УДК 539.3
https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.23

Онишкевич В. М.[1], к.ф.-м.н., доц.,
Барабаш Г. М.[2], к.ф.-м.н., доц.

Фрикційний розігрів системи штамп-пружна півплощина при ковзанні вздовж твірної

[1] Національний лісотехнічний університет України, 79057, м. Львів, вул. Генерала Чупринки, 103,
e-mail: onyshkevych@nltu.edu.ua
[2] Львівський національний університет імені Івана Франка, 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1,
e-mail: galynabarabash71@gmail.com

V. M. Onyshkevych[1], Ph. D. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.,
G. M. Barabash[2], Ph. D. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.

Frictional heating of system punch - elastic half plane when sliding along creative line

[1] Ukrainian National Forestry University, 79057, L'viv, General Chuprynka str., 103,
e-mail: onyshkevych@nltu.edu.ua
[2] Ivan Franko National University of L'viv, 79000, L'viv, Universytetska str., 1,
e-mail: galynabarabash71@gmail.com

Розглядається фрикційний розігрів системи штамп-пружна півплощина при русі штампа прямолінійно уздовж своєї твірної з деякою швидкістю. Для математичного опису контакту використано модель так званого «третього тіла» – тонких приповерхневих і проміжкових шарів контактуючих тіл, фізико-механічні властивості яких відрізняються від властивостей тіл контактної пари, та мікрогеометрією поверхонь тіл у зоні контакту. Розв'язок задачі термопружності для півплощини побудовано за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. Задачу теплопровідності для штампа розв'язано методом прямих. Для визначення наперед невідомої області контакту застосовано ітераційну схему, яка на кожному кроці передбачає контроль знаку нормальних напружень у області, де передбачено безпосередній контакт тіл. Для моделювання нестаціонарної задачі запропоновано метод рухомої лінії розділу граничних умов.
Ключові слова: контакт, тертя, розігрів, термопроникність.

Friction heating of system punch-elastic half plane when sliding along creative line is considered. Model of so-called "third body", i.e., thin near-surface and intermediate layers, the physical and mechanical properties of which differ from those of the interacting bodies, and by the microgeometry of their surfaces in the contact zone, used for mathematical description of contact. The method of determination of thermal contact conductance in mathematical modelling of contact interaction with considering friction and hear generation by "third body" is presented. Using of modified conditions of heat contact in mathematical model of contact thermoelasticity, taking into account of friction and heat generation is proposed. The solution of the problem of thermoelasticity for a half-plane is obtained by means of the Fourier integral transformation. Heat conductivity problem for the punch is solved by method of straight lines. The system obtained of dual integral equations is reduced to the system of linear algebraic equations by means of points collocation method. Formulas for thermal fields, heat fluxes and contact stresses are proposed. In order to obtain the unknown contact area, the iterative scheme based on a control of a sign of normal stresses in the immediate contact interaction zones is used. Method of moving line of separation of boundary conditions is proposed.
Key Words: contact, friction, heating, thermal conductance.

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я. О.

1. Вступ

Дослідження перерозподілу теплових полів у парі тертя є актуальною і математично складною науково-технічною проблемою. Вперше плоска задача термопружності про тиск штампа з неповним контактом розглядалась в [1], де у випадку тепловіддачі від штампа до півплощини було встановлено втрату контакту на краях штампа і з'ясовано необхідність урахування нелінійності задачі через зміну області контакту. Різноманітність чинників впливу на тепловий режим типологічної пари зумовлює складність опису та математичного моделювання такої задачі. Зокрема, дослідження контактної термопружності за наявності поверхневих теплофізичних неоднорідностей вперше було проведене в [2]. В [3] було обґрунтовано можливість математично моделювати режими тертя, зношування та теплоутворення за допомогою так званого «третього тіла» [4] – тонких приповерхневих і проміжкових шарів контактуючих тіл, фізико-механічні властивості яких відрізняються від властивостей тіл контактної пари, та мікрогеометрією поверхонь тіл у контактній зоні. Застосування «третього тіла» як математичної моделі контактної термопружності було використано в [5].

2. Постановка задачі

Нехай плоский штамп висоти *H* втискується силою *P* у пружну півплощину і рухається прямолінійно уздовж твірної поверхні з деякою сталою швидкістю *V*. Між верхньою поверхнею штампа, бічними поверхнями штампа і ненавантаженою поверхнею півплощини з одного боку та зовнішнім середовищем з іншого здійснюється теплообмін за законом Ньютона з різними коефіцієнтами теплообміну. Тепловий контакт між штампом і півплощиною неідеальний з коефіцієнтом теплопроникності контакту *h*. Від дії сили тертя на ділянці контакту відбувається теплоутворення, що пропорційне інтенсивності сили тертя. Температуру зовнішнього середовища вважаємо нульовою.

З урахуванням цього для розв'язання задачі необхідно проінтегрувати систему рівнянь

$$\mu\Delta u + (\lambda + \mu\,\partial\theta/\partial x) - \beta\,\partial t^{(2)}/\partial x = 0\,, \qquad (1)$$

$$\mu\Delta u + (\lambda + \mu\,\partial\theta/\partial y) - \beta\,\partial t^{(2)}/\partial y = 0\,, \qquad (2)$$

$$\Delta t^{(i)} = 0,\ \ i = 1, 2, \qquad (3)$$

де Δ – оператор Лапласа; $\theta = \partial u/\partial x + \partial u/\partial y$; *u* та *v* – компоненти вектора переміщень; λ та μ – коефіцієнти Ламе; $\beta = (3\lambda + 2\mu)\alpha_T$; α_T – температурний коефіцієнт лінійного розширення. При цьому треба врахувати температурні граничні умови:

$$y = 0:\ \partial t^{(1)}/\partial y = \gamma_0\, t^{(1)},\ \ |x| \le a; \qquad (4)$$

$$x = \pm a:\ \partial t^{(1)}/\partial x = \mp\gamma_a\, t^{(1)},\ \ |x| \le a;\,; \qquad (5)$$

$y = H$:

$$\lambda\,\Delta\left(t^{(1)} + t^{(2)}\right) + 2\left(\lambda^{(1)}\,\partial t^{(1)}/\partial n - \lambda^{(2)}\,\partial t^{(2)}/\partial n\right) = $$
$$= c\left(\dot t^{(1)} + \dot t^{(2)}\right) - 2Q\,,\ |x| \le a\,; \qquad (6)$$

$$\lambda\,\Delta\left(t^{(1)} - t^{(2)}\right) + 2\left(\lambda^{(1)}\,\partial t^{(1)}/\partial n + \lambda^{(2)}\,\partial t^{(2)}/\partial n\right) - $$
$$-12h\left(t^{(1)} - t^{(2)}\right) = c\left(\dot t^{(1)} - \dot t^{(2)}\right),\ |x| \le a\,; \qquad (7)$$

$$\partial t^{(2)}/\partial y = \gamma_H\, t^{(2)},\ \ |x| > a; \qquad (8)$$

та силові граничні умови:

$$y = H:\qquad v(x, H) = f(x) + \delta,\ |x| \le a; \qquad (9)$$

$$\sigma_y(x, H) = 0,\ |x| > a\,; \qquad (10)$$

$$\tau_{xy}(x, H) = 0,\ |x| < \infty\,; \qquad (11)$$

де задано γ_0, γ_a, γ_H – коефіцієнти теплообміну відповідно між верхньою поверхнею штампа, бічними поверхнями штампа, незавантаженою поверхнею півплощини з одного боку і зовнішнім середовищем з іншого, коефіцієнт теплопроникності контакту *h*, коефіцієнт тертя f_T, півширина штампа *a*, форма основи штампа $f(x)$, величина осідання штампа δ, коефіцієнти теплопровідності $\lambda^{(i)}$ (*i*=1 відноситься до штампа, *i*=2 – до півплощини); *n* – нормаль до поверхні контакту тіл; λ – зведена теплопровідність; Δ – двовимірний оператор Лапласа; *c* – зведена теплоємність; *Q* – інтенсивність теплових джерел.

Проведений в [4] числовий аналіз показав, що нехтування коефіцієнтом λ незначно впливає на розподіл температурних полів у тілах пари тертя, а суттєвий вплив на результати має коефіцієнт термопроникності контакту *h*. Тому для практичних розрахунків можна використати такі спрощені теплофізичні умови на ділянці контакту:

$$\lambda^{(1)}\,\partial t^{(1)}/\partial n - \lambda^{(2)}\,\partial t^{(2)}/\partial n = c\left(\dot t^{(1)} + \dot t^{(2)}\right)/2 - Q\,,$$

$$\lambda^{(1)}\,\partial t^{(1)}/\partial n + \lambda^{(2)}\,\partial t^{(2)}/\partial n - 2h\left(t^{(1)} - t^{(2)}\right) = c\left(\dot t^{(1)} - \dot t^{(2)}\right)/6$$

Ці граничні умови для сформульованої контактної задачі набувають такого вигляду:

$$\lambda^{(1)}\partial t^{(1)}/\partial y-\lambda^{(2)}\partial t^{(2)}/\partial y=-f_T V\sigma_y(x),\ \ |x|\le a\,; \quad (12)$$

$$\lambda^{(1)}\partial t^{(1)}/\partial y+\lambda^{(2)}\partial t^{(2)}/\partial y=h\left(t^{(2)}-t^{(1)}\right)0, |x|\le a \quad (13)$$

3. Розв'язок задачі

Використовуючи скінченно-різницеву апроксимацію рівняння теплопровідності для штампа і крайових умов (4) за координатою x, розв'язок задачі для штампа будується методом прямих і зводиться до системи лінійних диференціальних рівнянь типу

$$d\vec{s}/dy=A\vec{s}\ , \quad (14)$$

яка розв'язується за допомогою матричної експоненти.

Використовуючи загальний розв'язок рівнянь термопружності для півплощини в просторі трансформант Фур'є та задовольняючи граничні умови $(6)-(11)$, задачу зведено до системи парних інтегральних рівнянь. Подаючи невідомі контактні напруження $\sigma_y(x)$ та невідому функцію $\psi(x)$ у вигляді рядів Фур'є та замінюючи в інтегральних рівняннях інтеграли на суми, отримаємо співвідношення:

$$\frac{\lambda+2\mu}{\mu(\lambda+\mu)}\sum_{n=-N}^{N}a_n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\xi a+\pi n)}{|\xi|(\xi+\pi n/a)}e^{-i\xi x}d\xi+\frac{\beta(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\cdot$$

$$\cdot\sum_{n=-N}^{N}b_n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\xi a+\pi n)}{|\xi|(\gamma_H+|\xi|)(\xi+\pi n/a)}e^{-i\xi x}d\xi=$$

$$=-2\pi(f(x)+\delta),$$

$$\frac{\lambda^{(2)}}{\pi}\sum_{n=-N}^{N}b_n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\xi|\sin(\xi a+\pi n)}{(\gamma_H+|\xi|)(\xi+\pi n/a)}e^{-i\xi x}d\xi+$$

$$+f_T V\sum_{n=-N}^{N}a_n\exp(ik\pi x/a)+\lambda^{(1)}\,\partial t^{(1)}/\partial y=0,$$

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=-N}^{N}b_n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(h+\lambda^{(2)}|\xi|\right)\sin(\xi a+\pi n)}{(\gamma_H+|\xi|)(\xi+\pi n/a)}e^{-i\xi x}d\xi-$$

$$-\lambda^{(1)}\,\partial t^{(1)}/\partial y-ht^{(1)}=0.$$

Використовуючи метод поточкової колокації, отримано систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів розкладу. Повертаючись у простір оригіналів, отримано вирази для контактних напружень, температури і теплових потоків у контактуючих тілах та переміщень півплощини.

4. Числові результати. Висновки

При числових розрахунках вважалось, що основа штампа має закруглені краї, тобто $f(x)=x^2H\left(|x|-x^*\right)/2a$, де x^* є близьким до a, а $H(x)$ – функція Хевісайда. Отримано розподіл контактних напружень, який за різних значень параметрів задачі може дати два якісно різні випадки контактної взаємодії. У першому випадку розраховані контактні напруження $\sigma_y(x)$ на всій ділянці $L_0: x\in[-a;a]$ не є додатними. Це означає, що на всій цій ділянці штамп прилягає до основи, граничні умови (6), (7), (9) виконані, а отримані контактні напруження та розподіл температури будуть остаточними. Прикладена до штампа сила, яка спричинила задане осідання δ, обчислюється з умови рівноваги штампа:

$$P=-\int_{-a}^{a}\sigma_y(x)dx=-\int_{-a}^{a}\sum_{n=-N}^{N}a_n\exp(i\pi nx/a)dx=-2aa_0\,.$$

В іншому випадку на певній ділянці $L_1=\bigcup_{m=1}^{M}L^{2m}$, яка складається з сукупності M проміжків $L^{2m}=[x_{2m-1}:x_{2m}]$, $(-a=x_0\le x_1$, $x_i<x_{i+1}$, $x_{2M}\le x_{2M+1}=a$; $m=\overline{1,M}$; $i=\overline{1,2M})$, розраховані значення напруження $\sigma_y(x)$ є строго додатними. Це означає, що на цих ділянках якісь зусилля мали б притягувати штамп до півплощини, а тому отриманий розв'язок не є коректним розв'язком контактної задачі, оскільки існує велика ймовірність того, що штамп контактує з півплощиною на ділянці $L_0'=L_0-L_1=\bigcup_{m=0}^{M}L^{2m+1}$, а на L_1 контакт відсутній. Тут $L^1=[x_0\,;\,x_1)$, $L^{2m+1}=(x_{2m}\,;\,x_{2m+1})$, $\left(m=\overline{1,M-1}\right)$, $L^{2M+1}=(x_{2M}\,;\,x_{2M+1})$. Тому треба змінити початкове формулювання граничних умов (6), (7), (9), а інші умови залишаються у незмінному вигляді. У нульовому наближенні вважатимемо, що справджується припущення про контакт штампа на L_0', а тому замість L_0 тепер треба брати L_0', а для лінії L_1 умова відсутності контакту має вигляд:

$$y = H,\ x \in L_1:\ \sigma_y(x,H) = 0,\ v(x,H) > \delta, \tag{15}$$

$$\lambda^{(1)} \partial t^{(1)}/\partial y + \lambda^{(2)} \partial t^{(2)}/\partial y = h_0\left(t^{(2)} - t^{(1)}\right) \tag{16}$$

де h_0 – коефіцієнт теплопроникності контакту на ділянці L_1. Така зміна граничних умов змушує розв'язувати основну систему рівнянь ще раз вже лише на проміжку L_0', а на ділянці L_1 – систему рівнянь, яка забезпечує виконання граничних умов (15) – (16).

Запропонований метод послідовно-дискретного розділення граничних умов з використанням рухомої лінії розділу граничних умов може бути використаний для розв'язування нестаціонарної задачі шляхом зведення її до послідовності задач із незмінними ділянками прикладання видозмінених крайових умов.

Список використаних джерел

1. *Comninou M.* Heat conduction through flat punch / M. Comninou, J. R. Barber, J. Dundurs // J. Appl. Mech. – 1981. – Vol. 48. – P. 871–874.
2. *Мартыняк Р.М.* Термоупругое контактное взаимодействие тел при наличии поверхностных теплофизических неоднородностей / Р.Н. Швец, Р.М. Мартыняк // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1988. – Вып. 27. – С. 23-28.
3. *Онишкевич В. М.* Моделювання контактної взаємодії «третім тілом» у трибологічних задачах / В. М. Онишкевич, Г. М. Барабаш // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.: фізико-математичні науки. – 2021. – № 3. – С. 85-88.
4. *Онишкевич В.М.* Дослідження впливу властивостей «третього тіла» на теплоутворення від тертя / В.П. Левицький, В.М. Онишкевич // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – Вип. 42, №1. – С. 82-86.
5. *Онишкевич В. М.* Задача про термопружний контакт півплощини з прямокутним штампом за теплоутворення від тертя / В. М. Онишкевич, Г. Т. Сулим // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.: фізико-математичні науки. – 2017. – № 3. – С. 165-168.

References

1. COMNINOU, M., BARBER, J. R. & DUNDURS, J. (1981) Heat conduction through flat punch. *J. Appl. Mech.* 48. pp. 871–874.
2. SHVEC, R. N. & MARTYNIAK, R. M. (1988) Termouprugoye kontaktnoye vzaimodejstviye tel pri nalichii poverhnostnyh teplofizicheskih neodnorodnostey. *Mat. metody i fiz.-meh. polia.* 27. p. 23-28.
3. ONYSHKEVYCH, V. M. & BARABASH, G. M. (2021) Modeliuvannya kontaktnoyi vzayemodii "tretim tilom" u trybologichnyh zadachah. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics.* 3. p. 85-88.
4. LEVYTSKYI, V.P. & ONYSHKEVYCH, V.M. (1999) Doslidjennya vplyvu vlastyvostey "tretiogo tila" na teploutvorennia vid tertia. *Mat. metody ta fiz.-meh. polia.* 42(1). p. 82-86.
5. ONYSHKEVYCH, V. M. & SULYM, G. T. (2017) Zadacha pro termopruzhnyi kontakt pivploshchyny z priamokutnym shtampom za teploutvorennia vid tertia. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics.* 3. p.165-168.

Надійшла до редколегії 11.07.23