emplea parámetros como registro numérico y para expresar familias de sistemas de ecuaciones lineales. Identifica en la representación formal de un sistema de ecuaciones lineales cuáles son las incógnitas. Reconoce que los coeficientes y las constantes pueden actuar como parámetros. Resuelve situaciones en las que debe hallar el conjunto solución en términos de un parámetro, o en donde debe hallar un parámetro conociendo la solución o encuentra la solución en términos de varios parámetros. El análisis y discusión se realiza en lenguaje algebraico y gráfico.

Nota/Fuente. Elaboración propia.

3.4. Niveles del RAE y configuraciones epistémicas sobre sistemas de ecuaciones lineales.

A continuación, se describen los rasgos algebraicos asociados a las prácticas que emergen al resolver las situaciones problemas del significado de referencia sobre sistemas de ecuaciones lineales en la EBR, construido en el capítulo anterior. A partir de la solución esperada de los ejemplos que presentamos en cada una de las configuraciones epistémicas, realizaremos la asignación a un determinado nivel de algebrización con relación a los sistemas de ecuaciones lineales.

3.4.1 Asignación de configuraciones al nivel 0 de algebrización:

En la tabla 17 se muestran las configuraciones epistémicas que se le asignan al nivel 0 de algebrización

Tabla 16

Configuraciones epistémicas asignadas al nivel 0 de algebrización.

Configuraciones epistémicas asociadas	Ejemplo
Configuración 1 Se observa que para dar solución a esta familia de situaciones problema solo se hace uso de cálculos numéricos a partir de los datos planteados en el problema. La justificación se realiza en lenguaje natural y numérico. Por esto se concluye que, en la solución de este tipo de tareas no hay rasgos de algebrización, por lo que este significado se asocia con un nivel 0 de algebrización	**Primera forma de resolución de la situación problema 1:** Me piden cuanto más cobraría el combo 4 que el combo 1, entonces necesito saber el costo del combo 4. El combo 4 trae una hamburguesa y dos paquetes de papa frita. Del combo 2, para encontrar el costo de una gaseosa: 21 3= 7, por lo tanto, cada gaseosa cuesta 7 soles. Por el combo 1 te dan 1 gaseosa y una hamburguesa y cuesta 26 soles. Si la gaseosa cuesta 7 soles, entonces: 26 - 7= 19; la hamburguesa cuesta 19 soles. El combo 3 trae 2 gaseosas, 1 paquete de papa frita y una hamburguesa, y cuesta 41 soles. Como 2 gaseosas más una hamburguesa cuestan: 7+7+19=33, entonces el paquete de papas cuesta: 41-33=8; 8 soles. El combo 4 cuesta: 19+8+8= 35 soles. El combo 4 cuesta más que el combo 1 por: 35-26= 9 soles

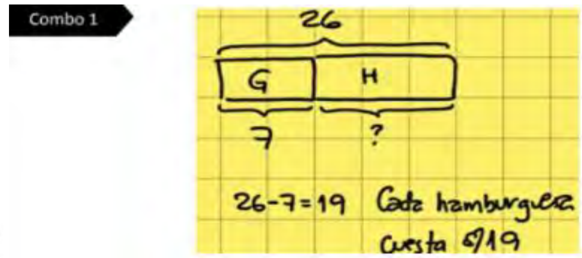
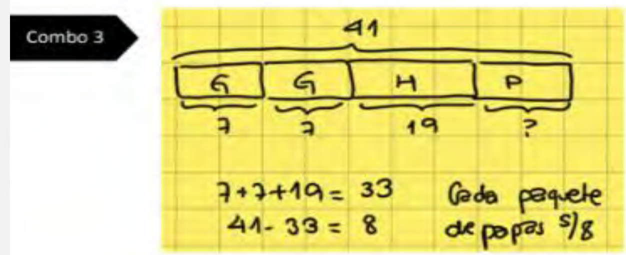
Nota/Fuente. Elaboración propia.

3.4.2 Asignación de configuraciones al nivel 1 de algebrización:

En la tabla 18 se muestran las configuraciones epistémicas en las que se evidencian rasgos del nivel 1 de algebrización.

Tabla 17

Configuraciones epistémicas asignadas al nivel 1 de algebrización.

Configuraciones epistémicas asociadas	Ejemplo
Subconfiguración 1.1 Se observa que para dar solución a esta situación problemática el estudiante ha representado los valores desconocidos por medio de modelo de barras, de modo que, va determinando relaciones entre los datos de la situación y la longitud de cada barra. Esto quiere decir que implícitamente considera ciertas reglas para esta representación gráfica pues las dibuja considerando que el grosor de la barra sea la misma, pero que sus longitudes sean proporcionales a las cantidades conocidas y a los valores que aún no se conocen. La justificación se realiza en lenguaje natural, numérico y utiliza gráficos. Si bien es cierto que se utilizan letras para representar los datos, esto lo hace como una manera de abreviar lo que quiere comunicar, sin realizar alguna manipulación simbólica. En esta solución podemos ver que el modelo de barras facilita la introducción de un lenguaje algebraico, pues las barras son los valores desconocidos, que posteriormente será reemplazado en lenguaje algebraico por las variables.	**Segunda forma de resolución de la situación problema 1:**   *Hallo el precio del combo 4:* *19 + 8 + 8 = 35 soles*
Configuración 2 En esta solución vemos que utiliza el método de falsa suposición para ir encontrando relaciones entre los datos. El	**Primera forma de resolución de la situación problema 2:** De acuerdo con los datos del problema, mencionan que hay 20 pares de ojos, por lo tanto,

<table>
<tr>
<td>estudiante probó una determinada cantidad considerando los datos del problema y según la respuesta que obtuvo no vuelve a probar al azar, sino que realiza un ajuste a su propuesta original teniendo en cuenta esa relación que había identificado entre los datos. Se evidencia que la justificación o los argumentos se dan en lenguaje natural y numérico. De acuerdo con lo mencionado, podemos identificar rasgos de algebrización correspondientes al nivel 1.</td>
<td>en total son 20 animales entre pingüinos y leones. Hay 56 patas, pero sabemos que los leones tienen 4 patas y los pingüinos tienen 2 patas.
Entonces, suponiendo que todos sean pingüinos habría: 20 x 2=40 patas
Esto no corresponde con los datos del problema, pues en total hay 56 patas y estarían sobrando 16 patas. Si esas 16 patas las dividimos entre 2, podemos obtener que 8 animales podrían tener dos patas más, es decir, en total 8 animales tendrían 4 patas. Por lo tanto, estos 8 animales tendrían que ser los leones porque tienen 4 patas. Entonces, Romina vio 12 pingüinos y 8 leones.</td>
</tr>
<tr>
<td>Subconfiguración 2.1
En esta solución se observa que el estudiante utiliza una tabla para encontrar relaciones entre los datos del problema. Al parecer es una regla que se establece al resolver este tipo de problema usando una tabla, pues la cantidad de columnas que utiliza al construirla depende del número de animales y las combinaciones posibles que determinan el número exacto de patas, por lo tanto, utiliza un razonamiento inductivo. Va realizando operaciones aritméticas con los datos para ir completando la tabla. Las explicaciones las va realizando en lenguaje natural y numérico.</td>
<td>Segunda forma de resolución de la situación problema 2:

Considerando que el número de pares de ojos es 20, por lo que hay 20 animales en total; además, que cada león tiene 4 patas y que cada pingüino tiene 2 patas, entonces puedo representar los datos en la siguiente tabla:

Completo la tabla hasta que encuentre los valores que cumplen con la condición del problema.
<table>
<tr><th>Número</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th><th>9</th><th>10</th><th>11</th><th>12</th></tr>
<tr><td>Patas de leones</td><td>4</td><td>8</td><td>12</td><td>16</td><td>20</td><td>24</td><td>28</td><td>32</td><td>36</td><td>40</td><td>44</td><td>48</td></tr>
<tr><td>Patas de pingüinos</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td><td>12</td><td>14</td><td>16</td><td>18</td><td>20</td><td>22</td><td>24</td></tr>
</table>
Para que se cumpla con los datos del problema, debería haber 8 leones y 12 pingüinos para que en total haya 20 animales y 56 patas (32+24=56)</td>
</tr>
</table>

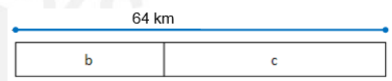
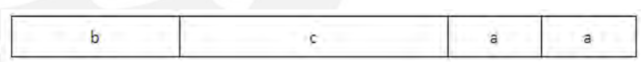
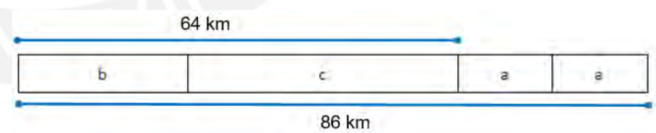
Nota/Fuente. Elaboración propia.

3.4.3 Asignación de configuraciones al nivel 2 de algebrización:

En tabla 19 se presenta la asignación de las configuraciones que corresponden al nivel 2 de algebrización.

Tabla 18

Configuraciones epistémicas asignadas al nivel 2 de algebrización.

Configuraciones epistémicas asociadas	**Ejemplo**
Configuración 3 Se observa que para dar solución a esta situación problema el estudiante ha representado los valores desconocidos por medio del modelo de barras y letras, de modo que, va determinando relaciones entre los datos de la situación y la longitud de cada barra. Esto le permite visualizar mejor el problema para ir planteando una secuencia de operaciones aritméticas y sustituyendo valores que les permita encontrar uno de los valores desconocidos. Para ir encontrando los otros valores desconocidos plantea y resuelve ecuaciones lineales de la forma $ax + b = c$, donde $a\ y\ b\ \in \mathbb{N}$. Por lo que se concluye que en la solución de esta configuración se evidencian algunos rasgos de algebrización correspondientes al nivel 2.	**Primera forma de resolución de la situación problema 3:** Distancia del pueblo B hacia C es 64  Distancia del pueblo A hacia B y de A hacia C es 46+40=86.  Reordenamos el orden de las barras representando el mismo total:  Reemplazamos los valores en las barras:  Luego encontramos el valor de a: 64 +a +a=86 64 +2a=86 2a=22 →a=11

Nota/Fuente. Elaboración propia.

3.4.4 Asignación de configuraciones al nivel 3 de algebrización:

A continuación, en la tabla 20 se detallan las configuraciones que asignaremos al nivel 3 de algbrización:

Tabla 19

Configuraciones epistémicas asignadas al nivel 3 de algebrización.

Configuraciones epistémicas asociadas	**Ejemplo**
Suconfiguración 2.2 En esta solución se observa que el estudiante ha representado el problema mediante un sistema de ecuaciones lineales y ha aplicado el método de sustitución para resolver el sistema de ecuaciones. El lenguaje que se utiliza es natural, numérico y algebraico, por lo que podemos determinar que los rasgos de algebrización de esta solución corresponde al nivel 3 del RAE.	**Tercera forma de resolución de la situación problema 2:** Sea L el número de leones y P el número de pingüinos. Se tiene en cuenta que en total hay 20 pares de ojos, por lo tanto, hay 20 animales en total: L+ P= 20 (ecuación 1) Por otro lado, nos mencionan que hay un total de 56 patas entre leones y pingüinos, esto lo representamos así: 4L+2P=56 (ecuación 2) Con la ecuación 1 y 2 se forma el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} L+P=20 \quad ...(1) \\ 4L+2P=56 \ ...(2) \end{cases}$ ● De la ecuación 1 despejamos el valor de L: $L+P=20 \rightarrow L = 20-P$ ● Reemplazamos L en la ecuación 2: $4L+2P=56 \rightarrow 4(20-P)+2P=56$ Resolvemos la ecuación: $4(20-P)+2P=56$ $80-4P+2P=56$ $24=2P$ $P=12$ ● Reemplazamos el valor de P en L= 20 - P Si $P=12$, entonces $L=20-12=8$ Por lo tanto, vio 12 pingüinos y 8 leones en el zoológico.

<table>
<tr>
<td>

Subconfiguración 3.1

Se observa que para dar solución a esta situación se ha planteado un sistema de ecuaciones de 3 ecuaciones con dos incógnitas y para resolverlo aplica los métodos de reducción y sustitución. Los lenguajes que se utilizan para resolver este tipo de situaciones problemas son: verbal, numérico y algebraico. Por lo tanto, esta subconfiguración se evidencian rasgos del nivel de algebrización 3.

</td>
<td>

Segunda forma de resolución de la situación problema 3:

Representamos las relaciones de igualdad mediante un sistema de ecuaciones:

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} x + y = 40 \ldots (1) \\ y + z = 64 \ldots (2) \\ x + z = 46 \ldots (3) \end{cases}$$

Aplicamos el método de reducción y sustitución para resolver el sistema de ecuaciones:

1° Sumamos las ecuaciones (1) y (3):

$$\begin{array}{r} \left\{\begin{array}{l} x + y = 40 \\ x + z = 46 \end{array}\right. \\ \hline 2x + y + z = 86 \ldots (4) \end{array}$$

2° Reemplazamos la ecuación (2) en la ecuación (4): $2x + y + z = 86 \rightarrow 2x + 64 = 86$

Resolviendo la ecuación se obtiene que: $x = 11$

3° Reemplazamos el valor de "x" en las

$$\begin{array}{ll} x + y = 40 & x + z = 46 \\ 11 + y = 40 & 11 + z = 46 \\ y = 40 - 11 & z = 46 - 11 \\ y = 29 & z = 35 \end{array}$$

ecuaciones (1) y (3):

Por lo tanto:

- Distancia de D hacia A es 11Km
- Distancia de D hacia B es 29 Km
- Distancia de D hacia C es 35 km

</td>
</tr>
</table>

Configuración 4:

La solución a esta situación está enmarcada en la aplicación del método de reducción para resolver el sistema de ecuaciones lineales. Cada paso que explica para hallar sistemas de ecuaciones equivalentes lo hace mediante un lenguaje natural, numérico y algebraico. Por lo tanto, se evidencian rasgos del nivel de algebrización 3.

Resolución de la situación problema 4:

Resuelve el siguiente sistema $\begin{cases} 2x - 5y = -12 & ① \\ 4x + 3y = 2 & ② \end{cases}$

- Eliminamos una de las variables, por ejemplo x:

$$\begin{cases} 2x - 5y = -12\ (-2) \\ 4x + 3y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x + 10y = 24 \\ 4x + 3y = 2 \end{cases}$$

Nos conviene multiplicar la ecuación ① por (−2) para que los coeficientes de x resulten números opuestos.

$$\begin{cases} \cancel{-4x} + 10y = 24 \\ \cancel{4x} + 3y = 2 \end{cases}$$
$$13y = 26 \rightarrow y = 2$$

Sumamos las dos ecuaciones del sistema resultante y obtenemos una ecuación con incógnita y. Luego, calculamos el valor de y.

- Reemplazamos $y = 2$ en la ecuación ② para calcular el valor de x:

$4x + 3y = 2 \rightarrow 4x + 3(2) = 2 \rightarrow 4x + 6 = 2 \rightarrow 4x = -4 \rightarrow x = -1$

Configuración 5:

En la solución de esta situación se puede observar que se realizan equivalencias entre porcentajes y decimales para que pueda plantear el sistema de ecuaciones lineales. Aplica el método de reducción para resolver el sistema de ecuaciones lineales, utilizando un lenguaje natural, numérico y algebraico para explicar su procedimiento se solución. Por lo tanto, se evidencian rasgos del nivel de algebrización 3.

Resolución de la situación problema 5:

Organizamos los datos en una tabla:

	Solución al 35 %	Solución al 60 %	Se desea obtener al 50 %
Volumen	x	y	100 ml
Concentración	0,35	0,60	0,50

Planteamos las ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 100 & \dots(1) \\ 0{,}35x + 0{,}60y = 0{,}50(100) & \dots(2) \end{cases}$$

Multiplicamos la ecuación (1) por (-0,35):

$$\begin{cases} -0{,}35\,x - 0{,}35y = -35 \\ 0{,}35x + 0{,}60y = 50 \end{cases}$$

Reducimos y obtenemos: $0{,}25y = 15$, entonces $y = 60$.

Reemplazamos en la ecuación (1): $x + 60 = 100$, entonces $x = 40$

Repuesta: Se necesita mezclar 40 ml de la solución al 35% y 60ml de la solución al 60%.

Configuración 6:

En la solución propuesta para esta situación realiza tratamientos entre las ecuaciones del sistema de ecuaciones planteado con la finalidad de despejar variables, asignar valores a las incógnitas y los completa en una tabla de valores. En la tabla se van formando los pares ordenados que servirán para realizar el gráfico que represente el sistema de ecuaciones lineales, reconoce el conjunto solución e identifica el tipo de sistema que es.

Realiza conversiones entre los diferentes registros de representación (algebraico, tabular, gráfico, etc.) de los sistemas de ecuaciones lineales. Reconoce las características de cada tipo de sistemas de ecuaciones lineales y comprende cuando tienen solución o no. Por lo tanto, los rasgos algebraicos que se identifican en esta resolución corresponden al nivel 3 de algebrización.

Resolución de la situación problema 6:

Tiene infinitas soluciones. Por ejemplo: $\begin{cases} x + y = 10 & ① \\ 2x + 2y = 20 & ② \end{cases}$

- Despejamos la variable y en las ecuaciones ① y ② para asignar valores a x:

En ① $y = 10 - x$

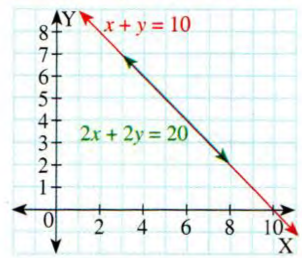
x	1	2	3	…
y	9	8	7	…

En ② $y = \frac{20 - 2x}{2}$

x	1	2	3	…
y	9	8	7	…

Las soluciones comunes son infinitas. El sistema es compatible indeterminado.

Sistema compatible indeterminado



Como tiene infinitas soluciones, las rectas coinciden.

Tiene una solución única. Por ejemplo: $\begin{cases} 2x + y = 7 & ① \\ 3x - y = 3 & ② \end{cases}$

- Despejamos la variable y en las ecuaciones ① y ② para asignar valores a x:

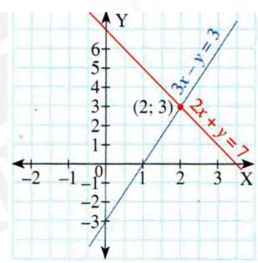
En ① $y = 7 - 2x$

x	0	2	3,5
y	7	3	0

En ② $y = 3x - 3$

x	0	1	2
y	−3	0	3

c.s. = {(2; 3)} es la única solución común. El sistema es compatible determinado.



Como tiene una única solución, las rectas se cortan en un punto.

Configuración 7:

En esta solución se observa que el estudiante ha realizado conversiones del registro gráfico al algebraico para plantear el sistema de ecuaciones, reconociendo a partir de la gráfica que dicho sistema tiene solución. Asimismo, encuentra sistemas de ecuaciones lineales equivalentes y utiliza el método

Resolución de la situación problema 7:

En la gráfica podemos ver que las rectas se intersectan en un punto, por lo tanto, el sistema de ecuaciones lineales que representan sí tiene solución.

- ➔ Encontramos la ecuación de la recta de color rojo:

Dado los puntos en el eje de las coordenadas: A(0;3) y B(3;0)

de reducción para encontrar el conjunto solución del sistema de ecuaciones. El análisis y discusión se realizan en lenguaje algebraico y puede manipular los símbolos o variables sin referir a la información. Por todo lo mencionado, se concluye que en la solución de este tipo de tarea se evidencian un nivel 3 de algebrización.	La ecuación de la recta sería: y=mx+b, donde m representa la pendiente $m=\frac{3-0}{0-3}=-1$ b= 3 - 0(-1) =3 Entonces la ecuación de la recta de color rojo es: y=-x+3 ➔ Encontramos la ecuación de la recta de color azul: $m=\frac{2-0}{0-4}=-\frac{1}{2}$ b= 2 - 0(-1/2) = 2 Entonces la ecuación de la recta roja es: y=-½ x+2 ó 2y = -x+4 ➔ Por lo tanto, el sistema de ecuaciones sería: $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ Resolviendo el sistema con el método de reducción se obtiene: x + y = 3 x + 2y = 4 -y=-1 y=1 x=3-y=3-1=2 Como conjunto solución: (2;1).

Nota/Fuente. Elaboración propia.

3.4.5 Asignación de configuraciones al nivel 4 de algebrización:

Al analizar las configuraciones epistémicas se pudo evidenciar que algunas de ellas tenían rasgos correspondientes a un nivel 4 de algebrización, las cuales se detallan en la tabla 21:

Tabla 20

Configuraciones epistémicas asignadas al nivel 4 de algebrización.

<table>
<tr><th>Configuraciones epistémicas asociadas</th><th>Ejemplo</th></tr>
<tr><td>Configuración 8:
En esta solución se observa que el estudiante reconoce las incógnitas y los parámetros del sistema de ecuaciones planteado. Reconoce las características del sistema de ecuaciones lineales con infinitas soluciones, a partir de ello aplica la propiedad que se cumple con ese tipo de sistemas de ecuaciones lineales para hallar el valor de los parámetros. El lenguaje utilizado en esta solución se da de manera natural, numérica y algebraica. Por todo lo explicado, esta configuración tiene los rasgos algebraicos correspondientes al nivel 4 de algebrización.</td><td>Resolución de la situación problema 8:
Como el sistema de ecuaciones lineales es compatible indeterminado, se cumple:
$$\frac{a}{1}=\frac{1}{b}=\frac{8}{9}$$
Entonces:
$$a=\frac{8}{9} \text{ y } \frac{1}{b}=\frac{8}{9}\rightarrow b=\frac{8}{9}$$
Por lo tanto:
$$a+b=\frac{8}{9}+\frac{9}{8}=\frac{145}{72}$$</td></tr>
<tr><td>Configuración 9:
En esta solución se observa que se ha realizado la justificación de la propuesta de un procedimiento general para resolver problemas de razonamiento matemático, considerando que detrás de ello se trata de la solución de una familia de sistemas de ecuaciones.
Para justificar plantean y resuelven un sistema de ecuaciones con presencia de parámetros, encontrando un sistema equivalente y aplicando el método de reducción para resolverlo. La solución queda en función de los parámetros.
Esto demuestra que en esta práctica matemática se observan rasgos algebraicos propios del nivel 4 de algebrización.</td><td>Resolución de la situación problema 9:
Obteniendo un sistema de ecuaciones equivalentes, tenemos:
$$\begin{cases} 2L+2P=2a \\ 4L+2P=b \end{cases}$$
$$2L=b\text{-}2a$$
$$L=\frac{b-2a}{2}$$
Reemplazando el valor de L en (1) y despejando P, obtenemos:
$$P=\frac{4a-b}{2}$$
De ambos procedimientos podemos concluir que el método mostrado en el ejemplo se justifica mediante el planteamiento y la resolución de un</td></tr>
</table>

	sistema de ecuaciones en la cual se expresan algunas cantidades en parámetros. Además, sabiendo que para la familia del sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} 2L + 2P = 2a \\ 4L + 2P = b \end{cases}$ Donde a y b son parámetros Las soluciones serían: $P = \frac{4a-b}{2}$ y $L = \frac{b-2a}{2}$ Podemos concluir que: - $4a - b$ debe ser par, - $b - 2a$ es par, por lo tanto, b es par y $b > 2a$

Nota/Fuente. Elaboración propia.

3.5. A modo de síntesis

Al asociar cada configuración epistémica con los niveles de algebrización de los sistemas de ecuaciones lineales, podemos afirmar que tenemos evidencias de que al trabajar con los distintos significados del sistema de ecuaciones lineales en los diferentes niveles educativos de la educación básica regular nos permite ir desarrollando el RAE a lo largo de la escolaridad.

También hemos identificado que las situaciones problema correspondiente a las configuraciones epistémicas 2 y 3 pueden ser resueltas de formas distintas, las cuales se han descrito en las subconfiguraciones que se han formado para cada una de ellas. Cada una de las soluciones presentan diferentes rasgos algebraicos por lo que corresponden a niveles distintos de algebrización. Por lo tanto, podemos admitir que hay problemas que se pueden resolver de distintas maneras y dependiendo de cómo se resuelvan podemos reconocer en esas prácticas matemáticas algunos rasgos de un nivel. El profesor de matemática debe ser consciente de esto, pues si quisiera desarrollar un razonamiento algebraico de mayor nivel, no debería proponer tareas que se puedan resolver con técnicas y procedimientos de solución que tengan rasgos algebraicos de un nivel menor.

Asimismo, se debe tomar en cuenta que hay problemas que son tan complejos, que no se pueden resolver con los procedimientos más básicos. Sin embargo, también tenemos situaciones problema que son más simples de resolver y, por lo tanto, puede ser muy forzado utilizar un método formal de sistemas de ecuaciones lineales para su resolución. Por ello, es importante que el maestro de matemática, a partir de las configuraciones epistémicas sobre los sistemas de ecuaciones lineales, pueda elegir los tipos de problemas que favorezcan el desarrollo del RAE en sus estudiantes, según el nivel educativo. Cuanto más desarrollado se tenga el RAE, se utilizará los métodos formales para resolver de manera más eficaz un determinado problema sobre dicho objeto matemático.

Resaltamos la importancia de que el maestro de matemática del nivel primaria y nivel secundario conozca y comprenda cómo progresa el aprendizaje sobre los sistemas de ecuaciones lineales a lo largo de la EBR para desarrollar el razonamiento algebraico elemental de sus estudiantes. Con la finalidad de aportar con esta necesidad, haremos una propuesta de articulación entre lo que el Currículo Nacional propone sobre los sistemas de ecuaciones lineales con las configuraciones epistémicas que hemos construido en el capítulo 2 y los niveles de algebrización para los sistemas de ecuaciones lineales.

3.6. Los sistemas de ecuaciones lineales y el desarrollo del razonamiento algebraico elemental en la EBR.

Como nuestro objetivo apunta a identificar situaciones problemas que involucran sistemas de ecuaciones lineales, en algunos de sus significados, que se abordan en los diferentes grados de la EBR y a relacionar las prácticas matemáticas que emergen al resolver dichas situaciones con los rasgos descritos en el modelo de niveles del RAE, lo que nos toca ahora es relacionar lo que se propone en el Currículo Nacional (PERÚ, 2016) respecto a los sistemas de ecuaciones lineales, con las configuraciones epistémicas presentadas en el capítulo 2 y los niveles de algebrización relacionados a los objeto matemático en estudio. Para ello, haremos una breve revisión del Currículo Nacional (PERÚ, 2016) para identificar cómo se abordan los sistemas de ecuaciones lineales a lo largo de la escolaridad peruana.

En el Currículo Nacional (2016) se presenta la organización de la Educación Básica Regular en tres niveles educativos: Educación Inicial, Educación Primaria y Educación Secundaria. Asimismo, establece siete ciclos los cuales están conformados por grados, tal como se muestra en la figura 22:

Figura 22. *Niveles, ciclos y grados de la Educación Básica Regular*

EDUCACIÓN BÁSICA REGULAR													
NIVELES	Inicial		Primaria						Secundaria				
CICLOS	I	II	III		IV		V		VI		VII		
GRADOS	años	años	1º	2º	3º	4º	5º	6º	1º	2º	3º	4º	5º
	0-2	3-5											

Fuente: Tomado de PERÚ (2016, p159)

En el Currículo Nacional (PERÚ, 2016) también se descubren las competencias que deben desarrollar los estudiantes en las diversas áreas curriculares, entendiéndolo por competencia a la facultad que tiene una persona de combinar sus capacidades para resolver un determinado problema. En particular, el área curricular del área de Matemática se presentan cuatro competencias, las cuales son:

- Resuelve problemas de cantidad.
- Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.
- Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.
- Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre.

Cada una de las competencias incluyen capacidades, las cuales se refieren al conjunto de conocimientos, habilidades y actitudes que los estudiantes ponen en juego al afrontar una situación determinada. Como nuestro objeto de estudio son los sistemas de ecuaciones lineales, nos centraremos en analizar la competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio, ya que lo contiene como tema a abordar. Según el Currículo Nacional (PERÚ, 2016), en dicha competencia se establecen las siguientes capacidades que los estudiantes deben desarrollar:

- **Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas:** significa transformar los datos, valores desconocidos, variables y relaciones de un problema sobre sistema de ecuaciones lineales a una expresión gráfica o algebraica (modelo) que generalice la interacción entre estos. Implica también evaluar el resultado o la expresión formulada con respecto a las condiciones de la situación; y formular preguntas o problemas a partir de una situación o una expresión.
- **Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas:** significa expresar su comprensión de la noción, concepto o propiedades de los sistemas de ecuaciones lineales estableciendo relaciones entre estas; usando lenguaje

algebraico y diversas representaciones. Así como interpretar información que presente contenido algebraico.

- **Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales:** es seleccionar, adaptar, combinar o crear, procedimientos, estrategias y algunas propiedades para simplificar o transformar los sistemas de ecuaciones lineales que le permitan resolver ecuaciones, determinar dominios y rangos, representar rectas, parábolas, y diversas funciones.
- **Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia:** significa elaborar afirmaciones sobre variables, reglas y propiedades algebraicas de los sistemas de ecuaciones lineales, razonando de manera inductiva para generalizar una regla y de manera deductiva probando y comprobando propiedades y nuevas relaciones.

Podemos observar en las descripciones de estas capacidades algunos de los objetos primarios que hemos ido analizando en las configuraciones epistémicas sobre sistema de ecuaciones lineales, pues mencionan lenguajes, conceptos, propiedades y proposiciones, procedimientos y argumentos que el estudiante pone en juego para resolver una situación problema, en particular, relacionados con los sistemas de ecuaciones lineales. Además, podemos evidenciar que en estas capacidades está inmerso el desarrollo del lenguaje algebraico, el proceso de generalización, el tratamiento y conversiones que se pueden dar entre las diversas representaciones de un objeto matemático que corresponda a esta competencia, las cuales son características propias de los rasgos algebraicos en una práctica matemática. Ello permite afirmar que se busca desarrollar el razonamiento algebraico elemental durante la EBR.

En el Currículo Nacional también se declaran estándares para la competencia de Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio. Estos son descripciones del desarrollo de la competencia en niveles de creciente complejidad, a lo largo de toda la EBR, haciendo referencia en las capacidades que se ponen en acción al resolver o enfrentar situaciones problema. Para poder conocer cómo progresa el desarrollo de la competencia al resolver situaciones problema que implican sistemas de ecuaciones lineales, presentaremos la adaptación de los estándares a partir del ciclo IV hasta el ciclo VII de la Educación Básica Regular. En este trabajo no consideraremos los tres primeros ciclos, pues al identificar las situaciones problema para la construcción de nuestro significado de referencia, no se encontró evidencia de situaciones sobre sistemas de ecuaciones lineales que se aborden en dichos ciclos de la escolaridad.

A continuación, en la Tabla 22 presentaremos los indicadores de los estándares por ciclo de la competencia resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio, que permitan evidenciar la gradualidad de la competencia al trabajar con los sistemas de ecuaciones lineales a lo largo de la educación básica regular.

Tabla 21

Estándares de la competencia resuelve problemas de regularidad equivalencia y cambio, relacionado a los sistemas de ecuaciones lineales.

Ciclos	Indicadores del estándar
IV **3° y 4° primaria**	Resuelve problemas que presentan equivalencias traduciéndolas a igualdades que contienen operaciones aditivas o multiplicativas. Expresa su comprensión del signo igual para expresar equivalencias. Emplea estrategias, la descomposición de números, cálculos sencillos para resolver las igualdades. Asimismo, usa un lenguaje matemático y diversas representaciones para describir las relaciones de igualdad entre los datos del problema. Hace afirmaciones sobre la equivalencia entre expresiones y las propiedades de la igualdad, las justifica con argumentos y ejemplos concretos.
V **5° y 6° primaria**	Resuelve problemas de equivalencias traduciéndolas a ecuaciones (Por ejemplo: (ax + b = c) que combinan las cuatro operaciones. Expresa su comprensión del significado de los símbolos o letras en la ecuación. Emplea recursos, estrategias y propiedades de las igualdades para resolver ecuaciones. Realiza afirmaciones a partir de sus experiencias concretas, las justifica con ejemplos, procedimientos, y propiedades de la igualdad.
VI **1°y 2° de secundaria**	Resuelve problemas de equivalencias entre dos magnitudes o entre expresiones; traduciéndolas a ecuaciones que combinan las cuatro operaciones. Resuelve problemas referidos a ecuaciones con una incógnita. Comprueba si la expresión algebraica usada expresó o reprodujo las condiciones del problema. Expresa su comprensión de: las diferencias entre una ecuación e inecuación lineal y sus propiedades; las usa para interpretar enunciados, expresiones algebraicas o textos diversos de contenido matemático. Selecciona, emplea y combina recursos, estrategias, métodos gráficos y procedimientos matemáticos para determinar, simplificar expresiones algebraicas y dar solución a ecuaciones lineales. Plantea afirmaciones sobre propiedades de las ecuaciones y las justifica mediante ejemplos y propiedades matemáticas; encuentra errores o vacíos en las argumentaciones propias y las de otros y las corrige.
VII **3°, 4° y 5° de secundaria**	Resuelve problemas referidos a analizar valores o expresiones, traduciéndolas a expresiones algebraicas que pueden contener sistema de ecuaciones lineales. Evalúa si la expresión algebraica reproduce las condiciones del problema. Expresa su comprensión de conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales; las usa para interpretar enunciados o textos o fuentes de información usando lenguaje matemático y gráficos. Selecciona, combina y adapta variados recursos, estrategias y procedimientos matemáticos para solucionar ecuaciones lineales; evalúa y

	opta por aquellos más idóneos según las condiciones del problema. Plantea afirmaciones sobre enunciados opuestos o casos especiales que se cumplen entre expresiones algebraicas; comprueba o descarta la validez de la afirmación mediante contraejemplos y propiedades matemáticas.

Nota/Fuente. Adaptado de Currículo Nacional (Perú 2016), p.136.

A partir de la información que nos brinda la tabla 22, podemos afirmar lo siguiente:

Si bien es cierto observamos que los sistemas de ecuaciones lineales se abordan en el ciclo VII, consideramos que en los niveles IV, V y VI se pueden ir planteando situaciones problemas referidas a algunos de los significados de sistema de ecuaciones lineales, las cuales se pueden resolver empleando operaciones aritméticas o representaciones gráficas como el modelo de barras, sin necesidad de plantear un sistema de ecuaciones lineales ni resolver con un método formal, tal como se mostró en las configuraciones epistémicas 1 y 2.

Asimismo, de los indicadores del estándar se puede interpretar que los procesos algebraicos también van progresando a lo largo de la escolaridad. Por ejemplo, en el nivel IV hay ausencia de simbolización, pues las representaciones que realiza para resolver problemas son numéricas y gráficas. Para el nivel V se evidencia la presencia de símbolos y la representación de ecuaciones de la forma $x + a = b$, empleando operaciones aritméticas para encontrar el valor desconocido. Hacia el ciclo VII ya se evidencia el tratamiento de los símbolos, pues ya se resuelven problemas sobre sistemas de ecuaciones lineales. Por lo mencionado, podemos afirmar que también se evidencia que en la educación básica regular se propicia el desarrollo del razonamiento algebraico a lo largo de la escolaridad.

A partir de la identificación realizada, en la tabla 18 presentaremos las configuraciones epistémicas de tareas que involucran sistemas de ecuaciones lineales en los ciclos de la EBR y su relación con los niveles de algebrización.

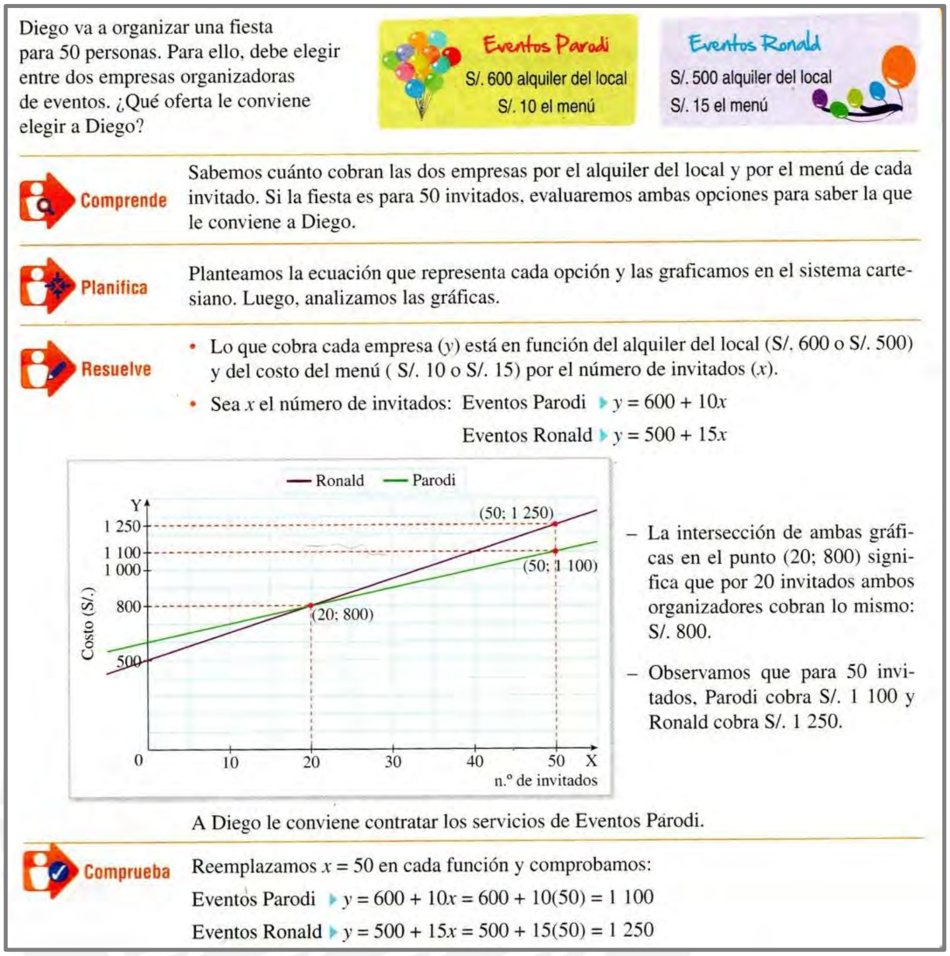
Tabla 22

Configuraciones epistémicas de tareas que involucran sistemas de ecuaciones lineales en los ciclos de la EBR y su relación con los niveles de algebrización

Ciclos de la EBR	Niveles del RAE
Ciclo IV	**Nivel 0:** En este ciclo se espera que el estudiante resuelva problemas aditivos y multiplicativos con números naturales y fracciones, lo que implica que

	representen los datos del problema mediante igualdades que contengan las cuatro operaciones. Emplean implícitamente propiedades de la adición y multiplicación (asociativa, conmutativa), así como estrategias de la descomposición de números y otros para realizar cálculos sencillos. La configuración epistémica que corresponde a la descripción es la configuración 1.
	Nivel 1: El estudiante traduce los datos de problemas aditivos y multiplicativos a igualdades que contengan las cuatro operaciones. Para resolverlas, utiliza representaciones gráficas, como el modelo de barras para representar los valores desconocidos, de tal manera que le permita visualizar, comprender y describir las relaciones de igualdad. Puede utilizar símbolos para representar los datos desconocidos, pero no realiza operaciones entre dichos símbolos. El análisis y discusión se realizan en lenguaje natural, numérico o icónico. Las configuraciones que se relacionan con la descripción de este nivel para este ciclo es la sub configuración 1.1
Ciclo V	**Nivel 1** Traduce una o más acciones de comparar, igualar, repetir, repartir cantidades a expresiones aditivas o multiplicativas. Selecciona y emplea estrategias, tales como el método de falsa suposición, en la cual encuentra relaciones entre los datos del problema que le permiten ir reduciendo los casos para encontrar la solución. Asimismo, puede usar la representación tabular para ir encontrando las relaciones entre las magnitudes que intervienen en el problema Se evidencia que la justificación o los argumentos se dan en lenguaje natural y numérico. Realiza afirmaciones a partir de sus experiencias concretas, las justifica con ejemplos, procedimientos, y propiedades de la igualdad. Las configuraciones epistémicas que se relaciona con la descripción de este nivel para este ciclo son: la configuración 2 y la sub configuración 2.1.

	Nivel 2 El estudiante resuelve problemas de equivalencias traduciéndolas a ecuaciones de una incógnita que combinan las cuatro operaciones. Si bien en este nivel el estudiante no puede resolver el problema de sistemas de ecuaciones lineales utilizando métodos formales, puede representar gráficamente (por ejemplo, el modelo de barras) las equivalencias, a partir de ello puede plantear y resolver ecuaciones de la forma ax+b=c, donde a, b y c ϵQ^{+}. Expresa su comprensión del significado de los símbolos o letras en la ecuación. Emplea recursos, estrategias y propiedades de las igualdades para resolver ecuaciones. Realiza sus afirmaciones usando un lenguaje natural, numérico y algebraico. Las configuraciones que se relacionan con la descripción de este nivel para este ciclo es la configuración 3.
Ciclo VI	**Nivel 3** Si bien, en las descripciones del estándar en este ciclo no aparecen los sistemas de ecuaciones lineales, el estudiante utiliza implícitamente los sistemas de ecuaciones lineales como herramienta para resolver situaciones de contexto intramatemático o extramatemático. Por ejemplo, el estudiante establece relaciones en los datos, valores desconocidos, o relaciones de equivalencia y las transforma a funciones afines. Expresa, usando un lenguaje algebraico, representaciones gráficas, tabulares y simbólicas, su comprensión sobre la relación de correspondencia entre las variables de una función afín. Analiza el gráfico de dos funciones afines, el cual representa a un sistema de ecuaciones e interpreta el conjunto solución de acuerdo con el contexto del problema. La configuración 5 se relaciona con la descripción de este nivel para este ciclo. Ejemplo: **Figura 20.** Situación problema 10

	 Diego va a organizar una fiesta para 50 personas. Para ello, debe elegir entre dos empresas organizadoras de eventos. ¿Qué oferta le conviene elegir a Diego? **Comprende** Sabemos cuánto cobran las dos empresas por el alquiler del local y por el menú de cada invitado. Si la fiesta es para 50 invitados, evaluaremos ambas opciones para saber la que le conviene a Diego. **Planifica** Planteamos la ecuación que representa cada opción y las graficamos en el sistema cartesiano. Luego, analizamos las gráficas. **Resuelve** • Lo que cobra cada empresa (y) está en función del alquiler del local (S/. 600 o S/. 500) y del costo del menú (S/. 10 o S/. 15) por el número de invitados (x). • Sea x el número de invitados: Eventos Parodi ▸ $y = 600 + 10x$ Eventos Ronald ▸ $y = 500 + 15x$ – La intersección de ambas gráficas en el punto (20; 800) significa que por 20 invitados ambos organizadores cobran lo mismo: S/. 800. – Observamos que para 50 invitados, Parodi cobra S/. 1 100 y Ronald cobra S/. 1 250. A Diego le conviene contratar los servicios de Eventos Parodi. **Comprueba** Reemplazamos $x = 50$ en cada función y comprobamos: Eventos Parodi ▸ $y = 600 + 10x = 600 + 10(50) = 1\ 100$ Eventos Ronald ▸ $y = 500 + 15x = 500 + 15(50) = 1\ 250$ *Fuente: Tomado de Santillana (2013, p296)*
Ciclo VII	**Nivel 3:** El estudiante establece relaciones entre datos, valores desconocidos y equivalencias transformándose a sistemas de ecuaciones lineales. Encuentra sistemas de ecuaciones lineales equivalentes para encontrar el conjunto solución. Asocia el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales a la representación gráfica. Realiza conversiones entre diferentes representaciones (algebraico, tabular, gráfico, etc.) de los sistemas de ecuaciones lineales. Asimismo, combina y adapta estrategias heurísticas, recursos, métodos de resolución (igualación, sustitución y reducción) o procedimientos óptimos para resolver sistemas de ecuaciones lineales. El análisis y discusión se realizan en lenguaje natural, algebraico y gráfico.

	Además, puede manipular los símbolos o variables sin referir a la información del contexto. Las subconfiguraciones 2.3 y 3,2 y las configuraciones 4; 5; 6 y 7 están asociadas a este nivel de algebrización en el respectivo ciclo.
	Nivel 4: Resuelve situaciones en las que debe hallar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales en términos de parámetros, o en donde debe hallar un parámetro conociendo la solución del sistema. Emplea parámetros como registro numérico para expresar familias de sistemas de ecuaciones lineales. Identifica en la representación formal de un sistema de ecuaciones lineales cuáles son las incógnitas y reconoce que los coeficientes y las constantes pueden actuar como parámetros. El análisis y discusión se realiza en lenguaje algebraico y gráfico. Las configuraciones 8 y 9 están asociadas a este nivel de algebrización en el respectivo ciclo. Observación: Si bien, en los estándares de este ciclo no se explicita el uso del parámetro para la resolución de problemas sobre sistemas de ecuaciones lineales, en los libros revisados de los grados correspondientes a este ciclo sí se han encontrado situaciones problema que requieren el uso de parámetros. El estudiante al resolver estas situaciones pone en juego ciertas prácticas operativas y discursivas que tienen rasgos correspondientes al nivel 4 del RAE.

Nota/Fuente. Elaboración propia.

CONSIDERACIONES FINALES

En este capítulo se presentan las principales conclusiones con respecto a los objetivos propuestos para este trabajo, así como sus implicancias. Asimismo, mostraremos en qué medida los elementos teóricos tomados en cuenta para este trabajo confirman la validez de los resultados de esta investigación. Finalmente, proponemos algunas recomendaciones sobre problemas abiertos para futuras investigaciones en base a los resultados de esta investigación.

Sobre los antecedentes de esta investigación

En el primer capítulo se presentaron diversas posturas sobre el álgebra escolar y lo que significa razonar algebraicamente, así como otras relacionadas con los sistemas de ecuaciones lineales desde diversas perspectivas propias de la Didáctica de las Matemáticas. Diversos autores mencionan la importancia del rol del maestro para poder desarrollar el razonamiento algebraico elemental de sus estudiantes, tal como lo mencionan Godino, Aké y Gonzato (2014), es importante que el profesor de Educación Primaria conozca cómo se desarrolla el razonamiento algebraico elemental de sus estudiantes, pues esto le ayudará a diseñar y proponer tareas matemáticas que permitan que dicho razonamiento evolucione progresivamente en la educación primaria.

Para ello, se requiere que el docente cuente con herramientas que le permitan reconocer los rasgos algebraicos en las prácticas matemáticas, y para responder a esta necesidad hay investigadores como Gaita y Wihelmi (2019) que se interesaron por proponer una adaptación de los niveles de algebrización propuestos por el EOS, en tareas sobre patrones, lo cual muestra que sí es posible describir los rasgos algebraicos a lo largo de la escolaridad. En la misma línea, Godino y Burgos (2020) analizaron los diversos significados de la proporcionalidad aplicando herramientas teóricas del EOS, lo que implica describir sistemas de prácticas operativas y discursivas relativas a la resolución de tipos de problemas e incorporando el modelo de niveles de algebrización de la actividad matemática.

Tomando en cuenta el aporte de estas investigaciones, admitimos que es posible caracterizar las prácticas matemáticas al resolver problemas referidos a cualquier objeto algebraico, de modo que permita el desarrollo del razonamiento algebraico. Es así, que nos centramos en identificar las diversas situaciones problemas sobre los sistemas de ecuaciones lineales cuya solución puede potenciar el desarrollo del razonamiento algebraico.

Sobre los objetivos de esta investigación

En esta tesis se planteó como objetivo: *Reconocer las potencialidades que tienen los problemas sobre sistemas de ecuaciones lineales para desarrollar el RAE en la educación básica regular.* Para alcanzarlo, se propusieron dos objetivos específicos:

- *Identificar y organizar situaciones problemas sobre los sistemas de ecuaciones lineales que se abordan en la educación básica regular peruana.*

Para ello, se identificaron situaciones problema en textos de todos los grados de la educación básica regular que involucraron a los sistemas de ecuaciones lineales. Para ello, con las herramientas del EOS definimos lo que se entiende por sistemas de ecuaciones lineales, como prácticas matemáticas que emergen al resolver una situación problema en la que se presentan datos conocidos, incógnitas y relaciones de igualdad. Esta definición nos sirvió como referencia para identificar dichas situaciones problema al analizar los textos escolares oficiales y no oficiales de la EBR, así como otras investigaciones y libros relacionados a nuestro objeto matemático en estudio.

La identificación de dichos problemas fue inmediata al revisar los textos de educación secundaria, sin embargo, en los libros de nivel primario no estaban explícito el tema de sistemas de ecuaciones lineales, por lo que tuvimos que revisar otras situaciones correspondientes a otras competencias que nos presenta el currículo peruano para el área de Matemática, pero que cumplían con las características propuestas en la definición de sistema de ecuaciones lineales desde la postura que asumimos del EOS.

Una vez que determinamos dichas situaciones, nos fijamos en la estructura subyacente del sistema de ecuaciones que se formaba detrás cada situación; esta nos sirvió como criterio para organizarlas, pues reconocimos que muchas de estas situaciones compartían la misma estructura de sistema subyacente. De esta manera, logramos formar familias de situaciones problemas sobre sistemas de ecuaciones lineales.

Luego, se identificaron los objetos primarios que emergían de las prácticas matemáticas al resolver cada familia de situaciones problemas, es decir, describimos los lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos que se ponían en juego al resolver dichas situaciones, formando así nuestras configuraciones epistémicas. A partir de ello, planteamos que cada una de estas configuraciones estará asociado a un significado de los sistemas de ecuaciones lineales. Además, con esto logramos constatar que las situaciones problema sobre los sistemas de ecuaciones lineales se pueden abordar desde la Educación Primaria, sin necesidad de recurrir al planteamiento formal del sistema o a los métodos de solución ya conocidos, sino más bien haciendo uso de otras técnicas de solución que están al alcance del estudiante.

Por ello, podemos afirmar que este trabajo permitió elaborar una propuesta para el significado de referencia institucional sobre los sistemas de ecuaciones lineales en la EBR.

En relación con el segundo objetivo específico:

- *Relacionar los niveles de algebrización del RAE en las prácticas matemáticas desarrolladas para resolver las situaciones problemas sobre sistemas de ecuaciones lineales.*

El primer paso fue adaptar los niveles del razonamiento algebraico elemental, propuesto por el EOS, teniendo en cuenta los tipos de lenguajes que se usan, la generalización y los tratamientos que caracterizan las prácticas matemáticas al resolver problemas sobre sistemas de ecuaciones lineales. Cabe mencionar que la adaptación que propusimos solo fue hasta el nivel 4 de algebrización, puesto que, al analizar las configuraciones epistémicas planteadas, nos dimos cuenta de que en la resolución de algunas de las situaciones problemas se evidenciaban el uso de parámetros como registro numérico y para expresar familias de sistemas de ecuaciones lineales, los cuales son rasgos característicos de dicho nivel.

Así pues, con la propuesta de adaptación de los niveles de algebrización pasamos a reconocer los rasgos algebraicos de cada una de las configuraciones epistémicas construidas en el objetivo anterior para asociarlas a un nivel de algebrización. Con esto también logramos evidenciar cómo un mismo problema se puede representar de diversas formas y resolver utilizando diferentes lenguajes y métodos en las que se pueden distinguir rasgos de diferentes niveles de algebrización.

Posteriormente, se hizo una revisión de las capacidades y estándares referidos a la competencia de Regularidad, equivalencia y cambio propuestos en el Currículo Nacional (PERÚ, 2016) para conocer la gradualidad de cómo se abordan los sistemas de ecuaciones lineales en la EBR. A partir de ello, realizaremos las conexiones entre los estándares, configuraciones epistémicas y los niveles de algebrización que se pueden desarrollar en cada ciclo de la EBR al resolver situaciones problema sobre ecuaciones lineales, en cualquiera de sus significados. Durante este proceso logramos darnos cuenta de que el planteamiento de dichas situaciones se puede abordar a partir del ciclo IV de la EBR, pues antes de dicho ciclo no hay evidencia de ello.

De esta manera mostramos que, a lo largo de la escolaridad, desde la Educación Primaria hasta la Educación Secundaria, es posible proponer situaciones problemas sobre sistemas de ecuaciones lineales de menor a mayor demanda en términos de razonamiento algebraico. Y, si estas situaciones se organizan adecuadamente, se contribuirá con la evolución de este tipo de razonamiento a lo largo de toda la escolaridad.

Sobre los elementos teóricos de esta investigación

Para esta investigación utilizamos como elementos teóricos algunos supuestos teórico y herramientas que nos proporciona el EOS.

Tal como lo comentamos en el segundo capítulo, los supuestos teóricos como práctica matemática, objeto matemático y tipos de significados, nos permitieron definir lo que se entiende por sistema de ecuaciones lineales desde el EOS. Con esta definición procedimos con la búsqueda de las situaciones problemas que se abordan en la EBR sobre el objeto matemático en estudio.

Para la construcción de nuestro significado de referencia institucional sobre los sistemas de ecuaciones lineales en la EBR utilizamos a herramienta de configuraciones epistémicas, las cuales nos permiten realizar el análisis de los objetos primarios (las situaciones problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) que se ponen en juego al resolver las situaciones problemas seleccionadas previamente.

Otro elemento teórico importante que utilizamos en el tercer capítulo son los niveles del RAE, pues a partir de los rasgos algebraicos descritos en cada nivel logramos adaptarlos para proponer los niveles de algebrización relacionados a las tareas sobre sistemas de ecuaciones lineales. Con esto logramos reconocer los rasgos algebraicos de cada una de las configuraciones epistémicas para asignarlas al nivel de algebrización correspondiente y, posteriormente, conectarlas con los estándares que se proponen en la EBR sobre los sistemas de ecuaciones lineales. De esta manera alcanzamos a reconocer cómo las situaciones problemas sobre los sistemas de ecuaciones lineales contribuyen al desarrollo del RAE a lo largo de la escolaridad de EBR peruana.

Sobre problemas abiertos para futuras investigacion

En la presente investigación se pudo demostrar que los sistemas de ecuaciones lineales es un tema transversal que se puede abordar en la EBR y que, a su vez, propicia el desarrollo del RAE. Por ello, consideramos que este trabajo puede servir como referencia para futuras investigaciones que tengan como foco el reconocimiento de las potencialidades de otros temas matemáticos que se abordan a lo largo de la escolaridad y que contribuyan al desarrollo del

RAE. A partir de esto, presentamos los posibles temas que se puedan desarrollar en otras investigaciones:

- El significado de referencia propuesto sobre los sistemas de ecuaciones lineales, a partir de las configuraciones epistémicas construidas en este trabajo, puede servir para el diseño de situaciones didácticas, tanto para el nivel primario como el secundario, en las que se propongan situaciones problemas idóneas que propicien el empleo de diferentes lenguajes, proposiciones, procedimientos y argumentos para el aprendizaje de dicho objeto matemático de acuerdo con el grado o el nivel educativo dirigido. Esto permitirá tener una mirada global y específica de cómo el aprendizaje sobre los sistemas de ecuaciones lineales progresa a lo largo de la escolaridad.
- La metodología usada en esta investigación para la adaptación de los niveles de algebrización a los sistemas de ecuaciones lineales, puede ser útil para realizar otras adaptaciones relacionados a distintos objetos algebraicos, de modo que permita describir los rasgos algebraicos que se evidencien en la práctica matemática al resolver situaciones problema sobre un determinado objeto algebraico.
- Acciones formativas dirigidas a los docentes en formación continua, futuros profesores y a los formadores de profesores de matemática para identificar los rasgos y procesos algebraicos que intervienen en las prácticas matemáticas al resolver problemas sobre sistemas de ecuaciones lineales y distinguirlas considerando las características de los niveles de algebrización.

- Consideramos que el conocimiento del docente de matemática no solo se restringe en dominar los métodos formales para resolver sistemas de ecuaciones lineales para enseñarlos en un determinado grado, sino que debe ser capaz de:

  - Reconocer los diferentes significados de los sistemas de ecuaciones lineales y analizar los objetos algebraicos que intervienen en la práctica matemática.

  - Conocer cómo se aborda el aprendizaje de dicho objeto matemático, de manera implícita o explícita, en el currículo de la EBR y en posteriores niveles educativos.

  - Reconocer los rasgos algebraicos que se evidencian en las prácticas matemáticas al resolver problemas sobre los sistemas de ecuaciones lineales.

- Proponer actividades sobre sistemas de ecuaciones lineales, pertinentes al grado y que contribuyan al desarrollo del RAE.

Dichos conocimientos que debería tener el profesor de matemática sobre los sistemas de ecuaciones lineales y el RAE están relacionadas algunas de las facetas modelo del conocimiento didáctico matemático (CDM), propuesto por el EOS. Por ello, consideramos importante que se puedan proponer trabajos enfocados en CDM sobre los sistemas de ecuaciones lineales y el RAE.

REFERENCIAS

Aké, L. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación.* Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada

Aké, L., Godino, J. D., Fernández, T., y Gonzato, M. (2014). *Ingeniería didáctica para desarrollar el sentido algebraico de maestros en formación*. Avances de Investigación en Educación Matemática, (5).

Ban, Y. (2010). *Bar Modeling; A problem-solving Tool.* Teaching to Mastery Mathematics. Singapore: Marshall Cavendish Education.

Ban, Y. (2017). *Piensa Infinito 1º. Matemáticas Metodología Singapur. Libro 1A*. Lima, Perú: Editorial SM.

Ban, Y. (2017). *Piensa Infinito 2º. Matemáticas Metodología Singapur. Libro 2A*. Lima, Perú: Editorial SM.

Ban, Y. (2017). *Piensa Infinito 3º. Matemáticas Metodología Singapur*. Libro 3A. Lima, Perú: Editorial SM.

Bolea, P. (2003) *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. (Tesis doctoral) Universidad de Zaragoza, España.

Burgos, M. (2020). *Niveles de algebrización en el razonamiento proporcional desde las perspectivas institucional y personal. Implicaciones para la formación de profesores de matemáticas.* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, España.

Campos, M. (2018). *Los sistemas de ecuaciones lineales como instrumento de modelización en la secundaria.* Tesis de Maestría. Pontificia Universidad Católica del Perú.

Cárdenas, C. (2018) *Identificación del conocimiento didáctico matemático, en la faceta epistémica y ecológica, del profesor de educación secundaria sobre los sistemas de ecuaciones lineales*. Tesis de Maestría. Pontificia Universidad Católica del Perú.

Gaita, R. y Wilhelmi, M. R. (2019). *Desarrollo del Razonamiento Algebraico Elemental mediante Tareas de Recuento con Patrones*. Bolema: Boletim de Educação Matemática, 33, 269-289.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.* ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39, 127-135.

Godino, J.D. (2009). *Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas [Categories for analysing the knowledge of mathematics teachers].* Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática 20, 13-31.

Godino, J., Castro W., Aké, L., y Wilhelmi, M. R. (2012). *Naturaleza del razonamiento algebraico elemental.*

Godino, J., Batanero, C., Contreras, Á., Estepa, A., Lacasta, E., y Wilhelmi, M. (2013*). La ingeniería didáctica como investigación basada en el diseño.* Turquia: CERME, 8.

Godino, J., Aké, L. P., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2014). *Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros*. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 32(1), 199-219.

Godino, J. y Pino-Fan, L. (2014) *Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor.* Paradigma, 36(1), 87-109.

Godino, J. (2009). *Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas.* UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20, 13-31.

Godino, J., Neto, T., Wilhelmi, M., Aké, L., Etchegaray, S., y Lasa, A. (2015). *Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica*. Avances de Investigación en Educación Matemática, (8).

Godino, J., Aké, L., Contreras, Á., Estepa, A., Fernandez, T., Neto, T. y Lasa, A. (2015). *Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental.* Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 33(1), 127-150.

Kieran, C. (2006). *Research on the learning and teaching algebra.* En A. Gutiérrez, P. Boero (eds.), Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future, pp. 11-49.

Kaput, J. (1998, May). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. In The nature and role of algebra in the K-14 curriculum:* Proceedings of a national symposium (pp. 25-26). Washington, DC: National Research Council, National Academy Press.

Mansilla, L., Muñoz, O., Chávez, J., Támara H., Meza M. y Cristóbal H. (2019). *Resolvamos problemas 3, Secundaria: cuaderno de trabajo de Matemática 2020*.

Ríos, B. y Sánchez F. (2019). *Matemática 12: cuaderno de trabajo para segundo grado de Educación Primaria 2020*.

Ríos, B. y Sánchez F. (2019). *Matemática 2: cuaderno de trabajo para segundo grado de Educación Primaria 2020*.

Ríos, B. y Sánchez F. (2019). *Matemática 3: cuaderno de trabajo para segundo grado de Educación Primaria 2020.*

PERÚ, Ministerio de Educación del. (2016). *Currículo Nacional de la Educación Básica*. Lima, Perú: MINEDU. Recuperado de: http://www.minedu.gob.pe/currículo/

Supo, R. (2021) *Valoración de la propuesta educativa de los colegios Innova Schools para el desarrollo del RAE a través de la noción de linealidad*. Tesis de Maestría. Pontificia Universidad Católica del Perú.

Teacher Resource Centrer (s.f.). *Teacher Resource Center*. Recuperado el 10 de noviembre de 2021 de https://trcvivo.innovaschools.edu.pe/contenido

Ugarte, F., Da Silva, M. y Gaita C. (2019). *A componente tecnológica-teórica dos sistemas de duas equações lineares na educação básica The technological-theoretical component of the systems of two linear equations in basic education*. Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, 21(5).